Математическая модель распространения магматических даек

1 Постановка задачи

Построенная модель основывается на модели распространения трещины гидроразрыва пласта KGD(Kristianovich, Geertsma, De Klerk). Симметричная вертикальная трещина длины 2L и высоты H распространяется в бесконечной упругой среде в условиях плоской деформации. По горизонтали трещина имеет фиксированный размер $H \gg L$. Искомыми параметрами задачи являются раскрытие трещины $w(x,t)$, давление жидкости $p(x,t)$ и положение фронта трещины.

Предположения

(1) трещина плоская;

(2) сечение плоскостью Oyz представляет собой прямоугольник;

(3) раскрытие трещины не зависит от y;

(4) в пласте изначально действуют сжимающие напряжения (σ_∞), направленные перпендикулярно плоскости трещины; σ зависит от вертикальной координаты;

(5) порода является линейной упругой средой, характеризующейся E и ν;

(6) рост трещины определяется линейной механикой разрушения, $K_I = K_{Ic}$;

(7) порода предполагается однородной, т.е. значения E, ν, K_{Ic}, C_L постоянны и одинаковы во всех слоях;

(8) жидкость считается несжимаемой и ньютоновской с вязкостью μ;

(9) утечки в пласт описываются формулой Картера;

(10) фронт жидкости совпадает с фронтом трещины (отсутствует *fluid lag*)

2 Математическая модель

2.1 Гидродинамика

Течение жидкости по трещине определяется законом сохранения массы

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} = Q_0 \delta(x_0), \quad C' = 2C_L \tag{1}$$

Предполагая, что жидкость в трещине ньютоновская, и что течение ламинарное, поток жидкости внутри трещины может быть посчитан на основе закона Пуазейля с учётом плавучести:

$$q = -\frac{\omega^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \Delta\rho g \right), \tag{2}$$

где $\Delta\rho = \rho_s - \rho_m$ — плавучесть, а p — полное давление.

Уравнение неразрывности (1) и уравнение для потока жидкости (2) могут быть объединены для получения уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega^3}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \Delta\rho g\right)\right) - \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(x)}} + Q_0\delta(x_0). \tag{3}$$

Поскольку предполагается ситуация, в которой фронт жидкости и фронт трещины совпадают, основное уравнение (3) выполняется вдоль всей трещины.

2.2 Упругость

Уравнение упругости связывает давление жидкости, действующей на поверхность трещины, и раскрытие трещины. Будем предполагать, что порода является однородной по физическим свойствам (модули упругости, коэффициент утечек).

Реакция стенок трещины на давление жидкости в случае плоской деформации (формула Колосова–Мусхеншивили) выражается следующим образом:

$$\omega(t, x) = \frac{4}{\pi E'} \int\limits_0^{l(t)} p_{net}(t, \xi) B(t, \xi; L) d\xi, \tag{4}$$

$$\text{где}\, B(t, \xi; L) = ln \left| \frac{\sqrt{L^2 - x^2} + \sqrt{L^2 - \xi^2}}{\sqrt{L^2 - x^2} + \sqrt{L^2 + \xi^2}} \right|, \tag{5}$$

где $L = l(y)$ — положение кончика крыла трещины.

Точное решение уравнений линейной теории упругости имеет следующий вид:

$$p(x, t) - \sigma_0 = -\frac{E}{(1 - \nu^2)4\pi} \int\limits_{-l(t)}^{l(t)} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\xi - x}. \tag{6}$$

Здесь σ_0 — поле геологических напряжений (зависит только от вертикальной координаты), $p(x, t)$ — давление жидкости и $w(x, t)$ — раскрытие трещины.

2.3 Критерий распространения

$$K_I = 2\sqrt{\frac{L}{\pi}} \int\limits_0^{l(t)} \frac{p(t, \xi)}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} d\xi = K_{Ic} \tag{7}$$

Раскрытие около кончика задаётся следующей асимптотикой (соответствующей трещиностойкости):

$$\omega \to \frac{K'}{E'}(L - x)^{\frac{1}{2}},\ x \to L,\ K' = \frac{8K_{Ic}}{\sqrt{2\pi}} \tag{8}$$

2.4 Краевые условия

- На скважине задаётся постоянный расход жидкости в крыло трещины: $Q(0, t) = Q_{in}$
- Краевое условие в кончике крыла имеет вид: $Q(L, t) = 0$

- Уравнение баланса жидкости:

$$Q_{int} = \int\limits_0^{l(t)} \omega(x,t)dx + \int\limits_0^{t}\int\limits_0^{l(\tau)} Q_L(x,t)dxd\tau$$

2.5 Начальные условия

$$L(0) = L_0, \quad \omega(x,0) = \omega_0\,(0 \le x \le L_0), \quad L_f(0) = L_0. \tag{9}$$

3 Метод численного решения

Выделяются три типа элементов, покрывающих область трещины:

- *внутренние* (channel) — полностью находятся внутри трещины;
- *концевые* (tip) — частично содержат фронт трещины;
- *опорные* (survey) — имеют хотя бы одну общую грань с концевыми элементами.

Опорные элементы используются для определения положения фронта трещины.

- Раскрытие w и давление p — кусочно-постоянная аппроксимация
- Закон сохранения массы — метод конечных объёмов
- Уравнения упругости — метод разрывных смещений
- Разделение переменных на внутренние и концевые

3.1 Дискретизация уравнений

Для раскрытия трещины применяется кусочно-постоянная аппроксимация:

$$w(x,t) = \sum_m w_m(t)H_m(x), \quad H_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если}\, x \in \mathcal{A}_m, \\ 0, & \text{если}\, x \notin \mathcal{A}_m \end{cases} \tag{10}$$

Проинтегрируем уравнение Рейнольдса (3) по времени $[t-\Delta t, t]$ и по элементу $\mathcal{A}_m$:

$$\int\limits_{t-\Delta t}^{t} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega^3}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \Delta\rho g\right)\right)dt' \approx \Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega^3}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \Delta\rho g\right)\right); \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_{x-\Delta x}^{x} \Delta t\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\omega^3}{\mu'}\left(\frac{\partial p}{\partial x'} - \Delta\rho g\right)\right]dx' = \Delta t\left[\frac{\omega^3}{\mu'}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \Delta\rho g\right)\right]\Bigg|_{x-\Delta x}^{x} = \\ &= \Delta t\left[\frac{\omega^3(x)}{\mu'}\left(\frac{\partial p(x)}{\partial x} - \Delta\rho g\right) - \frac{\omega^3(x-\Delta x)}{\mu'}\left(\frac{\partial p(x-\Delta x)}{\partial x} - \Delta\rho g\right)\right] \approx \\ &\approx \frac{\Delta t}{\mu'}\left[\left(\frac{\omega_{m+1}+w_m}{2}\right)^3\left(\frac{p_{m+1}-p_m}{\Delta x} - \Delta\rho g\right) - \left(\frac{\omega_{m-1}+w_m}{2}\right)^3\left(\frac{p_m-p_{m-1}}{\Delta x} - \Delta\rho g\right)\right]; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\int\limits_{x-\Delta x}^{x}\int\limits_{t-\Delta t}^{t}\frac{\partial w}{\partial t'}dt' = \int\limits_{x-\Delta x}^{x}[w(t) - w(t-\Delta t)]dx' = \Delta x[w(t) - w(t-\Delta t)]; \tag{13}$$

$$\int\limits_{x-\Delta x}^{x}\int\limits_{x-\Delta x}^{x} Q_0\delta(x)dt' = \int\limits_{t-\Delta t}^{x} \Delta t Q_0 \delta(x_m) dx' = \begin{cases} \Delta t\, \Delta x\, Q_0, & \text{для элемента с индексом } m, \\ 0, & \text{для других элементов} \end{cases}, \tag{14}$$

где $\delta(x_m) = 1$ на всём элементе с индексом m (предполагается, что источник находится в m-м элементе).

$$\int\limits_{t-\Delta t}^{t} \frac{C'}{\sqrt{t'-t_0(x)}} dt' = 2C'\left(\sqrt{t-t_0(x)} - \sqrt{(t-\Delta t)-t_0(x)}\right) \tag{15}$$

1) если channel элемент:

$$\int\limits_{x-\Delta x}^{x} 2C'\left(\sqrt{t-t_0(x')} - \sqrt{(t-\Delta t)-t_0(x')}\right) dx' \approx 2C'\left(\sqrt{t-t_0(x_k)} - \sqrt{(t-\Delta t)-t_0(x_k)}\right) \cdot \Delta x, \tag{16}$$

где $x_k = (x + (x+\Delta x))/2$ — центр элемента.

2) если tip элемент (вычислим подынтегральное выражение не в центре элемента, а в центре масс заполненной жидкостью части):

$$\int\limits_{x-\Delta x}^{x} 2C'\left(\sqrt{t-t_0(x')} - \sqrt{(t-\Delta t)-t_0(x')}\right) dx' \approx 2C'\left(\sqrt{t-t_0(x_k)} - \sqrt{(t-\Delta t)-t_0(x_k)}\right) \cdot \frac{l}{\Delta x}, \tag{17}$$

где l — расстояние от левой границы концевого элемента до фронта трещины, x_k — точка посередине между левой границей концевого элемента и фронтом трещины.

Получим дискретизацию по методу конечных объёмов:

$$w_m(t) - w_m(t-\Delta t) = \Delta t \cdot [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{p}]_m + \Delta t Q_0 \delta(x_m) + \mathcal{L}(t), \tag{18}$$

где разностный оператор $[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{p}]_m$ определён следующим образом:

$$[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{p}]_m = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{w^3_{m+1/2}}{\mu'}\left(\frac{p_{m+1}-p_m}{\Delta x} - \Delta\rho g\right) - \frac{w^3_{m-1/2}}{\mu'}\left(\frac{p_m - p_{m-1}}{\Delta x} - \Delta\rho g\right)\right], \tag{19}$$

где раскрытие на гранях даётся в виде

$$w_{m\pm 1/2} = \frac{w_{m\pm 1} + w_m}{2}.$$

В краткой форме уравнение может быть выражено как

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{w}(t-\Delta t) + \Delta t \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{p} + \Delta t Q_0 \delta(x_m) + \mathcal{L}(t), \tag{20}$$

где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{w})$ и $\boldsymbol{p}$ вычисляются в момент времени t (интегрирование по времени производится с использованием *backward Euler*).

Все переменные можно разделить следующим образом:

$$\boldsymbol{w} = [w^c, w^t], \quad \boldsymbol{p} = [p^c, p^t], \tag{21}$$

где величины с индексом “c” соответствуют внутренним (channel) элементам, а величины с индексом “t” соответствуют концевым (tip) элементам.

Что известно?

w^t — определено с помощью условия распространения $w(s) = w_a(s)$, $s \to 0$,
$w_a(x)$ — асимптотическое решение на кончике, s — расстояние до фронта трещины,

p^t — неизвестно,

p^c — из уравнения упругости для внутренних элементов,

w^c — неизвестно.

Уравнение упругости для внутренних (channel) элементов может быть решено с помощью метода разрывных смещений:

$$p_m^c(t) = \sigma_m^c + \sum_k C_{m,k} w_k(t), \tag{22}$$

где p_m^c — значения давления жидкости в центрах внутренних элементов, σ_m^c — соответствующие значения напряжения.

Матрица упргости $\mathcal{C}$ (для однородно-упругой среды):

$$\mathcal{C}_{m,k} = -\frac{E'}{4\pi}\left[\frac{1}{(x_m - x)^2}\right]\Bigg|_{x=x_k-\Delta x/2}^{x=x_k+\Delta x/2} = -\frac{E'}{4\pi}\left(\frac{1}{(x_m - (x_k + \Delta x/2))^2} - \frac{1}{(x_m - (x_k - \Delta x/2))^2}\right) \tag{23}$$

Уравнение (22) в матричной форме можно записать как

$$\boldsymbol{p}^c = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{w}, \tag{24}$$

где $\boldsymbol{C}$ — полностью заполненная матрица упругости.

Уравнение $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w}$ расписывается как

$$\begin{bmatrix} p^c \\ p^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{cc} & C^{ct} \\ C^{tc} & C^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^c \\ w^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{cc}w^c + C^{ct}w^t \\ C^{tc}w^c + C^{tt}w^t \end{bmatrix} \tag{25}$$

Тогда уравнение (20) может быть представлено в виде:

$$\begin{bmatrix} w^c \\ w^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0^c \\ w_0^t \end{bmatrix} + \Delta t \cdot \begin{bmatrix} A^{cc} & A^{ct} \\ A^{tc} & A^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^c \\ p^t \end{bmatrix} + \Delta t \cdot \begin{bmatrix} Q_0^c \delta(x_m) \\ Q_0^t \delta(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0^c + \Delta t(A^{cc}p^c + A^{ct}p^t) + \Delta t Q_0^c \delta(x_m) \\ w_0^t + \Delta t(A^{tc}p^c + A^{tt}p^t) + \Delta t Q_0^t \delta(x_m) \end{bmatrix} \tag{26}$$

Подставим $p^c = C^{cc}w^c + C^{ct}w^t$ в получившуюся систему:

$$w^c = w_0^c + \Delta t(A^{cc}C^{cc}w^c + A^{cc}C^{ct}w^t + A^{ct}p^t) + \Delta t Q_0^c \delta(x_m),$$

$$w^t = w_0^t + \Delta t(A^{tc}C^{cc}w^c + A^{tc}C^{ct}w^t + A^{tt}p^t) + \Delta t Q_0^t \delta(x_m);$$

Полная система имеет вид:

$$\begin{bmatrix} I - \Delta t A^{cc}C^{cc} & -\Delta t A^{ct} \\ -\Delta t A^{tc}C^{cc} & -\Delta t A^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^c \\ p^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0^c + A^{cc}C^{ct}w^t + \Delta t Q_0^c \delta(x_m) \\ w_0^t + \Delta t A^{tc}C^{ct}w^t + \Delta t Q_0^t \delta(x_m) - w^t \end{bmatrix} \tag{27}$$

Остаётся определить $\boldsymbol{w}^t$, которое связано с динамикой фронта трещины. Если $\boldsymbol{w}^t$ известно, то уравнение (22) может быть решено относительно $\boldsymbol{w}^c$ и $\boldsymbol{p}^t$ с помощью итерационного метода.