

Задание 2

1. [1 балл] Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ (гамма-распределение). Найти с помощью метода моментов оценки для α и β .
2. [5 баллов] Пусть n_1 – количество людей, которые получили лечение по методике 1, а n_2 – количество людей, которые получили лечение по методике 2. Обозначим через X_1 – количество людей, получивших лечение по методике 1, на которых эта методика повлияла положительно. Аналогично, обозначим через X_2 – количество людей, получивших лечение по методике 2, на которых эта методика повлияла положительно. Предположим, что $X_1 \sim \text{Binomial}(n_1, p_1)$ и $X_2 \sim \text{Binomial}(n_2, p_2)$. Положим $\psi = p_1 - p_2$.
 - a) Найти ОМП $\hat{\psi}$ для параметра ψ .
 - b) Найти информационную матрицу Фишера $I(p_1, p_2)$
 - c) Используя многопараметрический дельта-метод найти асимптотическую стандартную ошибку для $\hat{\psi}$
 - d) Допустим, что $n_1 = n_2 = 200$, $X_1 = 160$, $X_2 = 148$. Подсчитать значение $\hat{\psi}$. Найти приблизительный 90% доверительный интервал для ψ используя (i) многопараметрический дельта-метод и (ii) параметрический бутстреп
3. [6 баллов] Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Пусть τ – 95% квантиль, то есть $P(X < \tau) = 0.95$. Необходимо
 - (a) Найти MLE для τ
 - (b) Найти выражение для приближенного $1 - \alpha$ доверительного интервала для τ
 - (c) Допустим, что выборка значений имеет вид

3.23, -2.50, 1.88, -0.68, 4.43, 0.17,
 1.03, -0.07, -0.01, 0.76, 1.76, 3.18,
 0.33, -0.31, 0.30, -0.61, 1.52, 5.43,
 1.54, 2.28, 0.42, 2.33, -1.03, 4.00,
 0.39

Необходимо найти MLE $\hat{\tau}$, стандартную ошибку оценки используя дельта-метод. Также надо оценить стандартную ошибку оценки, используя параметрический бутстреп.

4. [5 баллов] Пусть $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, 1)$. Определим

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i > 0; \\ 0, & \text{если } X_i \leq 0. \end{cases}$$

Положим $\psi = P(Y_1 = 1)$.

- a) Подсчитать оценку $\hat{\psi}$ максимума правдоподобия для ψ .
- b) Найти приближенный 95% доверительный интервал для ψ .
- c) Пусть $\tilde{\psi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. Доказать, что $\tilde{\psi}$ является состоятельной оценкой для ψ .
- d) Подсчитать асимптотическую относительную эффективность оценки $\tilde{\psi}$ по сравнению с оценкой $\hat{\psi}$. Для этого предлагается использовать дельта-метод, чтобы оценить стандартную ошибку оценки максимума правдоподобия. После чего надо подсчитать стандартную ошибку (т.е. стандартное отклонение) величины $\tilde{\psi}$.
- e) Допустим, что данные на самом деле не распределены нормально. Показать, что в таком случае $\hat{\psi}$ не является состоятельной оценкой. Будет ли, и если ответ “да”, то к чему, сходится при $n \rightarrow \infty$ оценка $\hat{\psi}$ в смысле какой-нибудь сходимости?
5. [3 балла] Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \text{Uniform}(0, \theta)$, $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Необходимо протестировать $H_0 : \theta = 1/2$ vs. $H_1 : \theta > 1/2$. В данном случае нельзя использовать тест Вальда, так как Y при $n \rightarrow \infty$ не сходится к нормальному распределению. Допустим, что мы будем использовать следующее правило: гипотеза H_0 отвергается, если $Y > c$. Необходимо
- (a) Найти функцию мощности
- (b) При каком значении параметра c размер теста будет равен 0.05?
- (c) Какого значение p -value, если размер выборки $n = 20$ и $Y = 0.48$? Что можно сказать о гипотезе H_0 ?
- (d) Какого значение p -value, если размер выборки $n = 20$ и $Y = 0.52$? Что можно сказать о гипотезе H_0 ?
6. [3 балла] Был проведен эксперимент по оценке эффективности различных лекарств, используемых для уменьшения послеоперационных эффектов, и получены следующие результаты

	Количество пациентов	Количество осложнений
Placebo	80	45
Chlorpromazine	75	26
Dimenhydrinate	85	52
Pentobarbital (100 mg)	67	35
Pentobarbital (150 mg)	85	37

- (a) Протестировать “успешность” каждого из лекарств по сравнению с плацебо на 5% уровне значимости. Указать также подсчитанные оценки вероятностей успешных исходов.
- (b) Прodelать эксперименты, аналогичные экспериментам предыдущего пункта, но использовать при этом методы Бонферрони и Benjamini-Hochberg.

7. [3 балла] Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
- (a) Пусть $\lambda_0 > 0$. Построить критерий Вальда размера α для различения гипотез $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$.
 - (b) Пусть $\lambda_0 = 1$, $n = 20$ и $\alpha = 0.05$. Сгенерировать $X_1, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_0)$ и применить критерий Вальда. Повторить эксперимент много раз и подсчитать долю от общего числа случаев, когда гипотеза H_0 была отклонена. Насколько получившаяся доля ошибок I рода оказалась близкой к 0.05?
8. [4 балла] Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \text{Binomial}(n, p)$. Построить тест на основе обобщенного отношения правдоподобий для различения гипотез $H_0 : p = p_0$ vs. $H_1 : p \neq p_0$. Сравнить (как аналитически, так и экспериментально) полученный тест с тестом Вальда для различения этих гипотез.