日期:　　/

可导必连续/单侧导数/导数等价式的应用

例:

1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b & x\geq 0 \\ \sin ax & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导

求常数 a、b 的值.

2) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

又 $F(x)=(1+|\sin x|)f(x)$

则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导

的何种条件?

解: 1) $\because$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$\therefore f'_+(0)=f'_-(0)$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{2(0+\Delta x)}+b-(e^{2\cdot 0}+b)}{\Delta x}$$

日期: /

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{2\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$\xlongequal[e^{\Delta}-1 \sim \Delta]{\text{等价无穷小}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

$a^{\square}-1 \sim \square \ln a$

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin a(0+\Delta x) - \sin a \cdot 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin a\Delta x}{\Delta x}$$

$$\xlongequal[\sin\Delta \sim \Delta]{\text{等价无穷小}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

故 $a=2$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0} e^{2x}+b = \lim_{x\to0} e^{2x} + \lim b = 1+b$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0} \sin 2x = 0$$

$\therefore\ 1+b=0$

故 $b=-1$.

2) 假设 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导

则 $F'_+(x) = F'_-(x)$

令 $0 = x_0$

$$F'_+(0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{(1+|\sin x|)f(x) - (1+|\sin 0|)f(0)}{x}$$

日期:

$\because f'_+(0)$

$\therefore x\in(0,+\infty)$

此时会发现 $\sin x$ 是个振荡函数

其正负性是无法确定的

但由于 $f(x)$ 是在 $x=0$ 处可导

故取 x 的主值区间: $U(0,\frac{\pi}{2})$ 进行讨论

① $\because$ 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\sin x>0$

$$\therefore =\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+\sin x f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x f(x)}{x}$$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

$\therefore$ 记为 $f'(0)$、且 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

日期:

$$\therefore \overset{\text{重要极限 } \sin\Delta\sim\Delta}{=\!=\!=} f'(0)+f(0)$$

② 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$, $\sin x<0$

$$F_-'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin x)f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x f(x)}{x}$$

$$=f'(0)-f(0)$$

$$\Rightarrow f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)$$

$$\therefore f(0)=0$$

故 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件.