日期: /

导数定义推论与可导性的关系证明:

例: 有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=0$

是否可推出 $f'(x_0)=A$. (存在). ?

解: 不妨考虑 $f(x)=|x|$. 在 $x_0=0$ 处:

有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|0+h|-|0-h|}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$

但要证 $f(x)$ 在 x_0 处可导

根据可导的等价式: 需 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

日期：

① $x \in (-\infty, 0)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x}$$

由于 $\Delta x = x - x_0$，$x \in (-\infty, 0)$

故 $\Delta x < 0$，

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

② $x \in (0, +\infty)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x}$$

$\because \Delta x = x - x_0$，$x \in (0, +\infty)$

$\therefore \Delta x > 0$

日期: /

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

又 $\because f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

$\therefore f'(x_0)$ 不存在.

即得虽 $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = 0$

但推不出 $f'(x_0) = A$ (存在).

综上所得：不可导点可在曲线上的尖点处.