日期:　/

用导数定义求解:

例: 已知 $f'(x_0)=A$

1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}$

2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$

解析

1) 析:

由于导数定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

为了说明与待求点 x_0 相距为 Δx (相差 Δx 的变化量)

则分母就要为相同的变化量.

而题中 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}$

日期: /

说明与x_0相距为3h，则分母理论上就需要有3h的变化量，但是题目中分母只有1个h变化量，是不够的，怎么办！还是"缺啥补啥"。

解. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}$$

$$原式=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\times 3$$

极限乘法运算 $f'(x_0)\cdot 3=3A$.

2) 由于导数定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

求$f(x)$在x_0处的导数

分子需要与x_0处的函数值的变化量

日期: /

而题目中只有两个与x_0相距$2h$/$-h$的函数值。而并没有能有与x_0处的函数值变化量。那么就需要以x_0处的函数值为基础去找变化量。因是变化量故需作差照样的"缺啥补啥"。

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$

原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

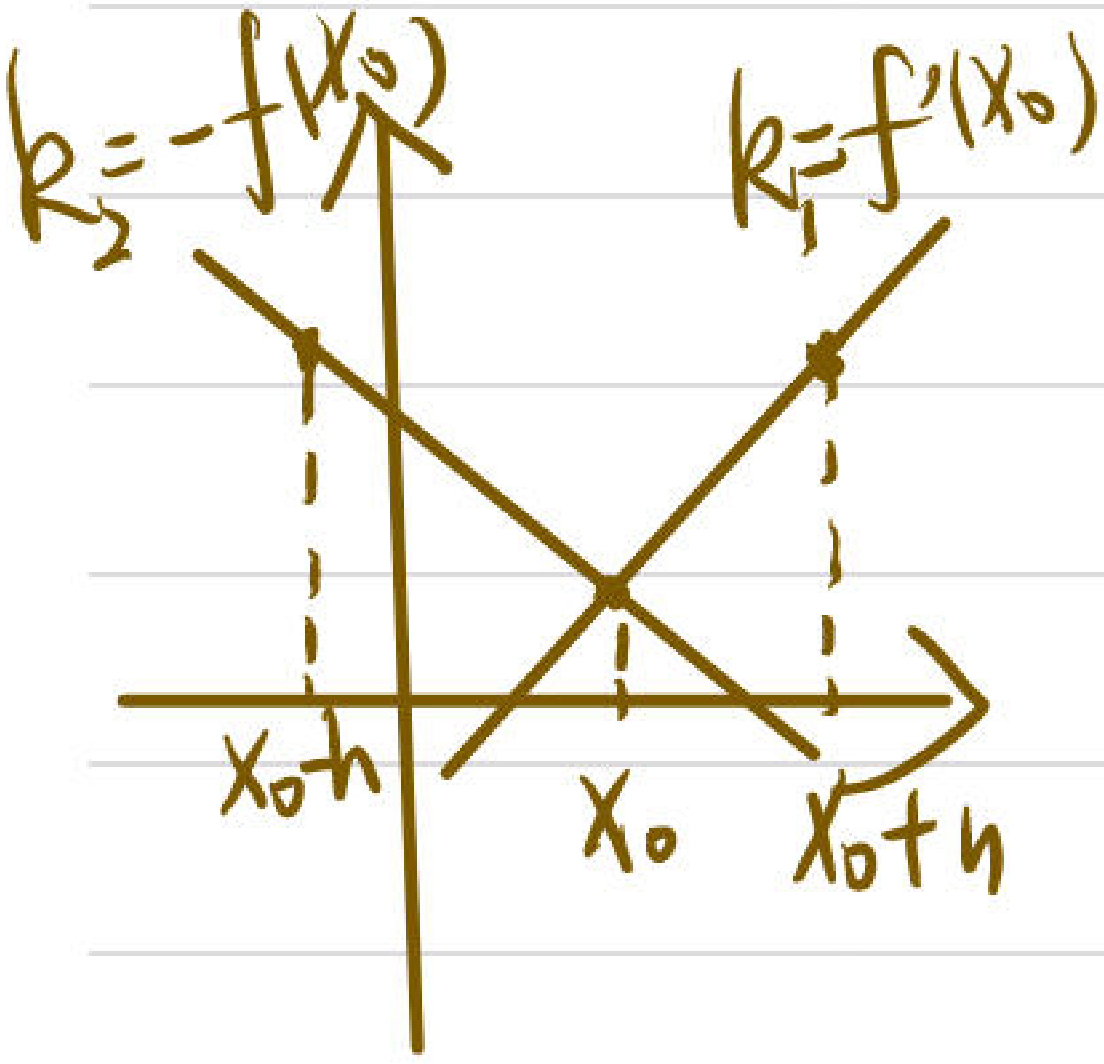
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$

极限运算法 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$

极限运算乘法

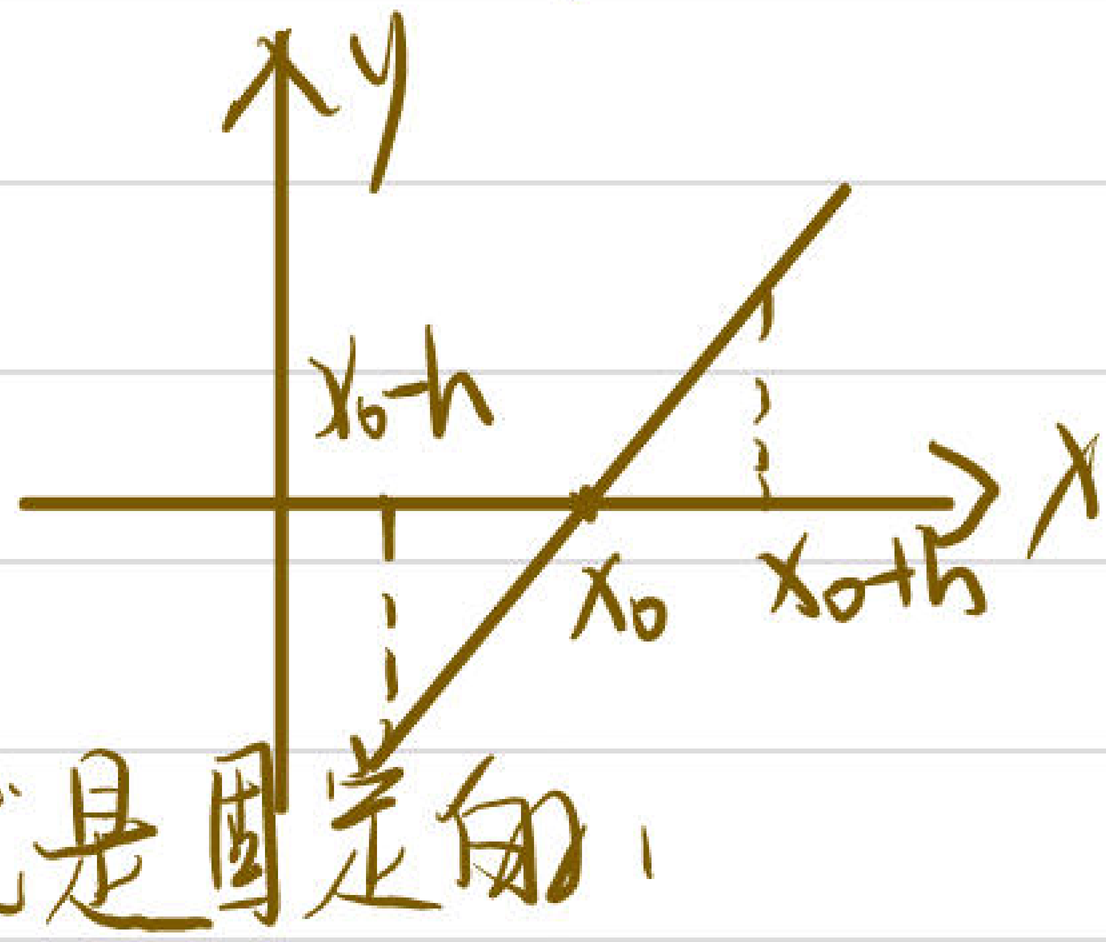
$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}\cdot 2+\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

$$=2f'(x_0)+f(x_0)=3A$$



是否有个疑问：
自变量的变化量变为 $-\Delta x$ 了
为什么导数值(切线斜率)
仍然不变了，不应为变为 $-f'(x_0)$？

实际上 $f(x_0-h)-f(x_0)$ 此函数值变化量
也变号了变为 $-\Delta y$ 了，所以导数值 $f'(x_0)$
不变



更容易的理解：
曲线上过切点 x_0 的切
线只有一条那么其斜率就是固定的。

综上可得推论：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0)$$