technische universität
dortmund

Bachelor-Thesis

Qualitative Semantiken für DAGs - ein Vergleich von OCF- und CP-Netzwerken

Matthias Fey

19.12.2014

Gutachter:
Prof. Dr. Gabriele Kern-Isberner
Christian Eichhorn

Technische Universität Dortmund
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl 1
http://ls1-www.cs.tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

1.1 Titel und thematische Eingrenzung 5

1.2 Kapitelübersicht 6

2 Grundlagen **9**

2.1 Aussagenlogik 9

2.2 Inferenz 12

2.2.1 Logisches Schlussfolgern 12

2.2.2 Plausibles Schlussfolgern 13

2.3 Konditionale 14

2.4 Relationen 15

2.5 Präferenzmodell 15

2.6 Ordinale konditionale Funktionen 16

2.7 Gerichtete azyklische Graphen 18

3 OCF-Netzwerke **21**

4 CP-Netzwerke **25**

4.1 Präferenzrelation 25

4.2 CP-Netzwerke 27

4.3 Indifferenz 32

4.4 Ausgangsoptimierung 34

4.5 Präferenzieller Vergleich 35

4.5.1 Ordnungsanfragen 35

4.5.2 Dominanzanfragen 36

5 Vergleich der qualitativen Semantiken von OCF- und CP-Netzwerken **39**

5.1 Umwandlung eines CP-Netzwerks in ein OCF-Netzwerk 41

5.2 Umwandlung eines OCF-Netzwerks in ein CP-Netzwerk 43

5.3 Vergleich der Erfüllbarkeit von CP-Netzwerken und der Konsistenz von OCF-Netzen 45
5.4 Stratifikation in CP-Netzwerken 46
5.5 Plausibilitätsanfragen in OCF-Netzwerken 52
5.6 Vergleich der Präferenzen/Plausibilitäten der Netzwerke 53
5.7 Vergleich der beiden Netzwerke bei Indifferenz 61

6 Ergebnisse/Fazit **67**

7 Ausblick **69**

1 Einleitung

1.1 Titel und thematische Eingrenzung

> Insofern sich die Gesetze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher. Und insofern sie sich sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.
>
> Albert Einstein

Viele tägliche Situationen sind von Unsicherheit und Ungenauigkeit geprägt. Ausdrücke und Worte der natürlichen Sprache können ungenau oder mehrdeutig sein. Es erscheint demnach ein sinnvolles Vorhaben, Unsicherheit und das Schlussfolgern in unsicheren Situationen zu modellieren und zu automatisieren.

Wir werden daher in dieser Arbeit zwei Repräsentanten für unsicheres Schließen kennenlernen, die auf der Grundlage von *Netzwerken* bzw. *gerichteten azyklischen Graphen* (*DAGs*) graphisch dargestellt werden können. Mit ihnen kann unsicheres Wissen repräsentiert werden, in dem Ereignissen in Abhängigkeit vom Eintreten anderer Ereignisse eine Plausibilität zugeordnet wird. Ebenso kann dann aus dem für am plausibelsten gehaltenen Wissen neues Wissen gewonnen werden.

- *Ordinale konditionale Funktions (OCF)*-Netzwerke beschreiben die entsprechenden Abhängigkeiten durch lokal bedingte Rangfunktionen, die den Ereignissen Ränge zuordnen, die den Grad der Überraschung repräsentieren, die mit dem Eintritt des Ereignisses verbunden sind. Ein Ereignis erscheint umso plausibler, je kleiner dessen Rang ist.

- *Ceteris Paribus (CP)*-Netzwerke ordnen Ereignissen unter dem Eintritt ihrer Vorereignisse eine Präferenz zu. Dadurch entsteht eine Präferenzrelation, aus der ein Wissenszustand gewonnen werden kann.

Wir stellen uns folgendes Szenario vor: An einem sonnigen Morgen wollen wir wie gewöhnlich die Zeitung lesen. Wir treten also vor die Tür um diese zu holen, aber zu unserem Bedauern stellen wir fest, dass sie zutiefst durchnässt ist. Für uns kommen nur zwei mögliche Schlüsse in Frage:

1. Es hat vor kurzem noch geregnet.

2. Der Sprinkler hat sich versehentlich angeschaltet.

Da wir an die Zuverlässigkeit von Maschinen glauben, könnten unsere Erwartungen an die beiden Netzwerke wie folgt aussehen:

- **OCF-Netzwerk:** Wir ordnen der Plausibilität des Regens einen Rang von 0 ein. Dass der Sprinkler sich selbstständig macht, halten wir allerdings für derart unplausibel, dass dessen Plausibilität nur einen Rang von 3 haben kann.

- **CP-Netzwerk:** Wir beurteilen die Präferenz der beiden Ereignisse zueinander und geben an: *Der Eintritt des Regens wird vor einem Defekt der Sprinkleranlage präferiert.*

CP-Netzwerke arbeiten mit der Präferenz zwischen Ereignissen ohne den Grad dieser in einem Zahlenwert festzuhalten, wohingegen OCF-Netze diesen Grad durch den Abstand der Ränge zueinander definieren. Durch die Präferenz-Ordnung der Ereignisse erhalten aber auch CP-Netzwerke eine Art Rang, der eine gewisse Ähnlichkeit von CP zu OCF-Netzen nicht ausschließt.

In dieser Arbeit wollen wir diesen möglichen Zusammenhang untersuchen und Gemeinsamkeiten und Unterschiede von CP- und OCF-Netzwerken ausarbeiten. Eventuell lässt sich ein Netzwerk in das andere überführen, gegebenenfalls sind sie sogar äquivalent. Die Feststellung, wann beziehungsweise unter welchen Bedingungen dies möglich sein könnte, ist Ziel dieser Arbeit.

1.2 Kapitelübersicht

Grundlagen: Im ersten Kapitel dieser Arbeit beschäftigen wir uns zuerst mit einer kurzen Einführung in die logischen Grundlagen. Des Weiteren werden wir Möglichkeiten kennenlernen, unsicheres Wissen auf repräsentative Weise zu formalisieren. Damit ist es auch Lesern ohne fundiertes Wissen in diesen Bereichen möglich, die weiterführenden Kapitel verstehen zu können. Dabei steht das Kapitel unter dem Motto: Alles, was später benötigt wird, wird hier erklärt und alles, was später nicht benötigt wird, wird hier erst gar nicht erwähnt.

Für Leser mit Vorkenntnissen lohnt sich trotzdem ein Blick, um die Bezeichnungen der Symbole kennenzulernen, die sich durch die weiteren Kapitel ziehen und sich eventuell von den bisher gelernten Bezeichnungen unterscheiden können. Im hinteren Teil dieser Arbeit findet sich aber auch ein Symbolverzeichnis.

OCF-Netzwerke: Mit Hilfe von Rangfunktionen werden wir in diesem Kapitel die OCF-Netzwerke definieren und dessen Besonderheiten kennenlernen.

CP-Netzwerke: Analog zum vorherigen Kapitel untersuchen wir hier die CP-Netzwerke. Als Präferenzkonstrukt verwenden wir die *ceteris paribus* Präferenzrelation im Gegensatz zu Rangfunktionen.

Vergleich der qualitativen Semantiken von OCF- und CP-Netzwerken: Dieses Kapitel ist das Herzstück dieser Arbeit und der eigentliche Bezug zum Titel. Nachdem beide Netzwerke kennengelernt und verstanden wurden, können wir uns endlich an den Vergleich dieser machen. Hier werden anhand von Beispielen Gemeinsamkeiten und Unterschiede vorgestellt.

Ergebnisse/Fazit: Die Ergebnisse der bisherigen Kapitel werden hier kurz und prägnant aufgearbeitet. Der Vergleich der beiden Netzwerke wird über ein Fazit beendet.

Ausblick: Offene Fragen und mögliche Erweiterungen, die in dieser Arbeit nicht untersucht wurden, werden hier kurz vorgestellt.

2 Grundlagen

Ein *intelligenter Agent* ist eine autonom agierende Maschine und damit die Personifikation künstlicher Intelligenz. Er ist darauf spezialisiert aus seiner Umwelt Sachverhalte wahrzunehmen, diese zu verarbeiten und daraus schließlich Schlussfolgerungen für sein weiteres Handeln zu ziehen. Für diesen Fall ist es notwendig, sein Wissen in formalen Sprachen und Notationen in eindeutiger deklarativer Weise zu formalisieren, um damit arbeiten zu können. Es entsteht ein für sein Empfinden geeignetes Abbild der Welt für weitere Berechnungen.

In diesem Kapitel werden wir auf die Grundlagen der oben genannten Aspekte eingehen. Ausgehend von der *Aussagenlogik*, die sich mit Aussagen und deren eindeutigen Wahrheitsgehalten beschäftigt, werden wir uns mit möglichen *Folgerungen* dieser Aussagen befassen. Wir werden weiterhin Möglichkeiten kennenlernen, *Plausibilitäten* und *Präferenzen* von Aussagen zu formalisieren, um auch aus nicht eindeutigen Sachverhalten intelligente Schlüsse zu ziehen.

2.1 Aussagenlogik

Definition 1 (Syntax der Aussagenlogik [BKI06]). *Eine* aussagenlogische Sprache *$\mathcal{L}$ setzt sich aus einer Menge von* Aussagenvariablen *(oder* Atomen *bzw.* atomaren Formeln*) $\Sigma = \{V_1, ..., V_n\}$ und den* logischen Junktoren $\neg, \wedge, \vee$ *wie folgt induktiv zusammen:*

- $\top \in \mathcal{L}$ (Tautologie)
- $\bot \in \mathcal{L}$ (Widerspruch)
- *Für alle atomaren Formeln $V \in \Sigma$ ist $V \in \mathcal{L}$*
- *Seien $P, Q \in \mathcal{L}$, dann ist*
  - $\neg P \in \mathcal{L}$ (Negation)
  - $(P \wedge Q) \in \mathcal{L}$ (Konjunktion)

- $\diamond$ $(P \vee Q) \in \mathcal{L}$ (Disjunktion)

Eine Formel *(oder ein* Satz*) ist ein Element aus $\mathcal{L}$. Eine* Formelmenge *ist eine Teilmenge aus $\mathcal{L}$.*

Aus Platzgründen und zur Unterstützung der Lesbarkeit verwenden wir $\overline{P}$ statt $\neg P$ und schreiben für $P \wedge Q$ oft einfach nur PQ. Als weitere abkürzende Schreibweisen definieren wir $P \Rightarrow Q$ für $\overline{P} \vee Q$ *(materiale Implikation)* und $P \Leftrightarrow Q$ für $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ *(Äquivalenz)*. Ein positives oder negatives Atom nennen wir *Literal.*

Um den Wahrheitsgehalt einer Formel zu bestimmen, beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Interpretation.

Definition 2 (Interpretation [BKI06])**.** *Eine* Interpretation $I\colon \Sigma \to \{\mathit{true}, \mathit{false}\}$ *ist eine Abbildung, die jeder atomaren Formel in $\mathcal{L}$ eine von zwei Belegungen* true *oder* false *zuordnet. Sei V ein Atom, dann schreiben wir:*

- *$I(V) = \mathit{true}$: Die Aussage, für die V steht, ist wahr.*
- *$I(V) = \mathit{false}$: Die Aussage, für die V steht, ist falsch.*

Für ein $V \in \Sigma$ mit $I(V) = \mathit{true}$ schreiben wir in Zukunft einfach nur v und analog $\overline{v}$, falls $I(V) = \mathit{false}$.

Wir können eine Interpretation I statt als Abbildung auch als *Vollkonjunktion ω von Literalen* identifizieren, in der jedes Atom genau einmal je nach Wahrheitsgehalt entweder positiv oder negiert in Erscheinung tritt. Eine solche Vollkonjunktion nennen wir eine *mögliche Welt.*

Die Menge aller möglichen Welten zu einer Menge von Aussagenvariablen Σ definieren wir als Ω.

Beispiel 1. *Betrachte eine aussagenlogische Sprache $\mathcal{L}$ mit den atomaren Variablen $\{A, B, C\}$. Eine gültige Interpretation ist z.B.:*

$$A \mapsto \mathit{false}$$
$$B \mapsto \mathit{true}$$
$$C \mapsto \mathit{false}$$

Dies entspricht dann der Welt $\overline{a}b\overline{c}$.

Auf Basis einer möglichen Welt ω ergibt sich eine Funktion $[\![\ ]\!]_\omega$ für die Semantik der Aussagenlogik, die einer aussagenlogischen Formel ihren Wahrheitsgehalt zuordnet:

Definition 3 (Semantik der Aussagenlogik [BKI06]). *Wir definieren die Abbildung* $[\![\ ]\!]_\omega \colon \mathcal{L} \to \{true, false\}$ *induktiv wie folgt:*

- $[\![\top]\!]_\omega := true$
- $[\![\bot]\!]_\omega := false$
- *Für jedes positive Literal v in ω ist $[\![v]\!]_\omega := true$*
- *Für jedes negative Literal $\overline{v}$ in ω ist $[\![\overline{v}]\!]_\omega := false$*
- *Seien $P, Q \in \mathcal{L}$, dann ist*
  - $[\![\neg P]\!]_\omega := \begin{cases} true, & \text{falls } [\![P]\!]_\omega = false \\ false, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $[\![P \wedge Q]\!]_\omega := \begin{cases} true, & \text{falls } [\![P]\!]_\omega = true \text{ und } [\![Q]\!]_\omega = true \\ false, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $[\![P \vee Q]\!]_\omega := \begin{cases} true, & \text{falls } [\![P]\!]_\omega = true \text{ oder } [\![Q]\!]_\omega = true \\ false, & \text{sonst} \end{cases}$

Definition 4 (Erfüllungsrelation/Modell [BKI06]). *Eine Welt ω* erfüllt *eine Formel $F \in \mathcal{L}$, in Zeichen $\omega \models F$, genau dann, wenn $[\![F]\!]_\omega = true$. Wir nennen ω dann ein* Modell *von F.*

Für eine Formel F definieren wir die Menge ihrer Modelle $Mod(F) \subseteq \Omega$ als

$$Mod(F) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \models F\},$$

die alle Welten enthält, die F erfüllen.

Eine Formel F ist genau dann allgemeingültig*, in Zeichen $\models F$, wenn $\omega \models F$ für alle $\omega \in \Omega$ beziehungsweise $Mod(F) = \Omega$.*

Für Formelmengen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ definieren wir schließlich die Menge ihrer Modelle $Mod(\mathcal{F})$ als

$$Mod(\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \models F \ \forall F \in \mathcal{F}\}.$$

Manchmal ist es sinnvoll, nur Welten für eine Teilmenge von $\mathcal{X} \subseteq \Sigma$ zu betrachten. Die Erfüllungsrelation $\models$ hilft uns bei dieser Definition:

Definition 5 ([KIE13a]). *Sei $\mathcal{X} \subseteq \Sigma$ eine Menge von Aussagenvariablen. Dann definiert $\mathcal{X}\colon \Omega \to \mathcal{L}$ eine Abbildung, wobei $\mathcal{X}(\omega) = F$ die Variablen in $\mathcal{X}$ auf die Vollkonjunktion ihrer Literale bezüglich ω abbildet, sodass $\omega \models F$.*

2.2 Inferenz

Mit Hilfe von *Inferenzen* (oder *Schlussfolgerungen*) können wir eine Formelmenge erweitern und in rationaler Weise plausible Folgerungen ableiten. Wir unterscheiden dabei zwei Arten von Inferenzen:

- Die *logische Folgerung* beruft sich auf den eindeutigen Wahrheitsgehalt von Aussagen. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch, demnach sind auch alle Schlussfolgerungen aus wahrem Wissen wieder wahr. Dabei entsteht aber lediglich Wissen, welches bereits implizit vorhanden ist und damit keine wirklich neue Information liefert.
- Das *plausible Schlussfolgern* hingegen liefert uns sinnvolle Aussagen und Annahmen aus möglicherweise unsicherem Wissen. Abgeleitetes Wissen entsteht aus dem begründeten Verdacht, dass dieses Wissen glaubhaft erscheint. Mit Hilfe von Plausibilitäten oder Präferenzen kann dann das für am sinnvollsten gehaltene Wissen gefiltert werden.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit plausiblem Wissen und plausiblem Schlussfolgern. Die logische Folgerung bietet aber einen geeigneten Grundstein, um unsichere Inferenz zu modellieren.

2.2.1 Logisches Schlussfolgern

Definition 6 (Logische Folgerung [BKI06]). *Seien $G, F \in \mathcal{L}$. G* folgt logisch *aus F, in Zeichen $F \models G$, genau dann, wenn jedes Modell von F auch ein Modell von G ist, das heißt $Mod(F) \subseteq Mod(G)$.*

Mit der Definition von Modellen über Formelmengen können wir für F und G auch Formelmengen zulassen.

Damit lässt sich der klassisch-logische Inferenzoperator *(oder* Konsequenzoperator*) definieren, der einer Formelmenge die Menge aller Formeln zuordnet, die sich aus ihr logisch schlussfolgern lassen:*

$$Cn\colon 2^{\mathcal{L}} \to 2^{\mathcal{L}}$$
$$Cn(\mathcal{F}) := \{G \in \mathcal{L} \mid \mathcal{F} \models G\}$$

Wir nennen eine Formelmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ mit $Cn(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ (deduktiv) abgeschlossen*.*

Das Deduktionstheorem erklärt die Verbindung zwischen logischer Folgerung $\models$ und materialer Implikation $\Rightarrow$:

Theorem 1 (Deduktionstheorem [BKI06])**.** *Für zwei Formeln $F, G \in \mathcal{L}$ gilt:*

$$F \models G \text{ genau dann, wenn } \models F \Rightarrow G$$

Damit wird der semantische Begriff der logischen Konsequenz auf die Allgemeingültigkeitsüberprüfung einer Formel reduziert.

Ein wichtiger Begriff bei der Betrachtung von Inferenzen ist die Konsistenz:

Definition 7 (Konsistenz [KIE13a])**.** *Eine Formel(menge) F heißt* konsistent *(oder* widerspruchsfrei*) genau dann, wenn $Mod(F) \neq \emptyset$.*

Eine konsistente Formelmenge schließt widersprüchliche Aussagen wie $a \wedge \overline{a}$ aus und wir brauchen uns folglich diesen Fällen nicht mehr zu widmen. Eine inkonsistente Formelmenge ist aufgrund ihrer fehlenden Modelle nutzlos, denn aus ihr kann jede beliebige Formel abgeleitet werden. Beispielsweise ist $Cn(\{a \wedge \overline{a}\}) = \mathcal{L}$.

2.2.2 Plausibles Schlussfolgern

Für das plausible Schlussfolgern definieren wir den allgemeinen *Inferenzoperator C*:

Definition 8 (Inferenzoperator/Inferenzrelation [BKI06])**.**

$$C\colon 2^{\mathcal{L}} \to 2^{\mathcal{L}}$$
$$C(\mathcal{F}) := \{G \in \mathcal{L} \mid \mathcal{F} \mid\!\sim G\}$$

Zu der Inferenzoperation C gehört die Inferenzrelation $\mid\!\sim$*, die definiert wird durch*

$$\mathcal{F} \mid\!\sim \mathcal{G} \text{ genau dann, wenn } \mathcal{G} \subseteq C(\mathcal{F})$$

mit $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$. Die Inferenzoperation C und die Inferenzrelation $\mid\!\sim$ beschreiben sich damit gegenseitig.

Die verwendetete Logik zur Darstellung und Folgerung von unsicherem Wissen bestimmt den Inferenzoperator. Der Konsequenzoperator definiert zum Beispiel den Inferenzoperator der klassischen Logik. Wir werden später die Inferenzrelation $\mid\!\sim$ je nach Theorie überschreiben und mit einem entsprechenden Subskript versehen.

Definition 9 (Monotonie)**.** *Eine Inferenzoperation ist genau dann* monoton*, wenn*

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \text{ impliziert } C(\mathcal{F}) \subseteq C(\mathcal{H})$$

für beliebige Formelmengen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$.

Monotonie besagt, dass die Hinzunahme weiterer Prämissen die bisherigen Folgerungen stets bewahrt. Eine bestimmte Aussage, die aus einer Menge von Annahmen folgt, gilt auch dann noch, wenn weitere Annahmen hinzugenommen werden. Dies ist zum Beispiel für den Konsequenzoperator der Fall (vergleiche [BKI06]). Beim plausiblen Schlussfolgern ist die Monotonie-Eigenschaft logischerweise meist nicht gegeben, da neue plausiblere Annahmen bisherige Folgerungen überschreiben können.

2.3 Konditionale

Oft beschreiben wir unser Wissen über inhaltlich plausible Regeln, sogenannte *Konditionale*:

Definition 10 (Konditional [DF74])**.** *Ein Konditional $(B|A)$ mit $A, B \in \mathcal{L}$ beschreibt die unsichere Regel*

„Wenn A gilt, dann normalerweise auch B“

mit folgender Auswertung:

- $[\![(B|A)]\!]_\omega = \mathit{true}$ *genau dann, wenn* $\omega \models AB$ (Verifikation)
- $[\![(B|A)]\!]_\omega = \mathit{false}$ *genau dann, wenn* $\omega \models A\overline{B}$ (Falsifikation)
- $[\![(B|A)]\!]_\omega = \mathit{undefined}$ *genau dann, wenn* $\omega \models \overline{A}$

Wir nennen A die Prämisse *und B die* Konsequenz *des Konditionals.*

Die Sprache aller Konditionale über $\mathcal{L}$ kennzeichen wir als $(\mathcal{L}|\mathcal{L})$.

Auch plausibles faktisches Wissen kann als konditionales Wissen subsumiert werden. Die Formel A kann durch $(A|\top)$ als Konditional mit gleicher Semantik beschrieben werden. Es reicht demzufolge aus, sich nur mit Konditionalen zu beschäftigen.

2.4 Relationen

Auf den nachfolgenden Seiten wird der Begriff der *Relation* häufig verwendet. Die Definition und wichtigsten Eigenschaften einer Relation werden folgend kurz beschrieben.

Definition 11 (Binäre Relation [LS07]). *Eine* binäre Relation *R zwischen zwei Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts*

$$R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, b) \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}.$$

Für $(a, b) \in R$ schreiben wir oft einfach nur aRb. Stimmen die Grundmengen der Relation R überein, das heißt $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, dann nennen wir diese Relation homogen.

Wir können mit binären Relationen festlegen, in welcher Beziehung die Elemente der beiden Mengen zueinander stehen. Homogene Relationen können dabei bestimmte Eigenschaften erfüllen, über die sie charakterisiert werden:

Definition 12 (Eigenschaften für homogene Relationen [LS07]). *Sei $R \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ eine homogene Relation auf der Menge $\mathcal{A}$. Wir nennen die Relation R genau dann*

- reflexiv*, wenn für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt: $(a, a) \in R$*
- irreflexiv*, wenn für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt: $(a, a) \notin R$*
- symmetrisch*, wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt: Aus $(a, b) \in R$ folgt $(b, a) \in R$*
- asymmetrisch*, wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt: Aus $(a, b) \in R$ folgt $(b, a) \notin R$*
- transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in \mathcal{A}$ gilt: Aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ folgt $(a, c) \in R$*
- total*, wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt: $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$*
- alternativ*, wenn für alle $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b$ gilt: $(a, b) \in R$ genau dann, wenn $(b, a) \notin R$*

2.5 Präferenzmodell

Präferenzmodelle verbinden den Folgerungsbegriff mit nicht-logischen Informationen wie zum Beispiel der Plausibilität.

Definition 13 (Präferenzmodell [Mak94])**.** *Ein Tripel* $(\mathcal{M}, \vdash, <)$ *heißt* Präferenzmodell*, wenn*

- $\mathcal{M}$ *eine beliebige Menge von Zuständen ist,*
- $\vdash \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{L}$ *eine beliebige Erfüllungsrelation zwischen Zustand und Formel ist und*
- $< \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ *eine beliebige Relation darstellt, die den Zuständen zueinander eine Präferenz zuordnet.*

Ein Zustand $M \in \mathcal{M}$ *erfüllt eine Formelmenge* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ präferenziell*, in Zeichen* $M \vdash_< \mathcal{F}$*, genau dann, wenn* $M \vdash \mathcal{F}$ *und kein* $N \in \mathcal{M}$ *existiert, sodass* $N < M$ *mit* $N \vdash \mathcal{F}$*.*

Das für uns naheliegendste Präferenzmodell $(\mathcal{M}, \vdash, <)$ ist:

- $\mathcal{M}$: Ω (Menge der Welten)
- $\vdash$: Inferenzrelation, zum Beispiel logische Folgerung
- $<$: Plausibilität der einzelnen Welten zueinander

Definition 14 (Präferenzielle Inferenzrelation [Mak94])**.** *Sei* $(\mathcal{M}, \vdash, <)$ *ein Präferenzmodell. Dann definiert* $\mid\!\sim_<$ *eine* präferenzielle Inferenzrelation *für eine Formelmenge* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ *und eine Formel* $B \in \mathcal{L}$*, sodass gilt:*

$\mathcal{F} \mid\!\sim_< B$ *genau dann, wenn für alle* $M \in \mathcal{M}$ *gilt:* $M \vdash_< \mathcal{F}$ *impliziert* $M \vdash B$

Die Aussage $\mathcal{F} \mid\!\sim_< B$ hat dann die Bedeutung: „Aus $\mathcal{F}$ folgt plausibel B, wenn B in allen plausibelsten Modellen von $\mathcal{F}$ gilt.“

2.6 Ordinale konditionale Funktionen

Die *ordinalen konditionalen Funktionen* (*OCFs* oder auch *Rangfunktionen*, engl. *ordinal conditional functions*) beschreiben die Plausibilität von Welten mittels Rängen bzw. Ordinalzahlen:

Definition 15 (OCF [Spo12])**.** *Eine* ordinale konditionale Funktion *ist eine Funktion* $\kappa\colon \Omega \to \mathbb{N}_0^\infty$*, sodass* $\kappa^{-1}(0) \neq \emptyset$*.*

$\kappa(\omega)$ drückt den Grad der Überraschung aus, der der Welt ω zugemessen wird. Eine Welt erscheint umso plausibler, je kleiner ihr Rang ist. Die Welten mit Rang 0 erscheinen am plausibelsten, von denen nach Definition mindestens eine existiert. Der Eintritt einer Welt mit Rang ∞ ist unmöglich. Für zwei Welten $\omega, \omega' \in \Omega$ ist ω genau dann plausibler, wenn $\kappa(\omega) < \kappa(\omega')$.

Es lässt sich auch der Rang einer Formel bestimmen, indem wir κ überladen:

Definition 16 ([Spo12]). *Sei κ eine OCF. Der* Rang einer Formel $A \in \mathcal{L}$ *wird definiert als*

$$\kappa(A) = \begin{cases} min\{\kappa(\omega) \mid \omega \models A\}, & \textit{falls } A \textit{ erfüllbar} \\ \infty, & \textit{sonst} \end{cases}$$

Damit erhält die Formel A den Rang der plausibelsten Welten, die A erfüllen.

Theorem 2 ([Spo12]). *Sei κ eine OCF. Dann gilt:*

1. *Für alle $A, B \in \mathcal{L}$ ist $\kappa(A \vee B) = \min\{\kappa(A), \kappa(B)\}$.*
2. *Für alle $A \in \mathcal{L}$ ist $\kappa(A) = 0$ oder $\kappa(\overline{A}) = 0$.*

Dabei schließt Theorem 2 für eine Formel $A \in \mathcal{L}$ nicht aus, dass $\kappa(A) = 0 = \kappa(\overline{A})$. In diesem Fall wissen wir nichts über A. Wir sind dann *indifferent* zwischen A und $\overline{A}$.

Wir können Rangfunktionen benutzen, um die Plausibilität in einem Präferenzmodell $(\Omega, \models, <_\kappa)$ zu beschreiben, wobei $<_\kappa$ eine transitive Relation auf Ω für zwei Welten $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ wie folgt definiert:

$$\omega_1 <_\kappa \omega_2 \text{ genau dann, wenn } \kappa(\omega_1) < \kappa(\omega_2)$$

Theorem 3 (Inferenzrelation $\mid\!\sim_\kappa$ [GP96]). *Sei κ eine OCF. Aus dem Präferenzmodell $(\Omega, \models, <_\kappa)$ ergibt sich für zwei Formeln $A, B \in \mathcal{L}$ eine nichtmonotone* Inferenzrelation $\mid\!\sim_\kappa$*:*

$$A \mid\!\sim_\kappa B \textit{ genau dann, wenn } \kappa(AB) < \kappa(A\overline{B})$$

Man folgert demnach B aus A, falls der Eintritt von AB plausibler ist als von $A\overline{B}$. Auf eine Anfrage, ob $A \mid\!\sim_\kappa B$ gilt, Wir beobachten für die Anfrage, ob $A \mid\!\sim_\kappa B$ gilt, ein dreiwertiges Antwortverhalten:

1. *YES*, wenn $\kappa(AB) < \kappa(A\overline{B})$

2. *NO*, wenn $\kappa(A\overline{B}) < \kappa(AB)$

3. *UNKNOWN*, wenn $\kappa(AB) = \kappa(A\overline{B})$

Ebenso wie für Formeln lassen sich OCFs auch für Konditionale überladen:

Definition 17 ([Spo12]). *Sei κ eine OCF und seien $A, B \in \mathcal{L}$. Dann definieren wir*

$$\kappa(B|A) = \begin{cases} \kappa(A \wedge B) - \kappa(A), & \textit{falls } \kappa(A) \neq \infty \\ \infty, & \textit{sonst} \end{cases}$$

Über Konditionale erhalten wir schlussendlich ein weiteres Mittel, um Inferenzen zwischen Formeln zu ziehen:

Theorem 4 ([GP96]). *Sei κ eine OCF, seien $A, B \in \mathcal{L}$. Dann gilt:*

$$A \mid\!\sim_\kappa B \textit{ genau dann, wenn } \kappa(\overline{B}|A) > 0$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \kappa(\overline{B}|A) > 0 & \text{ genau dann, wenn } \kappa(A\overline{B}) - \kappa(A) > 0 \\ & \text{genau dann, wenn } \kappa(A\overline{B}) > \kappa(A) = \min\{\kappa(AB), \kappa(A\overline{B})\} \\ & \text{genau dann, wenn } \kappa(AB) < \kappa(A\overline{B}) \end{aligned}$$

□

Im entsprechenden Kapitel 3 zu den OCF-Netzwerken kommen die Rangfunktionen zum ersten Mal zum Einsatz.

2.7 Gerichtete azyklische Graphen

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit *Netzwerken* (auch *Netze* genannt). Allgemein betrachtet ist ein Netzwerk ein *gerichteter azyklischer Graph* (oder *DAG*, engl. *directed acyclic graph*).

Ein Graph ist eine Repräsentation einer Menge von Objekten und deren Verbindungen zueinander. Dies lässt sich formal genauer spezifizieren:

Definition 18 (DAG [Die10]). *Ein* gerichteter Graph Γ *ist ein Tupel* $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *mit einer Menge von Knoten* $\mathcal{V} = \{V_1, ..., V_n\}$ *und einer Menge geordneter Knotenpaare beziehungsweise gerichteter Kanten* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

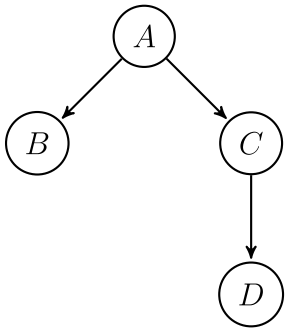


Abbildung 2.1: Beispiel-DAG

Eine Folge von Knoten $(V_1, ..., V_n)$ *mit der Eigenschaft, dass für alle* $1 \leq i < n$ *die Kante* $(V_i, V_{i+1}) \in \mathcal{E}$ *existiert, heißt* Weg.

Ein gerichteter Graph heißt azyklisch, *falls kein Weg* $(V_1, ..., V_n)$ *mit* $V_i \in \mathcal{V}$ *existiert, sodass* $V_1 = V_n$.

Wir halten folgende Definitionen zur einfacheren Verständigung fest [KIE13a]:

- $pa(V) := \{V' \mid (V', V) \in \mathcal{E}\}$ enthält die Elternknoten (engl. *parents*) eines Knotens V.
- $ch(V) := \{V' \mid (V, V') \in \mathcal{E}\}$ liefert die Menge der Kindsknoten (engl. *children*) von V.
- $desc(V) := \{V' \mid (V, ..., V') \text{ ist Weg in } \Gamma\}$ beschreibt die Menge der Nachfahren (engl. *descendants*), für die ein Weg von V aus existiert.
- $nd(V) := \mathcal{V} \setminus (desc(V) \cup \{V\} \cup pa(V))$ definiert die Nicht-Nachfahren (engl. *non-descendants*) von V. Das sind zum Beispiel Vorfahren der Eltern oder Geschwisterknoten.

Beispiel 2. *Eine Veranschaulichung dieser Begriffe soll folgendes Minimalbeispiel anhand der Abbildung 2.1 zeigen:*

- $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *ist definiert durch* $\mathcal{V} = \{A, B, C, D\}$ *und* $\mathcal{E} = \{(A, B), (A, C), (C, D)\}$.
- Γ *ist azyklisch.*
- *Für den Knoten* C *gilt:*

- $\diamond$ $pa(C) = \{A\}$, *denn* $(A, C) \in \mathcal{E}$
- $\diamond$ $ch(C) = \{D\}$, *denn* $(C, D) \in \mathcal{E}$
- $\diamond$ $desc(C) = \{D\}$, *denn* (C, D) *Weg in* Γ
- $\diamond$ $nd(C) = \{B\}$ *wegen* $B \in \{A, B, C, D\} \setminus \{A, C, D\} = \{B\}$

Eng mit DAGs verzahnt ist der Begriff der topologischen Sortierung:

Definition 19 (Topologische Sortierung [Die10]). *Eine* topologische Sortierung *eines DAGs* $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *ist eine Ordnung der Knoten* $V_1, ..., V_n$*, sodass für jede Kante* $(V_i, V_j) \in \mathcal{E}$ *gilt, dass* $i < j$.

Theorem 5 ([Die10]). *Für jedes DAG existiert eine topologische Sortierung.*

Beispiel 3. *Für Abbildung 2.1 existieren drei topologische Sortierungen:*

$$\begin{gathered} A, B, C, D \\ A, C, B, D \\ A, C, D, B \end{gathered}$$

3 OCF-Netzwerke

Wir haben bereits in Kapitel 2.6 die ordinalen konditionalen Funktionen kennengelernt, mit deren Hilfe Welten, Formeln und Konditionalen einen bestimmten Rang zugewiesen bekommen, die den Grad der Überraschung des Eintritts dieser beschreiben.

Mit Blick auf gerichtete azyklische Graphen können wir, wenn jeder Knoten im Graphen eine Aussagenvariable aus Σ repräsentiert, die Plausibilität der Werte dieser Variablen in Abhängigkeit ihrer Elternknoten mit Rangfunktionen beschreiben:

Definition 20 (OCF-Netzwerk [KIE13a, GP96]). *Sei Σ eine Menge von Aussagenvariablen. Ein DAG $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ ist ein* OCF-Netzwerk*, falls für jeden Knoten $V \in \Sigma$ eine* lokale Rangtabelle $\kappa_V(V|pa(V))$ *für jede mögliche Belegung von V und $pa(V)$ existiert. Entsprechend der Definition von Rangfunktion müssen die lokalen Ränge normalisiert sein, das bedeutet:*

$$\kappa_V(v|pa(V)) = 0 \text{ oder } \kappa_V(\overline{v}|pa(V)) = 0 \text{ für jede Belegung von } pa(V)$$

Damit die lokalen Ränge ein globales Bild liefern, fordern wir:

$$\min_{\omega\in\Omega} \sum_{V\in\Sigma} \kappa(V(\omega)|pa(V)(\omega)) = 0 \tag{3.1}$$

$V(\omega)$ und $(pa)(V)(\omega)$ werden dabei wie nach Definition 5 ausgewertet.

Wir beschreiben damit in den lokalen Rangtabellen von OCF-Netzwerken die Plausibilität des Eintretens von Ereignissen in Abhängigkeit vom Eintreten der Elternereignisse.

Manchmal ist es gewünscht, die Ränge der einzelnen Konditionale in den lokalen Rangtabellen einzuschränken. Wir definieren uns für diesen Fall die 0-1-basierten OCF-Netzwerke:

Definition 21 (0-1-basiertes OCF-Netzwerk). *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ ein OCF-Netzwerk. Γ ist genau dann* 0-1-basiert*, wenn*

$$\kappa_V(V|pa(V)) \leq 1 \text{ für jede Belegung von } V \text{ und } pa(V).$$

Um eine globale Rangfunktion aus einem OCF-Netzwerk zu gewinnen, beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Stratifikation:

Definition 22 (Stratifikation [GP96])**.** *Eine OCF $\kappa\colon \Omega \to \mathbb{N}_0^\infty$ ist genau dann* stratifiziert bezüglich eines OCF-Netzwerks $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$*, wenn*

$$\kappa(\omega) = \sum_{V \in \Sigma} \kappa_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) \text{ für jede mögliche Welt } \omega \in \Omega.$$

Aus einem OCF-Netzwerk Γ eine stratifizierte Rangfunktion κ zu gewinnen, ist relativ einfach. Dafür summieren wir für jede Welt $\omega \in \Omega$ einfach nur die Ränge der Konditionale in den einzelnen lokalen Rangtabellen $\kappa_V(V(\omega)|pa(V)(\omega))$ auf, die zu der entsprechenden Welt passen. Forderung (3.1) garantiert uns, dass κ wirklich eine OCF ist. Es existiert folglich zu jedem OCF-Netzwerk dessen eindeutige stratifizierte Rangfunktion.

Definition 23 (Konsistenz)**.** *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ ein OCF-Netzwerk. Wir nennen Γ genau dann* konsistent*, wenn eine Rangfunktion $\kappa\colon \Omega \to \mathbb{N}_0^\infty$ existiert, sodass*

$$\kappa(V|pa(V)) = \kappa_V(V|pa(V)) \text{ für jede Belegung von } V \text{ und } pa(V).$$

Theorem 6 ([KIE13b])**.** *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ ein OCF-Netzwerk und κ die stratifizierte Rangfunktion bezüglich Γ nach Definition 22. Dann gilt*

$$\kappa(V|pa(V)) = \kappa_V(V|pa(V)) \text{ für jede Belegung von } V \text{ und } pa(V).$$

Damit ist Γ konsistent*.*

Es stellt sich also heraus, dass die stratifizierte Rangfunktion eines OCF-Netzwerks die bedingten Plausibilitäten in den lokalen Rangtabellen erhält. Damit ist jedes OCF-Netzwerk konsistent.

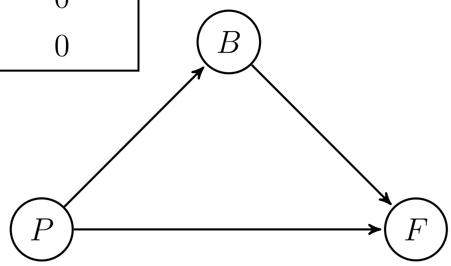
Mit diesem Wissen wollen wir die OCF-Netzwerke nun endlich in Aktion erleben:

Beispiel 4 ([KIE13b])**.** *Wir betrachten das Standard-Beispiel für unsicheres Wissen als graphische Darstellung in einem OCF-Netzwerk aus Abbildung 3.1. Das Beispiel beschreibt folgenden Sachverhalt:*

Pinguine (P) sind normalerweise Vögel (B).
Vögel können normalerweise fliegen (F).
Pinguine können normalerweise jedoch nicht fliegen.

$B\|P$	$\kappa_B(B\|P)$
$b\|p$	0
$\overline{b}\|p$	1
$b\|\overline{p}$	0
$\overline{b}\|\overline{p}$	0

P	$\kappa_P(P)$
p	1
$\overline{p}$	0



$F\|PB$	$\kappa_F(F\|PB)$
$f\|pb$	1
$\overline{f}\|pb$	0
$f\|\overline{p}b$	0
$\overline{f}\|\overline{p}b$	1
$f\|p\overline{b}$	2
$\overline{f}\|p\overline{b}$	0
$f\|\overline{p}\overline{b}$	0
$\overline{f}\|\overline{p}\overline{b}$	0

Abbildung 3.1: Pinguin-Beispiel

Dabei nehmen wir an, dass die angegebenen Plausibilitäten in den lokalen Rangtabellen aus Expertenwissen gegeben sind.

Wir erhalten aus diesem Netzwerk folgende stratifizierte Rangfunktion κ:

ω	$\overline{p}bf$	$\overline{p}\overline{b}f$	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}$	$\overline{p}b\overline{f}$	$pb\overline{f}$	pbf	$p\overline{b}\,\overline{f}$	$p\overline{b}f$
$\kappa(\omega)$	0	0	0	1	1	2	2	4

Dabei gehört die Welt, die einen Vogel beschreibt, der kein Pinguin ist, aber fliegen kann ($\overline{p}bf$) erwartungsgemäß zu den plausibelsten Welten. Hingegen wird eine Welt mit einem Pinguin, der kein Vogel ist, aber fliegen kann ($p\overline{b}\,\overline{f}$) als unplausibelste Welt eingestuft.

Wir stellen im Folgenden fest, dass die stratifizierte Rangfunktion eines Netzwerkes die *lokal gerichtete Markov-Bedingung* in einem OCF-Netzwerk erfüllt. Dafür benötigen wir zunächst den Begriff der bedingten Unabhängigkeit einer Rangfunktion κ:

Definition 24 (κ-Unabhängigkeit [KIE13a])**.** *Sei κ eine OCF und seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ disjunkte Mengen von Variablen. $\mathcal{X}$ ist genau dann κ-*unabhängig *zu $\mathcal{Y}$ gegeben $\mathcal{Z}$, in Zeichen $\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp_\kappa \mathcal{Y} \mid \mathcal{Z}$, wenn*

$$\kappa(\mathcal{X}\mathcal{Y}|\mathcal{Z}) = \kappa(\mathcal{X}|\mathcal{Z}) + \kappa(\mathcal{Y}|\mathcal{Z}) \text{ für alle Belegungen von } \mathcal{X}, \mathcal{Y} \text{ und } \mathcal{Z}.$$

Theorem 7 ([KIE13b])**.** *Sei κ eine OCF und seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ disjunkte Mengen von Variablen. Dann gilt $\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp_\kappa \mathcal{Y} \mid \mathcal{Z}$ genau dann, wenn*

$$\kappa(\mathcal{X}|\mathcal{Y}\mathcal{Z}) = \kappa(\mathcal{X}|\mathcal{Z}) \text{ für alle Belegungen von } \mathcal{X}, \mathcal{Y} \text{ und } \mathcal{Z}.$$

Theorem 8 ([KIE13b]). *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ *ein OCF-Netzwerk und* κ *die stratifizierte Rangfunktion bezüglich* Γ. *Dann gilt die* lokal gerichtete Markov-Bedingung

$$V \perp\!\!\!\perp_\kappa nd(V) \mid pa(V) \textit{ für jeden Knoten } V \in \Sigma.$$

4 CP-Netzwerke

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der *ceteris paribus* Präferenz und den daraus entstehenden CP-Netzwerken. Ein gutes Beispiel für diese Präferenz gibt Craig Boutillier et al. in [BBD$^+$04]:

Beispiel 5. *Bei einer Diskussion mit meiner Frau über den Kauf eines Tisches sagte ich: „Ein runder Tisch ist besser als ein eckiger." Mit dieser Aussage meinte ich nicht, dass ein runder Tisch unabhängig seiner anderen Eigenschaften stets besser ist als ein eckiger. Vielmehr wollte ich sagen, dass ich einen runden Tisch vor einem eckigen Tisch präferiere, falls sie sich in anderen Eigenschaften wie Preis, Höhe und Holzart nicht großartig unterschieden. Wenn nur ein runder Plastik-Tisch zum Kauf steht, bedeutet dies nicht automatisch, dass ich diesen bevorzuge. Diese Präferenz nennen wir* ceteris paribus *oder* everything else being equal. *Die meisten unserer allgegenwärtigen Präferenzen sind von diesem Typ.*[1]

4.1 Präferenzrelation

Wir beginnen mit der formalen Definition einer *ceteris paribus* Präferenzrelation. Dafür brauchen wir zunächst einige Grunddefinitionen.

Definition 25 (Domäne [BBD$^+$04])**.** *Sei $\mathcal{V} = \{V_1, ..., V_n\}$ eine Menge von* Variablen *(oder* Entscheidungsmerkmalen*). Zu jeder Variablen V_i gehört ihre Domäne $Dom(V_i) = \{v_1^i, ..., v_{n_i}^i\}$ von* Werten *(oder* Optionen*).*

Für eine Menge von Variablen überschreiben wir den Begriff der Belegung:

Definition 26 (Belegung [BBD$^+$04])**.** *Sei $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_n\} \subseteq \mathcal{V}$ eine Menge von Variablen mit entsprechenden Domänen $Dom(X_i) = \{x_1^i, ..., x_{n_i}^i\}$. Eine* Belegung *ist eine Abbildung x, die jede Variable in $\mathcal{X}$ auf einen Wert ihrer Domäne abbildet. Dann gilt für $x : X_i \mapsto x_j^i$.*

Die Menge aller Belegungen zu $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ definieren wir als $Asst(\mathcal{X})$.

[1] frei übersetzt aus [BBD$^+$04], Seite 137

Für zwei Belegungen x und y zu zwei disjunkten Variablenmengen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ mit $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$ schreiben wir für die Kombination dieser Belegungen $xy \in Asst(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$.

Für eine Menge von Belegungen zu einer Variablenmenge definieren wir eine Präferenzrelation:

Definition 27 (Präferenzrelation $\prec$ [BBD+04])**.** *Sei $Asst(\mathcal{X})$ die Menge aller Belegungen zu $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$. Dann bezeichnet $\prec \subseteq Asst(\mathcal{X}) \times Asst(\mathcal{X})$ eine* Präferenzrelation *mit der Bedeutung für zwei Belegungen $x_1, x_2 \in Asst(\mathcal{X})$:*

$$x_1 \prec x_2 \text{ genau dann, wenn } x_1 \text{ vor } x_2 \text{ präferiert wird.}$$

Wir fordern, dass $\prec$ transitiv, irreflexiv, asymmetisch, total und alternativ ist.

Die Präferenzrelation $\prec$ definiert damit die „*kleiner*"-Beziehung in Hinblick auf die Präferenzen der einzelnen Belegungen. Das ermöglicht uns, eine Menge von Belegungen eindeutig nach ihrer Präferenz zu sortieren.

Bei einer Variablenmenge $\mathcal{V}$ mit n Variablen und Domänen $Dom(V_1), ..., Dom(V_n)$ erhalten wir $|Dom(V_1) \times ... \times Dom(V_n)|$ unterschiedliche Belegungen. Eine Betrachtung dieser exponentiellen Menge scheint höchst ineffizient. Das Konzept der Unabhängigkeit bei Präferenzrelationen hilft uns bei diesem Problem:

Definition 28 (Präferenzielle Unabhängigkeit [BBD+04])**.** *Eine Menge von Variablen $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ ist genau dann* präferenziell unabhängig *zum Komplement $\mathcal{Y} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{X}$, in Zeichen $\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp_{\prec} \mathcal{Y}$, wenn für alle $x_1, x_2 \in Asst(\mathcal{X})$ und alle $y_1, y_2 \in Asst(\mathcal{Y})$ gilt:*

$$x_1 y_1 \prec x_2 y_1 \text{ genau dann, wenn } x_1 y_2 \prec x_2 y_2$$

Es gelte für die Belegungen $x_1, x_2 \in Asst(\mathcal{X})$ obige Bedingung. Wir präferieren dann x_1 gegenüber x_2 *ceteris paribus* und meinen damit, dass die Präferenz nicht wechselt, egal welche Werte wir für die Domänen von $\mathcal{V} \setminus \mathcal{X}$ wählen.

Wir erweitern im Folgenden die Unabhängigkeit von Variablenmengen um Bedingtheit:

Definition 29 (Bedingte präferenzielle Unabhängigkeit [BBD+04])**.** *Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ nichtleere disjunkte Mengen von Variablen mit $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} = \mathcal{V}$. $\mathcal{X}$ ist genau dann* bedingt präferenziell unabhängig *zu $\mathcal{Y}$ gegeben $\mathcal{Z}$, in Zeichen $\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp_{\prec} \mathcal{Y} \mid \mathcal{Z}$, wenn für alle $x_1, x_2 \in Asst(\mathcal{X})$, $y_1, y_2 \in Asst(\mathcal{Y})$ und $z \in Asst(\mathcal{Z})$ gilt:*

$$x_1 y_1 z \prec x_2 y_1 z \text{ genau dann, wenn } x_1 y_2 z \prec x_2 y_2 z$$

4.2 CP-Netzwerke

Wir können nun mit dem Wissen aus dem vorherigen Abschnitt CP-Netzwerke definieren. Aus einer Menge von Entscheidungsmerkmalen $\mathcal{V}$ bestimmen wir für jede Variable $V \in \mathcal{V}$ die Menge von Elternknoten $pa(V) \subseteq \mathcal{V}$, die die Präferenz von V unabhängig aller weiteren Variablen beeinflussen können. Demnach gilt, dass die Variable V bedingt präferenziell unabhängig ist zu $\mathcal{V} \setminus (pa(V) \cup \{V\})$ gegeben $pa(V)$. Damit gilt in CP-Netzwerken eine noch stärkere bedingte Unabhängigkeit als die *lokal gerichtete Markov-Bedingung* mit $V \perp\!\!\!\perp_{\prec} nd(V) \mid pa(V)$, die beispielsweise in OCF-Netzwerken gilt.

Definition 30 (CP-Netzwerk [BBD+04])**.** *Sei $\mathcal{V} = \{V_1, ..., V_n\}$ eine Menge von Variablen. Ein DAG $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$ ist ein* CP-Netzwerk*, falls für jeden Knoten $V \in \mathcal{V}$ eine* konditionale Präferenztabelle *$CPT(V)$ existiert, die eine Präferenzrelation $\prec_p^i$ der Belegungen $Asst(\{V\})$ für jede Belegung $p \in Asst(pa(V))$ angibt.*

Definition 31 (Induzierter Präferenzgraph [BBD+04])**.** *Sei Γ ein CP-Netzwerk mit $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(X_i)\}_{X_i \in \mathcal{V}})$. Γ induziert einen* Präferenzgraphen *$\Gamma' = (Asst(\mathcal{V}), \mathcal{E}')$, bei dem für ein $V \in \mathcal{V}$ und zwei Belegungen $o_1 = yv_1p$, $o_2 = yv_2p \in Asst(\mathcal{V})$ gilt:*

$$(o_1, o_2) \in \mathcal{E}' \textit{ genau dann, wenn } yv_1p \prec yv_2p,$$

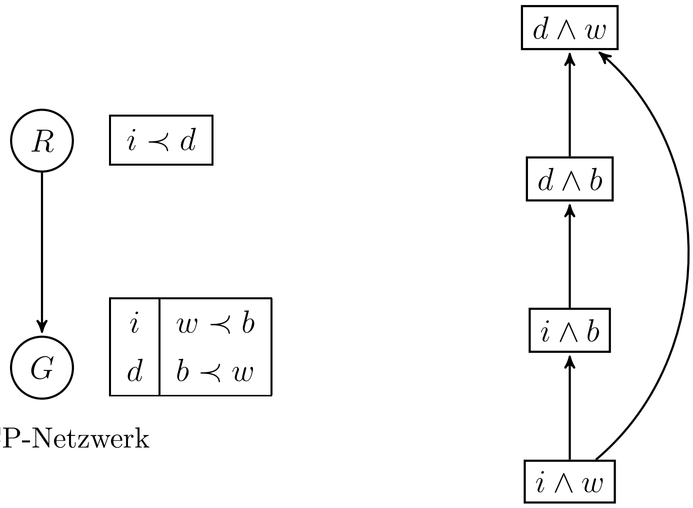
wobei $v_1, v_2 \in Dom(V)$, $p \in Asst(pa(V))$ und $y \in Asst(\mathcal{V} \setminus (pa(V) \cup \{V\}))$.

Der induzierte Präferenzgraph macht sich die bedingte präferenzielle Unabhängigkeit des Netzwerks zu Nutzen. Für zwei Belegungen o_1 und o_2, welche sich nur innerhalb eines Wertes v_1 oder v_2 im Knoten V unterscheiden, können wir die Präferenz der Belegungen in der konditionalen Präferenztabelle $CPT(V)$ ablesen. Unter der Elternbelegung $p \in Asst(pa(V))$, die sich zu o_1 beziehungsweise o_2 kombinieren lässt, ist eine direkte Präferenz von v_1 gegenüber v_2 angegeben. Aufgrund der präferenziellen Unabhängigkeit zu den restlichen Knoten müssen diese nicht beachtet werden und es gilt:

$$o_1 \prec o_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 \prec_p v_2$$

Wir wollen die CP-Netzwerke und die induzierten Präferenzgraphen an mehreren Beispielen illustrieren:

Beispiel 6 (Unser Abendessen)**.** *Abbildung 4.1 zeigt das CP-Netzwerk bezüglich der Präferenzen unserer Vorstellungen zum Abendessen. Das Netzwerk besteht aus zwei*



(a) CP-Netzwerk

(b) induzierter Präferenzgraph

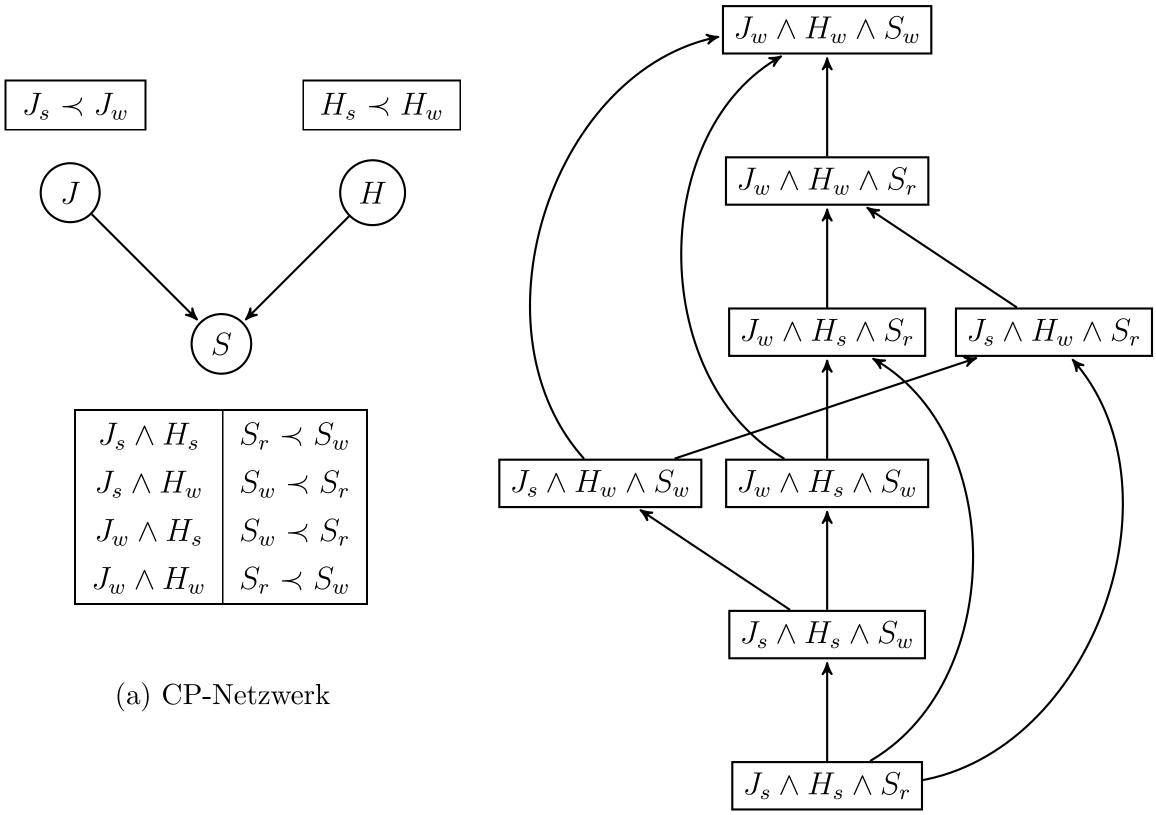
Abbildung 4.1: Unser Abendessen

Variablen Regionale Küche *und* Getränk *mit den Domänen* $Dom(R) = \{$deutsch, italienisch$\}$ *und* $Dom(G) = \{$bier, wein$\}$. *Wir präferieren italienische Küche vor deutscher Küche und wählen das Getränk abhängig zur gewählten Küche. Wir präferieren Wein bei italienischem Essen und Bier bei deutschem.*

Beispiel 7 (Unsere Garderobe [BBD+04]). *Abbildung 4.2 erläutert unsere Präferenzen bezüglich unserer Abendgarderobe in einem CP-Netzwerk. Es besteht aus drei Variablen* Jacke, Hose *und* Shirt. *Wir präferieren eine* schwarze Jacke *(J_s) gegenüber einer* weißen *(J_w) und ebenso präferieren wir auch eine* schwarze Hose *(H_s) gegenüber einer* weißen *(H_w). Abhängig unserer Wahl für die Jacke und die Hose wählen wir unser Shirt. Haben Hose und Jacke die gleiche Farbe, präferieren wir ein* rotes Shirt *(S_r), andernfalls ein* weißes *(S_w).*

Wir haben unseren induzierten Präferenzgraphen topologisch so sortiert, dass alle Kanten nur nach oben führen. Das bedeutet insbesondere, dass der Knoten der am meisten präferierten Belegung am unteren Rand steht. Der Knoten der am wenigsten präferierten Belegung findet sich dagegen ganz oben. Semantisch wird der Gedanke des induzierten Präferenzgraphen auf die Präferenzrelationen auf $Asst(\mathcal{V})$ übertragen, die mit den angegebenen Präferenzen der CPTs übereinstimmen.

Definition 32 (Erfüllbarkeit [BBD+04]). *Sei* $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(X_i)\}_{X_i \in \mathcal{V}})$ *ein CP-Netzwerk,* $V \in \mathcal{V}$ *und* $\mathcal{Y} = \mathcal{V} \backslash (pa(V) \cup \{V\})$. $\prec_p$ *beschreibt die Präferenzrelation der*



(a) CP-Netzwerk

(b) induzierter Präferenzgraph

Abbildung 4.2: Unsere Garderobe

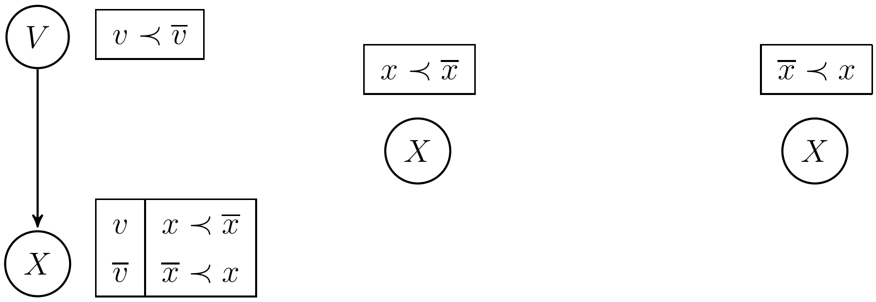
Belegung $Asst(\{V\})$ für eine Elternbelegung $p \in Asst(pa(V))$ anhand der Präferenztabelle $CPT(V)$. Sei $\prec$ eine Präferenzrelation auf $Asst(\mathcal{V})$.
Die Präferenzrelation $\prec$ erfüllt *$\prec_p$ genau dann, wenn für alle $y \in Asst(\mathcal{Y})$ und alle $v_1, v_2 \in Dom(V)$ gilt:*

$$yv_1p \prec yv_2p \text{ genau dann, wenn } v_1 \prec_p v_2$$

Die Präferenzrelation $\prec$ erfüllt *die Präferenztabelle $CPT(V)$ genau dann, wenn sie $\prec_p$ für jede Belegung $p \in Asst(pa(V))$ erfüllt.*
Die Präferenzrelation $\prec$ erfüllt *das CP-Netzwerk Γ genau dann, wenn sie $CPT(V)$ für jede Variable $V \in \mathcal{V}$ erfüllt.*

Ein CP-Netzwerk ist genau dann erfüllbar*, wenn eine Präferenzrelation $\prec$ existiert, die es erfüllt.*

In einfachen Worten: Eine Präferenzrelation $\prec$ erfüllt ein CP-Netzwerk genau dann, wenn $\prec$ alle konditionallen Präferenzen in den einzelnen *CPT*s unter der *ceteris paribus* Interpretation erfüllt.



(a) CP-Netzwerk Γ (b) Γ_v (c) $\Gamma_{\overline{v}}$

Abbildung 4.3: Beweisansatz Theorem 9

Theorem 9 ([BBD+04]). *Jedes CP-Netzwerk ist erfüllbar.*

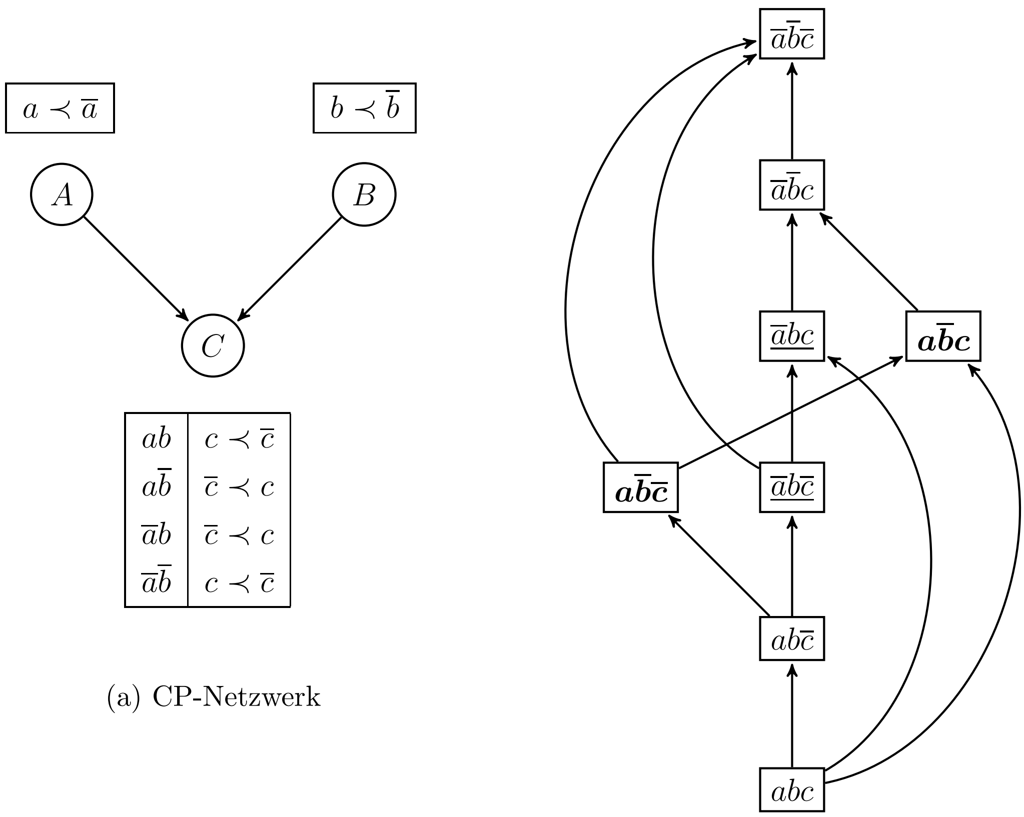
Beweis durch Induktion [BBD+04]. Logischerweise gilt die Behauptung für Netzwerke mit nur einem Knoten V_i, da die Präferenzrelation bereits in $CPT(V_i)$ durch $\prec^i$ gegeben ist.

Wir nehmen an, dass die Behauptung für alle CP-Netzwerke mit weniger als n Variablen gilt. Sei Γ nun ein CP-Netzwerk mit n Variablen. Da Γ azyklisch ist, existiert mindestens eine Variable V ohne Elternknoten. Sei $v_1 \prec v_2 \prec ... \prec v_k$ die Präferenzrelation von $Asst(V)$, die in $CPT(V)$ beschrieben ist. Für jedes v_i lässt sich ein CP-Netzwerk Γ_i mit $n-1$ Variablen und Knotenmenge $\mathcal{V} \setminus \{V\}$ erstellen. Wir entfernen dafür den Knoten V aus unserem Netzwerk Γ und löschen für jeden Kindknoten X in seiner Präferenztabelle $CPT(X)$ die Zeilen, bei denen V in der Elternbelegung nicht auf v_i abbildet. Anschließend reduzieren wir die Elternbelegung in der Tabelle auf $Asst(pa(X) \setminus \{V\})$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert nun für jedes Netzwerk Γ_i eine Präferenzrelation $\prec_i$, die Γ_i erfüllt. Abbildung 4.3 zeigt beispielhaft die Konstruktion der CP-Netzwerke Γ_v und $\Gamma_{\overline{v}}$ aus einem CP-Netzwerk Γ, in denen der Knoten V entfernt wird und v in Γ_v (vergleiche b) sowie $\overline{v}$ in $\Gamma_{\overline{v}}$ (vergleiche c) festgehalten wird.

Es lässt sich nun eine Präferenzrelation für Γ konstruieren. Dafür präferieren wir jede Belegung mit Wert $v_i \in Dom(V)$ gegenüber $v_j \in Dom(V)$, falls $v_i \prec v_j$ in der Präferenztabelle $CPT(V)$. Für Belegungen mit dem gleichen Wert v_i ordnen wir diese nach der Präferenz gegeben durch $\prec_i$. Diese konstruierte Präferenzrelation erfüllt $CPT(V)$, denn für alle $o \in Asst(\mathcal{V} \setminus \{V\})$ gilt nach Konstruktion:

$$ov_i \prec ov_j \text{ genau dann, wenn } v_i \prec v_j \text{ in } CPT(V)$$

Man kann leicht prüfen, dass auch alle weiteren CPTs erfüllt werden. Damit existiert stets eine Präferenzrelation, die Γ erfüllt. ∎



(a) CP-Netzwerk

(b) induzierter Präferenzgraph

Abbildung 4.4: *Unsere Garderobe* mit vereinfachten Variablennamen

Beispiel 8. *Betrachten wir erneut das CP-Netzwerk aus Abbildung 4.1. Dieses Netzwerk wird durch die eindeutige Präferenzrelation*

$$iw \prec ib \prec db \prec dw$$

erfüllt. Im Allgemeinen existiert mehr als eine Präferenzrelation, die ein CP-Netzwerk erfüllt. Betrachten wir das bekannte CP-Netzwerk Unsere Garderobe *mit einfacheren Variablennamen aus Abbildung 4.4. Dann existieren sechs Präferenzrelationen, die das CP-Netzwerk erfüllen:*

$$abc \prec ab\overline{c} \prec \begin{array}{c} \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \prec \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc} \\ \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \prec \underline{\overline{a}bc} \\ \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \\ \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \prec \underline{\overline{a}bc} \\ \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \\ \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc} \prec \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \end{array} \prec \overline{a}\overline{b}c \prec \overline{a}\overline{b}\overline{c}$$

Dabei repräsentiert der innere Block alle möglichen Kombinationen dieser vier Belegungen, sodass stets $\boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c}$ *sowie* $\underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc}$ *gilt. Dies kann leicht überprüft* *werden, denn diese Präferenzen sind jeweils fett oder unterstrichen kenntlich gemacht. Für jede dieser Präferenzrelationen hat eine analoge Anordnung der Knoten dieser Belegungen im induzierten Präferenzgraphen zur Folge, dass weiterhin alle Kanten nach oben zeigen.*

Wir sehen, dass eine Präferenzrelation, die ein CP-Netzwerk erfüllt, nicht unbedingt eindeutig sein muss. Aus der einfachen Repräsentation von Wissen wird ein kompliziertes Gerüst aus vielen unterschiedlichen Präferenzrelationen. Folgerungen, die wir aus unserem Netzwerk ziehen, müssen folglich auch in allen Präferenzrelationen gelten, die es erfüllen.

Definition 33 (Präferenzielle Folgebeziehung [BBD+04])**.** *Sei Γ ein CP-Netzwerk mit $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V\in\mathcal{V}})$ und seien $o_1, o_2 \in Asst(\mathcal{V})$. Aus Γ* folgt *$o_1 \prec o_2$, in Zeichen $\Gamma \vdash_{cp} o_1 \prec o_2$ oder $o_1 \prec_\Gamma o_2$, genau dann, wenn $o_1 \prec o_2$ in jeder Präferenzrelation $\prec$, die Γ erfüllt.*

Lemma 1 (Transitivität [BBD+04])**.** *Sei $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V\in\mathcal{V}})$ ein CP-Netzwerk und $o_1, o_2, o_3 \in Asst(\mathcal{V})$. Die präferenzielle Folgebeziehung ist* transitiv*. Das bedeutet: Aus $o_1 \prec_\Gamma o_2$ und $o_2 \prec_\Gamma o_3$ folgt $o_1 \prec_\Gamma o_3$.*

4.3 Indifferenz

Bisher haben wir uns bei CP-Netzwerken auf die Präferenzrelation $\prec$ beschränkt. Wir wollen uns nun dem Gedanken widmen, dass wir Belegungen in den einzelnen konditionalen Präferenztabellen nicht zwingenderweise vor anderen präferieren können. Um dieses Verhalten auszudrücken, benötigen wir eine neue Präferenzrelation:

Definition 34 (Präferenzrelation mit Indifferenz $\preceq$ [BBD+04])**.** *Sei $Asst(\mathcal{X})$ die Menge aller Belegungen zu $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$. Dann bezeichnet $\preceq \subseteq Asst(\mathcal{X}) \times Asst(\mathcal{X})$ eine transitive, reflexive, totale* Präferenzrelation mit Indifferenz *mit der Bedeutung für zwei Belegungen $x_1, x_2 \in Asst(\mathcal{X})$:*

$$x_1 \preceq x_2 \text{ genau dann, wenn}$$
$$x_1 \text{ vor } x_2 \text{ oder } x_1 \text{ gleichermaßen wie } x_2 \text{ präferiert wird.}$$

Wir schreiben $x_1 \prec x_2$, falls $x_1 \preceq x_2$ und $x_2 \not\preceq x_1$. Für den Fall $x_1 \preceq x_2$ und $x_2 \preceq x_1$ schreiben wir $x_1 \sim x_2$. Dabei bezeichnet $\sim$ die Indifferenz *(oder* Gleichgültigkeit*)* *zwischen dem Eintritt von x_1 und x_2. Es gilt dann weiter:*

$$x_1 \preceq x_2 \textit{ genau dann, wenn}$$
$$x_1 \prec x_2 \textit{ oder } x_1 \sim x_2 \textit{ genau dann, wenn}$$
$$x_2 \not\prec x_1$$

Für eine Präferenzrelation mit Indifferenz $\preceq$ lassen wir die Erwähnung der Indifferenz meistens weg, da diese bereits durch das Symbol $\preceq$ impliziert wird.

Die Präferenzrelation $\preceq$ definiert die „*kleiner-gleich*"-Beziehung hinsichtlich der Präferenzen der verschiedenen Belegungen und bietet uns damit die Möglichkeit, Belegungen gleichermaßen zu präferieren. Wir nennen CP-Netzwerke, die ihre Relationen zu $\preceq$ erweitern, *CP-Netzwerke mit Indifferenz.* Analog erweitern wir für die Erfüllbarkeit von CP-Netzwerken mit Indifferenz die Präferenzrelationen, die dieses Netzwerk erfüllen, zu diesem Typ.

Beispiel 9. *Betrachten wir das Beispiel* Unser Abendessen *aus Abbildung 4.1 mit der Veränderung, dass wir uns nicht zwischen italienischem und deutschem Essen entscheiden können. Falls wir uns für italienisches Essen entscheiden, präferieren wir aber weiterhin Wein und analog Bier bei deutschem Essen:*

$$i \sim d$$
$$i : w \prec b \textit{ und } d : b \prec w$$

Für dieses Netzwerk lassen sich die folgenden Präferenzen aus den einzelnen Präferenztabellen gewinnen:

$$\boldsymbol{iw} \prec ib \sim db \prec dw \sim \boldsymbol{iw} \textit{ und insbesondere } iw \prec db \prec iw$$

Nach Definition 34 gilt für eine Präferenzrelation mit Indifferenz $\preceq$ aber:

$$iw \preceq db \textit{ genau dann, wenn } db \not\prec iw$$

Es gibt demnach keine Präferenzrelation $\preceq$, die dieses CP-Netzwerk erfüllt.

Wir stellen fest, dass durch den Gebrauch von Indifferenz auch die einfachsten CP-Netzwerke sehr schnell nicht mehr erfüllbar sind. Wir halten demnach den sicheren Gebrauch von Indifferenz in folgendem Theorem fest:

Theorem 10 (Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz [BBD+04])**.** *Sei Γ ein CP-Netzwerk mit Indifferenz mit $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$. Sei $V_i \in \mathcal{V}$ ein Knoten in diesem Netzwerk und $V_j \in ch(V_i)$ ein Kind von V_i. Sei $\mathcal{Y} = pa(V_j) \setminus \{V_i\}$ die Menge der Elternknoten von V_j ohne V_i. Es gelte für ein $p \in Asst(pa(V_i))$ und $v, v' \in Asst(V_i)$ die Präferenz $v \sim v'$ in $\preceq^i_p$. Falls die Präferenzrelationen $\preceq^j_{vy}$ und $\preceq^j_{v'y}$ für jede Belegung $y \in Asst(\mathcal{Y})$ gleich sind, dann ist Γ erfüllbar.*

Wir erlauben folglich nur Indifferenz bei zwei Werten einer Variablen, wenn deren Kindpräferenzen nicht von diesen Werten abhängig sind.

Im weiteren Verlauf, wenn nicht explizit erwähnt, beschränken wir uns aber weiterhin auf CP-Netzwerke ohne Indifferenz.

4.4 Ausgangsoptimierung

CP-Netzwerke bieten den Vorteil, einfach und effizient die am meisten präferierte Belegung des Netzwerks zu bestimmen. Wir nennen eine solche Anfrage *Ausgangsoptimierung*:

Theorem 11 (Ausgangsoptimierung [BBD+04]). *Sei* $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$ *ein CP-Netzwerk und* $V_1, ..., V_n$ *eine topologische Sortierung dessen. Durchlaufe die Knoten* V_i *der Reihe nach und setze jeden Knoten auf den am meisten präferierten Wert abhängig von der Belegung seiner Elternknoten. Sei* $o \in Asst(\mathcal{V})$ *die daraus entstehende Belegung. Dann gilt für alle Belegungen* $o' \in Asst(\mathcal{V}) \setminus \{v\}$*:*

$$o \prec_\Gamma o'$$

Ebenso können wir genauso effizient das am meisten präferierte Ergebnis unter einer vorgeschriebenen Teilbelegung $z \in Asst(\mathcal{Z})$, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{V}$ ermitteln:

Theorem 12 (Ausgangsoptimierung unter Teilbelegung [BBD+04]). *Sei* Γ *ein CP-Netzwerk mit* $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$ *und* $V_1, ..., V_n$ *eine topologische Sortierung dessen. Sei* $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{V}$ *und* $z \in Asst(\mathcal{Z})$*. Durchlaufe die Knoten* V_i *der Reihe nach und setze jeden Knoten* $V_i \notin \mathcal{Z}$ *auf den am meisten präferierten Wert abhängig der Belegung seiner Elternknoten. Sei* $zx \in Asst(\mathcal{V})$ *die daraus entstehende Belegung. Dann gilt für alle Belegungen* $x' \in Asst(\mathcal{V} \setminus \mathcal{Z}) \setminus \{x\}$*:*

$$zx \prec_\Gamma zx'$$

Beispiel 10. *Wir wollen bei dem CP-Netzwerk in Abbildung 4.4 die Ausgangsoptimierung anwenden:*

- Ausgangsoptimierung: *Eine mögliche topologische Sortierung des Netzwerks ist* A, B, C*. Im Knoten* A *wird* a *präferiert sowie* b *im Knoten* B*. Unter der Elternbelegung* ab *ist* c *im Knoten* C *der präferierte Wert. Damit ist nach Theorem 11* abc *die am meisten präferierte Belegung des CP-Netzwerks.*

- Ausgangsoptimierung unter Teilbelegung: *Wir halten* $\overline{b} \in Asst(\{B\})$ *als Teilbelegung fest und durchlaufen das Netzwerk wieder anhand der Sortierung* A, B, C. *Im Knoten* A *wird* a *präferiert. Im Knoten* C *wird unter der Elternbelegung* $a\overline{b}$ *der Wert* $\overline{c}$ *präferiert. Damit ist nach Theorem 12* $a\overline{b}\overline{c}$ *die am meisten präferierte Belegung unter der Voraussetzung, dass* $\overline{b}$ *eine Teilbelegung dieser ist.*

4.5 Präferenzieller Vergleich

Die Ausgangsoptimierung ist nicht der einzige Nutzen von CP-Netzwerken. Eine weitere Anfrage an das Netzwerk ist der *präferenzielle Vergleich* zwischen zwei Belegungen $o, o' \in Asst(\mathcal{V})$. o und o' können in einem CP-Netzwerk Γ in drei möglichen Beziehungen zueinander stehen:

1. $o \prec_\Gamma o'$
2. $o' \prec_\Gamma o$
3. $o \not\prec_\Gamma o'$ und $o' \not\prec_\Gamma o$

Der dritte Fall beschreibt die Möglichkeit, dass weder die erste, noch die zweite Beziehung zwischen den beiden Belegungen gilt. Es lässt sich dann nichts über die Präferenz dieser Belegungen aussagen, denn es existieren Präferenzrelationen, die Γ erfüllen, in denen einmal $o \prec o'$ und einmal $o' \prec o$ gilt.

Wir wollen zwei verschiedene Anfragen an ein CP-Netzwerk Γ stellen können:

- *Ordnungsanfragen:* $o' \not\prec_\Gamma o$?
- *Dominanzanfragen:* $o \prec_\Gamma o'$?

4.5.1 Ordnungsanfragen

Ordnungsanfragen sind klar schwächer als Dominanzanfragen. Wenn wir wissen, dass $o \prec_\Gamma o'$ gilt, dann folgt daraus ebenso, dass $o' \not\prec_\Gamma o$ gilt, da in keiner Präferenzrelation, die Γ erfüllt, o' vor o präferiert wird. Wenn wir uns aber nur dafür interessieren, ob eine Belegung gegenüber einer weiteren nicht präferiert wird, dann reichen Ordnungsanfragen vollkommen aus. Sie haben außerdem den Vorteil, besonders effizient zu sein:

Theorem 13 (Ordnungsanfragen [BBD+04]). *Sei* $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$ *ein CP-Netzwerk über einer Variablenmenge* $\mathcal{V}$ *und* $o, o' \in Asst(\mathcal{V})$. *Falls eine Variable* $V \in \mathcal{V}$ *existiert, sodass*

1. *o und o' die gleichen Werte für alle Vorfahren von V belegen und*
2. *abhängig der Werte von $Dom(pa(V))$ in o der Wert von $Dom(V)$ in o mehr präferiert wird als der Wert von $Dom(V)$ in o',*

dann gilt $o' \not\prec_\Gamma o$.

Es ist zu beachten, dass die Rückrichtung dieses Theorems nicht gilt. Wir können auf diese Weise also nicht alle Ordnungsanfragen beantworten. Das nachfolgende Theorem hält diesen Sachverhalt fest:

Theorem 14 ([BBD+04]). *Sei* $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$ *ein CP-Netzwerk und seien* $o, o' \in Asst(\mathcal{V})$ *zwei Belegungen über der Variablenmenge* $\mathcal{V}$. *Dann lässt sich mittels Theorem 13 mindestens eine der Ordnungsanfragen* $o' \not\prec_\Gamma o$ *? oder* $o \not\prec_\Gamma o'$ *? beantworten.*

4.5.2 Dominanzanfragen

Die *ceteris paribus* Semantik bei CP-Netzwerken erlaubt uns, beim Wechsel eines Wertes einer Variablen in einer Belegung sofort zu erkennen, ob die neue Belegung mehr oder weniger präferiert wird als die alte. Dafür muss nur in der entsprechenden *CPT* des Knotens die Ordnung abhängig der Elternbelegung überprüft werden. Alle anderen Werte der Belegungen sind nicht von Interesse, denn es gilt *everything else being equal.*

Definition 35 (Verbessernder Wechsel [BBD+04]). *Sei* $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$ *ein CP-Netzwerk,* $V \in \mathcal{V}$ *und* $\mathcal{Y} = \mathcal{V} \setminus (pa(V) \cup \{V\})$. *Sei* $pvy \in Asst(\mathcal{V})$ *eine beliebige Belegung, wobei* $v \in Asst(V)$, $p \in Asst(pa(V))$ *und* $y \in Asst(\mathcal{Y})$. *Ein* verbessernder Wechsel *ist ein Austausch des Wertes* v *in* pvy *mit* $v' \in Asst(V)$ *zu* $pv'y$, *sodass* $v' \prec_p v$.

Eine verbessernde Wechselfolge *ist eine Folge von Belegungen* $o_1, ..., o_k$, *sodass für alle* $i < k$ *die Belegung* o_{i+1} *ein verbessernder Wechsel von* o_i *ist.*

Analog definiert man den verschlechternden Wechsel *beziehungsweise die* verschlechternde Wechselfolge.

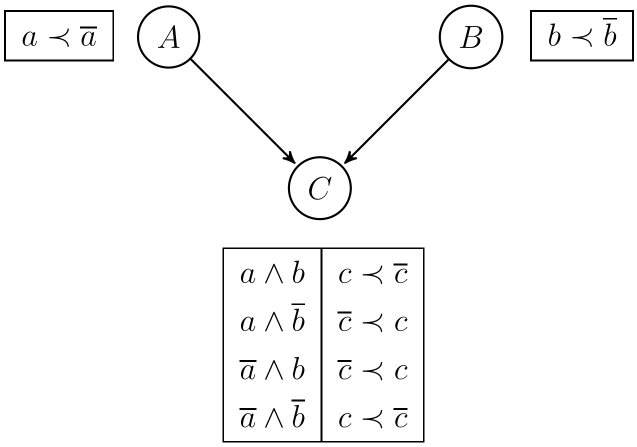


Abbildung 4.5: *Unsere Garderobe* mit vereinfachten Variablennamen

Theorem 15 (Dominanzanfragen [BBD+04])**.** *Sei* $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$ *ein CP-Netzwerk über einer Variablenmenge* $\mathcal{V}$ *und* $o, o' \in Asst(\mathcal{V})$. *Es existiert genau dann eine verbessernde Wechselfolge von* o *nach* o', *wenn* $o' \prec_\Gamma o$. *Ebenso existiert genau dann eine verschlechternde Wechselfolge von* o *nach* o', *wenn* $o \prec_\Gamma o'$.

Beispiel 11. *Wir betrachten das bekannte CP-Netzwerk* Unsere Garderobe *mit vereinfachten Variablennamen (hier noch einmal gegeben in Abbildung 4.5) und stellen folgende Anfragen an das Netzwerk:*

1. $\overline{a}b\overline{c} \not\prec_\Gamma a\overline{b}\,\overline{c}$ *?*

2. $ab\overline{c} \prec_\Gamma a\overline{b}c$ *?*

- Zu 1: *Für den Knoten* A *gilt:*

  1. $\overline{a}b\overline{c}$ *und* $a\overline{b}\,\overline{c}$ *besitzen für alle Vorfahren von* A *die gleichen Werte, denn* A *hat keine Vorgängerknoten.*

  2. *In* $CPT(A)$ *ist* $a \prec \overline{a}$.

  Folglich gilt nach Theorem 13, dass $\overline{a}b\overline{c} \not\prec_\Gamma a\overline{b}\,\overline{c}$. *Analog kann man im Knoten* B *zeigen, dass* $a\overline{b}\,\overline{c} \not\prec_\Gamma \overline{a}b\overline{c}$.

- Zu 2: *Wir suchen eine verbessernde Wechselfolge von* $a\overline{b}c$ *nach* $ab\overline{c}$*:*

  1. $a\overline{b}\,\overline{c} \prec a\overline{b}c$, *denn unter der Elternbelegung* $a\overline{b}$ *wird* $\overline{c}$ *mehr präferiert als* c.

  2. $ab\overline{c} \prec a\overline{b}\,\overline{c}$, *denn im Knoten* B *wird* b *mehr präferiert als* $\overline{b}$ ceteris paribus.

  Damit ist $a\overline{b}c$, $a\overline{b}\,\overline{c}$, $ab\overline{c}$ *eine verbessernde Wechselfolge und nach Theorem 15 gilt dann* $ab\overline{c} \prec_\Gamma a\overline{b}c$.

5 Vergleich der qualitativen Semantiken von OCF- und CP-Netzwerken

In diesem Kapitel wollen wir die beiden kennengelernten Netzwerktypen vergleichen. Um diese prinzipiell miteinander vergleichen zu können, müssen wir zuerst eine Einschränkung vornehmen. Wir haben uns bei OCF-Netzwerken ausschließlich mit aussagenlogischen Variablen beschäftigt. Obwohl wir OCF-Netzwerke auch für mehrwertige Aussagenlogik definieren können, wollen wir den bisherigen Weg beibehalten und beschränken CP-Netzwerke daher auf zweiwertige Domänen, das bedeutet:

$$Dom(V) = \{v, \overline{v}\} \text{ für alle } V \in \mathcal{V}$$

Damit wird eine Variable $V \in \mathcal{V}$ zu einer Aussagenvariable $V \in \Sigma$ und es gilt $\mathcal{V} = \Sigma$. Eine Belegung $o \in Asst(\mathcal{V})$ lässt sich folglich auch als mögliche Welt $\omega \in \Omega$ interpretieren. Die Menge aller Belegungen $Asst(\mathcal{V})$ ist damit äquivalent zu der Menge aller möglichen Welten Ω. Für eine Teilmenge $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ kann dann $x \in Asst(\mathcal{X})$ ebenso als Vollkonjunktion von Literalen über $\mathcal{X}$ verstanden werden. Wir schreiben daher im Folgenden $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ für ein CP-Netzwerk.

In den entsprechenden Unterkapiteln behandeln wir die folgenden Ideen beziehungsweise Ansätze zum Vergleich der beiden Netzwerke:

1. **Umwandlung eines CP-Netzwerks in ein OCF-Netzwerk:** Die Präferenzen in den einzelnen CPTs eines CP-Netzwerks lassen sich statt mit einer Präferenzrelation $\prec$ auch über Zahlenwerte $\rho \in \{0, 1\}$ ausdrücken. In welcher Beziehung steht dieses *numerische CP-Netzwerk* zu einem OCF-Netzwerk?

2. **Umwandlung eines OCF-Netzwerks in ein CP-Netzwerk:** Unter der Voraussetzung, dass keine Indifferenz in den lokalen Rangtabellen eines OCF-Netzwerks modelliert ist, lassen sich die Konditionale in den lokalen Rangta-

bellen in eine Präferenzrelation $\prec$ umwandeln, indem wir für zwei Konditionale mit $\kappa(b|a) < \kappa(\overline{b}|a)$ die Präferenz $b \prec \overline{b}$ unter der Elternbelegung a in den einzelnen *CPT*s angeben. Lässt sich damit jedes OCF-Netzwerk in ein CP-Netzwerk überführen?

3. **Vergleich der Erfüllbarkeit von CP-Netzwerken und der Konsistenz von OCF-Netzen:** Wir wollen in diesem Abschnitt prüfen, ob die umgewandelten Netzwerke weiterhin stets erfüllbar beziehungsweise konsistent sind.

4. **Lassen sich ähnliche Konzepte wie Stratifikationen auch im Rahmen von CP-Netzwerken finden?** Durch Stratifikation und die lokal gerichtete Markov-Bedingung gibt es in den OCF-Netzwerken eine Möglichkeit, eine eindeutige globale Rangfunktion zu finden. In CP-Netzwerken haben wir möglicherweise mehrere Präferenzrelationen, die das Netzwerk erfüllen. Können wir für ein CP-Netzwerk auch eine *stratifizierte Präferenzrelation* finden?

5. **Lassen sich Plausibilätsanfragen in OCF-Netzwerken ähnlich wie Präferenzanfragen in CP-Netzwerken beantworten?** Um in OCF-Netzwerken zu überprüfen, welche von zwei Welten plausibler ist, muss zuvor die stratifizierte Rangfunktion berechnet werden. Dies kann in großen Netzwerken sehr aufwendig sein. Können wir ähnlich effizient wie in CP-Netzwerken erkennen, welche Welt für plausibler gehalten wird?

6. **Vergleich der Präferenzen/Plausibilitäten der Netzwerke:** CP- beziehungsweise OCF-Netzwerke müssen nach Modellierung des gleichen Sachverhaltes nicht zwangsläufig die gleichen Ergebnisse liefern. Wir wollen untersuchen, inwiefern Präferenzen der CP-Netzwerke und Plausibilitäten der OCF-Netzwerke gemeinsame Folgerungen liefern.

7. **Vergleich der beiden Netzwerke bei Indifferenz:** In OCF-Netzwerken kann Unwissen oder Indifferenz bezüglich $(b|a)$ oder $(\overline{b}|a)$ leicht modelliert werden, in dem den Rängen der beiden Konditionale in den lokalen Rangtabellen der Rang 0 zugeordnet wird. In CP-Netzwerken ist Indifferenz nur bedingt anwendbar und führt möglicherweise zu nicht erfüllbaren Netzwerken. Wir wollen Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Netzwerke untersuchen, wenn wir Indifferenz zulassen.

5.1 Umwandlung eines CP-Netzwerks in ein OCF-Netzwerk

Die Präferenzen in den einzelnen CPTs lassen sich statt mit einer Präferenzrelation $\prec$ auch über Zahlenwerte $\rho \in \{0, 1\}$ ausdrücken.

Definition 36. *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ ein CP-Netzwerk und $\prec_p$ eine Präferenzrelation einer Variablen $V \in \Sigma$ unter einer Elternbelegung $p \in Asst(pa(V))$. Eine Abbildung $\rho_V : (Asst(V)|Asst(pa(V))) \to \{0, 1\}$* erfüllt die Präferenzrelation *$\prec_p$ genau dann, wenn:*

$$\begin{aligned} &\rho_V(v|p) < \rho_V(\overline{v}|p), \text{ wenn } v \prec_p \overline{v} \\ &\rho_V(v|p) > \rho_V(\overline{v}|p), \text{ sonst} \end{aligned} \tag{5.1}$$

ρ_V erfüllt die Präferenztabelle $CPT(V)$, *falls ρ_V die Präferenzrelation $\prec_p$ der Variablen V für jede Elternbelegung $p \in Asst(pa(V))$ erfüllt.*

Eine Abbildung ρ_V zu generieren, die ein $CPT(V)$ erfüllt, ist relativ einfach. Dafür ordnen wir für jede Elternbelegung in der CPT dem präferierten Wert analog zu den OCFs stets den kleineren Zahlenwert zu. Der Präferenzrelation $\prec$ in CP-Netzwerken fehlt aber die Stärke der Präferenz, weswegen wir uns mit den Werten 0 und 1 zufrieden geben müssen.

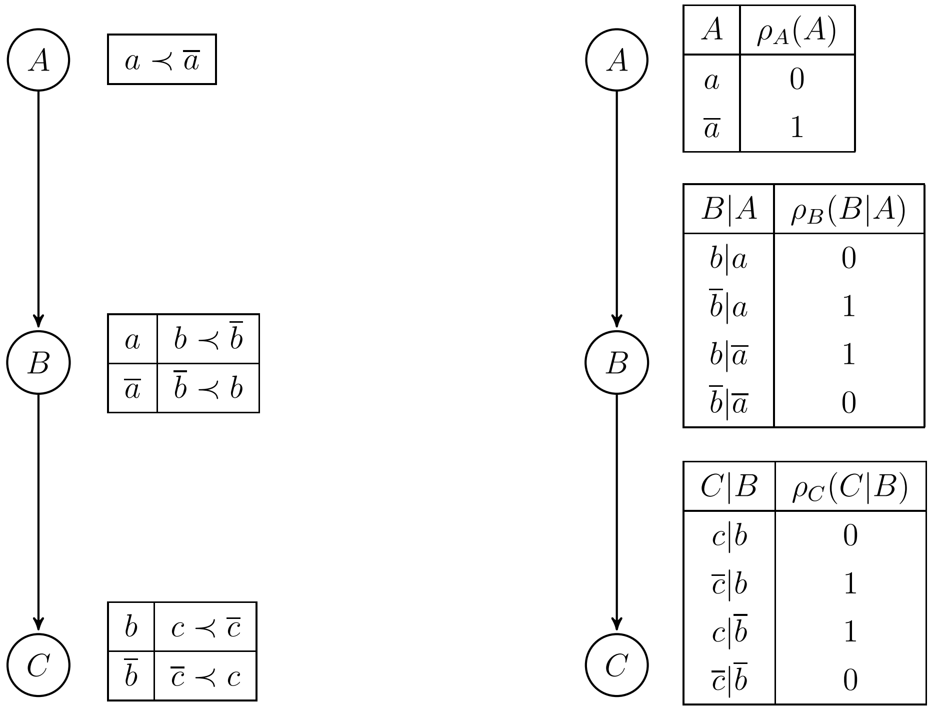
Definition 37 (Numerisches CP-Netzwerk)**.** *Sei $\Sigma = \{V_1, ..., V_n\}$ eine Menge von Variablen. Ein DAG $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\rho_V\}_{V \in \Sigma})$ ist ein* numerisches CP-Netzwerk, *falls für jeden Knoten $V \in \Sigma$ eine Abbildung $\rho_V : (Asst(V)|Asst(pa(V))) \to \{0, 1\}$ existiert, sodass*

$$\rho_V(v|p) \neq \rho_V(\overline{v}|p) \text{ für jede Belegung } p \in Asst(pa(V)).$$

Theorem 16. *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ ein CP-Netzwerk. Erfülle für jeden Knoten $V \in \Sigma$ die Abbildung ρ_V die konditionale Präferenztabelle $CPT(V)$ nach* (5.1)*. Dann ist $\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\rho_V\}_{V \in \Sigma})$ das aus Γ gewonnene numerische CP-Netzwerk.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass Γ' ein numerisches CP-Netzwerk ist. Da ρ_V die Präferenztabelle $CPT(V)$ nach (5.1) erfüllt, folgt sofort, dass $\rho_V(v|p) \neq \rho_V(\overline{v}|p)$ für jeden Knoten $V \in \Sigma$ und jede Belegung $p \in Asst(pa(V))$. Damit ist Γ' numerisch. $\square$

Ein numerisches CP-Netzwerk entsteht also aus einem CP-Netzwerk, in dem die konditionalen Präferenztabellen $CPT(V)$ für jeden Knoten $V \in \Sigma$ durch Abbildungen ρ_V ersetzt werden, die die einzelnen CPTs erfüllen. Abbildung 5.1 zeigt die Umwandlung eines CP-Netzwerks in ein numerisches CP-Netzwerk.



(a) CP-Netzwerk (b) numerisches CP-Netzwerk

Abbildung 5.1: Umwandlung eines CP-Netzwerks in ein numerisches CP-Netzwerk

Theorem 17. *Jedes numerische CP-Netzwerk ist ein OCF-Netzwerk. Dieses OCF-Netzwerk ist* 0-1-*basiert.*

Beweis. Sei $\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\rho_V\}_{V \in \Sigma})$ ein numerisches CP-Netzwerk. Für den Beweis des Theorems müssen wir zwei Sachverhalte zeigen:

1. $\rho_V(v|p) = 0$ oder $\rho_V(\overline{v}|p) = 0$ für alle $V \in \Sigma$ und alle $p \in Asst(pa(V))$
2. Es existiert eine Welt $\omega \in \Omega$, sodass $\sum_{V \in \Sigma} \rho_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) = 0$.

- *Zu 1:* Folgt sofort daraus, dass ρ_V die Präferenzrelationen des Knotens V unter jeder Elternbelegung erfüllt. Damit ist $\min\{\rho_V(v|p), \rho_V(\overline{v}|p)\} = 0$ für jede Elternbelegung $p \in Asst(pa(V))$ (vergleiche Definition 36).
- *Zu 2:* Wir können eine Welt $\omega \in \Omega$ so konstruieren, dass die Bedingung gilt. Der Beweis wird durch Algorithmus 1 GeneriereWelt gegeben.

  Zu jeder Elternbelegung $p \in Asst(pa(V))$ einer Variablen $V \in \Sigma$ gilt nach Punkt 1 $\rho_V(v|p) = 0$ oder $\rho_V(\overline{v}|p) = 0$. Aufgrund der topologischen Sortierung des Graphen können wir dadurch in jedem Knoten V das Literal v oder $\overline{v}$ aufnehmen, welches in ρ_V gegeben der bereits gefundenen Elternbelegung den Wert 0 liefert.

Algorithmus 1 GENERIEREWELT

Input: numerisches CP-Netzwerk $\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\rho_V\}_{V \in \Sigma})$

Output: Welt $\omega \in \Omega$, sodass $\sum_{V \in \Sigma} \rho_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) = 0$

Berechne topologische Sortierung $V_1, ..., V_n$ von Γ'

$\omega \leftarrow \top$

for $i \leftarrow 1$ to n **do** ▷ Es gilt wegen Definition 37

  if $\rho_{V_i}(v_i|pa(V_i)(\omega)) = 0$ **then** ▷ entweder $\rho_{V_i}(v_i|pa(V_i)(\omega)) = 0$

    $\omega \leftarrow \omega \wedge v_i$

  else ▷ oder $\rho_{V_i}(\overline{v_i}|pa(V_i)(\omega)) = 0$

    $\omega \leftarrow \omega \wedge \overline{v_i}$

  end if

end for

return ω

Aufgrund der Einschränkung der Zielmenge der Abbildung ρ_V auf $\{0, 1\}$ ist dieses OCF-Netzwerk 0-1-basiert. □

5.2 Umwandlung eines OCF-Netzwerks in ein CP-Netzwerk

Nachdem wir die Umwandlung eines CP-Netzwerks in ein OCF-Netzwerk in Kapitel 5.1 betrachtet haben, wollen wir uns nun mit der entgegengesetzen Richtung beschäftigen. Dabei führt der gängige Gebrauch von Indifferenz in OCF-Netzwerken gleich zu einer ersten wichtigen Erkenntnis:

Theorem 18. *Ein OCF-Netzwerk* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ *lässt sich nicht allgemein in ein CP-Netzwerk* $\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ *so überführen, dass für alle* $V \in \Sigma$ *und alle* $p \in Asst(pa(V))$ *gilt:*

$$\text{Falls } \kappa_V(v|p) = \kappa_V(\overline{v}|p), \text{ dann } v \not\prec_p \overline{v} \text{ und } \overline{v} \not\prec_p v \tag{5.2}$$

Beweis. Für ein CP-Netzwerk gilt für alle $V \in \Sigma$ und alle $p \in Asst(pa(V))$, dass $v \prec_p \overline{v}$ oder $\overline{v} \prec_p v$ (vergleiche Definition 30). Sei Γ ein OCF-Netzwerk mit Knoten $V \in \Sigma$ und Elternbelegung $p \in Asst(pa(V))$, sodass $\kappa_V(v|p) = \kappa_V(\overline{v}|p)$. Dann kann Bedingung (5.2) nicht erfüllt werden. □

Wir müssen für die Umwandlung in ein CP-Netzwerk ohne Indifferenz folglich die Indifferenz in OCF-Netzwerken ausschließen und machen daher folgende *Einschränk-*

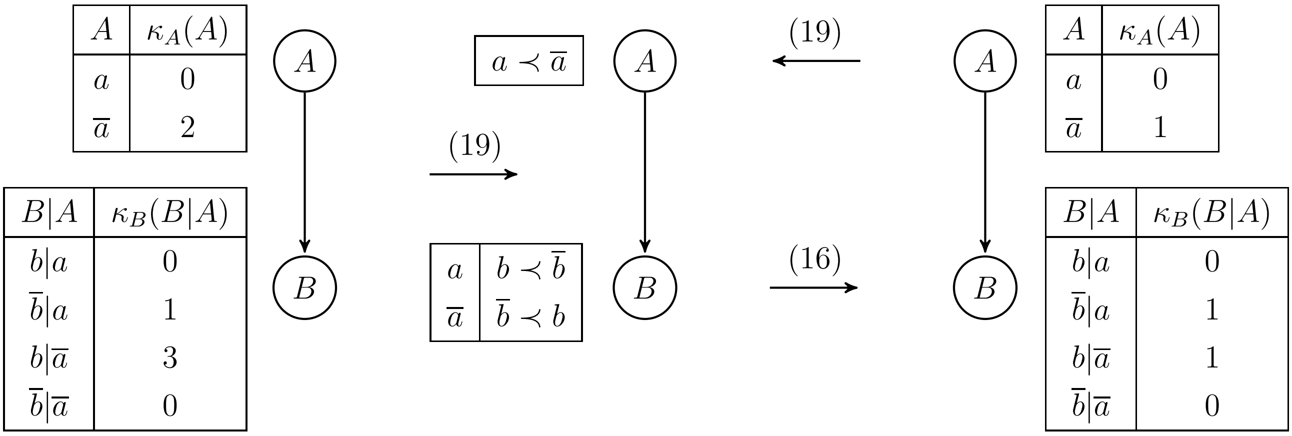


Abbildung 5.2: Umwandlungen der einzelnen Netzwerke

ung der lokalen Rangtabellen:

$$\kappa_V(v|pa(V)(\omega)) \neq \kappa_V(\overline{v}|pa(V)(\omega)) \text{ für alle } V \in \Sigma \text{ und alle } \omega \in \Omega \tag{5.3}$$

Theorem 19. *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ *ein OCF-Netzwerk mit Einschränkung* (5.3). *Dann können wir für jeden Knoten* $V \in \Sigma$ *konditionale Präferenztabellen* $CPT(V)$ *anlegen, sodass für jede Elternbelegung* $p \in Asst(pa(V))$ *gilt:*

$$v \prec_p \overline{v} \text{ genau dann, wenn } \kappa_V(v|p) < \kappa_V(\overline{v}|p)$$

$\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V\in\Sigma})$ *ist dann ein CP-Netzwerk.*

Beweis. Γ' ist nach Definition 30 ein CP-Netzwerk, falls für jeden Knoten $V \in \Sigma$ eine Präferenztabelle $CPT(V)$ existiert, die eine Präferenzrelation $\prec_p$ der Belegung $Asst(V)$ für jede Belegung $p \in Asst(pa(V))$ angibt. Wir müssen also lediglich prüfen, ob in unseren Präferenztabellen eine solche Präferenzrelation angegeben wird. Mit der Einschränkung der lokalen Rangtabellen (5.3) folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} &\kappa_V(v|pa(V)(\omega)) < \kappa_V(\overline{v}|pa(V)(\omega)) \text{ oder} \\ &\kappa_V(v|pa(V)(\omega)) > \kappa_V(\overline{v}|pa(V)(\omega)) \text{ für alle } V \in \Sigma \text{ und alle } \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Damit kann stets eine Präferenzrelation $\prec_p$ der Literalen für jede Elternbelegung p angegeben werden. □

Unter der gegebenen Einschränkung der lokalen Rangtabellen (5.3) lassen sich OCF-Netzwerke folglich in CP-Netzwerke überführen. Wir wollen nun überprüfen, ob Informationen bei der Umwandlung der beiden Netzwerke erhalten bleiben oder verloren gehen.

Abbildung 5.2 zeigt dafür die sich ergebenden Umwandlungen der beiden Netzwerktypen. Das OCF-Netzwerk links lässt sich nach Theorem 19 in das abgebildete CP-Netzwerk in der Mitte umwandeln. Eine Umwandlung dieses CP-Netzwerks in ein OCF-Netzwerk nach Theorem 16 liefert uns das rechte 0-1-basierte OCF-Netzwerk. Alle weiteren Umwandlungen ab diesem Netzwerk verhalten sich zyklisch. Das führt zu zwei wichtigen Erkenntnissen:

Proposition 1. *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ *ein CP-Netzwerk. Sei nach Umwandlung* $\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ *das aus* Γ *entstehende OCF-Netzwerk und sei dann* $\Gamma'' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ *das aus* Γ' *entstehende CP-Netzwerk. Dann gilt* $\Gamma = \Gamma''$.

Beweis. Sei $V \in \Sigma$ und $p \in Asst(pa(V))$. Es gelte $v \prec_p \overline{v}$ in Γ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Für Γ' ist dann $\kappa_V(v|p) < \kappa_V(\overline{v}|p)$ nach Definition 36 und Theorem 16. Nach Theorem 19 gilt dann für Γ'': $v \prec_p \overline{v}$. □

Proposition 2. *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ *ein* 0-1-*basiertes OCF-Netzwerk. Sei nach Umwandlung* $\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ *das aus* Γ *entstehende CP-Netzwerk und sei dann* $\Gamma'' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ *das aus* Γ' *entstehende OCF-Netzwerk. Dann gilt* $\Gamma = \Gamma''$.

Beweis. Sei $V \in \Sigma$ und $\omega \in \Omega$. Es gelte $0 = \kappa_V(v|pa(V)(\omega)) < \kappa_V(\overline{v}|pa(V)(\omega)) = 1$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Für Γ' ist dann $v \prec_{pa(V)(\omega)} \overline{v}$ nach Theorem 19. Dann gilt $0 = \kappa_V(v|pa(V)(\omega)) < \kappa_V(\overline{v}|pa(V)(\omega)) = 1$ in Γ'' nach Definition 36 und Theorem 16. □

Wir stellen fest, dass Proposition 2 auf 0-1-basierte OCF-Netzwerke eingeschränkt ist. Das hat die Ursache, dass ein OCF-Netzwerk durch Umwandlung in ein CP-Netzwerk die Höhe der einzelnen Ränge verliert. Nach Theorem 17 wissen wir, dass OCF-Netzwerke, die aus CP-Netzwerken entstehen, immer 0-1-basiert sind.

5.3 Vergleich der Erfüllbarkeit von CP-Netzwerken und der Konsistenz von OCF-Netzen

In den vorherigen Kapiteln haben wir festgestellt, dass wir die beiden Netzwerktypen ineinander überführen können. Wir wollen uns nun dem semantischen Vergleich nähern und prüfen zuerst, ob die überführten Netzwerke konsistent beziehungsweise erfüllbar sind. Diese Frage lässt sich jedoch relativ schnell beantworten. Jedes CP-Netzwerk ist nach Theorem 9 erfüllbar, ebenso besitzt auch jedes OCF-Netzwerk eine stratifizierte Rangfunktion und ist damit konsistent (vergleiche Theorem 6).

Korollar 1. *Ein aus einem CP-Netzwerk gewonnenes OCF-Netzwerk ist konsistent.*

Beweis. Nach Umwandlung ist das CP-Netzwerk ein 0-1-basiertes OCF-Netzwerk (vergleiche Theorem 17). Folglich existiert eine stratifizierte Rangfunktion für dieses OCF-Netzwerk. Das Netzwerk ist demnach nach Theorem 6 konsistent. □

Korollar 2. *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ *ein OCF-Netzwerk mit Einschränkung der lokalen Rangtabellen* (5.3). *Das aus* Γ *gewonnene CP-Netzwerk ist erfüllbar.*

Beweis. Nach Umwandlung ist das OCF-Netzwerk ein CP-Netzwerk ohne Indifferenz (vergleiche Theorem 19). Nach Theorem 9 ist dieses Netzwerk demnach erfüllbar. □

Lassen wir die Einschränkung der lokalen Rangtabellen (5.3) weg und erlauben CP-Netzwerke mit Indifferenz, so gilt obiges Theorem nicht mehr. Wir zeigen folgenden Sachverhalt in einem Beispiel:

Beispiel 12. *Wir betrachten das bereits bekannte Beispiel 9* Unser Abendessen mit Indifferenz. *Dabei werden die beiden Entscheidungsmerkmale zu Aussagenvariablen ummodelliert. Das Beispiel würde in den beiden Netzwerktypen wie folgt repräsentiert werden:*

$$
\begin{array}{lcl}
i \sim \overline{i} & \qquad & \kappa_I(i) = 0,\ \kappa_I(\overline{i}) = 0 \\
i : w \prec \overline{w} & & \kappa_W(w|i) = 0,\ \kappa_W(\overline{w}|i) = 1 \\
\overline{i} : \overline{w} \prec w & & \kappa_W(\overline{w}|\overline{i}) = 0,\ \kappa_W(w|\overline{i}) = 1
\end{array}
$$

Für das OCF-Netzwerk existiert die stratifizierte Rangfunktion κ*:*

ω	iw	$i\overline{w}$	$\overline{i}w$	$\overline{i}\,\overline{w}$
$\kappa(\omega)$	0	1	1	0

Hingegen existiert bekanntermaßen keine Präferenzrelation mit Indifferenz $\preceq$*, die das CP-Netzwerk erfüllt.*

Wir nähern uns dem Vergleich der beiden Netzwerke bei Indifferenz in Kapitel 5.7.

5.4 Stratifikation in CP-Netzwerken

Als Einführung betrachten wir das bekannte CP-Netzwerk aus Abbildung 5.1. Das CP-Netzwerk besitzt zwei Präferenzrelationen, die es erfüllen:

$$
abc \prec ab\overline{c} \prec a\overline{b}\overline{c} \prec \begin{array}{c} a\overline{b}c \prec \overline{a}\overline{b}\overline{c} \\ \overline{a}\overline{b}\overline{c} \prec a\overline{b}c \end{array} \prec \overline{a}\overline{b}c \prec \overline{a}bc \prec \overline{a}b\overline{c}
$$

Es fällt auf, das sich die Relationen nur in einigen Welten unterscheiden. In unserem Beispiel gilt als einziger Unterschied einmal die Präferenz von $a\overline{b}c$ gegenüber $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ und umgekehrt. Die beiden Welten sind wegen $a\overline{b}c \not\prec_\Gamma \overline{a}\overline{b}\overline{c}$ und $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \not\prec_\Gamma a\overline{b}c$ global betrachtet indifferent. Wir können für dieses Beispiel folglich eine eindeutige Präferenzrelation mit Indifferenz $\preceq$ definieren, die die Präferenzen aus $\prec_\Gamma$ beschreibt:

$$abc \prec ab\overline{c} \prec a\overline{b}\,\overline{c} \prec a\overline{b}c \sim \overline{a}\overline{b}\overline{c} \prec \overline{a}\overline{b}c \prec \overline{a}bc \prec \overline{a}b\overline{c}$$

Wir haben Präferenzrelationen, die ein CP-Netzwerk erfüllen, beispielhaft auf eine eindeutige reduziert. Es lässt sich daraus exemplarisch eine Rangfunktion gewinnen, die den gleichen Sachverhalt simuliert:

ω	abc	$ab\overline{c}$	$a\overline{b}\,\overline{c}$	$a\overline{b}c$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$	$\overline{a}\overline{b}c$	$\overline{a}bc$	$\overline{a}b\overline{c}$
$\kappa(\omega)$	0	1	2	3	3	4	5	6

Wir wollen diesen Gedankengang formal präzisieren.

Theorem 20. *Seien $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$ geordnete disjunkte Teilmengen von Ω und es gelte weiterhin $\mathcal{X}_1 \cup ... \cup \mathcal{X}_n = \Omega$. Sei $\preceq$ eine Relation auf Ω, sodass $\omega \prec \omega'$ für alle $\omega \in \mathcal{X}_i$ und $\omega' \in \mathcal{X}_j$ mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\omega \sim \omega'$ für alle $\omega, \omega' \in \mathcal{X}_i$, $1 \leq i \leq n$. Dann ist $\preceq$ eine Präferenzrelation mit Indifferenz.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und total ist:

- **Reflexivität:** Für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $\omega \in \mathcal{X}_i$ gilt $\omega \sim \omega$, damit $\preceq$ reflexiv.

- **Transitivität:** Für alle $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{X}_i$ gilt $\omega_1 \sim \omega_2$. Damit ist $\preceq$ auf $\mathcal{X}_i$ transitiv. Für alle $\omega_1 \in \mathcal{X}_i$ und alle $\omega_2 \in \mathcal{X}_j$ mit $i < j$ gilt $\omega_1 \prec \omega_2$. Mit der Transitivität auf $\mathcal{X}_i$ und $\mathcal{X}_j$ folgt sofort, dass $\preceq$ auch auf $\mathcal{X}_i \cup \mathcal{X}_j$ transitiv ist. Für alle $\omega_1 \in \mathcal{X}_i$, $\omega_2 \in \mathcal{X}_j$ und $\omega_3 \in \mathcal{X}_k$ mit $i < j < k$ gilt $\omega_1 \prec \omega_2$, $\omega_2 \prec \omega_3$ und $\omega_1 \prec \omega_3$. Damit ist $\preceq$ transitiv.

- **Totalität:** Für alle $\omega \in \mathcal{X}_i$ und $\omega' \in \mathcal{X}_j$ mit $i \leq j$ gilt $\omega \preceq \omega'$. Damit ist $\omega \preceq \omega'$ oder $\omega' \preceq \omega$ für alle $\omega, \omega' \in \Omega$. Folglich $\preceq$ total.

□

Dieses Theorem hilft uns bei der Definition einer stratifizierten Präferenzrelation $\preceq_s$ zu einem CP-Netzwerk:

Definition 38 (Stratifizierte Präferenzrelation $\preceq_s$)**.** *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ ein CP-Netzwerk. Seien $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$ geordnete disjunkte Teilmengen von Ω, sodass $\mathcal{X}_1 \cup ... \cup \mathcal{X}_n = \Omega$. Sei $\preceq_s$ die daraus entstehende Präferenzrelation mit Indifferenz nach Theorem 20.*

Wir nennen $\preceq_s$ genau dann stratifiziert zu Γ, *wenn für alle $\omega \in \mathcal{X}_i$ und alle $\omega' \in \mathcal{X}_j$, $1 \leq i < j \leq n$, gilt, dass*

$$\omega \prec_\Gamma \omega'$$

und für alle $1 \leq i \leq n$ keine Menge $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_i$ existiert, sodass für alle $\omega \in \mathcal{X}$ und alle $\omega' \in \mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}$ gilt, dass

$$\omega \prec_\Gamma \omega' \textit{(Minimalität).}$$

Wir suchen also jeweils nach den kleinsten Mengen, deren Welten zu allen nachfolgenden Welten präferiert werden. Dabei fordern wir aber nicht, dass $\omega \sim_s \omega'$ für alle $\omega, \omega' \in \mathcal{X}_i$. Das nachfolgende Beispiel soll dies verdeutlichen:

Beispiel 13. *Wir betrachten das bekannte Beispiel bezüglich Abbildung 4.4 erneut. Wir hatten für dieses Beispiel sechs Präferenzrelationen ermittelt, die das Netzwerk erfüllen:*

$$abc \prec ab\overline{c} \prec \begin{array}{c} \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \prec \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc} \\ \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \prec \underline{\overline{a}bc} \\ \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \\ \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \prec \underline{\overline{a}bc} \\ \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \\ \underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec \underline{\overline{a}bc} \prec \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec \boldsymbol{a\overline{b}c} \end{array} \prec \overline{a}\overline{b}c \prec \overline{a}\overline{b}\overline{c}$$

Eine stratifizierte Präferenzrelation $\preceq_s$ zu diesem Netzwerk sieht dann wie folgt aus:

$$abc \prec_s ab\overline{c} \prec_s \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \sim_s \underline{\overline{a}b\overline{c}} \sim_s \underline{\overline{a}bc} \sim_s \boldsymbol{a\overline{b}c} \prec_s \overline{a}\overline{b}c \prec_s \overline{a}\overline{b}\overline{c}$$

Wir stellen fest, dass die Folgerungen $\boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \prec_\Gamma \boldsymbol{a\overline{b}c}$ und $\underline{\overline{a}b\overline{c}} \prec_\Gamma \underline{\overline{a}bc}$ in der stratifizierten Präferenzrelation $\preceq_s$ verloren gehen. Eine stratifizierte Präferenzrelation zu Γ, die auf diese Präferenzen Rücksicht nimmt, existiert aber nicht, da $\boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \not\prec_\Gamma \underline{\overline{a}b\overline{c}}$ und $\underline{\overline{a}b\overline{c}} \not\prec_\Gamma \boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}}$ sowie $\underline{\overline{a}bc} \not\prec_\Gamma \boldsymbol{a\overline{b}c}$ und $\boldsymbol{a\overline{b}c} \not\prec_\Gamma \underline{\overline{a}bc}$. Weiter gilt $\boldsymbol{a\overline{b}\overline{c}} \not\prec_\Gamma \underline{\overline{a}bc}$. Damit finden wir keine kleineren Mengen für diese vier Welten, die die Eigenschaften einer stratifizierten Präferenzrelation berücksichtigen. Damit ist $\preceq_s$ desweiteren für dieses Beispiel eindeutig.

Die Tatsache, dass Präferenzen einzelner Welten in stratifizierten Präferenzrelationen verloren gehen können, ist eine wichtige Erkenntnis. Wir zeigen im Folgenden die

Existenz und Eindeutigkeit einer stratifizierten Präferenzrelation zu einem CP-Netzwerk:

Theorem 21. *Zu jedem CP-Netzwerk* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ *existiert eine stratifizierte Präferenzrelation* $\preceq_s$.

Beweis. Da jedes CP-Netzwerk erfüllbar ist, gibt es stets mindestens eine Präferenzrelation, welche es erfüllt. Gibt es nur eine Präferenzrelation, die Γ erfüllt, so ist diese zugleich stratifiziert, denn für jedes $\omega \in \Omega$ gilt für alle $\omega' \in \Omega \backslash \{\omega\}$ entweder $\omega \prec_\Gamma \omega'$ oder $\omega' \prec_\Gamma \omega$ und wir erhalten folglich stets einelementige Mengen $\mathcal{X}_i$. Für alle anderen Fälle wird der Beweis durch Algorithmus 2 gegeben.

Die Funktion GETFIRST($\prec$) liefert uns die am meisten präferierte Welt in der Präferenzrelation $\prec$. Eine solche Welt existiert aufgrund der eindeutigen Sortierung der Welten in $\prec$ immer. Um Welten aus einer Präferenzrelation zu löschen, reduziert DELETE($\omega, \prec$) die Präferenzrelation $\prec \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ auf $\mathcal{Y} \setminus \omega$, wobei $\mathcal{Y} \subseteq \Omega$.

Wir zeigen nun, dass uns der Algorithmus 2 auf Seite 50 wirklich eine stratifizierte Präferenzrelation $\preceq_s$ liefert. Dafür ist zu zeigen:

1. Für alle $\omega \in \mathcal{X}_i$ und alle $\omega' \in \mathcal{X}_j$, $1 \leq i < j < k$ gilt:
$$\omega \prec_\Gamma \omega' \tag{5.4}$$

2. Für alle $1 \leq i < k$ existiert keine Menge $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_i$, sodass für alle $\omega \in \mathcal{X}$ und alle $\omega' \in \mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}$ gilt, dass
$$\omega \prec_\Gamma \omega' \tag{5.5}$$

- *Zu 1:* Zu jedem Zeitpunkt ist $\mathcal{Y} = \Omega \setminus (\mathcal{X}_1 \cup ... \cup \mathcal{X}_i)$. Das bedeutet: Für jedes $\omega \in \mathcal{X}_j$ mit $i < j$ gilt $\omega \in \mathcal{Y}$. Die Schleife in Zeile 10 und die Überprüfung in Zeile 11 garantieren uns, dass für alle $\omega \in \mathcal{X}_i$ und alle $\omega' \in \mathcal{X}_j$ mit $i < j$ folgt, dass $\omega \prec_\Gamma \omega'$.

- *Zu 2:* Für eine Menge $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_i$ mit der Eigenschaft (5.5) gilt insbesondere, dass $\omega \prec \omega'$ für alle $\omega \in \mathcal{X}$ und alle $\omega' \in \mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}$. Das bedeutet, dass wir im Algorithmus die Welten in der Menge $\mathcal{X}$ mit Eigenschaft (5.5) vor jedem Element in $\mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}$ durchlaufen würden. Der Algorithmus schließt die Menge $\mathcal{X}_i$ aber sofort, falls die Bedingung (5.4) verletzt ist. Damit ist $\mathcal{X}_i$ minimal.

□

Algorithmus 2 KONSTRUIERESTRATIFIZIERTEPRÄFERENZRELATION

Input: $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$, $\prec$ eine Präferenzrelation, die Γ erfüllt
Output: stratifizierte Präferenzrelation $\preceq_s$ zu Γ

$\mathcal{Y} \leftarrow \Omega$
$\mathcal{X}_1 \leftarrow \emptyset$
$i \leftarrow 1$
while $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ **do** ▷ Durchlaufe alle Welten
    $\omega \leftarrow$ GETFIRST($\prec$) ▷ in der Reihenfolge von $\prec$
    $\mathcal{X}_i \leftarrow \mathcal{X}_i \cup \{\omega\}$ ▷ und nehme sie in $\mathcal{X}_i$ auf.
    $\mathcal{Y} \leftarrow \mathcal{Y} \setminus \{\omega\}$
    $\prec \leftarrow$ DELETE($\omega, \prec$)
    präferiert $\leftarrow$ *true*
    for all $\omega \in \mathcal{X}_i$ **and** $\omega' \in \mathcal{Y}$ **do** ▷ Falls alle Welten in $\mathcal{X}_i$ zu den
        if $\omega \not\prec_\Gamma \omega'$ **then** ▷ nachfolgenden Welten präferiert werden,
            präferiert $\leftarrow$ *false*
        end if
    end for
    if präferiert = *true* **then**
        $i \leftarrow i + 1$ ▷ wird die Menge abgeschlossen.
        $\mathcal{X}_i \leftarrow \emptyset$
    end if
end while
Berechne $\preceq_s$ aus $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_i$
return $\preceq_s$

Theorem 22. *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ *ein CP-Netzwerk. Eine stratifizierte Präferenzrelation* $\preceq_s$ *zu* Γ *ist eindeutig.*

Beweis durch Widerspruch. Seien $\preceq_{s_1}$ und $\preceq_{s_2}$ zwei unterschiedliche stratifizierte Präferenzrelationen zu Γ und seien $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$ und $\mathcal{Y}_1, ..., \mathcal{Y}_m$ die geordneten disjunkten Teilmengen zu $\preceq_{s_1}$ und $\preceq_{s_2}$. Sei $\omega \in \Omega$ das erste Auftreten einer Welt, sodass $\omega \in \mathcal{X}_i$ und $\omega \notin \mathcal{Y}_i$, sondern $\omega \in \mathcal{Y}_j$ mit $i < j$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit). Dann ist offensichtlich $\mathcal{X}_k = \mathcal{Y}_k$ für alle $1 \leq k < i$ und $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{Y}_i$. Für alle $\omega' \in \mathcal{Y}_i \cup ... \cup \mathcal{Y}_{j-1}$ gilt, dass $\omega' \prec_\Gamma \omega$ nach Voraussetzung einer stratifizierten Präferenzrelation. Daraus folgt sofort, dass $\mathcal{Y}_i \cup ... \cup \mathcal{Y}_{j-1} \cup \{\omega\} \subseteq \mathcal{X}_i$, denn sonst wäre $\preceq_{s_1}$ nicht stratifiziert. Analog gilt für alle $\omega' \in \mathcal{Y}_{j+1} \cup ... \cup \mathcal{Y}_m$, dass $\omega'' \prec_\Gamma \omega'$ für alle $\omega'' \in \mathcal{Y}_1 \cup ... \cup \mathcal{Y}_j$ und folglich sind alle ω' nicht in $\mathcal{X}_i$ enthalten. Wir sehen nun, dass $\mathcal{X}_i = \mathcal{Y}_i \cup ... \cup \mathcal{Y}_j$, denn sonst wäre $\mathcal{Y}_j$ nicht minimal. Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von $\mathcal{X}_i$, denn wir finden offensichtlich Partitionierungen, die (5.5) nicht verletzen. □

Nun wo wir stratifizierte Präferenzrelationen kennengelernt haben, können wir diese mit den stratifizierten Rangfunktionen von OCF-Netzwerken vergleichen. Hierfür beschäftigen wir uns zuerst mit der Umwandlung der beiden Stratifikationen in die jeweils andere Darstellungsform. Der semantische Vergleich der entstehenden Stratifikationen bei syntaktisch äquivalenten Netzwerken wird in Kapitel 5.6 behandelt.

Theorem 23. *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ ein CP-Netzwerk und $\preceq_s$ die stratifizierte Präferenzrelation dessen. Seien diesbezüglich $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$ die geordneten disjunkten Teilmengen von Ω analog zu Definition 38. Sei $\kappa \colon \Omega \to \mathbb{N}_0^\infty$ eine Abbildung, sodass*

$$\kappa(\omega) = i - 1 \text{ für eine Welt } \omega \in \mathcal{X}_i.$$

Dann ist κ eine OCF und für alle Welten $\omega, \omega' \in \Omega$ gilt:

$$\omega \preceq_s \omega' \text{ genau dann, wenn } \kappa(\omega) \leq \kappa(\omega')$$

Beweis. Wir sehen leicht, dass κ eine OCF ist, denn für alle Welten $\omega \in \mathcal{X}_1$ ist $\kappa(\omega) = 0$, folglich $\kappa^{-1}(0) \neq \emptyset$. Für zwei Welten $\omega \in \mathcal{X}_i$ und $\omega' \in \mathcal{X}_j$ gilt, dass

$$\begin{gathered} i \leq j \text{ genau dann, wenn} \\ \omega \preceq_s \omega' \text{ genau dann, wenn} \\ \kappa(\omega) \leq \kappa(\omega'). \end{gathered}$$

□

Ebenso lässt sich eine gegebene Rangfunktion κ in eine Präferenzrelation mit Indifferenz $\preceq_\kappa$ umwandeln:

Theorem 24. *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ ein OCF-Netzwerk und κ die stratifizierte Rangfunktion zu diesem Netzwerk. Sei $\mathcal{X}_i = \{\omega \mid \kappa(\omega) = i - 1\}$. Sei $\preceq_\kappa$ die aus den $\mathcal{X}_i$ generierte Präferenzrelation mit Indifferenz (vergleiche Theorem 20). Dann gilt für alle Welten $\omega, \omega' \in \Omega$:*

$$\kappa(\omega) \leq \kappa(\omega') \text{ genau dann, wenn } \omega \preceq_\kappa \omega'$$

Beweis. Sei $n = \max\{\kappa(\omega) \mid \omega \in \Omega\} + 1$. Dann sind $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$ geordnete disjunkte Teilmengen von Ω mit $\mathcal{X}_i \cup ... \cup \mathcal{X}_n = \Omega$ und folglich liefert uns Theorem 20 eine Präferenzrelation mit Indifferenz $\preceq_\kappa$, sodass $\omega \prec_\kappa \omega'$ für alle $\omega \in \mathcal{X}_i$ und $\omega' \in \mathcal{X}_j$

mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\omega \sim_\kappa \omega'$ für alle $\omega, \omega' \in \mathcal{X}_i,\ 1 \leq i \leq n$. Für zwei Welten $\omega \in \mathcal{X}_i$ und $\omega' \in \mathcal{X}_j$ gilt dann, dass

$$\begin{gathered} i \leq j \text{ genau dann, wenn} \\ \kappa(\omega) \leq \kappa(\omega') \text{ genau dann, wenn} \\ \omega \preceq_\kappa \omega' \end{gathered}$$

□

5.5 Plausibilitätsanfragen in OCF-Netzwerken

In CP-Netzwerken bieten uns Ordnungs- beziehungsweise Dominanzanfragen (vergleiche Theorem 13 und 15) die Möglichkeit, bereits über eine Teilmenge der Knoten eines Netzwerks den präferenziellen Vergleich zweiter Welten zu führen. In OCF-Netzwerken haben wir Plausibilitätsanfragen bisher immer über die stratifizierte Rangfunktion beantwortet. Wir wollen in diesem Kapitel eine Methode für OCF-Netzwerke beschreiben, die sich auch nur auf eine Teilmenge der Knoten bezieht:

Theorem 25 (Plausibilitätsanfragen). *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ ein OCF-Netzwerk mit stratifizierter Rangfunktion κ. Seien $\omega, \omega' \in \Omega$ mögliche Welten und sei $\mathcal{X} \subseteq \Sigma$ die Menge von Aussagenvariablen, deren Literale sich in ω und ω' unterscheiden. Dann gilt:*

$$\begin{gathered} \kappa(\omega) < \kappa(\omega') \textit{ genau dann, wenn} \\ \sum_{V\in\mathcal{X}} \kappa(V(\omega)|pa(V)(\omega)) + \sum_{\substack{V\in\mathcal{X}, Y\in ch(V),\\ Y\notin\mathcal{X}}} \kappa(Y(\omega)|pa(Y)(\omega)) \\ < \sum_{V\in\mathcal{X}} \kappa(V(\omega')|pa(V)(\omega')) + \sum_{\substack{V\in\mathcal{X}, Y\in ch(V),\\ Y\notin\mathcal{X}}} \kappa(Y(\omega')|pa(Y)(\omega')) \end{gathered}$$

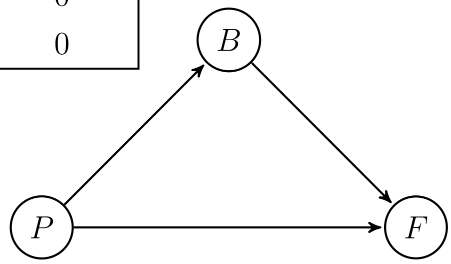
Beweis. Es ist

$$\begin{array}{rclr} \kappa(\omega) & < & \kappa(\omega') & \text{genau dann, wenn} \\ \sum_{V\in\Sigma} \kappa(V(\omega)|pa(V)(\omega)) & < & \sum_{V\in\Sigma} \kappa(V(\omega')|pa(V)(\omega')) & \text{genau dann, wenn} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{V\in\mathcal{X}} \kappa(V(\omega)|pa(V)(\omega)) + \sum_{\substack{V\in\mathcal{X}, Y\in ch(V),\\ Y\notin\mathcal{X}}} \kappa(Y(\omega)|pa(Y)(\omega)) + \\ &\sum_{\substack{V\in\Sigma, V\notin\mathcal{X},\\ V\notin ch(X)\forall X\in\mathcal{X}}} \kappa(V(\omega)|pa(V)(\omega)) < \sum_{V\in\mathcal{X}} \kappa(V(\omega')|pa(V)(\omega')) + \\ &\sum_{\substack{V\in\mathcal{X}, Y\in ch(V),\\ Y\notin\mathcal{X}}} \kappa(Y(\omega')|pa(Y)(\omega')) + \sum_{\substack{V\in\Sigma, V\notin\mathcal{X},\\ V\notin ch(X)\forall X\in\mathcal{X}}} \kappa(V(\omega')|pa(V)(\omega')) \end{aligned}$$

$B \mid P$	$\kappa_B(B \mid P)$
$b \mid p$	0
$\overline{b} \mid p$	1
$b \mid \overline{p}$	0
$\overline{b} \mid \overline{p}$	0

P	$\kappa_P(P)$
p	1
$\overline{p}$	0



$F \mid PB$	$\kappa_F(F \mid PB)$
$f \mid pb$	1
$\overline{f} \mid pb$	0
$f \mid \overline{p}b$	0
$\overline{f} \mid \overline{p}b$	1
$f \mid p\overline{b}$	2
$\overline{f} \mid p\overline{b}$	0
$f \mid \overline{p}\overline{b}$	0
$\overline{f} \mid \overline{p}\overline{b}$	0

Abbildung 5.3: Plausibilitätsanfragen im Pinguin-Beispiel

Für alle Knoten $V \in \Sigma$ mit $V \notin \mathcal{X}$ und $V \notin ch(X)$ für alle $X \in \mathcal{X}$ gilt nach Voraussetzung $V(\omega) = V(\omega')$ und $pa(V)(\omega) = pa(V)(\omega')$. Damit sind die jeweils letzten Summen der Ungleichung identisch. $\square$

Einfach ausgedrückt lassen sich in OCF-Netzwerken Plausibilitäten zwischen zwei Welten ω und ω' nur über diejenigen Variablen vergleichen, deren Literale sich in den einzelnen Welten unterscheiden. Dafür addieren wir die Ränge von den Konditionalen auf, deren Prämisse oder Konsequenz eine solche Variable enthält. Die Welt, bei der die Summe dieser Ränge kleiner ist, ist dann plausibler. Folgendes Beispiel soll dies illustrieren:

Beispiel 14. *Wir betrachten das bekannte Pinguin-Beispiel als OCF-Netzwerk aus Abbildung 5.3 mit stratifizierter Rangfunktion κ:*

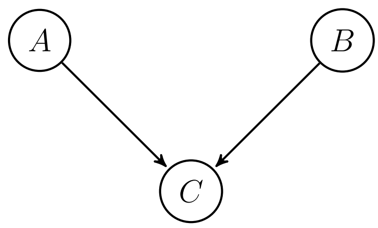
ω	$\overline{p}bf$	$\overline{p}\overline{b}f$	$\overline{p}\overline{b}\overline{f}$	$\overline{p}b\overline{f}$	$pb\overline{f}$	pbf	$p\overline{b}\overline{f}$	$p\overline{b}f$
$\kappa(\omega)$	0	0	0	1	1	2	2	4

Aus κ können wir direkt ablesen, dass die Welt $pb\overline{f}$ plausibler ist als pbf. Wir wollen dies nun nach Theorem 25 überprüfen. Die Variable F ist die einzige, die sich in beiden Welten unterscheidet und tritt dabei nur als Konsequenz in der Rangtabelle κ_F auf. Es ist dort $0 = \kappa_F(\overline{f} \mid pb) < \kappa_F(f \mid pb) = 1$. Folglich gilt $\kappa(pb\overline{f}) < \kappa(pbf)$.

5.6 Vergleich der Präferenzen/Plausibilitäten der Netzwerke

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, inwiefern Präferenzen der CP-Netzwerke und Plausibilitäten der OCF-Netzwerke gemeinsame Folgerungen liefern. Wir be-

A	$\kappa_A(A)$
a	0
$\overline{a}$	1



B	$\kappa_B(B)$
b	1
$\overline{b}$	0

$C\|AB$	$c\|ab$	$\overline{c}\|ab$	$c\|\overline{a}b$	$\overline{c}\|\overline{a}b$	$c\|a\overline{b}$	$\overline{c}\|a\overline{b}$	$c\|\overline{a}\overline{b}$	$\overline{c}\|\overline{a}\overline{b}$
$\kappa_C(C\|AB)$	x_1	0	x_2	0	x_3	0	x_4	0

Abbildung 5.4: OCF-Netzwerk mit variablen Rängen

schäftigen uns dafür zuerst mit der Auswirkung verschiedener Ränge bei OCF-Netzwerken. Dazu betrachten wir ein Beispiel mit variabler Rangvergabe:

Beispiel 15. *Das Netzwerk aus Abbildung 5.4 besitzt die vier variablen Ränge* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}^\infty$*, die einen beliebigen Wert ungleich* 0 *angeben. Wir erhalten daraus folgende stratifizierte Rangfunktion* κ*:*

ω	abc	$ab\overline{c}$	$a\overline{b}c$	$a\overline{b}\overline{c}$	$\overline{a}bc$	$\overline{a}b\overline{c}$	$\overline{a}\overline{b}c$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$
$\kappa(\omega)$	$1+x_1$	1	x_2	0	$2+x_3$	2	$1+x_4$	1

Damit gilt zum Beispiel $\kappa(c) = \min\{1+x_1, x_2, 2+x_3, 1+x_4\}$ *und die Höhe der Ränge von* abc*,* $a\overline{b}c$*,* $\overline{a}bc$ *und* $\overline{a}\overline{b}c$ *sind fast ausschließlich abhängig von den Werten für* x_1*,* x_2*,* x_3 *und* x_4*.*
Setzen wir zum Beispiel $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$*, erhalten wir* $\kappa(c) = 1$ *und die Beziehungen*

$$\kappa(a\overline{b}c) < \kappa(abc) = \kappa(\overline{a}\overline{b}c) < \kappa(\overline{a}bc).$$

Es scheint unmöglich, OCF-Netzwerke mit beliebigen Rängen und CP-Netzwerke zu vergleichen, da der Ausgang enorm von dem Stärkegrad der einzelnen Ränge abhängig ist. Ein ähnliches Konzept gibt es bekanntermaßen in CP-Netzwerken nicht. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf 0-1-basierte OCF-Netzwerke und vergleichen dessen Plausibilitäten mit den Präferenzen von CP-Netzwerken.

Theorem 26. *Sei* $\Gamma_1 = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ *ein OCF-Netzwerk mit Einschränkung der lokalen Rangtabellen* (5.3) *und* κ *die stratifizierte Rangfunktion zu diesem Netzwerk. Sei* $\Gamma_2 = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V\in\Sigma})$ *ein aus* Γ_1 *gewonnenes CP-Netzwerk oder umgekehrt. Dann existiert eine Welt* $\omega \in \Omega$*, sodass* $\kappa(\omega) < \kappa(\omega')$ *und* $\omega \prec_{\Gamma_2} \omega'$ *für alle* $\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}$*.*

Algorithmus 3 GENERIEREPLAUSIBELSTEWELT

Input: OCF-Netzwerk $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ mit Einschränkung (5.3), κ stratifizierte Rangfunktion zu Γ

Output: Welt $\omega \in \Omega$, sodass $\kappa(\omega) = 0$

```
Berechne topologische Sortierung V_1, ..., V_n von Γ
ω ← ⊤
for i ← 1 to n do                          ▷ Es gilt wegen Definition 20 und wegen (5.3)
    if κ_{V_i}(v_i | pa(V_i)(ω)) = 0 then  ▷ entweder κ_{V_i}(v_i | pa(V_i)(ω)) = 0
        ω ← ω ∧ v_i
    else                                   ▷ oder κ_{V_i}(¬v_i | pa(V_i)(ω)) = 0
        ω ← ω ∧ ¬v_i
    end if
end for
return ω
```

Beweis. Der Algorithmus 3 zeigt die Anpassung des Algorithmus 1 GENERIERE-WELT (Seite 43) auf OCF-Netzwerke mit Einschränkung der lokalen Rangtabellen (5.3). Seien nun $\omega, \omega' \in \Omega$ mit $\omega \neq \omega'$ zwei Welten mit $\kappa(\omega) = \kappa(\omega') = 0$. Sei $V_i \in \Sigma$ der Knoten, in dem sich die Literale in ω und ω nach der topologischen Sortierung von Algorithmus 3 zum ersten Mal unterscheiden. Dann gilt $pa(V_i)(\omega) = pa(V_i)(\omega')$ und insbesondere $\kappa_{V_i}(V_i(\omega)|pa(V_i)(\omega)) = \kappa_{V_i}(V_i(\omega')|pa(V_i)(\omega')) = 0$. Widerspruch zur Einschränkung der lokalen Rangtabellen (5.3). Damit $\omega \in \Omega$ mit $\kappa(\omega) = 0$ eindeutig.

Nach Theorem 11 existiert eine ebenso eindeutige Welt für CP-Netzwerke. Da sie auf die gleiche Weise konstruiert wird (wir wählen abhängig der Elternbelegung immer das präferierte Literal aus), sind die beiden Welten demnach gleich. $\square$

Wir müssen für Theorem 26 nicht fordern, dass Γ_1 0-1-basiert ist, denn für die plausibelste Welt werden die entsprechenden Konditionale in den lokalen Rangtabellen mit höherem Rang als 0 nicht beachtet.

Theorem 27. *Sei $\Gamma_1 = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ ein 0-1-basiertes OCF-Netzwerk mit Einschränkung der lokalen Rangtabellen (5.3) und κ die stratifizierte Rangfunktion zu diesem Netzwerk. Sei $\Gamma_2 = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ ein aus Γ_1 gewonnenes CP-Netzwerk oder umgekehrt. Dann existiert eine Welt $\omega \in \Omega$, sodass $\kappa(\omega) > \kappa(\omega')$ und $\omega' \prec_{\Gamma_2} \omega$ für alle $\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}$.*

Beweis analog zu Theorem 26. Weil das OCF-Netzwerk 0-1-basiert ist, erhält diejenige Welt den höchsten Rang, deren entsprechende Konditionale in den lokalen Rangtabellen stets den Rang 1 annehmen. Aufgrund der Einschränkung der lokalen Rangtabellen (5.3) müssen diese existieren. □

Es gibt demnach zwei ausgezeichnete Welten, die in CP-Netzwerken und 0-1-basierten OCF-Netzwerken mit Einschränkung (5.3) am meisten beziehungsweise am wenigsten präferiert werden. OCF- und CP-Netzwerke erwecken damit den Anschein, auch semantisch ähnliche Resultate zu liefern.

Wir wollen im Folgenden die Inferenzen der beiden Netzwerke vergleichen. Für OCF-Netzwerke beziehungsweise dessen stratifizierte Rangfunktion κ haben wir in Theorem 3 die Inferenzrelation $\mid\!\sim_\kappa$ über das Präferenzmodell $(\Omega, \models, <_\kappa)$ induziert. Wir können analog zu einer Rangfunktion auch die präferenzielle Folgebeziehung $\prec_\Gamma$ aus CP-Netzwerken für ein Präferenzmodell $(\Omega, \models, \prec_\Gamma)$ benutzen:

Definition 39 (Inferenzrelation $\mid\!\sim_\Gamma$)**.** *Sei $(\Omega, \models, \prec_\Gamma)$ ein Präferenzmodell mit $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V\in\Sigma})$ als CP-Netzwerk. Eine Welt $\omega \in \Omega$ erfüllt eine Formemenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ genau dann* präferenziell*, in Zeichen $\omega \models_\Gamma \mathcal{F}$, wenn $\omega \models \mathcal{F}$ und kein $\omega' \in \Omega$ existiert, sodass $\omega' \prec_\Gamma \omega$ mit $\omega' \models \mathcal{F}$.*

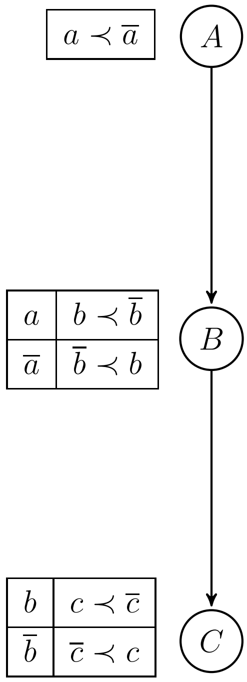
Wir erhalten eine Inferenzrelation $\mid\!\sim_\Gamma$*, bei der für zwei Formeln $A, B \in \mathcal{L}$ gilt:*

$$A \mid\!\sim_\Gamma B \text{ genau dann, wenn für alle } \omega \in \Omega \text{ gilt: } \omega \models_\Gamma A \text{ impliziert } \omega \models B$$

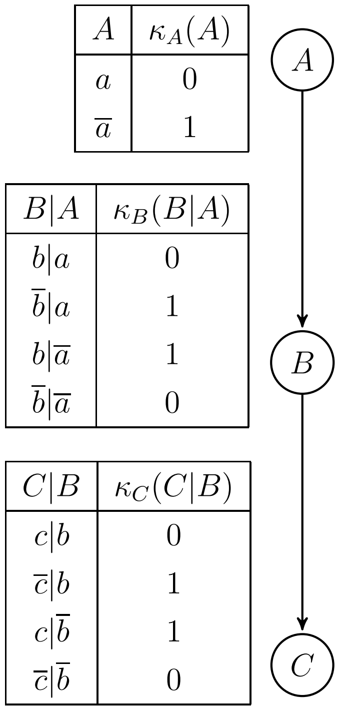
Die Inferenzrelationen $\mid\!\sim_\kappa$ und $\mid\!\sim_\Gamma$ definieren sich damit mittels eines Präferenzmodells analog über die Welten, die eine Formel(menge) präferenziell erfüllen (vergleiche Definition 13). Auf der einen Seite suchen wir die plausibelsten Welten ω, die $\mathcal{F}$ erfüllen, auf der anderen Seite die am meisten präferiertesten. Es erscheint demnach logisch, dass wir genau dann gleiche Inferenzen aus $\mathcal{F}$ in den beiden Netzwerken ziehen, wenn die plausibelsten und die am meisten präferiertesten Welten, die $\mathcal{F}$ erfüllen, gleich sind.

Wir wollen deshalb im Folgenden untersuchen, inwiefern sich die Präferenzen beziehungsweise Plausibilitäten der beiden Netzwerke unterscheiden.

Beispiel 16. *Wir betrachten als erstes Beispiel das bekannte Netzwerk aus Kapitel 5.1, hier nochmal gegeben in Abbildung 5.5. Dann gilt für die stratifizierte Rangfunktion κ:*



(a) CP-Netzwerk



(b) 0-1-basiertes OCF-Netzwerk

Abbildung 5.5: Vergleich der Präferenzen/Plausibilitäten

ω	abc	$ab\overline{c}$	$a\overline{b}\overline{c}$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$	$a\overline{b}c$	$\overline{a}\overline{b}c$	$\overline{a}bc$	$\overline{a}b\overline{c}$
$\kappa(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Für das CP-Netzwerk existieren folgende Präferenzrelationen, die es erfüllen:

$$abc \prec ab\overline{c} \prec a\overline{b}\overline{c} \prec \begin{array}{c} a\overline{b}c \prec \overline{a}\overline{b}\overline{c} \\ \overline{a}\overline{b}\overline{c} \prec a\overline{b}c \end{array} \prec \overline{a}\overline{b}c \prec \overline{a}bc \prec \overline{a}b\overline{c}$$

beziehungsweise

$$abc \prec ab\overline{c} \prec a\overline{b}\,\overline{c} \prec a\overline{b}c \sim \overline{a}\overline{b}\overline{c} \prec \overline{a}\overline{b}c \prec \overline{a}bc \prec \overline{a}b\overline{c}$$

als stratifizierte Präferenzrelation.

Im OCF-Netzwerk gilt zum Beispiel $a\overline{c} \not\mathrel{|\!\sim}_{\kappa} b$, denn $\kappa(a\overline{c}b) = \kappa(a\overline{c}\overline{b}) = 1$ (vergleiche Theorem 3). Hingegen gilt für das CP-Netzwerk $a\overline{c} \mathrel{|\!\sim}_{\Gamma} b$, denn $ab\overline{c}$ ist die einzige Welt in allen Präferenzrelationen, die $a\overline{c}$ präferenziell erfüllt.

Dieses Beispiel ist unter anderem ein Beweis dafür, dass sich die Ausgangsoptimierung unter einer Teilbelegung in 0-1-basierten OCF-Netzwerken anders verhält als bei CP-Netzwerken (vergleiche Theorem 12):

Theorem 28 (Ausgangsoptimierung unter Teilbelegung)**.** *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ *ein* 0-1-*basiertes OCF-Netzwerk mit Einschränkung der lokalen Rangtabellen* (5.3)*. Sei* κ *die stratifizierte Rangfunktion zu* Γ*. Sei* $\mathcal{Z} \subseteq \Sigma$ *und beschreibe* $z \in Asst(\mathcal{Z})$ *eine Vollkonjunktion von Literalen über* $\mathcal{Z}$*. Dann existiert im Allgemeinen keine eindeutige Welt* $\omega \in \Omega$ *mit* $\omega = zx$*,* $x \in Asst(\Sigma \setminus \mathcal{Z})$*, sodass*

$$\kappa(\omega) < \kappa(\omega') \text{ für alle } \omega' \in \Omega \text{ mit } \omega' = zx', x' \in Asst(\Sigma \setminus \mathcal{Z}) \setminus \{x\}.$$

Beweis gegeben durch Beispiel 16. Sei $a\overline{c} \in Asst(A \cup C)$ eine Teilbelegung von Ω. Es ist dann $\kappa(a\overline{c}b) = \kappa(a\overline{c}\overline{b}) = 1$. Damit kann die Eindeutigkeit einer Ausgangsoptimierung unter einer Teilbelegung in OCF-Netzwerken nicht garantiert werden. □

Den großen Unterschied zwischen den Plausibilitäten in OCF-Netzwerken und den Präferenzen in CP-Netzwerken liefert uns die unterschiedliche bedingte Unabhängigkeit der beiden Netzwerke. Wir wissen bereits, dass $V \perp\!\!\!\perp_{\prec} \Sigma \setminus (pa(V) \cup \{V\}) \mid pa(V)$ für alle $V \in \Sigma$ in einem CP-Netzwerk. Auf der anderen Seite gilt für alle Knoten $V \in \Sigma$ in OCF-Netzwerken $V \perp\!\!\!\perp_{\kappa} nd(V) \mid pa(V)$. Das führt uns zu der interessanten Tatsache, dass wir in einem CP-Netzwerk die Präferenzen zweier Welten $\omega, \omega' \in \Omega$, die sich in nur einem Literal einer Variablen $V \in \Sigma$ unterscheiden, zueinander sofort in der konditionalen Präferenztabelle $CPT(V)$ ablesen können. Hingegen müssen wir für den Vergleich der Plausibilitäten dieser Welten in OCF-Netzwerken auch die lokalen Rangtabellen der Kinder von V beachten (vergleiche Theorem 25). Wir können in einem OCF-Netzwerk die Ränge der Konditionale in den lokalen Rangtabellen aber so belegen, dass die Ränge der Kinderkonditionale zu einem Knoten keinen Einfluss haben.

Definition 40 (CP-unabhängiges OCF-Netzwerk)**.** *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ *ein OCF-Netzwerk mit Einschränkung* (5.3) *und sei* κ *die stratifizierte Rangfunktion dessen. Wir nennen* Γ *genau dann* CP-unabhängig*, wenn für alle* $V \in \Sigma$ *und alle* $\omega, \omega' \in \Omega$*, die sich nur im Literal der Variablen* V *unterscheiden, gilt:*

$$\kappa_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) < \kappa_V(V(\omega')|pa(V)(\omega')) \text{ genau dann, wenn } \kappa(\omega) < \kappa(\omega')$$

beziehungsweise, wenn $V \perp\!\!\!\perp_{\kappa} \Sigma \setminus (pa(V) \cup \{V\}) \mid pa(V)$*.*

Aus einem OCF-Netzwerk können wir leicht ein CP-unabhängiges OCF-Netzwerk gewinnen:

Theorem 29. *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ *ein OCF-Netzwerk mit Einschränkung* (5.3)*. Dann definieren wir das Netzwerk* $\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa'_V\}_{V\in\Sigma})$*, wobei alle* $V \in \Sigma$

und alle $p \in Asst(pa(V))$ *gilt:*

$$\kappa'_V(v|p) := 1 + \sum_{Y \in ch(V)} \max\{\kappa'_Y(Y(\omega)|pa(Y)(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}, \textit{ falls } \kappa_V(v|p) > 0 \textit{ oder}$$

$$\kappa'_V(\overline{v}|p) := 1 + \sum_{Y \in ch(V)} \max\{\kappa'_Y(Y(\omega)|pa(Y)(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}, \textit{ falls } \kappa_V(\overline{v}|p) > 0$$

Γ' *ist dann ein CP-unabhängiges OCF-Netzwerk.*

Beweis. Γ' ist offensichtlich ein OCF-Netzwerk, denn für alle $V \in \Sigma$ und alle $\omega \in \Omega$ gilt $\kappa'_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) = 0$ genau dann, wenn $\kappa_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass Γ' auch CP-unabhängig ist.
Sei κ' die stratifizierte Rangfunktion zu Γ'. Seien $\omega, \omega' \in \Omega$ zwei Welten, die sich nur im Literal der Variablen V unterscheiden. Sei dafür $\omega \models v$ und $\omega' \models \overline{v}$ und $\kappa'_V(v|pa(V)(\omega)) < \kappa'_V(\overline{v}|pa(V)(\omega'))$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Es ist zu zeigen, dass

$$\kappa'_V(v|pa(V)(\omega)) < \kappa'_V(\overline{v}|pa(V)(\omega')) \text{ genau dann gilt, wenn } \kappa'(\omega) < \kappa'(\omega').$$

Mit $\kappa'_V(v|pa(V)(\omega)) = 0$ und
$\kappa'_V(\overline{v}|pa(V)(\omega')) = 1 + \sum_{Y \in ch(V)} \max\{\kappa'_Y(Y(\omega)|pa(Y)(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}$ gilt sofort

$$\begin{aligned} &\kappa'_V(v|pa(V)(\omega)) + \sum_{Y \in ch(V)} \kappa'_Y(Y(\omega)|pa(Y)(\omega)) \\ &< \kappa'_V(\overline{v}|pa(V)(\omega')) + \sum_{Y \in ch(V)} \kappa'_Y(Y(\omega')|pa(Y)(\omega')) \end{aligned}$$

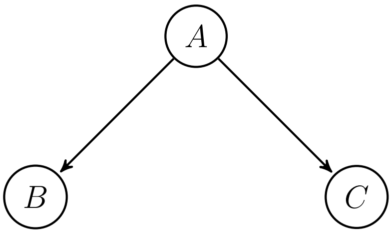
Das ist aber nach Theorem 25 äquivalent zu $\kappa'(\omega) < \kappa'(\omega')$. ☐

Einfach ausgedrückt setzen wir die Ränge der Konditionale ungleich 0 auf die Summe der höchsten Ränge in den lokalen Rangtabellen der Kinder plus 1. Das garantiert uns, dass der Eintritt dieses Rangs nicht durch die Kinderränge beeinflusst werden kann.

Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass sich die Semantik zwischen einem OCF-Netzwerk und einem daraus entstehenden CP-unabhängigem OCF-Netzwerk stark unterscheidet, da die Rangvergabe in einem CP-unabhängigen OCF-Netzwerk eben nicht frei, sondern nach Vorschrift vergeben wird und diese dabei recht hoch ausfallen kann. Dieser Schritt ist aber notwendig, um die *ceteris paribus* Präferenz in OCF-Netzwerken zu simulieren und dient dabei rein dem Vergleich der beiden Netzwerktypen.

A	$\kappa_A(A)$
a	0
$\overline{a}$	3

$B\|A$	$\kappa_B(B\|A)$
$b\|a$	1
$\overline{b}\|a$	0
$b\|\overline{a}$	0
$\overline{b}\|\overline{a}$	1



$C\|A$	$\kappa_C(C\|A)$
$c\|a$	0
$\overline{c}\|a$	1
$c\|\overline{a}$	1
$\overline{c}\|\overline{a}$	0

Abbildung 5.6: CP-unabhängiges OCF-Netzwerk

Wir können mittels Theorem 29 ein CP-Netzwerk leicht in ein CP-unabhängiges OCF-Netzwerk überführen, indem wir es zuerst in ein 0-1-basiertes OCF-Netzwerk wandeln. Wir halten die Zusammenhänge der Plausibilitäten von CP-unabhängigen OCF-Netzwerken und den Präferenzen von CP-Netzwerken in folgendem Theorem fest:

Theorem 30. *Sei* $\Gamma_1 = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V\in\Sigma})$ *ein CP-Netzwerk. Sei* Γ_2 *ein aus* Γ_1 *gewonnenes CP-unabhängiges OCF-Netzwerk mit* $\Gamma_2 = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ *nach Anwendung von Theorem 29. Sei* κ *die stratifizierte Rangfunktion von* Γ_2*. Dann gilt für alle Welten* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$*:*

$$\textit{Aus } \omega_1 \prec_\Gamma \omega_2 \textit{ folgt } \kappa(\omega_1) < \kappa(\omega_2)$$

Beweis. Wir finden nach Theorem 15 für $\omega_1 \prec_\Gamma \omega_2$ stets eine verbessernde Wechselfolge von ω_2 nach ω_1. Mit der Transitivität von $\prec_\Gamma$ (vergleiche Lemma 1), reicht es demnach aus, nur Welten zu betrachten, die sich in genau einem Literal einer Variablen $V \in \Sigma$ unterscheiden. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ solche Welten, wobei $\omega_1 \models v$ und $\omega_2 \models \overline{v}$ und es gelte $\omega_1 \prec_\Gamma \omega_2$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Es ist dann zu zeigen, dass $\kappa(\omega_1) < \kappa(\omega_2)$.
Es gilt $v \prec_{pa(V)(\omega_1)} \overline{v}$ in der $CPT(V)$ im CP-Netzwerk Γ_1. Im OCF-Netzwerk Γ_2 gilt folglich $\kappa_V(v|pa(V)(\omega_1)) < \kappa_V(\overline{v}|pa(V)(\omega_2))$. Nach Theorem 29 ist Γ_2 CP-unabhängig. Damit folgt sofort, dass $\kappa(\omega_1) < \kappa(\omega_2)$. □

Wir wollen unsere Erkenntnisse in einem Beispiel illustrieren:

Beispiel 17. *Abbildung 5.6 zeigt ein CP-unabhängiges OCF-Netzwerk, denn es ist*

$$\kappa_A(\overline{a}) = 1 + \max\{\kappa_B(b|a),\ \kappa_B(\overline{b}|\overline{a})\} + \max\{\kappa_C(\overline{c}|a),\ \kappa_C(c|\overline{a})\} = 3.$$

Wir erhalten als stratifizierte Rangfunktion κ:

ω	$a\overline{b}c$	abc	$a\overline{b}\overline{c}$	$ab\overline{c}$	$\overline{a}b\overline{c}$	$\overline{a}bc$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$	$\overline{a}\overline{b}c$
$\kappa(\omega)$	0	1	1	2	3	4	4	5

Wenn wir das Netzwerk als CP-Netzwerk interpretieren, erhalten wir vier Präferenzrelationen, die das Netzwerk erfüllen:

$$a\overline{b}c \prec \begin{array}{c} abc \prec a\overline{b}\overline{c} \\ a\overline{b}\overline{c} \prec abc \end{array} \prec ab\overline{c} \prec \overline{a}b\overline{c} \prec \begin{array}{c} \overline{a}bc \prec \overline{a}\overline{b}\overline{c} \\ \overline{a}\overline{b}\overline{c} \prec \overline{a}bc \end{array} \prec \overline{a}\overline{b}c$$

Die stratifizierte Präferenzrelation ist dann:

$$a\overline{b}c \prec abc \sim a\overline{b}\overline{c} \prec ab\overline{c} \prec \overline{a}b\overline{c} \prec \overline{a}bc \sim \overline{a}\overline{b}\overline{c} \prec \overline{a}\overline{b}c$$

Wir sehen leicht, dass alle Präferenzen des CP-Netzwerks auch auf die Plausibiliäten des OCF-Netzwerks übertragen wurden.

Aus Theorem 30 folgt die unmittelbare Fragestellung, ob nicht auch die Umkehrung des Theorems gilt. Damit könnten folglich OCF-Netzwerke auf äquivalente Plausibilitäten zu den Präferenzen eines CP-Netzwerks gebracht werden. Das dies nicht möglich ist, beantwortet uns die stratifizierte Präferenzrelation eines CP-Netzwerks, denn wir können nicht zwangsläufig ohne Verlust alle Präferenzen aus $\prec_\Gamma$ eines CP-Netzwerks Γ in eine stratifizierte Präferenzrelation $\preceq_s$ umwandeln. Folglich kann auch keine Rangfunktion κ existieren, die $\prec_\Gamma$ beschreibt, denn diese müsste aus $\preceq_s$ generiert werden (vergleiche Theorem 23).

5.7 Vergleich der beiden Netzwerke bei Indifferenz

In OCF-Netzwerken drücken wir die Indifferenz über den Eintritt der Werte einer Variablen über den Rang 0 aus. Für eine Variable $A \in \Sigma$ ist dann $\kappa(a) = \kappa(\overline{a}) = 0$. In diesem Fall wissen wir nichts über A. In CP-Netzwerken wird bekanntermaßen die Indifferenz über die Präferenzrelation mit Indifferenz $\preceq$ ausgedrückt. Für die Überführung der beiden Netzwerke bei Indifferenz wandeln wir zuerst die bereits bekannte Definition 36 leicht ab:

Definition 41. *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ *ein CP-Netzwerk mit Indifferenz und* $\preceq_p$ *eine Präferenzrelation einer Variablen* $V \in \Sigma$ *unter einer Elternbelegung* $p \in Asst(pa(V))$*. Die Abbildung* $\rho_V \colon (Asst(V)|Asst(pa(V))) \to \{0,1\}$ erfüllt *die Präferenzrelation* $\preceq_p$ *genau dann, wenn:*

$$\begin{aligned} \rho_V(v|p) &< \rho_V(\overline{v}|p), \text{ wenn } v \prec_p \overline{v} \\ \rho_V(v|p) &= \rho_V(\overline{v}|p) = 0, \text{ wenn } v \sim_p \overline{v} \\ \rho_V(v|p) &> \rho_V(\overline{v}|p), \text{ sonst} \end{aligned} \tag{5.6}$$

ρ_V erfüllt die Präferenztabelle $CPT(V)$*, falls* ρ_V *die Präferenzrelation* $\preceq_p$ *der Variablen* V *für jede Elternbelegung* $p \in Asst(pa(V))$ *erfüllt.*

Mit dieser Definition können wir ein numerisches CP-Netzwerk mit Indifferenz definieren:

Definition 42 (Numerisches CP-Netzwerk mit Indifferenz)**.** *Sei* $\Sigma = \{V_1, ..., V_n\}$ *eine Menge von Aussagenvariablen. Ein DAG* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\rho_V\}_{V \in \Sigma})$ *ist ein* numerisches CP-Netzwerk mit Indifferenz*, falls für jeden Knoten* $V \in \Sigma$ *eine Abbildung* $\rho_V \colon (Asst(V)|Asst(pa(V))) \to \{0,1\}$ *existiert, sodass für jede Belegung* $p \in Asst(pa(V))$ *gilt:*

$$\rho_V(v|p) = \rho_V(\overline{v}|p) \text{ genau dann, wenn } \rho_V(v|p) = 0$$

Wir können mit (5.6) und Theorem 16 aus jedem beliebigen CP-Netzwerk ein numerisches CP-Netzwerk mit Indifferenz $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\rho_V\}_{V \in \Sigma})$ gewinnen, in dem ρ_V die Präferenztabelle $CPT(V)$ für jeden Knoten $V \in \Sigma$ erfüllt. Man kann leicht überprüfen, dass dieses numerische CP-Netzwerk ein 0-1-basiertes OCF-Netzwerk ist. Dabei gilt die Einschränkung der lokalen Rangtabellen (5.3) natürlich nicht mehr.

Analog zu Theorem 19 gewinnen wir aus einem OCF-Netzwerk stets ein CP-Netzwerk mit Indifferenz:

Theorem 31. *Sei* $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$ *ein OCF-Netzwerk. Dann können wir für jeden Knoten* $V \in \Sigma$ *konditionale Präferenztabellen* $CPT(V)$ *anlegen, sodass für jede Elternbelegung* $p \in Asst(pa(V))$ *gilt:*

$$\begin{aligned} &v \prec_p \overline{v} \text{ genau dann, wenn } \kappa_V(v|p) < \kappa_V(\overline{v}|p) \text{ und} \\ &v \sim_p \overline{v} \text{ genau dann, wenn } \kappa_V(v|p) = \kappa_V(\overline{v}|p) \end{aligned}$$

$\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \Sigma})$ *ist dann ein CP-Netzwerk mit Indifferenz.*

Beweis analog zu Theorem 19. □

Da CP-Netzwerke mit Indifferenz sehr schnell unerfüllbar werden, haben wir die *Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz* kennengelernt (vergleiche Theorem 10). Wir wollen diese Bedingung auf OCF-Netzwerke übertragen:

Theorem 32. *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$ ein OCF-Netzwerk und $V_i \in \Sigma$ ein Knoten in diesem Netzwerk. Sei $V_j \in ch(V_i)$ ein Kind von V_i und $Y = pa(V_j)\backslash\{V_i\}$ die Menge der Elternknoten von V_j ohne V_i. Es gelte für eine Welt $\omega \in \Omega$ die Plausibilität $\kappa_{V_i}(v_i|pa(V_i)(\omega)) = \kappa_{V_i}(\overline{v_i}|pa(V_i)(\omega))$ und für alle $\omega' \in \Omega$ gilt, dass*

$$\begin{aligned} \kappa_{V_j}(v_j|Y(\omega') \wedge v_i) &= \kappa_{V_j}(v_j|Y(\omega') \wedge \overline{v_i}) \quad \textit{und} \\ \kappa_{V_j}(\overline{v_j}|Y(\omega') \wedge v_i) &= \kappa_{V_j}(\overline{v_j}|Y(\omega') \wedge \overline{v_i}). \end{aligned}$$

Dann erfüllt Γ nach Umwandlung in ein CP-Netzwerk mit Indifferenz die Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz.

Beweis. Sei $\Gamma' = (\Sigma, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V\in\Sigma})$ das CP-Netzwerk mit Indifferenz nach Umwandlung von Γ. Dann gilt für den Knoten V_i die Indifferenz $x_i \sim_{pa(V_i)(\omega)} \overline{v_i}$. Für den Kindsknoten V_j gilt dann für alle $\omega' \in \Omega$, dass

$$\begin{array}{lll} (v_j \prec_{Y(\omega')\wedge v_i} \overline{v_j} & \text{und} & v_j \prec_{Y(\omega')\wedge \overline{v_i}} \overline{v_j}) \quad \text{oder} \\ (\overline{v_j} \prec_{Y(\omega')\wedge v_i} v_j & \text{und} & \overline{v_j} \prec_{Y(\omega')\wedge \overline{v_i}} v_j) \quad \text{oder} \\ (v_j \sim_{Y(\omega')\wedge v_i} \overline{v_j} & \text{und} & v_j \sim_{Y(\omega')\wedge \overline{v_i}} \overline{v_j}). \end{array}$$

Damit ist nach der Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz das CP-Netzwerk erfüllbar. □

Wir wollen unsere Ideen aus Kapitel 5.6 auf ein OCF- beziehungsweise CP-Netzwerk mit Indifferenz und der entsprechenden Erfüllbarkeitsbedingung anwenden.

Theorem 33. *Sei $\Gamma = (\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V\in\Sigma})$, welches nach Umwandlung in ein CP-Netzwerk die Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz erfüllt. Sei κ die stratifizierte Rangfunktion zu Γ. Dann gilt für alle $V \in \Sigma$ und alle $\omega, \omega' \in \Omega$, die sich nur im Literal der Variablen V unterscheiden:*

$$\kappa_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) = \kappa_V(V(\omega')|pa(V)(\omega')) \textit{ genau dann, wenn } \kappa(\omega) = \kappa(\omega')$$

beziehungsweise:

$$\begin{array}{rl} & V \perp\!\!\!\perp_\kappa \Sigma \setminus (pa(V) \cup \{V\}) \mid pa(V) \\ \textit{genau dann, wenn} & \kappa_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) = \kappa_V(V(\omega')|pa(V)(\omega')) \end{array}$$

Beweis. Nach der Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz gilt:

$$\kappa_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) = \kappa_V(V(\omega')|pa(V)(\omega')) \text{ genau dann, wenn}$$

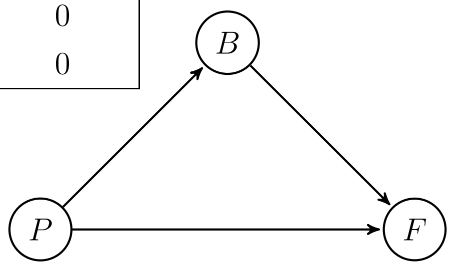
$$\begin{aligned} &\kappa_V(V(\omega)|pa(V)(\omega)) + \sum_{Y \in ch(V)} \kappa_Y(Y(\omega)|pa(Y)(\omega)) \\ = \ &\kappa_V(V(\omega')|pa(V)(\omega')) + \sum_{Y \in ch(V)} \kappa_Y(Y(\omega')|pa(Y)(\omega')). \end{aligned}$$

Das ist aber nach Theorem 25 äquivalent zu $\kappa(\omega) = \kappa(\omega')$. □

Knoten mit Indifferenz verhalten sich demnach bereits *ceteris paribus* konform in OCF-Netzwerken mit der Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz. In allen anderen Knoten kann mittels Theorem 29 das Netzwerk auch weiterhin in ein CP-unabhängiges umgewandelt werden. Theorem 30 behält dann folglich auch bei erfüllbaren CP-Netzwerken mit Indifferenz Gültigkeit. Das nachfolgende Beispiel soll dies veranschaulichen:

$B\|P$	$\kappa_B(B\|P)$
$b\|p$	0
$\overline{b}\|p$	2
$b\|\overline{p}$	0
$\overline{b}\|\overline{p}$	0

P	$\kappa_P(P)$
p	4
$\overline{p}$	0

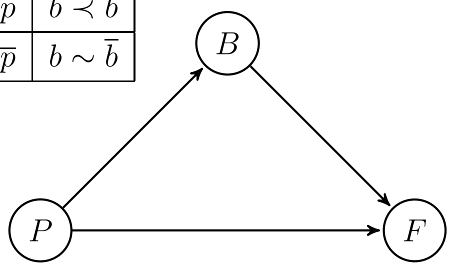


$F\|PB$	$\kappa_F(F\|PB)$
$f\|pb$	1
$\overline{f}\|pb$	0
$f\|\overline{p}b$	0
$\overline{f}\|\overline{p}b$	0
$f\|p\overline{b}$	1
$\overline{f}\|p\overline{b}$	0
$f\|\overline{p}\overline{b}$	0
$\overline{f}\|\overline{p}\overline{b}$	0

(a) OCF-Netzwerk

p	$b \prec \overline{b}$
$\overline{p}$	$b \sim \overline{b}$

$\overline{p} \prec p$



pb	$\overline{f} \prec f$
$\overline{p}b$	$f \sim f$
$p\overline{b}$	$\overline{f} \prec f$
$\overline{p}\overline{b}$	$f \sim f$

(b) CP-Netzwerk

Abbildung 5.8: Vergleich von OCF- und CP-Netzwerken mit Indifferenz

Beispiel 18. *Wir betrachten das leicht veränderte Pinguin-Beispiel aus Beispiel 4 in Abbildung 5.8. Wir bemerken, dass dieses Netzwerk bereits die Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz erfüllt. Gegeben der Elternbelegung* $\overline{p}$ *sind wir indifferent zwischen* b *und* $\overline{b}$*. Im Knoten* F *darf unsere Plausibilität demnach nicht von* b *beziehungsweise* $\overline{b}$ *beeinflusst werden. Dies ist nicht der Fall, denn wir haben für* bp *und* $\overline{b}p$ *beziehungsweise* $b\overline{p}$ *und* $\overline{b}\overline{p}$ *als Prämisse jeweils immer die gleiche Plausibilität angegeben.*

Ebenso ist das OCF-Netzwerk CP-unabhängig, denn es gilt:

$$\begin{array}{rcll} \kappa_P(p) & = & 1+\kappa_B(\overline{b}|p)+\max\{\kappa_F(f|bp),\ \kappa_F(f|\overline{b}p)\} & = \ 4 \quad \textit{und} \\ \kappa_B(\overline{b}|p) & = & 1+\max\{\kappa_F(f|bp),\ \kappa_F(f|\overline{b}p)\} & = \ 2 \end{array}$$

Für das OCF-Netzwerk erhalten wir folgende stratifizierte Rangfunktion κ*:*

ω	$\overline{p}bf$	$\overline{p}b\overline{f}$	$\overline{p}\overline{b}f$	$\overline{p}\overline{b}\overline{f}$	$pb\overline{f}$	pbf	$p\overline{b}\overline{f}$	$p\overline{b}f$
$\kappa(\omega)$	0	0	0	0	4	5	6	7

Für das CP-Netzwerk existieren zwei Präferenzrelationen, die das Netzwerk erfüllen:

$$\overline{p}bf \sim \overline{p}b\overline{f} \sim \overline{p}\overline{b}f \sim \overline{p}\overline{b}\overline{f} \prec pb\overline{f} \prec \begin{array}{c} pbf \prec p\overline{b}\overline{f} \\ p\overline{b}\overline{f} \prec pbf \end{array} \prec p\overline{b}f$$

Die daraus entstehende stratifizierte Präferenzrelation ist dann:

$$\{\overline{p}bf,\ \overline{p}b\overline{f},\ \overline{p}\overline{b}f,\ \overline{p}\overline{b}\overline{f}\} \prec pb\overline{f} \prec \{pbf,\ p\overline{b}\overline{f}\} \prec p\overline{b}f$$

Damit wurden alle Präferenzen des CP-Netzwerks auf die Plausibiliäten des OCF-Netzwerks übertragen.

Der Vergleich der beiden Netzwerke bei Indifferenz bildet den Abschluss dieses Kapitels. Im nachfolgenden Fazit werden die wichtigsten Ergebnisse des Vergleichs noch einmal kurz und prägnant formuliert.

6 Ergebnisse/Fazit

Wir haben im vorherigen Kapitel die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von OCF- und CP-Netzwerken kennengelernt. Wir wollen die wichtigsten Erkenntnisse hier noch einmal zusammenfassen.

OCF- und CP-Netzwerke werden nahezu ähnlich definiert mit dem Unterschied, dass wir für einen Knoten in OCF-Netzwerken eine lokale Rangtabelle und in CP-Netzwerken eine konditionale Präferenztabelle anlegen müssen.
OCF-Netzwerke benutzen in diesen Tabellen für die Beschreibung der Plausibilität von Ereignissen in Abhängigkeit vom Eintreten anderer Ereignisse das Konzept der Rangfunktionen. Dabei ist der Rang umso höher, je größer der Grad der Überraschung über das Eintreten dieses Ereignisses ist. Für CP-Netzwerke können wir lediglich eine Präferenz zwischen den Ereignissen angeben, dabei wird ein Grad dieser Präferenz nicht berücksichtigt.

Das wirkt sich auch auf die Umwandlung der beiden Netzwerke in das jeweils andere aus. Überführen wir ein CP-Netzwerk in ein OCF-Netzwerk, so nimmt dieses nur Ränge zwischen 0 und 1 an. Dafür erhalten wir aber nach der Rücküberführung dieses OCF-Netzwerks ein äquivalentes CP-Netzwerk zu dem CP-Netzwerk, mit dem wir gestartet sind. Bei OCF-Netzwerken verlieren wir bei der Umwandlung in ein CP-Netzwerk die Stärke der Ränge, womit bei der Rücküberführung zwar die Plausibilität der Ereignisse erhalten bleibt, aber nicht der Grad dieser.

Wir können aus den lokalen Rangtabellen eines OCF-Netzwerks eine globale stratifizierte Rangfunktion gewinnen, die allen möglichen Welten eine Plausibilität zuordnet. In CP-Netzwerken erhalten wir gegebenenfalls mehrere Präferenzrelationen, die das Netzwerk erfüllen und können dann nur Folgerungen ziehen, die in allen Präferenzrelationen gelten. Wir nähern uns der Angabe einer eindeutigen totalen, transitiven Relation über stratifizierte Präferenzrelationen. Dabei gehen aber möglicherweise Präferenzen zwischen einzelnen Welten verloren, obwohl diese klar aus dem CP-Netzwerk gefolgert werden können.

Die Angabe von beliebig hohen Rängen ist ein enormer Vorteil von OCF-Netzwerken, denn dadurch können auch Ausreißer berücksichtigt werden, deren Eintreten so unplausibel ist, dass es sich nicht großartig auf die Ergebnisse auswirken soll. Das hat ebenso zur Ursache, dass wir Inferenzen von OCF-Netzwerken mit beliebig hohen Rängen nur schwer mit den Inferenzen von CP-Netzwerken vergleichen können. Wir haben für dieses Problem CP-unabhängige OCF-Netzwerke kennengelernt, die alle Präferenzen im entsprechenden CP-Netzwerk auch auf das OCF-Netzwerk als Plausibilität übertragen. Eine äquivalente Beschreibung von Präferenzen und Plausibilitäten haben wir jedoch ausgeschlossen.

Ein weiterer Vorteil von OCF-Netzwerken ist der lockere Umgang mit Indifferenz. Wohingegen wir für CP-Netzwerke eine Erfüllbarkeitsbedingung bei Indifferenz benötigen, ist in OCF-Netzwerken eine Beachtung dieser nicht nötig, um eine stratifizierte Rangfunktion aus dem Netzwerk zu gewinnen. Die Erfüllbarkeitsbedingung bei CP-Netzwerken ist darüber hinaus sehr stark, denn wir können Gleichgültigkeit nur dann angeben, wenn sich nachfolgende Ereignisse nicht auf die gleichgültigen Werte beziehen. Es ist abzuwägen, inwiefern sich damit Sachverhalte aus der Realität modellieren lassen.

7 Ausblick

Wir wollen in diesem letzten Kapitel einen Ausblick über mögliche weiterführende Themen liefern, die in dieser Arbeit nicht untersucht wurden.

Es ist wichtig anzumerken, dass die mehrwertigen Domänen in CP-Netzwerken kein Vorteil dieser sind, denn es gibt auch bei OCF-Netzwerken den Ansatz über mehrwertige Aussagenlogik. Es wäre zu untersuchen, inwiefern unsere Ergebnisse auch bei mehrwertigen Aussagenvariablen Gültigkeit behalten.

Wir sind im Hauptkapitel zu der Erkenntnis gelangt, dass wir mittels CP-unabhängigen OCF-Netzwerken alle Präferenzen eines CP-Netzwerks auf Plausibilitäten übertragen können und dass die Umkehrung dieser Aussage fehlschlägt. Ein weiterer Schritt wäre es, zu untersuchen, ob eine Anpassung der Ränge eines OCF-Netzwerks existiert, sodass dessen Plausibilitäten, welche in der stratifizierten Rangfunktion gegeben sind, mit den Präferenzen aus der stratifizierten Präferenzrelation eines CP-Netzwerks übereinstimmen.

In der Realität steht man möglicherweise vor dem Problem, dass die lokalen Tabellen in OCF- und CP-Netzwerken unvollständig sind. Mögliche Ansätze zur Behebung dieses Problems werden in [KIE13a] und [BBD$^+$04] vorgestellt. Dessen Gemeinsamkeiten und Unterschiede wurden in dieser Arbeit nicht untersucht. Der Vergleich dieser Methoden bleibt daher ein interessantes, offenes Thema.

Literaturverzeichnis

[BBD+04] C. Boutilier, R. I. Brafman, C. Domshlak, H. H. Hoos, and D. Poole. *Cp-nets: A Tool for Representing and Reasoning with Conditional Ceteris Paribus Preference Statements*, volume 21, pages 135–191. Journal of Artifical Intelligence Research, 2004.

[BKI06] C. Beierle and G. Kern-Isberner. *Methoden wissensbasierter Systeme*. Vieweg+Teubner Verlag, 2006.

[DF74] B. De Finetti. *Theory of Probability*, volume 1,2. New York, USA: Hohn Wiley and Sons, 1974.

[Die10] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springler-Verlag, 2010.

[GP96] M. Goldszmidt and J. Pearl. *Qualitative probabilities for default reasoning, belief revision, and causal modeling*, volume 84, pages 57–112. Artificial Intelligence, 1996.

[KIE13a] G. Kern-Isberner and C. Eichhorn. Intensional combination of rankings for ocf-networks. *Proceedings of the 26th International FLAIRS Conference FLAIRS-2013*, 2013.

[KIE13b] G. Kern-Isberner and C. Eichhorn. Ocf-networks with missing values. In *Proceedings of the 4th Workshop on Dynamics of Knowledge and Belief (DBK-2013)*, pages 46–60. FernUniversität in Hagen, 2013.

[LS07] I. Lehman and W. Schulz. *Mengen - Relationen - Funktionen. Eine anschauliche Einführung*. Vieweg+Teubner Verlag, 2007.

[Mak94] D. Makinson. General patterns in nonmonotonic reasoning. In *Handbook of logic artificial intelligence and logic programming*. Oxford Univ Pr, 1994.

[Spo12] W. Spohn. *The Laws of Belief: Ranking Theory and Its Philosophical Applications*. Oxford University Press, 2012.

Abbildungsverzeichnis

2.1 Beispiel-DAG 19

3.1 Pinguin-Beispiel 23

4.1 Unser Abendessen 28
4.2 Unsere Garderobe 29
4.3 Beweisansatz Theorem 9 30
4.4 *Unsere Garderobe* mit vereinfachten Variablennamen 31
4.5 *Unsere Garderobe* mit vereinfachten Variablennamen 37

5.1 Umwandlung eines CP-Netzwerks in ein numerisches CP-Netzwerk . . 42
5.2 Umwandlungen der einzelnen Netzwerke 44
5.3 Plausibilitätsanfragen im Pinguin-Beispiel 53
5.4 OCF-Netzwerk mit variablen Rängen 54
5.5 Vergleich der Präferenzen/Plausibilitäten 57
5.6 CP-unabhängiges OCF-Netzwerk 60
5.8 Vergleich von OCF- und CP-Netzwerken mit Indifferenz 64

Symbolverzeichnis

$\mathcal{L}$	aussagenlogische Sprache
Σ	Menge von Aussagenvariablen
ω	eine mögliche Welt
Ω	Menge aller möglichen Welten
$\omega \models F$	eine Welt ω erfüllt eine Formel F
$F \models G$	G folgt logisch aus F
$\mid\!\sim$	Inferenzrelation
$(B\|A)$	Konditional: „Wenn A gilt, dann normalerweise auch B“
κ	ordinal konditionale Funktion oder Rangfunktion
$\mid\!\sim_\kappa$	Inferenzrelation bezüglich einer Rangfunktion κ
$\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$	ein DAG mit Knotenmenge $\mathcal{V}$ und Kantenmenge $\mathcal{E}$
$(\Sigma, \mathcal{E}, \{\kappa_V\}_{V \in \Sigma})$	ein OCF-Netzwerk
$\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp_\kappa \mathcal{Y} \mid \mathcal{Z}$	$\mathcal{X}$ ist κ-unabhängig zu $\mathcal{Y}$ gegeben $\mathcal{Z}$
$\mathcal{V}$	Menge von Variablen oder Entscheidungsmerkmalen
$Dom(V)$	Domäne von Werten einer Variablen $V \in \mathcal{V}$
$Asst(\mathcal{X})$	Menge aller möglichen Belegungen von $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$
$\prec$	Präferenzrelation
$\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp_\prec \mathcal{Y}$	$\mathcal{X}$ ist präferenziell unabhängig zu $\mathcal{Y}$
$\mathcal{X} \perp\!\!\!\perp_\prec \mathcal{Y} \mid \mathcal{Z}$	$\mathcal{X}$ ist präferenziell unabhängig zu $\mathcal{Y}$ gegeben $\mathcal{Z}$
$(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{CPT(V)\}_{V \in \mathcal{V}})$	ein CP-Netzwerk
$\Gamma \vdash_{cp} o_1 \prec o_2$ oder $o_1 \prec_\Gamma o_2$	Aus einem CP-Netzwerk Γ folgt $o_1 \prec o_2$
$\preceq$	Präferenzrelation mit Indifferenz
$\omega \models_\Gamma \mathcal{F}$	ω erfüllt $\mathcal{F}$ präferenziell in einem CP-Netzwerk Γ
$\mid\!\sim_\Gamma$	Inferenzrelation bezüglich eines CP-Netzwerks Γ