BAREM

LOGICĂ – TEST 2 – 18.01.2020 ora 9:00

Rândul 1

a) 2 1+1 1

1p oficiu **Subiectul 1.** Mulţimea numerelor raţionale: construcţie, definiţiile operaţiilor şi a relaţiei de ordine.
b) Să se arate că are loc proprietatea de distributivitate a înmulţirii faţă de adunare. 4 (din care 1p dacă este enunțată corect proprietatea)

1p of **Subiectul 2.** a) Definiţi noţiunile de mulţime finită (3 definiţii echivalente), infinită, numărabilă. 1+1+1 1 1
b) Să se arate că $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. 2
c) Să se arate că $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. 2

(ce este $\aleph_0$? = 0.5p
fct bij = 0.5p
dem bijectivitate 1p)

Rândul 2

1+1 1

1p. of. **Subiectul 1.** a) Mulţimea numerelor naturale: definiţiile operaţiilor şi a relaţiei de ordine (3 definiţii).
b) Proprietatea de trihotomie în $\mathbb{N}$ (enunţ şi demonstraţie prin inducţie).
– enunț 2p
– exist. 2p
– unicitate 2p

1p. of. **Subiectul 2.** a) Principiul includerii şi al excluderii (enunţ). 3p
b) Câte permutări $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ fără puncte fixe există? (Demonstraţie).

– Fie $A_i = \{\sigma \mid \sigma(i) = i\}$. Calc. $|A_i|$: 2p
– $|\bigcup A_i|$ 3p
– $n! - |\bigcup A_i|$ 1p

Rândul 3

1+1 b) 1+1+1

1p of. **Subiectul 1.** Latici Boole şi inele Boole (definiţii şi enunţul Teoremei lui Stone).
c) Să se arate că într-un inel Boole are loc identitatea $x + x = 0$, iar d) înmulţirea este comutativă.
2p 2p

1p of. **Subiectul 2.** a) Definiţi noţiunile de: echipotenţă; număr cardinal; ordonarea numerelor cardinale (3 definiţii). 1 1 1
b) Să se arate că pentru orice număr cardinal α avem $\alpha < 2^{\alpha}$.

- știm că $|\mathcal{P}(A)| = 2^{\alpha}$ 1p
- $\exists$ fct inj $A \to \mathcal{P}(A)$ 2p
- $\nexists$ fct bij $A \to \mathcal{P}(A)$ 3p

Rândul 4

2 1+1 1

1p. of. **Subiectul 1.** a) Mulţimea numerelor întregi: construcţie, definiţiile operaţiilor şi a relaţiei de ordine.
b) Să se arate că are loc proprietatea de distributivitate a înmulţirii faţă de adunare. 4 (din care 1p dacă este enunțată corect proprietatea)

1p. of. **Subiectul 2.** a) Operaţii cu numere cardinale (3 definiţii). 1+1+1
b) Să se arate că $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

- știm că $2^{\aleph_0} = |Hom(\mathbb{N}, \{0,1\})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ 2p
- știm că $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |[0,1)|$ 2p
- folosim repr. nr. din $[0,1)$ în baza 2 2p

BAREM

Logic TEST 2 – 18.01.2020, 10:30 AM

Row 1

1p oficiu

Question 1. The set of rational numbers: 1+1
a) Construction, definitions of the operations and of the order relation. 1
b) Prove that the definition of the addition does not depend on the choice of the representatives.

1p of

Question 2. a) Define the following notions: equipotence; cardinal number; ordering cardinal numbers (3 definitions). 1 1 1
b) Prove that for any cardinal number $\alpha = |A|$ we have $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.

- We know: $2^\alpha = |Hom(A, \{0,1\})| = |\{0,1\}^A|$ 1p
- define $\varphi: \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$, $X \mapsto \chi_X$ (char. funct.) 2p
- $\psi \circ \varphi = 1$ 1,5p
- $\varphi \circ \psi = 1$ 1,5p

Row 2

1p of

Question 1. The set of integers: 1+1
a) Construction, definitions of the operations and of the order relation. 1
b) Prove that the ring $\mathbb{Z}$ does not have divisors of zero (by using the fact that $\mathbb{N}$ has no divisors of zero). 5p (dintre care 1p dacă este enunțată corect proprietatea)

1p of

Question 2. a) Operations with cardinal numbers (3 definitions). 1+1+1
b) Prove that $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (by using that $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$). 2+2
c) Prove that $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. 2

Row 3

1p of

Question 1. The set of natural numbers:
a) Definition and the Peano axioms (statement). 1 2
b) Definitions of the operations and of the order relation on $\mathbb{N}$. 1+1+1
c) The division theorem in $\mathbb{N}$ (statement and proof). 1 1p (exist.) + 1p (unicit.)

1p of

Question 2. a) Define the notions of finite set, infinite set (3 equivalent definitions), countable set. 1+3+1
b) Prove that the set $\mathbb{R}$ of real numbers is not countable.

(metoda diag. a lui Cantor): 4p) (presup. prin absurd că [0,1) num. 2p)
(obținerea contradicției 2p)

Row 4

1p of

Question 1. a) The lattice as an ordered set, and the lattice and an algebraic structure (definitions and the statement of the theorem). 1+1 1+1
b) Draw the Hasse diagram of the ordered set $(A, |)$, where $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 12\}$. 2p
c) Prove that the ordered set $(\mathbb{N}, \leq)$ is a distributive lattice. 3p (dintre care 1p enunț distrib.)

1p of

Question 2. Let $|A| = k$ and $|B| = n$, where $k, n \in \mathbb{N}$.
a) How many injective functions $f: A \to B$ exist ? (proof by induction) 4p
b) Let $f: A \to B$ an injective function. How many retracts (left inverses) has f? (proof). 5p