BAREM

25.01.2020

grupele 311, 314, 812

Logică EXAMEN – 20.01.2021

Rândul 1

1p formule.

1p **Subiectul 1.** Să se verifice tautologia $(C \vee A) \wedge (C \to B) \wedge (A \to B) \Rightarrow B$, folosind:
a) tabele de adevăr; 4p
b) forme normale. 4p

0.5p 0.5p nesurj

1p **Subiectul 2.** a) Enunţaţi definiţia şi daţi un exemplu de funcţie ne~~injectivă~~ (cu justificare).
b) Să de arate că o funcţie $\alpha : X \to Y$ este ~~injectivă~~ surj dacă şi numai dacă cu α se poate simplifica la ~~stânga~~ dreapta. $\Rightarrow$ 2p $\Leftarrow$ 2p
c) Să se determine toate secţiunile funcţiei surjective $f : A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$ şi

x	1	2	3	4	5
f(x)	b	a	c	a	b

4 secţiuni câte 1p. = 4p

0.5 0.5 0.5 0.5

1p **Subiectul 3.** a) Mulţime ordonată, total ordonată, latice, latice completă (4 definiţii).
b) Să se dea exemplu de latice care nu e mulţime total ordonată. Justificare. 3.5p
c) Să se dea exemplu de mulţime total ordonată care nu e latice completă. Justificare. 3.5p

1p **Subiectul 4.** Mulţimea numerelor naturale:
a) Definiţie şi axiomele lui Peano. 0+5 + 5x0.5 = 3p
b) Definiţiile operaţiilor şi a relaţiei de ordine. 1+1+1 = 3p
c) Să se arate că adunarea în $\mathbb{N}$ este operaţie asociativă. 3p.

Logic EXAM – 20.01.2021

Row 1

Question 1. Verify the tautology $(C \vee A) \wedge (C \to B) \wedge (A \to B) \Rightarrow B$, by using:
a) truth tables;
b) normal forms.

Question 2. a) State the definition ~~and the characterization theorem~~ of surjective functions and give an example of a non-surjective function (justify your answer).
b) Prove that a function $\alpha : X \to Y$ is surjective if and only if α is right cancellable.
c) Find all the sections of the surjective function $f : A \to B$, where $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$ and

x	1	2	3	4	5
f(x)	b	a	c	a	b

Question 3. a) Ordered set, totally ordered set, lattice, complete lattice (4 definitions).
b) Give an example of a lattice which is not a totally ordered set (justify your answer).
c) Give an example of a totally ordered set which is not a complete lattice (justify your answer).

Question 4. The set of natural numbers:
a) Definition and the Peano axioms (statement).
b) Definitions of the operations and of the order relation on $\mathbb{N}$.
c) Prove that the addition in $\mathbb{N}$ is associative.

Logică EXAMEN – 20.01.2021

Rândul 2

1p of **Subiectul 1.** Să se verifice schema de deducţie $\frac{C\to(B\to A)}{C\wedge B\to A}$, folosind: formule 1p
a) tabele de adevăr; 4p
b) forme normale. 4p

1p of **Subiectul 2.** a) Teorema I de factorizare (enunţ). 2p
b) Să se aplice în cazul funcţiei $f : A \to B$, unde $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ şi

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	b	b	d	d	b	a	b	d

Im f 1p A/ker f 1p $\bar{f}$ 1p
ker f 1p p_{ker} 1p

c) Fie $f : A \to B$ o funcţie. Să se arate că $\ker f = f^{-1}\circ f$. 2p

1p of **Subiectul 3.** a) Latici (algebre) Boole şi inele Boole: definiţii. 1p + 1p
b) Enunţul teoremei lui Stone. 3p
c) Să se arate că operaţia „+" este asociativă. 4p

1p of **Subiectul 4.** a) Operaţii cu numere cardinale; ordonarea numerelor cardinale (4 definiţii). 1+1+1+1 = 4p
b) Să se arate că pentru orice număr cardinal $\alpha = |A|$ avem $\alpha < 2^{\alpha}$. 5p. — $2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)|$ f 1p
— $A \to \mathcal{P}(A)$ inj f (2p)
— $\nexists$ $A \to \mathcal{P}A$ bij (2p)

Logic EXAM – 20.01.2021

Row 2

Question 1. Verify the deduction scheme $\frac{C\to(B\to A)}{C\wedge B\to A}$, by using:
a) truth tables;
b) normal forms.

Question 2. a) State the 1st Factorization Theorem.
b) Apply the theorem in the case of the function $f : A \to B$, where $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ and

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	b	b	d	d	b	a	b	d

c) Let $f : A \to B$ o function. Prove that $\ker f = f^{-1}\circ f$.

Question 3. a) Boole algebras and Boole rings: definitions.
b) The statement of Stone's theorem.
c) Prove that the operation "+" is associative.

Question 4. a) Operations with cardinal numbers; ordering cardinal numbers (4 definitions).
b) Prove that for any cardinal number $\alpha = |A|$ we have $\alpha < 2^{\alpha}$.

Logică EXAMEN – 2~~0~~6.01.2021

Rândul 3

0.5 0.5 0.5

1pd **Subiectul 1.** a) Enunţaţi definiţiile reuniunii, intersecţiei şi compunerii a două relaţii.
b) Fie $A = \{1,2,3,4,5\}$ şi R, R', $S \subseteq A \times A$, unde
$R = \{(1,1),(1,5),(2,4),(3,4),(4,2)\}$, $R' = \{(1,4),(5,4),(1,2),(2,5),(3,1),(4,4)\}$, 1 1 1
$S = \{(1,2),(1,5),(2,3),(2,4)(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(3,2)\}$. Să se determine relaţia $(S \circ R) \cup (S \circ R')$.
c) Fie relaţiile $\sigma = (C, D, S)$, $\tau = (A, B, T)$ şi $\rho = (A, B, R)$. Sa se arate că: $\sigma \circ (\rho \cap \tau) \subseteq (\sigma \circ \rho) \cap (\sigma \circ \tau)$. Să se precizeze toate tautologiile care au fost folosite în demonstraţie. 1.5p. 3p

1pd **Subiectul 2.** a) Sa se determine $f(A)$ şi $f^{-1}(f(A))$, unde $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{a,b,c,d\}$, $A = \{3,5\}$ şi

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	c	d	c	d	b	b	c	d

1p 1p $\{b,c\}$ $\{1,3,5,6,7\}$

2p

b) Fie $f : X \to Y$ o funcţie şi $A \subseteq X$. Sa se arate ca: $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. ⟹ 2.5p ⟸ 2.5p
c) Sa se arate ca funcţia $f : X \to Y$ este injectiva daca şi numai daca $A = f^{-1}(f(A))$ pentru orice $A \subseteq X$.

0.5 0.5 0.5

1pd **Subiectul 3.** a) Mulţimi ordonate, total ordonate, bine ordonate (3 definiţii).
b) Daţi un exemplu de mulţime total ordonată care nu e bine ordonată (justificare). 4p
c) Teorema de caracterizare a mulţimilor bine ordonate (enunţ). 3.5p

1pd **Subiectul 4.** a) Noţiunile de echipotenţă şi număr cardinal; ordonarea numerelor cardinale (definiţii). 1+1+1
b) Să se arate că pentru orice număr cardinal $\alpha = |A|$ avem $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.

- $2^\alpha = |\mathrm{Hom}(A, \{0,1\})|$ 1p
- fucţ. caracteristica χ_X 1p
- funcţiile φ, ψ 2p
- $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ 2p

Logic EXAM – 2~~0~~6.01.2021

Row 3

Question 1. a) State the definitions of the union, intersection and composition of two relations.
b) Let $A = \{1,2,3,4,5\}$ and R, R', $S \subseteq A \times A$, where
$R = \{(1,1),(1,5),(2,4),(3,4),(4,2)\}$, $R' = \{(1,4),(5,4),(1,2),(2,5),(3,1),(4,4)\}$,
$S = \{(1,2),(1,5),(2,3),(2,4)(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(3,2)\}$. Find the relation $(S \circ R) \cup (S \circ R')$.
c) Consider the relations $\sigma = (C, D, S)$, $\tau = (A, B, T)$ and $\rho = (A, B, R)$. Prove that: $\sigma \circ (\rho \cap \tau) \subseteq (\sigma \circ \rho) \cap (\sigma \circ \tau)$. State separately all the tautologies which have been used in the proof.

Question 2. a) Find $f(A)$ and $f^{-1}(f(A))$, where $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{a,b,c,d\}$, $A = \{3,5\}$ and

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	c	d	c	d	b	b	c	d

b) Let $f : X \to Y$ be a function and $A \subseteq X$. Prove that: $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
c) Prove that the function $f : X \to Y$ is injective if and only if $A = f^{-1}(f(A))$ for all $A \subseteq X$.

Question 3. a) Ordered sets, totally ordered sets, well-ordered sets (3 definitions).
b) Give an example of a totally ordered set which is not well-ordered.
c) The characterization of well-ordered sets (statement of the theorem).

Question 4. a) Define the following notions: equipotence; cardinal number; ordering cardinal numbers (3 definitions).
b) Prove that for any cardinal number $\alpha = |A|$ we have $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.

Logică EXAMEN – 20.01.2021

Rândul 4

1p **Subiectul 1.** Fie $f : X \to Y$ o funcţie.

$\{4,5,6\}$ $\{a,b,c\}$

a) Să se determine $f^{-1}(f(A))$ şi $f(f^{-1}(B))$, unde $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$, $A = \{1,5,6\}$, $B = \{a,b,c\}$ şi 2p 2p

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	b	c	d	d	a	a	c	d

b) Să se arate că: $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ pentru orice $A_1, A_2 \subseteq X$. Să se precizeze toate tautologiile care au fost folosite în demonstraţie. 3p 2p.

1p **Subiectul 2.** a) Enunţaţi definiţia şi teorema de caracterizare a funcţiilor injective. 0.5 1.5
b) Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$. Să se arate că dacă $g \circ f$ este injectiv, atunci f este injectiv. 4p.
c) Să se determine toate retractele funcţiei injective $f : A \to B$, unde $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$ şi

x	1	2	3	4
f(x)	d	b	a	e

4 retr. 1+1+1+1 = 4p

1p **Subiectul 3.** a) Laticea ca structură algebrică; latice distributivă (definiţii). 2 1.
b) Să se arate că mulţimea ordonată $(\mathbb{N}, |)$ este latice distributivă.

inf = cmmdc 1p
sup = cmmmc 1p + 4p dem.

1p **Subiectul 4.** a) Principiul includerii şi al excluderii (enunţ). 2p
b) Să se scrie toate permutările $\sigma \in S_4$ fără puncte fixe. 4p
c) Câte permutări $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ fără puncte fixe există? (Demonstraţie). 3p.

Logic EXAM – 20.01.2021

Row 4

Question 1. Let $f : X \to Y$ be a function.
a) Find $f^{-1}(f(A))$ and $f(f^{-1}(B))$, where $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$, $A = \{1,5,6\}$, $B = \{a,b,c\}$ and

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	b	c	d	d	a	a	c	d

b) Prove that: $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ for all $A_1, A_2 \subseteq X$. State separately all the tautologies which have been used in the proof.

Question 2. a) State the definition and the characterization theorem of injective functions.
b) Let $f : A \to B$ and $g : B \to C$. Prove that if $g \circ f$ is injective, then f is injective.
c) Find all the retractions of the injective function $f : A \to B$, where $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$ and

x	1	2	3	4
f(x)	d	b	a	e

Question 3. a) The lattice an algebraic structure: distributive lattice (definitions).
b) Prove that the ordered set $(\mathbb{N}, \leq)$ is a distributive lattice.

Question 4. a) The inclusion-exclusion principle (statement).
b) Write down all the fixed-point-free permutations $\sigma \in S_4$.
c) How many fixed-point-free permutations $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ do exist? (Proof).