LOGICĂ – TEST 1 – 16.10.2019 ora 9:00

Rândul 1

Subiectul 1. Să se arate că $\frac{A\to B,\ B\to C}{A\to C}$ folosind:

Formula $(A\to B)\wedge(B\to C)\to(A\to C)$ 1p

a) tabele de adevar; 4p

b) forme normale. 4p

1p 1p 1p 1p

Subiectul 2. a) Să se definească noţiunile: relaţie diagonală, funcţie, inversa unei relaţii, compunerea a două relaţii (4 definiţii)

b) Fie $\rho = (A, B, R)$ o relaţie. Să se arate că ρ este funcţie dacă şi numai dacă $1_A \subseteq \rho^{-1}\circ\rho$ şi $\rho\circ\rho^{-1} \subseteq 1_B$.

def relatiei 1_A – 1p $\Rightarrow$ 1p+1p $\Leftarrow$ 1p+1p

Rândul 2

Subiectul 1. Fie $f : A \to B$ o funcţie.

a) Să se determine $f(X)$ şi $f^{-1}(Y)$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $X = \{1, 5, 6\}$, $Y = \{a, b, c\}$ şi

2p 2p

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	b	c	d	d	a	a	c	d

b) Să se arate că: $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ şi $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ pentru orice $X_1, X_2 \subseteq A$ şi orice $Y_1, Y_2 \subseteq B$. 2,5p 2,5p

Subiectul 2. a) Enunţaţi (definitie si) teorema de caracterizare a funcţiilor surjective.

– def 1p

– teor. 1p+1p

b) Demonstraţi caracterizarea prin proprietatea de simplificare. $\Rightarrow$ 2p $\Leftarrow$ 2p

c) Să se determine toate secţiunile funcţiei surjective $f : A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$ şi

x	1	2	3	4	5
f(x)	c	c	a	b	a

(4 sectiuni) 0,5+0,5+0,5+0,5 = 2p

Rândul 3

1p 1p 1p

1. a) Să se definească intersecţia, reuniunea, respectiv produsul cartezian al unei familii de mulţimi.

b) Să se arate că $\complement(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} \complement(X_i)$ şi $\complement(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} \complement(X_i)$ şi să se precizeze tautologia din logica predicatelor care a fost folosită în demonstraţie. 2+1 tautologia 2p+ 1p tautologia

2. a) Legătura dintre partiţii şi relaţii de echivalenţă (definiţii şi enunţul teoremei). def part 1p

b) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să determine relaţia corespunzătoare partiţiei $\{\{2, 4, 6\}, \{1, 5\}, \{3\}\}$. def rel echiv 1p

3p

enunt 2p part → rel ech
2p rel echiv. → part

Rândul 4

Subiectul 1. a) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, fie relaţia $\rho = (A, A, R)$, unde $R = \{(1, 3), (2, 1), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 4), (3, 4), (6, 1)\}$ şi submulţimile $X = \{2, 4, 6\} \subset A$ şi $Y = \{1, 2, 5\} \subset A$. Să se determine mulţimile $\rho(X)$ şi $\rho^{-1}(Y)$. 2p + 2p

b) Considerăm relaţiile $\rho = (A, B, R)$, $\rho' = (A, B, R')$ şi submulţimile $X, X' \subseteq A$. Să se demonstreze în general că $(\rho \cup \rho')(X) = \rho(X) \cup \rho'(X)$ şi $(\rho \cap \rho')(X) \subseteq \rho(X) \cap \rho'(X)$; 2,5p + 2,5p

Subiectul 2. Teorema I de factorizare (enunţ 1p şi demonstraţie 3p).

b) Să se aplice în cazul funcţiei $f : A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ şi

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	e	b	e	c	b	a	e	c

ker f 1p p ker f 1p

Im f 1p $\bar{f}$ 1p (total 5p)

A/ker f 1p

Logic TEST 1 – 16.11.2019, 10:30 AM

Row 1

Formula 1p 1

$((C \vee A) \wedge (C \to B) \wedge (A \to B)) \to B$

Question 1. Verify the tautology $(C \vee A) \wedge (C \to B) \wedge (A \to B) \Rightarrow B$, by using:

4 a) truth tables; 4p

4 b) normal forms. 4p

Question 2. a) State the definition of the injective function. 1p

b) Let $f : A \to B$ be a function. Prove that for any subsets $X_1, X_2 \subseteq A$ we have $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$. 4p

c) Prove that the function $f : A \to B$ is injective if and only if for any $X_1, X_2 \subseteq A$ we have $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$. $\Rightarrow$ 2p $\Leftarrow$ 2p

Row 2

3 **Question 1.** a) State the definitions of the intersection 1p and union 1p of a family of sets, and of the cartesian product 1p of two sets.

6 b) Prove that $(\bigcup_{i \in I} X_i) \times (\bigcup_{j \in J} Y_j) \overset{5p}{=} \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$, and state separately the tautology 1p from the first order logic which was used in the proof.

Question 2. a) State the definition 1p and the characterization theorem of surjective functions. 1p 1p

b) Prove the characterization in terms of sections. $\Rightarrow$ 2p $\Leftarrow$ 2p

c) Find all the sections of the surjective function $f : A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$ and

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	b	a	c	a	b

(4 sectiuni) 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 2p

Row 3

4 **Question 1.** a) Find $f(X)$ 2p and $f^{-1}(Y)$ 2p, where $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{a, b, c, d\}$, $X = \{1, 3, 6\}$, $Y = \{c, d\}$ and

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	c	a	c	b	a	c	b	c

5 b) Let $f : A \to B$ be a function, and let $X_i \subseteq A$ and $Y_i \subseteq B$ for all $i \in I$. Prove that $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$ and $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} Y_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$. 2,5p + 2,5p

Question 2. a) State and prove the 1st Factorization Theorem. Statement 1p Proof 3p.

b) Apply the theorem in the case of the function $f : A \to B$, where $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ and

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	c	b	d	c	c	b	d	d

Kerf 1p P_{Kerf} 1p

Inf 1p $\bar{f}$ 1p

A/Kerf 1p

Row 4

3 **Question 1.** a) State the definitions of the union 1p, intersection 1p and composition 1p of two relations.

2 b) Let $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $R, S, S' \subseteq A \times A$, where $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2)(4, 5), (4, 1), (5, 3), (5, 2), (3, 3)\}$, $S = \{(1, 5), (1, 4), (2, 2), (3, 2)\}$, $S' = \{(1, 2), (5, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 2)\}$. Find the relations $(S \circ R) \cap (S' \circ R)$ and $(S \cap S') \circ R$. 0.5p 0.5 0.5 0.5p

4 c) Consider the relations $\sigma_i = (C, D, S_i)$, $i \in \{1, 2\}$ and $\rho = (A, B, S)$. Prove that $(\sigma_1 \cup \sigma_2) \circ \rho \overset{4p}{=} (\sigma_1 \circ \rho) \cup (\sigma_2 \circ \rho)$.

Question 2. a) State the definition 1p and the characterization theorem of injective functions. 1p + 1p

b) Prove the characterization in terms of simplifiability. $\Rightarrow$ 2p $\Leftarrow$ 2p

c) Find all the retracts of the injective function $f : A \to B$, where $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ and

x	1	2	3	4
$f(x)$	b	a	e	c

4 retract (0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5)