Serii de puteri

Fie $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ un şir de numere reale. Se numeşte **serie de puteri** o serie de funcţii de forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

cu observaţia că prima funcţie din această serie de funcţii este funcţia constantă a_0. Astfel, pentru un $x_0 \in \mathbb{R}$, se obţine o serie de numere reale,

$$\sum_{n\geq 0} a_n {x_0}^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n + ...$$

Un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se numeşte **punct de convergenţă** dacă seria de numere reale $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$, este convergentă, adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \in \mathbb{R}\,.$$

Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă formează **mulţimea de convergenţă a seriei de puteri**, notată prin

$$\mathcal{C} = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se constată că în cazul seriilor de puteri întotdeauna

$$0 \in \mathcal{C},$$

deoarece

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0 = a_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Raza de convergenţă a seriei de puteri este

$$R = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{unde} \quad \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Conform teoremei lui Cauchy-Hadamard,

$$(-R, R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-R, R].$$

Cazurile particulare în care

$$x = -R \quad si \quad x = R$$

trebuie analizate separat, pentru a se stabili cu exactitate $\mathcal{C}$.

Toate exerciţiile au acelaşi enunţ: stabiliţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a următoarelor serii de puteri:

Exemeplul 1

$$\sum_{n\geq 1} n^n x^n.$$

Rezolvare: Şirul care generează seria de puteri este $(a_n)_{n\geq 1}$, are termenul general

$$a_n = n^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculăm

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \Longrightarrow R = 0.$$

De aceea

$$\mathcal{C} = \{0\}.$$

Observaţie: Seriile de puteri pot fi scrise ca fiind dezoltate în jururl unor puncte arbitrare în $\mathbb{R}$, caz în care au formularea;

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n.$$

Pentru aceste cazuri raza de convergenţă se calculează exact dupa modelul de mai sus. Singura diferenţă apare la formularea mulţimii de oconvergenţă, astfel;

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [x_0 - R, x_0 + R].$$

Cazurile în care $x = x_0 - R$ şi $x = x_0 + R$ trebuie analizate separat pentru a preciza cu exactitate multţimea de convergenţă.

Exemplul 2 :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} (x+2)^n.$$

Rezolvare: Seria de puteri este dezolvtată în jurul punctului $x_0 = -2$, iar şirul care o generează este $(a_n)_{n\geq 1}$, având termenul general

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculăm

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(2n+3)}{n(2n+1)} \right| = 1 \Longrightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

Deci

$$(-2-1, -2+1) = (-3, -1) \subseteq \mathcal{C}.$$

Verificăm pe rând capetele intervalului de convergenţă.

Pentru $x = -3$, seria de numere reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \quad \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2},$$

care este convergentă, deci $-3 \in \mathcal{C}$.

Pentru $x = -1$, seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} \cdot (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ este o serie alternată. Deoarece şirul de numere reale $\left(\frac{1}{n(2n+1)}\right)_{n\geq 1}$ este descrescă tor, cu limita 0, din criteriul lui Leibniz, rezultă că avem convergenţă, astfel, $-1 \in \mathcal{C}$.

În concluzie
$$\mathcal{C} = [-3, -1].$$

Exercițiul 2 : Analizați următoarele serii de puteri:

1. $\sum x^n$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$
5. $\sum_{n\geq 1} n! x^n$
6. $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2-n-1}\right)^n x^n.$

1. $\sum x^n$

$u_n = x^n$

$a_n = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \mathcal{C} = 1$

2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$

$u_n = \frac{1}{n} \cdot x^n$

$a_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow (-1;1) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-1,1]$ (1)

→ if $x=-1 \Rightarrow u_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ is convergent (Leibniz $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^n}{n} \text{ is decreasing} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \end{array} \right.$)

$\Rightarrow -1 \in \mathcal{C}$ (2)

→ if $x = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ is divergent $\Rightarrow 1 \notin \mathcal{C}$ (3)

From (1), (2), (3) $\Rightarrow \mathcal{C} = [-1, 1)$

3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n$

$u_n = \frac{1}{n(n+1)} x^n$

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow (-1;1) \subseteq \mathcal{C} \subseteq [-1,1]$ (1)

- if $x = -1 \Rightarrow u_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \Rightarrow \sum u_n$ is convergent $\Rightarrow -1 \in \mathcal{C}$ (2)
- if $x = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$S_{n+1} - S_n = 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (s_n)_n$ increasing

$0 < s_n < 1 \nearrow (s_n)_n$ bounded $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (s_n)_n$ convergent $\Rightarrow \sum u_n$ is convergent $\Rightarrow 1 \in \mathcal{C}$ (3)

From (1), (2), (3) $\Rightarrow \mathcal{C} = [-1, 1]$

4. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$

$$u_n = \frac{1}{n!} \cdot x^n$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow \mathcal{C} = \mathbb{R}$$

5. $\sum_{n\geq 1} n!x^n$

$$u_n = n! \cdot x^n$$

$$a_n = n!$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow R = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = \{0\}$$

6. $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[3]{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^2-n-1}\right)^n x^n.$