grupele 312, 811, 813

BAREM

Logică EXAMEN – 20.01.2021

Rândul 1

1p of

Subiectul 1. Fie formula $A = (z \to x) \wedge (x \to y)$. transcriere foilor 1p.

a) Să se întocmească tabelul de adevăr. 3

b) Să se aducă A la FND şi FNC. 2,5 + 2,5

1p of.

Subiectul 2. a) Enunţaţi definiţia şi teorema de caracterizare a funcţiilor injective. 0,5 1,5

b) Să se arate că dacă $f : A \to B$ este funcţie injectivă, atunci $f(X_1 \setminus X_2) = f(X_1) \setminus f(X_2)$, pentru orice $X_1, X_2 \subseteq A$. 3p.

c) Să se determine toate retractele funcţiei injective $f : A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ şi

x	1	2	3	4
f(x)	d	a	b	e

4 retracte (1+1+1+1)

1p of

Subiectul 3. a) Mulţime ordonată, total ordonată, funcţie crescătoare (3 definiţii). 1 1 1

b) Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \leq)$ mulţimi ordonate şi $f : A \to B$ funcţie bijectivă şi crescătoare. Să se arate că dacă A este total ordonată, atunci f^{-1} este crescătoare şi B este total ordonată. 3 3

1p of

Subiectul 4. a) Operaţii cu numere cardinale (3 definiţii). 1+1+1

b) Să se arate că $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

– $c = [0,1|$ 1p

– reprez. numelor în baza 2: 1p

– $2^{\aleph_0} = |\mathrm{Hom}(\mathbb{N}, \{0,1\})|$ 1p

– funcția f și concluzia 3p.

Logic EXAM – 20.01.2021

Row 1

Question 1. Consider the formula $A = (z \to x) \wedge (x \to y)$.

a) Write down the truth table.

b) Put A into a DNF and into a CNF.

Question 2. a) State the definition and the characterization theorem of injective functions.

b) Prove that if $f : A \to B$ is injective, then $f(X_1 \setminus X_2) = f(X_1) \setminus f(X_2)$, for all $X_1, X_2 \subseteq A$.

c) Find all the retractions of the injective function $f : A \to B$, where $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ and

x	1	2	3	4
f(x)	d	a	b	e

Question 3. a) Ordered set, totaly ordered set, increasing function (3 definitions).

b) Let $(A, \leq)$ and $(B, \leq)$ be ordered sets and let $f : A \to B$ be a bijective increasing function. Prove that if A is totaly ordered, then f^{-1} is increasing and B is totaly ordered.

Question 4. a) Operations with cardinal numbers (3 definitions).

b) Prove that $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Logică EXAMEN – 20.01.2021

Rândul 2

0,5 0,5 0.5

1p **Subiectul 1.** a) Să se enunţe definiţia intersecţiei şi reuniunii unei familii de mulţimi, precum şi a produsului cartezian a două mulţimi.

b) Să se arate că $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$ şi să se precizeze toate tautologiile care au fost folosite în demonstraţie.

6p. 1.5

0.5 0.5 0.5

1p **Subiectul 2.** a) Enuntaţi definiţia funcţiilor injective şi daţi un exemplu de funcţie neinjectivă (cu justificare).

b) Să de arate că o funcţie $\alpha : X \to Y$ este injectiva daca şi numai daca cu α se poate simplifica la stânga.

c) Să se determine toate retractele funcţiei injective $f : X \to Y$, unde $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ şi

x	1	2	3	4
f(x)	e	a	d	b

4 retract (1+1+1+1)

- enuntul formal 0.5p
- ⇒ 1.5p
- ⇐ 1.5p

1p **Subiectul 3.** a) Mulţime ordonată, latice, latice completă (3 definiţii). 3 = 1+1+1

b) Să se dea exemplu de mulţime ordonată care nu e latice. Justificare. 3

c) Să se dea exemplu de latice care nu e latice completă. Justificare. 3

0.5 0.5 0.5 0.5

1p. **Subiectul 4.** a) Aranjamente cu repetiţie, aranjamente, combinări, permutări (4 definiţii).

b) Să se scrie toate funcţiile $f : \{a, b\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 5^2 funct 0.1 p/funct = 2.5p

c) Fie $|A| = n$ şi $|B| = m$, unde $n, m \in \mathbb{N}$. Câte funcţii $f : A \to B$ există ? (Demonstraţii prin inducţie.)

- Enunt Hom(A,B) = m^n 0.5p
- Dem: 4p

Logic EXAM – 20.01.2021

Row 2

Question 1. a) State the definitions of the intersection and union of a family of sets, and of the cartesian product of two sets.

b) Prove that $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$, and state separately all the tautologies which were used in the proof.

Question 2. a) State the definition of the injective function, and give an example of a non-injective function (justify your answer).

b) Prove that a function $\alpha : X \to Y$ is injective if and only if α is left cancellable.

c) Find all the retracts of the injective function $f : A \to B$, where $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ and

x	1	2	3	4
f(x)	e	a	d	b

Question 3. a) Ordered set, lattice, complete lattice (3 definitions).

b) Give an example of an ordered set which is not a lattice (justify your answer).

c) Give an example of a lattice which is not a complete lattice (justify your answer).

Question 4. a) Arrangements with repetition, arrangements, combinations, permutations (4 definitions).

b) Write down all the functions $f : \{a, b\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) Let $|A| = n$ and $|B| = m$, where $n, m \in \mathbb{N}$. How many functions $f : A \to B$ exist ? (proof by induction.)

Logică EXAMEN – 20.01.2021

Rândul 3

0.5 0.5 0.5

1,0 **Subiectul 1.** a) Definiţiile reuniunii, intersecţiei şi compunerii a două relaţii.

b) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi R, S, $S' \subseteq A \times A$, unde
$R = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (4,1), (4,3), (5,2), (5,4), (3,2)\}$,
$S = \{(1,1), (1,5), (4,3), (2,4), (3,4)\}$, $S' = \{(1,4), (5,4), (1,2), (2,5), (3,3), (4,4)\}$.
Să se determine relaţia $(R \circ S) \cap (R \circ S')$. „∘" = 1p „∘" = 1p „∩" = 1p

c) Fie relaţiile $\tau = (C, D, S)$, $\sigma = (C, D, S)$ şi $\rho = (A, B, S)$. Să se arate că: $(\sigma \cup \tau) \circ \rho = (\sigma \circ \rho) \cup (\tau \circ \rho)$. Să se precizeze toate tautologiile care au fost folosite în demonstraţie. 1.5 3p.

1,0 **Subiectul 2.** a) Teorema I de factorizare (enunţ). 2p

b) Să se aplice în cazul funcţiei $f : A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ şi

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	b	d	b	d	a	b	b	d

Ker f, Im f, A/Ker f, Pkerf, $\bar{f}$ total 5p.
1 1 1 1 1

c) Fie $f : A \to B$ o funcţie. Să se arate că $\ker f$ este relaţie de echivalenţă pe A. 2p.

1,0 **Subiectul 3.** a) Mulţimi ordonate, bine ordonate (2 definiţii). 1p 1p

b) Principiul inducţiei complete pentru mulţimi bine ordonate (enunţul corolarului). 1p.

c) Să se arate că $(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată. 6p.

1,0 **Subiectul 4.** Mulţimea numerelor raţionale:

a) Construcţie, definiţiile operaţiilor şi a relaţiei de ordine. 2+1+1+1

b) Să se verifice proprietatea de distributivitate. 4p.

Logic EXAM – 20.01.2021

Row 3

Question 1. a) State the definitions of the union, intersection and composition of two relations.

b) Let $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, and let R, S, $S' \subseteq A \times A$, where
$R = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (4,1), (4,3), (5,2), (5,4), (3,2)\}$,
$S = \{(1,1), (1,5), (4,3), (2,4), (3,4)\}$, $S' = \{(1,4), (5,4), (1,2), (2,5), (3,3), (4,4)\}$. Find the relation $(R \circ S) \cap (R \circ S')$.

c) Consider the relations $\tau = (C, D, S)$, $\sigma = (C, D, S)$ and $\rho = (A, B, S)$. Prove that $(\sigma \cup \tau) \circ \rho = (\sigma \circ \rho) \cup (\tau \circ \rho)$. State separately all the tautologies which have been used in the proof.

Question 2. a) State the 1^{st} Factorization Theorem.

b) Apply the theorem in the case of the function $f : A \to B$, where $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ and

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	b	d	b	d	a	b	b	d

c) Let $f : A \to B$ o function. Prove that $\ker f$ is an equivalence relation on A.

Question 3. a) Ordered sets, totally ordered sets, well-ordered sets (3 definitions).

b) The principle of complete induction for well-ordered sets (statement of the corollary).

c) Prove that $(\mathbb{N}, \leq)$ is well-ordered.

Question 4. The set of rational numbers:

a) Construction, definitions of the operations and of the order relation.

b) Verify the distributive property.

Logică EXAMEN – 20.01.2021

Rândul 4

1p of **Subiectul 1.** a) Să se determine $f^{-1}(f(X))$ şi $f(f^{-1}(Y))$, unde $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{a, b, c, d\}$, $X = \{2, 5\}$, $Y = \{b, d\}$ şi

f(X)=1p $f^{-1}(Y)$=1p $f^{-1}f(X)$=1p $f f^{-1}(Y)$=1p

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	a	d	a	d	b	a	a	d

3.5p

b) Fie $f : X \to Y$ o funcţie, $A_i \subseteq X$ şi $B_i \subseteq Y$, $i \in I$. Să se arate că avem $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Să se precizeze toate tautologiile care au fost folosite în demonstraţie. 1.5p.

1p of **Subiectul 2.** a) Partiţii şi relaţii de echivalenţă (definiţii). 0.5 + 0.5
Fie ρ şi σ două relaţii de echivalenţă pe mulţimea A. Să se demonstreze că:
b) $\rho \cap \sigma$ este relaţie de echivalenţă. 4 = 1p def + 1p (R) + 1p (T) + 1p (S)
c) $\rho \cup \sigma$ în general nu este relaţie de echivalenţă. exempl 2p justif 2p.

1p of **Subiectul 3.** Latice şi latice completă:
a) definiţii. 1 + 1
2 (ex 1p + justif 1p) 2
b) Să se dea un exemplu de latice completă şi un exemplu de latice care nu este completă (cu justificări).
c) Presupunem ca orice submulţime a mulţimii ordonate $(A, \leq)$ are supremum. Să se arate că este latice completă. 3p.

1p of **Subiectul 4.** Mulţimea numerelor naturale:
a) Definiţie şi axiomele lui Peano (enunţ). 0.5p / axioma = 2.5p.
b) Definiţiile operaţiilor şi a relaţiei de ordine în $\mathbb{N}$. 0.5 + 0.5 + 0.5 = 1.5p
c) Teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{N}$ (enunţ şi demonstraţie).
– enunt = 1p
– dem ∃ 2p
∃! 2p.

Logic EXAM – 20.01.2021

Row 4

Question 1. a) Find $f^{-1}(f(X))$ and $f(f^{-1}(Y))$, where $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{a, b, c, d\}$, $X = \{2, 5\}$, $Y = \{b, d\}$ and

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	a	d	a	d	b	a	a	d

b) Let $f : X \to Y$ be a function, and let $A_i \subseteq X$ and $B_i \subseteq Y$ for all $i \in I$. Prove that $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. State separately all the tautologies which have been used in the proof.

Question 2. a) Partitions and equivalence relations (definitions).
Let ρ and σ be equivalence relations on the set A. Prove that:
b) $\rho \cap \sigma$ is an equivalence relation.
c) $\rho \cup \sigma$ is not an equivalence relation in general.

Question 3. Lattice and complete lattice:
a) definitions.
b) Give an example of a complete lattice and an example of a lattice which is not complete (justify your answer).
c) Assume that any subset of the ordered set $(A, \leq)$ has supremum. Prove that $(A, \leq)$ is a complete lattice.

Question 4. The set of natural numbers:
a) Definition and the Peano axioms (statement).
b) Definitions of the operations and of the order relation on $\mathbb{N}$.
c) The division theorem in $\mathbb{N}$ (statement and proof).