

Лекция 1 НМУ Матан-1 "Аксоматическая теория множеств и группы

План

1. Проблемы [наивного определения множества](#). [Парадокс Рассела](#).
2. [Хорошие курсы по математической логике и аксиомы теории множеств](#)
3. Аксиомы [Цермело-Франкеля](#): объемности, выделения, степени, пары, суммы
4. [Аксиоматические определения](#): $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$
5. [Определение функции](#) f через график Γ_f , [график композиции функций](#), [инъекция](#), [сюръекция](#), [биекция](#)
6. [Группа биекций на мн-ве \$X\$](#) : $G(X) = \{f \mid f: X \rightarrow X(\text{bijection})\}$
7. Изоморфизм групп и связь \mathbb{R} и операций на плоскости, повороты мн-ва \mathbb{R}
8. Теоретико-числовые примеры подгрупп в группе (\mathbb{Z} и четные \mathbb{Z})
9. [Всякая группа изоморфна группе подгруппе некоторой группы биекций](#) (и связь с теоремой Кэлли про вложенность конечных групп в группу перестановок)

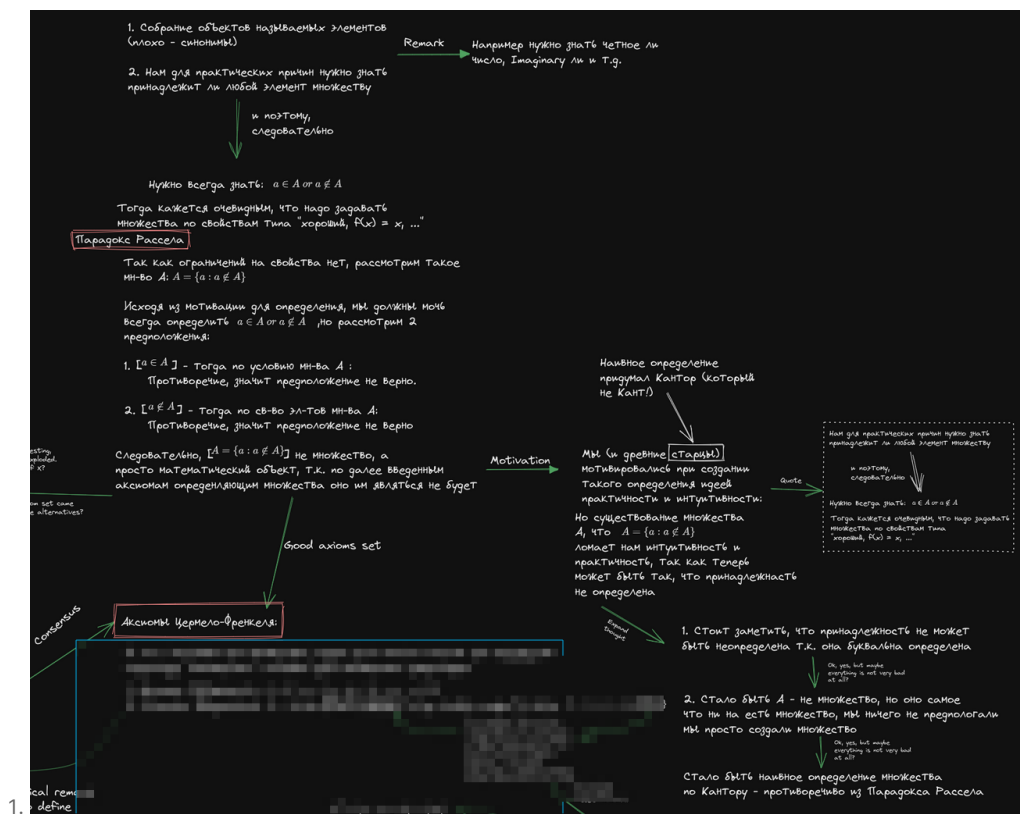
Видео

[YouTube](#)

Листочек

Anki

1. Что такое парадокс рассела?



2. Что такое ZF, ZFC?

1. Система аксиом Цермело — Френкеля (ZF) — наиболее широко используемый вариант аксиоматической теории множеств, являющийся фактическим стандартом для оснований математики. Сформулирована Эрнстом Цермело в 1908 году как средство преодоления парадоксов теории множеств, и уточнена Абрахамом Френкелем в 1921 году.
2. К этой системе аксиом часто добавляют аксиому выбора, и называют системой Цермело — Френкеля с аксиомой выбора (ZFC, англ. Zermelo—Fraenkel set theory with the axiom of Choice).

3) Определение пары (a, b) для $A \times B$: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

4) Определение $A \times B$ (декартова произведения):
 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$

Exercise: prove the implication:
 $(a, b) = (c, d) \implies a = c, b = d$

Def. where it lives? $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Это важно, т.к. хотя у нас и есть аксиома пары, и пр. — основное св-во это брать множество или выделять свойством. Т.к. объект не произвольный, а специфический, будем выделять свойством. Но из чего?

Рассмотрим один из таких объектов, пару (a, b)

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Живут в мин-ве мощность объектов A, B

thus

$A \times B = \{x \in 2^{2^{A \cup B}} : \exists a \in A, b \in B, x = (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}\}$

Consider selection via 2nd axiom Zermelo-Fraenkel

$\{a\}, \{a, b\} \in 2^{A \cup B} \implies \{\{a\}, \{a, b\}\} \subset 2^{A \cup B} \implies \{(a, b)\} \in 2^{2^{A \cup B}}$

1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
 line \mapsto the plane

2) $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$
 torus

Remark: Почему отображать прямую в плоскость, тогда почему прямая на прямую это м-во? Может быть это ещё прямая. Так исторически сложилось, математикам конечно оно отображается в \mathbb{R}^2 , а во что мы отображаем \mathbb{R}^2 чтобы оно стало топологично прямой? Конечно, это не дело математики.

Simply "natural" objects representing given sets

1.

5. Каково определение графика функции в ZFC?

$t=0$

Всем нет дела до этого, функции все явные — ряды, многочлены, т.д.

1850

Определение функции (1850, Лобачевский):
 $f: X \rightarrow Y$ — функция если каждому x из X сопоставляется ОДИН y из Y

Object: what does "map" mean?

Определим График ф-ии $f(x)$: $\Gamma_f = \{(x, y) : y = f(x)\} \subset X \times Y$

Где такое, что выполняются свойства:

$\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in \Gamma$

$\forall x \in X, y, z \in Y : (x, y), (x, z) \in \Gamma \implies y = z$

Consider that for the definition to be easier, f is defined everywhere on X $\text{dom}(f) = X$

$(x, y) \in \Gamma_f \iff y = f(x)$

$x: \begin{matrix} \circ & \circ & \circ \\ y: & \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix} \begin{matrix} (x, y) \\ (x, z) \end{matrix}$

1.

6. Какая взаимосвязь у понятия функции и понятия биективного отображения в контексте обратных функций?

Theorem f - bijection $\{(y, x) : y = f(x)\}$ defines a function f^{-1} that is bijective and called an inverse function

Proof: Using function definition, let's prove that $\{(y, x) : y = f(x)\}$ is a function

From Γ_f definition:

$\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in \Gamma$

$\forall x \in X, y, z \in Y : (x, y), (x, z) \in \Gamma \implies y = z$

$\forall y \in Y \exists x \in X : (y, x) \in \Gamma \iff \text{surjection: } \forall y \in Y : f(x) = y$

$\forall y \in Y, x_1, x_2 \in X : (y, x_1), (y, x_2) \in \Gamma \implies x_1 = x_2$ proof by contradiction

Let $x_1 \neq x_2$, then since f - injection,

1) $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

2) $(y, x_1) \in \Gamma \iff y = f(x_1)$

3) $(y, x_2) \in \Gamma \iff y = f(x_2)$

$y \neq y$ Contradiction, f^{-1} is a function.

1) f - injective: $y_1 \neq y_2 \implies f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ since f is a function, by contrad.

$\forall x \in X, y, z \in Y : (x, y), (x, z) \in \Gamma \implies y = z$

2) f - surjective: $\forall y \in Y : f^{-1}(y) = x$ since f is a function $\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in \Gamma$

$f(x) \implies f^{-1}(x)$

\cdot bijective \cdot bijective

\cdot function \cdot function

1.

7. Почему множество биекций множества составляет группу?

Theorem f, g - bijections $\implies f \circ g, g \circ f$ - bijections \longrightarrow Proof is an exercise

Theorem f - bijection $\{(y, x) : y = f(x)\}$ defines a function f^{-1} that is bijective and called an inverse function

Proof: Using function definition, let's prove that $\{(y, x) : y = f(x)\}$ is a function

From Γ_f definition: $\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in \Gamma_f$

$\forall x \in X, y, z \in Y : (x, y), (x, z) \in \Gamma_{f^{-1}} \implies y = z$

$\forall y \in Y \exists x \in X : (y, x) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff \text{surjection: } \forall y \in Y \exists x : f(x) = y$

$\forall y \in Y, x_1, x_2 \in X : (y, x_1), (y, x_2) \in \Gamma_{f^{-1}} \implies x_1 = x_2$ proof by contradiction

Let $x_1 \neq x_2$, then since f - injection $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

(1) $(y, x_1) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff y = f(x_1)$

(2) $(y, x_2) \in \Gamma_{f^{-1}} \iff y = f(x_2)$

$y \neq y$ Contradiction, f^{-1} is a function.

1) f - injective: $y_1 \neq y_2 \implies f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ since f is a function, by contrad.

$\forall x \in X, y, z \in Y : (x, y), (x, z) \in \Gamma_{f^{-1}} \implies y = z$

2) f - surjective $\forall y \in Y : f^{-1}(y) \neq \emptyset$ since f is a function $\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in \Gamma_f$

$f(x) \implies f^{-1}(x)$ since: bijective function \longleftrightarrow bijective function

Bijection group

Let set $X \neq \emptyset$, then $G(X) = \{f : X \rightarrow X \text{ - bijection}\}$

Consider \circ as an operation on X (since if f, g - bijections, $f \circ g$ is also a bijection) $(f, g) \mapsto f \circ g$

$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

$e \circ f = f \circ e = f(e(x) = x)$ Thus, $G(X)$ - is a group

$\forall f \exists f^{-1} : f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$

1. Purpose of groups: решать уравнения так, как учила школьная учительница

8. Почему любая группа вкладывается в некоторую группу биекций? Какая у этого связь с Теоремой Кэли?

Из курса алгебры, Теорема Кэли утверждает, что любая конечная группа изоморфна подгруппе группы перестановок. Как это связано?

Idea: permutation is a discrete bijection, thus on discrete: subgroup of permutations, on continuous: subgroup of bijections

Is there any instrument to prove similar sort theorems without repeating? For example category or inter-universal tschimmer theory? (I know nothing about them, just heard)

Theorem Всякая группа изоморфна подгруппе некоторой группы биекций = всякая группа вложена в некоторую группу биекций

Proof: $(X, *) \mapsto (G(X), \circ)$

$z \in X \mapsto f_z(x) = z * x$ Hard to understand from first glance, consider and reflect upon this piece of knowledge

1.