# REI201G Heimaverkefni 4

Fjórði heimadæmaskammtur er úr köflum 6 og 8 í kennslubók og á að skila dæmunum föstudaginn 9. mars. Það þarf ekkert að forrita að þessu sinni en lausnum á að skila á Gradescope á PDF sniði. Leiðbeiningar fyrir skönnun á handskrifuðum lausnum: https://stats200.stanford.edu/gradescope_tips.pdf (https://stats200.stanford.edu/gradescope_tips.pdf)

Í dæmatíma í næstu viku verður farið yfir nokkur tímadæmi en restin af tímanum verður svo notuð til að vinna í heimadæmum.

Eftirfarandi reglur gilda um heimadæmaskil:

Þeir nemendur sem vinna að lausn heimadæma með öðrum þurfa alltaf að skrifa upp og skila inn sinni eigin lausn. Þeir þurfa ennfremur að tilgreina með hverjum var unnið að lausn verkefnisins. **Það er óheimilt að fá lausnir hjá öðrum, afrita lausnir eða láta aðra fá lausnina sína. Ef kennari verður var við afritaðar lausnir mun hann lækka einkunn fyrir viðkomandi verkefni.** Hikið ekki við að leita til kennara ef þið eruð í vafa um hvað telst eðlileg samvinna og hvað ekki.

*Athugið*: Til að hljóta próftökurétt þarf að skila 3 heimaverkefnum af fyrstu 5 og hljóta að lágmarki 5.0 í meðaleinkunn fyrir 3 bestu verkefnin.

# Heimadæmi

1. Dæmi 6.5 í bók.

**Lausn**: Í viðsnúna grafinu $A^{rev}$ er búið að setja legg frá $j$ til $i$ í stað fyrir legg frá $i$ til $j$ í $A$, þ.e. $A^{rev}_{ji} = 1$ ef leggur frá $i$ til $j$ í $A$ en 0 annars, þ.e. $A^{rev}_{ji} = A_{ij}$. Grennslafylki viðsnúna grafsins verður þá $A^{rev} = A^T$.

2. Dæmi 6.9 í bók.

**Lausn**:

a) Vigurinn $c$ segir til um hversu miklu er eytt í að auglýsa í hverri "rás" (útvarp, sjónvarp, vefsíður o.s.frv.) Heildarupphæð sem fyrirtækið eyðir er þá $\sum_{i=1}^{n} c_i$, þ.e. $c^T 1$.

b) Heildarfjöldi birtinga fyrir markhóp $j$ fæst með því að leggja saman birtingar sem fást með auglýsingum í mismunandi miðlum en þær fást aftur með því að margfalda línu $j$ í $R$ með $c$ vigrinum. Heildarfjöldi birtinga fyrir alla $m$ hópanna er þá gefinn með $v = Rc$.

c) Heildarhagnaður er $v_1 a_1 + \ldots + v_m a_m = v^T a$.

d) Finna stærsta stak í línu 3 í $R$ fylkinu.

e) Ef $R_{35}$ er mjög lítið þá skila auglýsingar í miðli 5 fyrir markhóp 3 mjög litlu.

3. Dæmi 6.10 í bók.

**Lausn**:

$R_{ij}$ : Magn af auðlind (e. resource) $i$ sem þarf til að keyra eitt tilvik af verki $j$, $i = 1, \ldots, m$ og $j = 1, \ldots, n$.

$x_j$ : Fjöldi verka af tegund $j$ sem þarf að framkvæma ($n$-vigur).

$p_i$ : Einingaverð á auðlind $i$ ($m$-vigur).

$c_j$ : Einingakostnaður á verk $i$ ($n$-vigur).

a) Heildarmagn af auðlind (e. resource) $i$ sem þarf til að keyra verkin í $x$ er $y_i = R_{i1}x_1 + \ldots + R_{in}x_n$, þ.a. $y = Rx$.

b) Kostnaður við að keyra eitt tilvik af verki $j$ er $c_j = R_{1j}p_1 + \ldots + R_{mj}p_m$ þ.a. $c = R^T p$.

4. Dæmi 8.4 b) og d) í bók.

b) Þegar myndinni er snúið 90 gráður réttsælis er stökunum umraðað þannig

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Þessa umröðun á vigri $x$ má framkvæma með margföldun $y = Ax$ þar sem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Meðaltal aðliggjandi staka má framkvæma með margföldun $y = Ax$ þar sem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

# Tímadæmi

1. Dæmi 6.4 í bók.

**Lausn**: [Teikna mynd af einföldu neti og sýna grennslafylki] $A$ er grennslafylki fyrir stefnt net. Vigurinn $A\mathbf{1}$ svarar til dálksumma í $A$, þ.e. $i$-ta stak í vigrinum er summa allra staka í línu $i$ (sjá bls. 119). Í grennslafylki $A$ er stak $A_{ij} = 1$ ef það er leggur frá hnút $i$ í hnút $j$. Summa staka í línu $i$ svarar þannig til fjölda leggja frá hnút $i$ (útgráða hnúts, e. outdegree). Vigurinn $A\mathbf{1}$ gefur þannig útgráður hnúta í netinu. Vigurinn $A^T\mathbf{1}$ svarar til línusumma í $A$, þ.e. $i$-ta stak í vigrinum er summa allra staka í dálki $j$. Þegar $A$ er grennslafylki svarar stak $j$ í vigrinum fjölda leggja í hnút $j$, þ.e. til inngráðu hnútsins.

2. Dæmi 8.4 a) í bók.

**Lausn**: Þegar myndinni er snúið á hvolf er stökunum umraðað þannig

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

þ.e. vigurinn verður $(x_3, x_2, x_1, x_6, x_5, x_4, x_9, x_8, x_7)$. Umröðunina má framkvæma með því að margfalda upphaflega vigurinn $x$ með fylki $A$ þar sem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Dæmi 8.10 í bók.

**Lausn**: $K$ tegundum af hráolíu er blandað saman í hlutföllum $\theta_1, \ldots, \theta_K$. Í hverri tegund eru allt að $n$ mismunandi innihaldsefni (kolvetnakeðjur af mismunandi lengd, brennisteinssambönd ofl.) Vigurinn $c_k$ segir til um magn innihaldsefna í tegund $k$. Vigurinn $c^{tar}$ segir til um hvert magn innihaldsefna á að vera í blöndunni. Línulegar jöfnur sem lýsa kröfunum eru þá

$$\theta_1 c_1 + \theta_2 c_2 + \ldots \theta_K c_K = c^{tar}$$

auk þess sem

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots \theta_K = 1$$

þarf að gilda. Ef vigrunum $c_k$ er safnað í $n \times m$ fylki $C$ þar sem $c_k$ er dálkur $k$, má rita jöfnurnar sem $C\theta = c^{tar}$ og $\theta\mathbf{1} = 1$.