PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Diseño y Análisis de Algoritmos - IIC2283
Profesor: Diego Arroyuelo (`diego.arroyuelo@uc.cl`)
Guía de Ejercicios 1: Ecuaciones de Recurrencia
2025-2

1. Dada la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + kn, & n > 0, \end{cases}$$

use inducción para demostrar que $T(n) \in O(n \log_2 n)$.
Solución: La definición de $T(n)$ no lo indica, pero asumimos que $k > 0$. Por la definición de $O(n \log_2 n)$, debemos demostrar que $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $T(n) \leq c \cdot n \log_2 n$, $\forall n \geq n_0$. Lo hacemos por inducción:

Caso base) Determinamos primero el/los caso/s base/s:

- Probamos inicialmente para $n = 0$, por lo que debemos mostrar que $T(0) = 0 \leq c \cdot 0 \log_2 0$. Sin embargo, $\log_2 0$ no está definido, por lo que $n = 0$ no puede ser usado como caso base.
- Veamos ahora $n = 1$, por lo que debemos mostrar que $T(1) = 2T(0) + k = k \leq c \cdot 1 \log_2 1 = 0$. En resumen, la propiedad se cumpliría si $k \leq 0$, lo cual no es cierto porque hemos asumido $k > 0$. Eso significa que $n = 1$ tampoco puede usarse como caso base.
- Veamos $n = 2$, por lo que debemos mostrar que $T(2) = 2T(1) + 2k = 4k \leq c \cdot 2 \log_2 2 = 2c$. Entonces, la propiedad se cumple para $n = 2$ para todo $c \geq 2k$.
- Notar que para $n = 3$ tenemos la definición $T(3) = 2T(\lfloor 3/2 \rfloor) + 3k = 2T(1) + 3k$. Sin embargo, ya vimos que la propiedad no se cumple para $T(1)$, por lo que la propiedad no podría demostrarse por inducción para $n = 3$. Eso significa que debemos agregar $n = 3$ como caso base. Debemos mostrar que $T(3) = 2T(1) + 3k = 5k \leq c \cdot 3 \log_2 3$, lo cual se cumple para $c \geq 5k/3 \log_3 3$.
- Note que para $n = 4, 5, 6$, y 7, $T(n)$ está definido por un $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ que es caso base para el cual ya se cumple la propiedad.

Hipótesis Inductiva) Asumimos que $T(n') \leq c \cdot n' \log_2 n'$, $\forall n' \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

Paso Inductivo) Demostraremos que se cumple la propiedad para $n \geq 4$. Notar que:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + kn \\
&\leq 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right) + kn \qquad \text{(por H.I.)} \\
&\leq 2\left(\frac{n}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right)\right) + kn \qquad \text{(por H.I.)} \\
&= c \cdot n(\log_2(n) - 1) + kn \\
&= c \cdot n \log_2 n + kn - cn
\end{aligned}$$

Para que esto último sea $\leq c \cdot n \log_2 n$ se debe cumplir $kn - cn \leq 0$, lo que es equivalente a $k - c \leq 0$, lo que significa $k \leq c$. Sin embargo, recuerde que en los casos base llegamos a que $c > k$, por lo que concluimos la demostración.

2. Use inducción para acotar asintóticamente la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n, & n > 0. \end{cases}$$

Hint: Puede usar el Teorema Maestro para "adivinar" la cota, y luego demostrarla por inducción.

Solución: Si usamos el Teorema Maestro, tenemos que $T(n) \in \Theta(n^2)$. Demostraremos entonces que $T(n) \in O(n^2)$, lo que significa que debemos demostrar que $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $T(n) \leq c \cdot n^2$, $\forall n \geq n_0$. Lo hacemos por inducción:

Caso Base)
- Probamos para $n = 0$, por lo que debemos mostrar que $T(0) = 0 \leq c \cdot 0^2 = 0$, lo que se cumple para $c \geq 0$.
- Note que para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, $T(n)$ está definida a partir de un caso base para el que se cumple la propiedad, por lo que no hace falta agregarlos como caso base (y se demostrarán inductivamente).

Hipótesis Inductiva) Asumimos que $T(n') \leq c \cdot n'^2$, $\forall n' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Paso Inductivo) Demostraremos que se cumple la propiedad para $n \geq 1$. Notar que:

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 4c \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^2 + n \\ &\leq 4c \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n \\ &= c \cdot n^2 + n. \end{aligned}$$

Dado que n no es una constante, por lo que no es posible de esta forma demostrar que $T(n) \leq c \cdot n^2$. En su lugar, vamos a demostrar lo siguiente, lo cual es equivalente: $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $\exists d \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $T(n) \leq c \cdot n^2 - d \cdot n$, $\forall n \geq n_0$. Ese $-d \cdot n$ es agregado porque en la anterior demostración quedaba un $+n$ que interfería. Asumiendo que se cumple para los casos base (se deja como ejercicio), planteamos la Hipótesis inductiva: $T(n) \leq c \cdot n^2 - d \cdot n$, $\forall n' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Ahora demostramos:

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 4\left(c \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^2 - d \cdot \frac{n}{2}\right) + n \\ &\leq 4\left(c \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 - d \cdot \frac{n}{2}\right) + n \\ &= c \cdot n^2 - 2d \cdot n + n \\ &= c \cdot n^2 - d \cdot n + n(1-d). \end{aligned}$$

Para concluir la demostración, basta probar que $n(1-d) \leq 0$, lo cual es cierto para $d \geq 1$. Hemos demostrado que $T(n) \leq c \cdot n^2 - d \cdot n$, lo cual significa que $T(n) \in O(n^2)$.

3. Use el Teorema Maestro (en caso de ser posible) para acotar asintóticamente las siguientes ecuaciones de recurrencia (por simplicidad, sólo se muestra la parte recurrente de cada ecuación).

   a) $T(n) = 8T(\lfloor n/3 \rfloor) + n^2, \quad n > 0.$

b) $T(n) = T(\lfloor 8n/11 \rfloor) + n, \quad n > 0.$

c) $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \log_2 n, \quad n > 0.$

d) $T(n) = 16T(\lfloor n/4 \rfloor) + n!, \quad n > 0.$

e) $T(n) = 3T(\lfloor n/3 \rfloor) + \sqrt{n}, \quad n > 0.$

Solución: Se deja como ejercicio.

4. Acote asintóticamente la siguiente función:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) + 1, & n > 1. \end{cases}$$

Hint: considere un cambio de variable $m = \log_2 n$ para poder usar el Teorema Maestro.

Solución: Sea $m = \log_2 n$, por lo tanto $n = 2^m$, por lo que $\sqrt{n} = 2^{m/2}$. Por lo tanto, la ecuación de recurrencia original es equivalente a:

$$T(2^m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \quad [2^m = 1] \\ 2T\left(\left\lfloor 2^{m/2} \right\rfloor\right) + 1, & m > 0 \quad [2^m > 1] \end{cases}$$

Estamos casi en condiciones de usar el Teorema Maestro. Sólo haremos el cambio de variable $S(m) = T(2^m)$, para que sea más evidente, por lo que la ecuación de recurrencia anterior es equivalente a:

$$S(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2S\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right) + 1, & m > 0, \end{cases}$$

la cual tiene la forma requerida por el Teorema Maestro, el cual indica que $S(m) \in \Theta(m)$ (se deja como ejercicio verificar esto). Dado que $m = \log_2 n$, y deshaciendo los cambios de variable, tenemos que $T(n) \in \Theta(\lg_2 n)$.

5. Muestre que no es posible usar el Teorema Maestro para acotar las siguientes ecuaciones de recurrencia:

a) $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n/\log_2 n, \quad n > 1.$

b) $T(n) = 64T(\lfloor n/8 \rfloor) - n^2 \log_2 n, \quad n > 0.$

c) $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + n(2 - \cos n), \quad n > 0.$

Solución: Se deja como ejercicio.

6. Dada la ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0; \\ T(n-1) + 2 \cdot n - 1, & n > 0, \end{cases}$$

encuentre una función $f(n)$ tal que $T(n) \in O(f(n))$, y demuéstrelo usando inducción. La cota debería ser lo más ajustada posible.

Solución: Notar que $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, $T(2) = 4$, $T(3) = 9$, $T(4) = 16$, por lo que la hipótesis es que $T(n) = n^2$. Para probar que $T(n) = O(n^2)$, se debe probar que $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $T(n) \leq c \cdot n^2, \ \forall n \geq n_0$. Lo hacemos por inducción.

Caso base:

- Notar que para $n = 0$, tenemos $T(0) = 0 \leq c \cdot 0^2$, lo cual se cumple para cualquier $c > 0$.

Hipótesis inductiva: Se asume que $T(n') \leq c \cdot (n')^2,\ \forall n' \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Paso inductivo: Debemos demostrar que el hecho de que la hipótesis inductiva se cumpla implica que $T(n+1) \leq c \cdot (n+1)^2$. Notar que:

$$
\begin{array}{rcll}
T(n+1) & = & T(n) + 2 \cdot (n+1) - 1 & \\
& = & T(n) + 2n + 1 & \\
& \leq & c \cdot n^2 + 2n + 1 & \text{[por H.I.]} \\
& \leq & c \cdot (n^2 + 2n + 1) & \text{[esto se cumple si } c \geq 1] \\
& = & c \cdot (n+1)^2, &
\end{array}
$$

lo cual concluye la demostración. Así, para todo $c \geq 1$ y $n \geq 0$, se cumple $T(n) \leq c \cdot n^2$.

7. Acote asintóticamente la siguiente ecuación de recurrencia, usando la herramienta (vista en clases) que considere conveniente:

$$
T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log_2(n), & n > 1. \end{cases}
$$

Solución: La idea es usar el Teorema Maestro, aunque no parezca en un principio. Sea $n = 2^m$, por lo tanto $m = \log_2 n$. Eso significa que $\sqrt{n} = 2^{m/2}$. Por lo tanto, la ecuación de recurrencia original es equivalente a:

$$
T(2^m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \quad [2^m = 1] \\ 2T\left(\lfloor 2^{m/2} \rfloor\right) + m, & m > 0 \quad [2^m > 1] \end{cases}
$$

Estamos casi en condiciones de usar el Teorema Maestro. Sólo haremos el cambio de variable $S(m) = T(2^m)$, para que sea más evidente, por lo que la ecuación de recurrencia anterior es equivalente a:

$$
S(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2S\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor\right) + m, & m > 0, \end{cases}
$$

la cual tiene la forma requerida por el Teorema Maestro. El caso que se cumple es $m \in \Theta(m)$, por lo que $S(m) \in \Theta(m \cdot \log_2 m)$. Eso es equivalente a $T(2^m) \in \Theta(m \cdot \log_2 m)$. Dado que $m = \log_2 n$ y $n = 2^m$, tenemos $T(n) \in \Theta(\log_2(n) \cdot \log_2 \log_2(n))$.