Médian LO22
P2024 – Durée : 1h30

Une feuille A4 recto-verso de notes personnelles manuscrites est le seul document autorisé, une calculatrice est nécessaire.

Exercice 1 (12 pts): Étude d'un système complexe

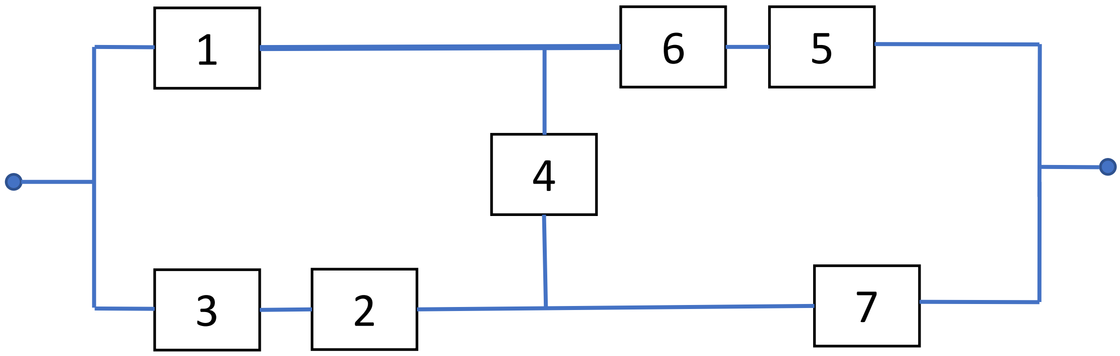

Figure 1: Bloc diagramme de fiabilité du système S

On considère le système (S), représenté dans la figure 1, constitué de 7 composants identiques et indépendants de même taux de défaillance constant λ (les défaillances de tous les composants suivent donc des lois exponentielles). On rappelle que exp(x)= 1+x +o(x) quand x << 1.

1) On note r la fiabilité d'un composant unique. Rappeler l'expression de r en fonction de λ et du temps t. Simplifier la structure de la figure 1, en regroupant les composants 2 et 3 dans un composant équivalent 8, et les composants 5 et 6 dans un composant équivalent 9 (on indiquera les fiabilités des composants 8 et 9 en fonction de r). De quel type de structure s'agit-il ?
2) Donnez en fonction de r, la fiabilité RS1 du système S en supposant que le composant 4 fonctionne et donner le comportement de RS1 aux temps courts $(\lambda t) << 1$.
3) Donnez en fonction de r, la fiabilité RS2 du système S en supposant que le composant 4 ne fonctionne pas et donner le comportement de RS2 aux temps courts $(\lambda t) << 1$.
4) En déduire la fiabilité RS du système S en fonction de λ dans le cas général en utilisant le théorème des probabilités totales et calculer sa valeur à t=1 an en prenant $\lambda = 5.10^{-5}$/heure. On rappelle le théorème des probabilités totales : étant donné un ensemble complet de deux événements A1 et A2, la probabilité d'un événement B est donnée par p(B)=p(B|A1).p(A1)+p(B|A2).p(A2).
5) En utilisant les comportements aux temps courts trouvés dans les questions (2) et (3), donnez le comportement aux temps courts de la fiabilité RS du système et tracer l'allure générale de la courbe de fiabilité RS du système sur 5 ans.

6) En utilisant les liens minimaux Ti du système S donnez la borne supérieure de la fiabilité RS du système en fonction de λ sachant que :

$$P(T1 \cup T2 \ldots \cup Tn) \leq P(T1) + P(T2) + \cdots + P(Tn)$$

7) En utilisant la même inégalité pour les coupes minimales Ci du système S donnez la borne inférieure de la fiabilité RS du système en fonction de λ.
8) Vérifier numériquement que de la fiabilité RS calculée dans la question 4 (à t=1 an) est bien encadrée par ces deux bornes (également calculées à t=1 an).

Exercice 2 (8 pts): Étude d'un voteur 4/5

On considère un système constitué de 5 composants identiques et indépendants de même taux de défaillance constant λ.

1. Quelle est la probabilité en fonction de λ et du temps t des événements Pi suivants :

a) P0 : Aucun composant en état de fonctionnement.
b) P1 : Exactement un seul composant en état de fonctionnement.
c) P2 : Exactement deux composants en état de fonctionnement.
d) P3 : Exactement trois composants en état de fonctionnement.
e) P4 : Exactement quatre composants en état de fonctionnement.
f) P5 : Exactement cinq composants en état de fonctionnement
(indication : la cinquième ligne du triangle de Pascal est : 1, 5, 10, 10, 5, 1)

2. Déterminer le développement aux temps courts de ces 6 probabilités (contenant exactement un terme en (λt) d'ordre non nul)
3. En utilisant les probabilités calculées précédemment, donner en fonction de λ et t, l'expression de la fiabilité du système $R_{4/5}$ qui possède une architecture de voteur 4 parmi 5 (pour que ce système fonctionne il faut qu'il y ait au moins 4 composants qui soient en état de fonctionnement).
4. Donner en fonction des Pi de la question 1, la défiabilité $U_{4/5}$ de ce système de deux manières différentes.
5. En utilisant les développements obtenus à la question (2) et l'une des expressions de $U_{4/5}$ de la question précédente, donner le comportement aux temps courts de la fiabilité du système $R_{4/5}$
6. Considérant l'expression exacte obtenue à la question (3), donner le comportement aux temps longs de $R_{4/5}$ (aux temps longs la variable de développement est $e^{-\lambda t}$<<1 dont on ne conserve donc que la puissance dominante).
7. Donner l'allure de la courbe de fiabilité $R_{4/5}$ en fonction de t (On prendra λ= 5.10^{-5}/heure), en portant sur la même figure la courbe pour un composant unique.
8. Calculer le $MTTF_{4/5}$ de ce système.
9. Comparer le $MTTF_{4/5}$ et le $MTTF_1$ d'un composant unique. Comment expliquer la différence entre ces deux mesures en se basant sur les questions (4), (5), (6) et (7) ?