מבחן מבוא לאלגוריתמים א '– אביב תשפ"ד

הצעה לפתרון השאלות

<u>שאלה 1</u> - (**25 נקודות**: סעיף א – 8 נק' ; סעיף ב – 17 נק')

מכונית בעלת מיכל דלק בגודל T (מס' טבעי) ליטרים נוסעת בצריכת דלק של 1 ליטר ל-1 קילומטר.

המכונית נוסעת מנקודה a_1 לנקודה a_n. לאורך נתיב נסיעתה ישנן n תחנות דלק בהן ניתן לתדלק את המיכל, אותן נסמן ב- $a_1, a_2, \dots, a_n$.

לכל $1 < i \leq n$ מתקיים:

(i) מחיר התדלוק בתחנה a_i הינו i שקל לליטר (לדוגמא: תדלוק 7 ליטר בתחנה a_5 יעלה 35=5*7 שקל)

(ii) a_i מציין את מרחק הנסיעה בק"מ בין תחנה זו לתחנהa_1

(iii) $a_{i-1} < a_i$

(iv) $a_i - a_{i-1} \leq T$.

א. **כתבי** אלגוריתם חמדן המקבל מספר טבעי T (גודל המיכל) ואת $a_1, \dots, a_n$ (מיקום תחנות התדלוק) ומחזיר את כמות מילוי הדלק בכל תחנה $b_1, b_2, \dots, b_n$ כך שהמכונית תבצע את הנסיעה מ-a_1 ל-a_n במחיר תדלוק $\sum_{i=1}^{n}(i \cdot b_i)$ <u>מינימלי</u>.
הסבירי בקצרה את הגישה החמדנית של האלגוריתם שכתבת.

שימי לב:

- התהליך מתחיל כאשר מיכל המכונית ריק.
- כמות הדלק במיכל לא עולה על T בשום שלב.
- כמות הדלק במיכל ביציאה מכל תחנה מספיקה בכדי להגיע לפחות עד התחנה הבאה.

ב.

1. **הוכיחי** את חוקיות ואופטימליות הפתרון המוחזר על ידי האלגוריתם שהצעת,
2. **נתחי** את סיבוכיות זמן ריצתו.

פתרון:

האלגוריתם החמדן - הקלט: T ,$a_1, \dots, a_n$ הפלט: $b_1, \dots, b_{n-1}$

$Tank \leftarrow 0$

$for\ i \leftarrow 1\ to\ n-1$

$if\ a_n - a_i \geq \mathrm{T}$

$then \quad b_i \leftarrow \mathrm{T} - Tank$

$else \quad b_i \leftarrow a_n - a_i - Tank$

$Tank \leftarrow Tank + b_i$

$Tank \leftarrow Tank - (a_{i+1} - a_i)$

הוכחת חוקיות האלגוריתם החמדן *ALG*:

כמות הדלק במיכל לאחר התדלוק אינה עולה על *T* בשום שלב:

1. במקרה ראשון – בדיוק *T*.
2. במקרה שני - הכמות הנחוצה להגיע עד התחנה האחרונה, כאשר המרחק (בק"מ) קטן מ-*T*

יש מספיק דלק בכדאי להגיע עד לתחנה הבאה:

1. במקרה ראשון – המיכל מלא, ולפי תנאי השאלה מאפשר להתקדם לתחנה הבאה.
2. במקרה שני - במיכל כמות הנחוצה להגיע עד התחנה האחרונה, ולכן לתחנה הבאה.

הוכחת אופטימליות האלגוריתם החמדן *ALG*:

יהי $p_1, \dots, p_n$ הפתרון האופטימלי *OPT* לבעיה (לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד).

ויהי האינדקס *j* האינדקס הראשון שבו $b_j \neq p_j$.

אם $p_j > b_j$ – זה אפשרי רק כאשר p_j אינו ממלא את המיכל מעבר ל-*T* (אחרת, בסתירה לנכונות), אולם אז המיכל ימולא מעבר לנחוץ בעלות גבוה מזו של הפתרון חמדן בסתירה לאופטימליות *OPT* .

אם $p_j < b_j$ - זה אפשרי רק כאשר p_j מספק מספיק דלק בכדי להגיע לתחנה הבאה (אחרת, בסתירה לנכונות), אולם אז יהיה צורך בהמשך למלא עוד דלק במחיר גבוה יחסית לפתרון החמדן, ולכן בסתירה לאופטימליות *OPT*.

הערה: יתכנו פתרונות נוספים – אינדוקציה, צעד חמדן ותת-מבנה אופטימלי

<u>סיבוכיות זמן ריצה</u>: *O(n)*

<u>שאלה 2</u> - (25 נקודות: סעיף א – 12 נק' ; סעיף ב – 13 נק')

נתונות n משימות על ציר הזמן.

כל משימה נתונה ע"י זמן התחלה וזמן סיום המייצגים את הקטע $[s_i, f_i]$ $1 \leq i \leq n,$.

המשימות ממוינות בסדר עולה על פי זמן הסיום שלהן. כלומר $f_i < f_{i+1}$ $1 \leq i < n,$.

בנוסף, לכל משימה $1 \leq i \leq n$ נתון משקלה w_i (מספר חיובי). המשקל w של קבוצת משימות M הוא סכום משקלי המשימות בה: $w(M) = \sum_{i \in M} w_i$.

המטרה היא לבחור מתוך n המשימות תת קבוצה M המקיימת את שני התנאים הבאים:

i. המשימות ב- M הן ללא חפיפת זמנים ביניהן, כלומר,

$$\forall i, j \in M, i \neq j, [s_i, f_i] \cap [s_j, f_j] = \emptyset$$

ii. המשקל $w(M)$ הוא המקסימלי מבין כל תתי הקבוצות המקיימות את תנאי 1.

לצורך פתרון הבעיה בשיטת תכנון דינמי בסיבוכיות זמן פולינומית ב-n **כתבי**:

א. נוסחת נסיגה (מבנה הרקורסיבי) מתאימה (כולל תנאי העצירה) **והסבירי** את מרכיביה.

ב. אלגוריתם לחילוץ הפתרון מתוך טבלה המתאימה לבעיה ומכילה את הערכים הנדרשים.

<u>פתרון</u>

1. עבור $1 \leq j \leq n$ נסמן ב- $p(j)$ את האינדקס של הקטע הקרוב ביותר ל-j במיון שמסתיים לכל המאוחר בזמן קטן מ-s_j כלומר $p(j) = \max\{i \,\square\, f_i < s_j\}$, לכן,
נוסחת הנסיגה היא: $S(j) = max\{S(j-1), w_j + S(p(j))\}$
תנאי העצירה הוא $S(0) = 0$

2. הטבלה היא מערך $(1 \times n + 1)$. חילוץ הפתרון: נתחיל מהאיבר האחרון בטבלה ונפעיל את נוסחת הנסיגה באופן הפוך. אפשר גם להקצות את T כמערך ביטים בגודל n המאופס בהתחלה, ולהדליק ביט רק באינדקסים של המשימות הנבחרות :

$j \leftarrow n, T \leftarrow \emptyset$
While $j > 0$
  If $S(j) > S(j-1)$
   Then $T \leftarrow T \cup \{j\}$
     $j \leftarrow p(j)$
   Else $j \leftarrow j - 1$

<u>שאלה 3</u> - (**40 נקודות**: סעיף א – 16 נק' ; סעיף ב – 12 נק' ; סעיף ב – 12 נק')

א. נתון מערך A באורך n שכל איבריו הם ערכים מתוך קבוצה נתונה $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ של מספרים ממשיים שונים זה מזה, כאשר $k < n$.

הערה: אין הכרח שכל המספרים ב- B יופיעו במערך A.

1. **תארי** אלגוריתם יעיל ככל הניתן המקבל את המערך A וממיין אותו.
2. **נתחי והסבירי** את סיבוכיות זמן הריצה שלו.

<u>פתרון סעיף 3-א:</u>

נמיין את k איברי B במיון מיזוג בזמן- klogk

אפשרות א - ניקח את האיבר האמצעי מ-B הממוין בתור 'איבר ציר' ונבצע לפיו partition במערך A נמשיך ברקורסיה בשני תתי המערכים.
אפשרות ב – לכל איבר ב-A נבצע חיפוש בינרי ב-B ונקדם מערך מונים. ואז נבנה מערך חדש לפי הערכים ומערך המונים.
זמן הביצוע nlogk

ב. נתייחס למערך הממוין A <u>שהתקבל</u> מסעיף א' ולקבוצה B כמוגדר לעיל.

נגדיר <u>ריבוי</u> של ערך במערך כמספר מופעיו במערך.

1. **תארי** אלגוריתם המקבל את המערך הממוין A ומספר $x \in B$, ומחזיר את הריבוי של x במערך A.
   סיבוכיות זמן הריצה הנדרשת היא $O(\log n)$.
2. **תארי** אלגוריתם המקבל את המערך הממוין A ואינדקס i ($1 \le i \le n$), ומחזיר את הריבוי של הערך $A[i]$ במערך A. סיבוכיות זמן הריצה הנדרשת היא $O(\log r)$ כאשר r הוא הריבוי של $A[i]$ במערך.

<u>פתרון סעיף 3-ב: (ב 1 – 6 נקודות. ב 2 – 6 נקודות)</u>

1. 2 וריאציות על חיפוש בינרי ל-x בתוך A – עד שיש גדול מימינו, ואז עד שיש קטן משמאלו.

2. חיפוש בצעד בינרי ימינה ושמאלה למציאת תת המערך המכיל את כל המופעי הערך. ואז חיפוש בינרי למציאת המופע האחרון/הראשון של הערך, אפשרי בעזרת סעיף קודם.

ג. נתון מערך D באורך n שכל איבריו הם מספרים טבעיים מהתחום $[c..d]$. c ו- d אינם נתונים, אך ידוע כי גודל התחום אינו עולה על n.

1. **כתבי** אלגוריתם המקבל את המערך D ומבצע עליו עיבוד מקדים בסיבוכיות זמן $O(n)$, כך שיוכל לענות בזמן קבוע על כל שאילתה מהצורה "כמה מאברי מערך הקלט שייכים לתת התחום $[a..b]$ " עבור $[a..b] \subseteq [c..d]$.
2. **תארי** כיצד מתבצע המענה על שאילתה כזו (הניחי כי בתום העיבוד המקדים ניתן להזין את הערכים a ו-b לצורך מענה על השאילתה).

<u>פתרון סעיף 3-ג</u>

שלב א': (6 נקודות)
נחפש מינימום ומקסימום במערך בסיבוכיות n.
נבנה את מערך המניה כאשר הגישה למערך המניה תעשה ע"י ערך האיבר פחות min, ונבצע צבירה. הסיבוכיות היא לינארית כי k<n
שלב ב': (6 נקודות)
אם 2 הערכים בין מינ. למקס. אז נחזיר את הצובר של b פחות הצובר של a-1 (אם a הוא הקטן ביותר אז רק את הצובר של b)

<u>שאלה 4</u> – (**10 נקודות**: סעיף א – 5 נק' ; סעיף ב – 5 נק')

בכניסה לאולם האירועים 'שמח תשמח' מוצבים שני שומרים שתפקידם לוודא שכמות הנוכחים באולם אינה עולה על המספר המקסימלי המותר n. ניתן להניח כי $n = 2^k - 1$ עבור k טבעי חיובי. כל אחד מהשומרים משתמש במונה שונה כפי שיפורט להלן. 2 המונים מורים על אפס בתחילת האירוע.

א. השומר הראשון משתמש במונה המציג בייצוג בינרי את מספר הנוכחים. למונה יש שני מקשים – מקש כניסה ומקש יציאה. על כל אדם שנכנס השומר לוחץ על מקש הכניסה. על כל אדם שיוצא השומר לוחץ על מקש יציאה. לכל חילוף בין ספרות בתצוגת המונה יש עלות קבועה, לכן עלות פעולת לחיצה (כניסה או יציאה) היא כעלות חילופי הספרות הבינריות בעקבותיה. לדוגמא: כאשר המונה מראה 01011 ונעשית פעולת כניסה המונה משתנה ל- 01100, כלומר מתבצע חילוף ערך ב- 3 ביטים.

נתייחס לאירוע בו כמות הנוכחים היא המקסימלית המותרת. ידוע כי בתחילת האירוע נכנסו כל המשתתפים בזה אחר זה ובסיומו יצאו כולם בזה אחר זה.
מה היתה העלות הממוצעת של פעולת לחיצה (כניסה או יציאה) על המונה (כלומר, מהו ממוצע מספר החילופים לפעולת לחיצה בודדת)? **הציגי** את אופן החישוב **והסבירי** אותו.

<u>פתרון 4-א</u> <u>(5 נקודות):</u>

א. פעולה משנה את הביט ה-i כל 2^i פעמים (הביטים הם מ-0 ועד *k-1*). לכן סך כל $2n$ הפעולות לכניסה ויציאה יבצעו את כמות ההחלפות הבאה:

$$2 \times \sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq 2n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 4n$$

ובממוצע ערך הקטן מ- 2 וגדול מ-1 כי סכמנו *2n* פעולות.

תתקבל גם תשובה שסוכמת רק את ההחלפות בכניסות, ומחשבת מהן ממוצע, ומסבירה שאותו ממוצע מתקבל גם מהיציאה.

ב. השומר השני משתמש במונה אחר. בכל לחיצה על מקש הכניסה המונה מבצע פעולת חילוף אחת, וכאשר נכנס האורח ה-i שמספרו הוא חזקה מדויקת של 2 המונה מבצע i פעולות חילוף. לדוגמא: כאשר נכנס האורח ה-7 המונה מבצע רק פעולת חילוף אחת, ואילו כאשר נכנס האורח ה-8 המונה מבצע 8 פעולות חילוף.

נתייחס לאירוע בו כמות הנוכחים היא המקסימלית המותרת ובו המשתתפים נכנסו לאולם בזה אחר זה.
מה היתה העלות הממוצעת של פעולת לחיצה (בתום כניסת כל המשתתפים)? **הציגי** את אופן החישוב **והסבירי** אותו.

<u>פתרון 4-ב (5 נקודות):</u>

ב. נחשב את סך ההחלפות לכל n הפעולות: $\sum_{i=0}^{k-1} 2^i + (n-k) \times 1 = 2n - k$
לכן, העלות הממוצעת לפעולת הכניסה היא $2 - \frac{k}{n}$. או **ערך הקטן מ-2 וגדול מ-1**.