

Вопросы к экзамену по математической физике (группы 3057, 1-й семестр)

1. Формула Гаусса–Остроградского (непосредственный вывод или как следствие общей формулы Стокса). Формула интегрирования по частям в кратном интеграле, формулы Грина.
2. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Волновое уравнение.
3. Энергия свободных колебаний струны.
4. Вывод уравнений гидродинамики идеальной жидкости.
5. Вывод уравнений акустики.
6. Вывод уравнения распространения тепла. Уравнения теплопроводности и диффузии. Краевые условия в уравнении теплопроводности.
7. Уравнения Пуассона и Лапласа.
8. Характеристики линейных уравнений в частных производных 1-го порядка.
9. Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных 1-го порядка.
10. Задача Коши для полулинейных уравнений в частных производных 1-го порядка.
11. Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка, канонический вид.
12. Характеристики линейных уравнений в частных производных 2-го порядка.
13. Определения корректно и некорректно поставленных задач. Примеры, пример Адамара.
14. Постановка основных задач для линейных уравнений в частных производных 2-го порядка.
15. Слабый принцип максимума гармонических функций. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона, его непрерывная зависимость от краевых данных задачи.
16. Принцип максимума решений уравнения теплопроводности.
17. Единственность решения 1-й смешанной задачи для уравнения теплопроводности, его непрерывная зависимость от данных задачи.
18. Интеграл энергии, его зависимость от свободного члена и решения волнового уравнения.
19. Единственность решения 1-й смешанной задачи для волнового уравнения с однородным краевым условием, его непрерывная зависимость от данных задачи.
20. Соображения, приводящие к задаче Штурма–Лиувилля.
21. Регулярная задача Штурма–Лиувилля: определение, эрмитовость оператора задачи.
22. Свойства собственных чисел регулярной задачи Штурма–Лиувилля.
23. Свойства собственных функций регулярной задачи Штурма–Лиувилля, разложение в ряд Фурье по собственным функциям задачи.
24. Задача Штурма–Лиувилля с периодическими краевыми условиями, свойства собственных чисел и собственных функций задачи (формулировки).
25. Задача Штурма–Лиувилля с особыми граничными точками, примеры.
26. Метод Фурье (метод разделения переменных): общая схема.
27. Обоснование метода Фурье в задаче о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах.
28. Интеграл Фурье как аналог ряда Фурье в случае непрерывного спектра (эвристическое обоснование), преобразование Фурье как непрерывный аналог коэффициентов Фурье.
29. Пример применения метода Фурье в случае непрерывного спектра.
30. Вид оператора Лапласа в криволинейных системах координат, примеры.
31. Вид оператора градиента в ортогональных криволинейных системах координат, пример.
32. Задачи, приводящие к цилиндрическим функциям. Уравнение Бесселя.
33. Представление решения уравнения Бесселя в виде обобщенного степенного ряда. Функции Бесселя. Определение функций Бесселя для комплексных значений аргумента.
34. Линейная независимость функций Бесселя J_ν и $J_{-\nu}$, $\nu \notin \mathbb{Z}$, линейная зависимость J_n и J_{-n} , $n \in \mathbb{Z}$. Рекуррентные соотношения между функциями Бесселя.
35. Асимптотическое поведение цилиндрических функций при $x \rightarrow +\infty$.
36. Поведение решений уравнения специальных функций в окрестности особой точки.
37. Функции Неймана и Ханкеля, их асимптотика при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0$.
38. Уравнение Бесселя с параметром. Модифицированные функции Бесселя, их асимптотика при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0$.
39. Существование корней уравнения $\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0$.
40. Ортогональность функций Бесселя, их норма.
41. Свойства корней уравнения $\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0$.
42. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя с параметром на интервале $(0, a)$.
43. Свободные колебания бесконечной струны, формула Даламбера–Эйлера. Примеры.
44. Вынужденные колебания бесконечной струны, формула Даламбера.
45. Устойчивость решения задачи Коши для одномерного волнового уравнения относительно данных задачи.
46. Свободные колебания полубесконечной струны.
47. Свободные колебания в трехмерном пространстве, формула Кирхгофа.
48. Вынужденные колебания в трехмерном пространстве, формула Кирхгофа.