# Решение задачи одномерной минимизации функции

Владимир Руцкий, 3057/2

# 1 Постановка задачи

Требуется найти с наперёд заданной точностью минимум (локальный) одномерной функции $f(x)$ на заданном отрезке $[a, b]$:

$$\min f(x), \quad x \in [a, b],$$

используя *метод золотого сечения.*

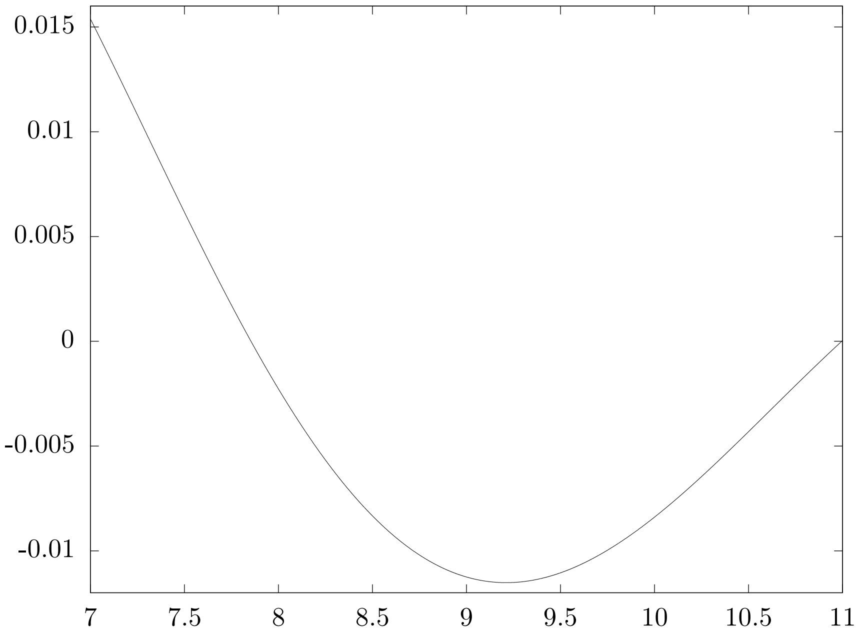
Исходная функция: $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$, на отрезке $[7, 11]$.

# 2 Исследование применимости метода

Алгоритмы поиска минимума одномерной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, использующие только значения функции в некоторых точках (исследуемый метод золотого сечения в их числе), применимы, только если заданная функция является *унимодальной*, а именно

$$\exists!\, x^* \in [a, b] : \quad \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in [a, b] : & x^* \leqslant x_1 \leqslant x_2 \quad \Rightarrow f(x^*) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_2) \\ \forall x_1, x_2 \in [a, b] : & x^* \geqslant x_1 \geqslant x_2 \quad \Rightarrow f(x^*) \geqslant f(x_1) \geqslant f(x_2) \end{cases}.$$

Рис. 1: График функции $f(x)$




$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2},$$

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{x^2} - 2\frac{\cos x}{x^3},$$

$$f''(x) = -\frac{\cos x}{x^2} + 4\frac{\sin x}{x^3} + 6\frac{\cos x}{x^4}.$$

Из графика видно, что исходная функция унимодальна на исследуемом промежутке.

## 3 Описание алгоритма

Общая идея поиска минимума унимодальной функции на отрезке заключается в том, что отрезок с минимумом можно разбить на части и гарантировано определить в какой части находится минимум, тем самым позволив сузить область для поиска минимума.

В случае метода золотого сечения, отрезок $[a, b]$, на котором имеется минимум, делится в отношении *золотой пропорции. Золотая пропорция* — это деление непрерывной величины на части в таком отношении, что большая часть относится к меньшей, как большая ко всей величине.

$x \in [a, b]$ делит $[a, b]$ золотым сечением, если

$$\begin{cases} x - a > b - x & \frac{x-a}{b-x} = \frac{b-a}{x-a} = \varphi \\ x - a < b - x & \frac{b-x}{x-a} = \frac{b-a}{b-x} = \varphi \end{cases},$$

т.е. для любого непустого отрезка найдутся две точки, делящие его в отношении золотой пропорции.

Величина отношения $\varphi$ определена единственным образом, и равна $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Поиск минимума унимодальной функции методом золотого сечения можно описать алгоритмом 1:

**Алгоритм 1** FindMinimumByGoldenSectionSearch. Поиск минимума унимодальной функции.

**Вход:** Исследуемая функция $f$; отрезок $[a, b]$, содержащий минимум; точность $\varepsilon$, с которой требуется найти минимум.

**Выход:** Точка $x^*$ — аргумент функции в которой достигается минимум с точностью $\varepsilon$.

```
{ Инициализируем первоначальное деление отрезка [a, b] на три отрезка золотым сечением. }
α := 1/φ { с данной величиной далее будет удобно работать }
i := 0 { счетчик итераций }
{ [a_i, b_i] — отрезок содержащий минимум на i-м шаге. }
a_i := a
b_i := b
{ λ_i < μ_i — точки делящие отрезок на i-м шаге золотым сечением. }
λ_i := a_i + (1 − α)(b_i − a_i)
μ_i := a_i + α(b_i − a_i)
{ Подразбиваем отрезок пока его длина не станет меньше необходимой точности. }
while |a_i − b_i| ⩾ ε do
  if f(λ_i) ⩽ f(μ_i) then
    { Минимум лежит на [a_i, μ_i], подразбиваем этот отрезок и продолжаем работу алгоритма. }
    a_{i+1} := a_i
    b_{i+1} := μ_i
    { Из-за особенностей золотого сечения необходимо перевычислять лишь одну новую точку. }
    μ_{i+1} := λ_i
    λ_{i+1} := a_{i+1} + (1 − α)(b_{i+1} − a_{i+1})
  else
    { Минимум лежит на [λ_i, b_i]. }
    a_{i+1} := λ_i
    b_{i+1} := b_i
    λ_{i+1} := μ_i
    μ_{i+1} := a_{i+1} + α(b_{i+1} − a_{i+1})
  end if
  i := i + 1
end while
{ Все точки на результирующем отрезке равны точке минимума с точностью ε, выбираем точку
с меньшим значением функции из λ_i и μ_i. }
if f(λ_i) ⩽ f(μ_i) then
  return λ_i
else
  return μ_i
end if
```

Приведённый алгоритм 1 может быть легко оптимизирован, если сохранять вычисленные значения функции $f$ в точках $\alpha_i$ и $\mu_i$, таким образом функция может быть вычислена лишь минимально необходимое число раз, для простоты эта оптимизация не приводится в алгоритме.

# 4 Код программы

Исходный код 1: Решение задачи поиска минимума унимодальной функции

```
# golden_section_search.m
# Golden section search algorithm.
# Vladimir Rutsky <altsysrq@gmail.com>
# 17.03.2009

precPows = [-3:-1:-8];

load data/function.mat       # func
load data/function_der.mat   # funcDer
load data/function_der2.mat  # funcDer2
load data/segment.mat        # range

function plotFunction( func, a, b, step )
  assert(a <= b);

  x = [a:step:b];
  y = func(x);

  plot(x, y, "-");
endfunction

function retval = goldenSectionSearch( func, a, b, precision )
  assert(a <= b);

  #figure(); # drawing graphic
  #hold on; # drawing graphic

  # Plotting function.
  plotFunction(func, a, b, 1e-3); # drawing graphic

  # Searching minimum with golden section search (with visualization).
  phi = (5^0.5 + 1) / 2;
  alpha = 1 / phi;

  originalRange = [a, b];

  fcalls = 0;

  x1 = a + (1 - alpha) * (b - a);
  x2 = a + (    alpha) * (b - a);
  y1 = func(x1); fcalls++;
  y2 = func(x2); fcalls++;
  i = 0;
  while (abs(b - a) >= precision)
    assert(a < x1);
    assert(x1 < x2);
    assert(x2 < b);
    oldDist = b - a;

    # Drawing.
    yMax = max([func(a), func(x1), func(x2), func(b)]);
    #yMax = max([func(x1), func(x2)]);
    x = [a,    x1,   x2,   b   ];
    y = [yMax, yMax, yMax, yMax];
    plot(x, y, "+k"); # drawing graphic

    if (y1 <= y2)
      b  = x2;
      x2 = x1;
      x1 = a + (1 - alpha) * (b - a);
      y2 = y1;
```

```
      y1 = func(x1); fcalls++;
    else
      a  = x1;
      x1 = x2;
      x2 = a + alpha * (b - a);
      y1 = y2;
      y2 = func(x2); fcalls++;
    endif

    newDist = b - a;
    assert(oldDist > newDist);

    i++;
  endwhile

  if (y1 <= y2)
    res = x1;
  else
    res = x2;
  endif

  resStr = sprintf("Minimum at x=%11.9f, with precision of %5.2e", res, precision);
  title(resStr);

  #drawnow(); # drawing graphic

  retval = [res, i, fcalls];
endfunction

# Outputting to a file by the way.
filename = "../output/result.tex";
fid = fopen(filename, "w");

# Iterating through precisions.
precs = 10 .^ precPows;

prevFuncInit = 0;
prevFunc = 0;

for prec = precs
  retval = goldenSectionSearch(func, range(1), range(2), prec)

  res = retval(1);
  fres = func(res);

  # Table: precision, iterations, function calls, result.
  buf = sprintf("%2.1e & %d & %d & %11.9f & %11.9f & ", prec, retval(2), retval(3), res, fres);
  fputs(fid, buf);

  # Table: function value delta.
  if (prevFuncInit)
    buf = sprintf("%e", fres - prevFunc);
    fputs(fid, buf);
  endif

  # Table: function derivative, function second derivative.
  buf = sprintf(" & %7.3e & %7.3e \\\\\n", funcDer(res), funcDer2(res));
  fputs(fid, buf);

  prevFuncInit = 1;
  prevFunc = fres;
endfor

fclose(fid);

#input("Press enter to quit."); # drawing graphic
```

## 5 Результаты решения

Результаты решения приведены в таблице 1.

Таблица 1: Результаты работы метода золотого сечения

| Точность | Итер. | Вызовы $f$ | $x$ | $f(x)$ | $f(x_i) - f(x_{i-1})$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0e-03 | 18 | 20 | 9.210999446 | -0.011518238 | | 4.133e-07 | 1.179e-02 |
| 1.0e-04 | 23 | 25 | 9.210960866 | -0.011518238 | -7.172261e-12 | -4.151e-08 | 1.179e-02 |
| 1.0e-05 | 27 | 29 | 9.210964345 | -0.011518238 | -7.307176e-14 | -4.988e-10 | 1.179e-02 |
| 1.0e-06 | 32 | 34 | 9.210964345 | -0.011518238 | 0.000000e+00 | -4.988e-10 | 1.179e-02 |
| 1.0e-07 | 37 | 39 | 9.210964391 | -0.011518238 | -1.214306e-17 | 4.072e-11 | 1.179e-02 |
| 1.0e-08 | 42 | 44 | 9.210964391 | -0.011518238 | 0.000000e+00 | 4.072e-11 | 1.179e-02 |

## 6 Возможные дополнительные исследования

Вследствии особенностей золотого сечения, на каждой итерации длина исследуемого промежутка уменьшается в $\varphi$ раз, что позволяет заранее оценить необходимое число итераций для нахождения минимума с определённой точностью:

$$l_i = l_0 \frac{1}{\varphi^i} = \varepsilon,$$

$$i = \log_\varphi \frac{l_0}{\varepsilon}.$$

На каждой итерации функция вычисляется ровно один раз.

## 7 Обоснование достоверности полученного результата

Согласно графику, исследуемая функция выпукла вверх вблизи локального минимума, $f''(x^*) > 0$, и полученный результат с допустимой точностью обращает производную исследуемой функции в ноль, значит найденная точка является точкой локального минимума.