

**Вопросы к экзамену по математическому анализу**  
**Физ.-мех., мех. поток и ФУИТ, III курс, 2 сем. 2008/09 уч. г.**  
**Лектор — доц. Басов А. В.**

1. Теорема о среднем для голоморфных функций.
2. Локальный принцип максимума.
3. Глобальный принцип максимума. Следствие.
4. Лемма Шварца о функциях, голоморфных в круге.
5. Гармонические функции. Гармоничность голоморфных функций. Связь между вещественными гармоническими и голоморфными функциями. Гармоничность функции  $y = \ln |z|$ .
6. Связь между вещественными гармоническими и голоморфными функциями в окрестности произвольной точки. Пример гармонической функции, которая не является вещественной частью никакой голоморфной функции. Связь между вещественными гармоническими и голоморфными функциями в односвязной области.
7. Теорема о среднем для гармонических функций.
8. Интегральное представление функции, гармонической в круге. Формула Пуассона. Свойства ядра Пуассона.
9. Постановка задачи Дирихле для круга. Лемма о гармонической функции, равной нулю на окружности. Единственность решения задачи Дирихле.
10. Существование решения задачи Дирихле для круга.
11. Определение гармонических функций с помощью теоремы о среднем.
12. Свойства голоморфных отображений с отличной от нуля производной. Предложение о виде сохраняющего углы однородного линейного отображения комплексной плоскости на себя.
13. Предложение о виде сохраняющего углы непрерывно дифференцируемого отображения области комплексной плоскости.
14. Локальные свойства голоморфного отображения с обращающейся в ноль производной.
15. Открытые отображения метрических пространств. Непрерывность отображения, обратного к открытому.
16. Предложение об открытости голоморфных отображений. Однолистные отображения. Изоморфизмы областей комплексной плоскости. Автоморфизмы.
17. Пример неизоморфных гомеоморфных областей. Представление произвольного изоморфизма областей с помощью фиксированного. Абстрактные группы. Группы автоморфизмов.
18. Группа автоморфизмов комплексной плоскости. Транзитивность действия группы автоморфизмов.
19. Сфера Римана. Лемма о подгруппе группы автоморфизмов, действующей транзитивно.
20. Продолжение дробно-линейных отображений на сферу Римана. Группа автоморфизмов сферы Римана.
21. Круговое свойство дробно-линейных преобразований. Изоморфизм верхней полуплоскости и единичного круга.
22. Нахождение подгруппы группы автоморфизмов сферы Римана, переводящих верхнюю полуплоскость на себя.
23. Транзитивность действия подгруппы группы автоморфизмов сферы Римана, переводящих верхнюю полуплоскость на себя. Предложение об изоморфизме между группами автоморфизмов верхней полуплоскости и единичного круга.
24. Предложение об автоморфизмах единичного круга, переводящих ноль в ноль. Следствие об автоморфизмах верхней полуплоскости, переводящих  $v$ . Группа автоморфизмов верхней полуплоскости. Нахождение дробно-линейных преобразований, переводящих единичную окружность на себя.

25. Нахождение дробно-линейных преобразований, переводящих внутренность единичного круга на себя. Группа автоморфизмов единичного круга. Основная теорема о конформных отображениях (без доказательства).
26. Постановка задачи Коши для системы дифференциальных уравнений. Теоремы существования, единственности и зависимости от параметров решений систем (без доказательства).
27. Автономные системы дифференциальных уравнений. Графики решений и фазовые траектории, связь между ними. Фазовый поток.
28. Предложение о добавлении константы к аргументу решения. Свойство фазовых траекторий двух решений.
29. Оператор эволюции и его свойства.
30. Три типа фазовых траекторий автономной системы.
31. Фазовые портреты автономных систем. Локальный фазовый портрет вблизи неособой точки. Система линейного приближения.
32. Устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову. Линейные системы первого порядка.
33. Преобразование линейной системы второго порядка при переходе к новому базису в фазовом пространстве. Построение решений при наличии двух линейно независимых собственных векторов у матрицы системы.
34. Построение вещественных решений линейной системы второго порядка в случае комплексных собственных чисел у матрицы системы.
35. Построение решений линейной системы второго порядка в случае одномерного пространства собственных векторов у матрицы системы.
36. Построение фазовых портретов невырожденных линейных систем: узел и седло.
37. Построение фазовых портретов невырожденных линейных систем: звездный (дикритический) узел.
38. Построение фазовых портретов невырожденных линейных систем: центр и фокус.
39. Построение фазовых портретов невырожденных линейных систем: вырожденный узел.
40. Построение фазовых портретов вырожденных линейных систем второго порядка.
41. Зависимость фазового портрета от следа и определителя матрицы системы.
42. Возмущение системы дифференциальных уравнений. Примеры различного поведения точки покоя при возмущении системы. Теорема о поведении точки покоя при возмущении системы.
43. Топологическая эквивалентность систем. Примеры. Теорема Гробмана–Хартмана о структурной устойчивости (без доказательства). Понятие бифуркации.
44. Неподвижные точки, сжимающие отображения. Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
45. Предложение об устойчивости неподвижной точки.
46. Предложение о полноте пространства функций, непрерывных на отрезке. Полнота пространства непрерывных вектор-функций на отрезке.
47. Теорема Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений. Предложение о непрерывной зависимости решения от параметра.
48. Теорема о неявном отображении. Замечания.