

# Отчет

## Вычисление торических идеалов

Владимир Руцкий, 4057/2

22 декабря 2009 г.

### 1 Постановка задачи

Дана система уравнений вида:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}} x_3^{c_{13}} \cdots x_m^{c_{1m}} \\y_2 &= x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}} x_3^{c_{23}} \cdots x_m^{c_{2m}} \\&\vdots \\y_n &= x_1^{c_{n1}} x_2^{c_{n2}} x_3^{c_{n3}} \cdots x_m^{c_{nm}}\end{aligned}\tag{1}$$

Или:

$$\begin{aligned}0 &= -y_1 + x_1^{c_{11}} x_2^{c_{12}} x_3^{c_{13}} \cdots x_m^{c_{1m}} \\0 &= -y_2 + x_1^{c_{21}} x_2^{c_{22}} x_3^{c_{23}} \cdots x_m^{c_{2m}} \\&\vdots \\0 &= -y_n + x_1^{c_{n1}} x_2^{c_{n2}} x_3^{c_{n3}} \cdots x_m^{c_{nm}}\end{aligned}\tag{2}$$

Эта система задаёт идеал  $\mathfrak{a}$  в кольце многочленов  $K[y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m]$ .

Требуется найти подидеал  $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ , содержащий только переменные из  $\{y_1, \dots, y_n\}$ .

### 2 Выбранный метод решения

Построим базис Грёбнера для  $\mathfrak{a}$  с помощью алгоритма Бухбергера с таким упорядочением мономов, чтобы в первую очередь из системы (2) были редуцированы мономы из  $\{x_1, \dots, x_m\}$ . Таким упорядочением является лексикографический порядок, в котором  $\forall i, j \quad x_i > y_j$ .

### 3 Дополнительные исследования

Система (1) задаёт гомоморфизм  $\Theta$  между двумя полями многочленов  $K_1$  и  $K_2$ :

$$\Theta : K_1[y_1, \dots, y_n] \rightarrow K_2[x_1, \dots, x_m].$$

Подидеал  $\mathfrak{a}'$  в такой интерпретации задаёт  $\ker \Theta$ , т. к.  $\forall v \in \mathfrak{a}' \quad \Theta(v) = 0$ .

## 4 Реализация решения

Задача была решена в системе компьютерной алгебры Maxima<sup>1</sup>, с использованием пакета grobner.

Число переменных было фиксировано на значениях  $n = 7$ ,  $m = 3$ . Матрица степеней  $c(n, m)$  была заполнена произвольными целыми степенями из диапазона  $[0, 4]$ , её можно найти в приложении с исходным кодом и результатами решения.

---

<sup>1</sup><http://maxima.sourceforge.net/> — Maxima, a Computer Algebra System

```
(%i1) /* toric_ideal.wxm
      * Calculating toric ideal.
      * Vladimir Rutsky <altsysrq@gmail.com>
      * 22.12.2009
      */

      /* Loading required packages */
      load(grobner)$
Loading maxima-grobner $Revision: 1.6 $ $Date: 2009/06/02 07:49:49 $

(%i2) /* Generating powers coefficients matrix */
      coefsMatrix: genmatrix(lambda([i, j], random(5)), 7, 3)$
      display(coefsMatrix)$

      coefsMatrix = 
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i4) /* Building system of equation corresponding
      to powers coefficients matrix */
x_variables: []$
y_variables: []$
polynoms: []$
for r: 1 thru length(coefsMatrix) step 1 do (
  monomialMultipliers: [],
  for c:1 thru length(coefsMatrix[1]) step 1 do (
    v: 'x[c],
    monomialMultipliers:
      append(monomialMultipliers, [v^coefsMatrix[r][c]]),
    x_variables: append(x_variables, [v])
  ),
  v: 'y[r],
  polynoms:
    append(polynoms, [-v + apply("*", monomialMultipliers)]),
  y_variables: append(y_variables, [v])
)$
all_variables: append(x_variables, y_variables)$

print("Source polynoms:")$
for i: 1 thru length(polynoms) step 1 do
  display(polynoms[i])$
```

*Source polynoms:*

$$\text{polynoms}_1 = x_1^2 x_2^2 x_3^4 - y_1$$

$$\text{polynoms}_2 = x_2^4 x_3 - y_2$$

$$\text{polynoms}_3 = x_1^4 x_3^3 - y_3$$

$$\text{polynoms}_4 = x_1^3 - y_4$$

$$\text{polynoms}_5 = x_2 x_3^4 - y_5$$

$$\text{polynoms}_6 = x_2^4 x_3^4 - y_6$$

$$\text{polynoms}_7 = x_1^2 x_2 x_3^4 - y_7$$

```
(%i11) /* Calculating Grobner basis */
poly_monomial_order: 'lex$
basis: poly_buchberger(polynoms, all_variables)$
```

```
(%i13) /* Printing some polynoms from founded basis */
print("Basis has", length(basis), "polynoms.")$
display(basis[1])$
display(basis[2])$
display(basis[3])$
for i: 1 thru 4 step 1 do
    display(basis[1 + random(length(basis))])$
display(basis[length(basis) - 1])$
display(basis[length(basis)])$
```

*Basis has 147 polynoms.*

$$\text{basis}_1 = x_1^2 x_2^2 x_3^4 - y_1$$

$$\text{basis}_2 = x_2^4 x_3 - y_2$$

$$\text{basis}_3 = x_1^4 x_3^3 - y_3$$

$$\text{basis}_{24} = y_4^2 y_5^3 - y_7^3$$

$$\text{basis}_{70} = y_3^2 y_4 y_6 y_7 - y_1^2 x_3^2 y_4^3 y_5$$

$$\text{basis}_{122} = x_3^2 y_7^5 - y_1 y_3^2 y_5^3$$

$$\text{basis}_{59} = y_1^2 y_2^2 y_3 y_5 - x_3 y_4^2 y_6^3 y_7$$

$$\text{basis}_{146} = y_2 y_3^5 - y_4^4 y_7^4$$

$$\text{basis}_{147} = y_1 x_2^{14} - x_1^2 y_2^4$$

```
(%i20) /* Displaying basis polynoms containing only 'y' variables */
      for i: 1 thru length(basis) step 1 do (
        /* TODO: Use list magic */
        isFreeOf: 1,
        for j: 1 thru length(x_variables) step 1 do (
          if not freeof(x_variables[j], basis[i]) then (
            isFreeOf: 0,
            return(0)
          )
        ),
        if isFreeOf = 1 then
          display(basis[i])
      )$
```

$$\text{basis}_{30} = y_2 y_3 y_7 - y_4^2 y_5 y_6$$

$$\text{basis}_{32} = y_4^2 y_5^3 - y_7^3$$

$$\text{basis}_{38} = y_1^3 - y_4^2 y_5^2 y_6$$

$$\text{basis}_{41} = y_2 y_3 y_5^2 - y_6 y_7^2$$

$$\text{basis}_{63} = y_2^2 y_3^2 y_5 - y_4^2 y_6^2 y_7$$

$$\text{basis}_{83} = y_4^4 y_6^3 - y_2^3 y_3^3$$

$$\text{basis}_{111} = y_2^2 y_7^4 - y_3^2 y_6^3$$

$$\text{basis}_{112} = y_2^3 y_5^2 y_7^2 - y_3 y_6^4$$

$$\text{basis}_{114} = y_2^2 y_4^2 y_5^2 y_7^3 - y_2 y_3^3 y_5 y_6^2$$

$$\text{basis}_{116} = y_2 y_4^2 y_5 y_7^3 - y_3^3 y_6^2$$

$$\text{basis}_{121} = y_2 y_4^2 y_7^5 - y_2 y_3^4 y_5 y_6$$

$$\text{basis}_{124} = y_4^4 y_5 y_7^4 - y_2 y_3^5 y_5$$

$$\text{basis}_{128} = y_4^4 y_5^2 y_7^2 - y_3^4 y_6$$

$$\text{basis}_{130} = y_2^4 y_5^4 - y_6^5$$

$$\text{basis}_{131} = y_2^4 y_5 y_7^3 - y_4^2 y_6^5$$

$$\text{basis}_{133} = y_3^3 y_5^2 y_6^2 - y_2 y_7^6$$

$$\text{basis}_{141} = y_2^2 y_3^5 - y_2 y_4^4 y_7^4$$

$$\text{basis}_{142} = y_1 y_2 y_3^5 - y_1 y_4^4 y_7^4$$

$$\text{basis}_{146} = y_2 y_3^5 - y_4^4 y_7^4$$