**Вопросы к экзамену по теории алгоритмов - I**

Часть I.

1. Понятие алгоритма. Вычислимые и породимые множества.

Конечный, конструктивный объект. Алгоритм. Частичные и тотальные функции. Примеры: кодирование из N в N2 и кодирование кортежей. Вычислимость. Пример функции с числом π. Экстраалгоритм. Теорема об экстраалгоритме. Теорема о функции экстраалгоритма.

1. Основные представительные модели.

Нормальный алгоритм Маркова. Каноническая система Поста. Пример про палиндромы. Машина Тьюринга. Машина Поста. Машина с неограниченными регистрами. МНР-вычислимые функции и класс CМНР. Функция fP, вычисляемая программой P. Примеры МНР-вычислимых функций: , , .

1. Тезис Чёрча.

Основной результат: класс C. Тезис Чёрча. Свидетельства в пользу тезиса Чёрча. Способы доказательства МНР-вычислимости.

1. Порождение вычислимых функций.

Предикат и его характеристическая функция. Разрешимость предиката. Примеры: 9«x кратно y» и «Px – останавливается». Лемма о вычислимости основных функций. Теорема о замкнутости C относительно подстановки. Примитивная рекурсия. Примеры: , . Теорема о замкнутости C относительно примитивной рекурсии. Класс PR.

1. Порождение вычислимых функций.

Класс PR. Теорема о вычислимости функций: , , , y, , , y, и , , , . Следствие об алгебре разрешимости.

1. Порождение вычислимых функций.

μ-оператор. Теорема о замкнутости C относительно μ-оператора. Класс частично-рекурсивных функций R. Пример с порождения нетотальной функции μ-оператором. Функция Аккермана. Теорема о существовании тотальной вычислимой не примитивно-рекурсивной функции (Th 5.2). Теорема о равенстве R и C. Класс R0. Рекурсивный предикат. Соотношение между классами PR, R0, Total, R, C.

1. Нумерация вычислимых функций.

Счетность, перечисление множества. Эффективная счетность множества всех конечных последовательностей натуральных чисел, J множества всех команд МНР, P множества всех программ МНР. - n-местная функция, вычисляемая по программе Pa. Теорема о счетности C. Теорема Фридберга (б/д). Теорема о существовании невычислимой всюду определенной функции. s-m-n-теорема (б/д).

1. Универсальные программы.

Универсальная функция . Теорема о вычислимости . Следствие о разрешимости предиката «Pe(x)↓y за t или меньше шагов».

1. Неразрешимые задачи.

Теоремы о неразрешимости проблем: «Фx всюду определена» (6.1), «или функция Фx(x) определена» (6.2), «или функция Фx(y) определена или Px(y)↓» (6.4, проблема остановки), «Фx ≡ 0» (6.5), «Фx ≡ Фy» (следствие), «Px(c)↓ и Px(y)↓с» (6.6, б/д). Теорема Райса (б/д).

1. Частично разрешимые задачи.

Частично разрешимый предикат и его частичная характеристическая функция. Примеры частично разрешимых проблем: «», «или Px(y)↓» (проблема остановки), Критерий разрешимости предиката (6.11).

1. Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества.

Рекурсивные множества. Характеристическая функция множества. Примеры рекурсивных и нерекурсивных множеств. Теорема о рекурсивности , , , . Рекурсивно перечислимые множества и их частичные характеристические функции. Критерий рекурсивного множества. Теорема о рекурсивной перечислимости множеств и . Мера вычислительной сложности . Теоремы Блюма о псевдоускорениях и ускорениях (б/д).

1. Диофантовы множества.

Диофантово уравнение. Сводимость системы уравнений к одному. Приведение к уравнению 4-й степени. Теорема Лагранжа. Эквивалентность разрешимости в целых и натуральных числах. Диофантовы множества. Теорема о диофантовости и . Критерий диофантовости множества натуральных чисел.

1. Диофантовы множества.

Диофантовые свойства, отношения, функции. Примеры: , , , , , , , . Диофантовость конечных множеств и их представление. Универсальное уравнение. Теорема о существовании недиофантового дополнения (б/д). Универсальное ДУ без параметров и его диофантово множество. 10-я проблема Гильберта. Теорема Матиясевича (б/д). Критерий р.п. множества натуральных чисел (следствие). Разрешимость в рациональных числах. Следствие из теоремы Штурма (б/д). Теорема Тарского (б/д).

Часть II.

1. РАМ. Описание. Типы операндов. *c(i), v(a)*. Команды. Интерпретация программы, как отображение лент, как функции, как языка. Пример с алфавитом {1, 2}.
2. Вычислительная сложность РАМ-программ. Весовые критерии сложности. Логарифмический критерий для разных операндов и команд. Пример с программой, считающей *nn*.
3. Инварианты циклов. Пример программы, вычисляющей *xy*, её инвариант, доказательство корректности, сложность.
4. Неветвящиеся программы. Пример: схема Горнера. Равномерный весовой критерий . Битовые вычисления и логарифмический весовой критерий . Ветвления и пример: сортировка чисел попарным сравнением.
5. «Разделяй и властвуй». Примеры: MinMax, умножение n-разрядных двоичных чисел, сортировка слиянием.
6. Теорема о рекуррентных соотношениях.
7. «Динамическое программирование». Пример с умножением матриц.
8. Порядковые статистики.
9. Редактирующее расстояние. Поиск образца.

Также необходимо знать шесть базовых алгоритмов с доказательствами: поиск в глубину, поиск в ширину, Краскала, Дейкстра, Уоршелла-Флойда, А\*.