Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Лабораторная работа №2

по курсу «Стохастические модели»

«Оценка параметров модели случайного процесса нагрузки сервера, обрабатывающего заявки»

Студент:	Руцкий В. В.
Группа:	5057/2
Преподаватель:	Иванков А. А.

Санкт-Петербург 2011

Содержание

1 Постановка задачи

В данной работе производится анализ лога использования ресурсов сервера при поступающих заявках на обработку.

В отсутствие заявок уровень использования ресурсов сервера представляет собой сумму некоторой постоянной величины загрузки m и случайных отклонений:

$$B(t) = m + \sigma\mathcal{W}(t),$$

где $\mathcal{W}(t)$ — это винеровский процесс.

Заявки поступают в соответствии с законом распределения Пуассона $\mathcal{P}(\lambda)$.

При поступлении одной заявки использование ресурсов мгновенно возрастает, а затем экспоненциально снижается до прежнего уровня. Увеличение использования ресурсов сервера от одной заявки, поступившей в момент времени t_c, выражается следующим образом:

$$K_{t_c}(t) = \mathcal{N}(m_c, \sigma_c^2) \cdot \mathrm{I}(t - t_c) \cdot e^{-\lambda_c(t-t_c)},$$

где $\mathrm{I}(x)$ — фунцкия Хевисайда.[1]

В логе использования ресурсов сервера наблюдается общая загрузка сервера:

$$X(t) = B(t) + \sum_{t_c \in T_c} K_{t_c}(t),$$

где T_c — это моменты времени поступления заявок.

Необходимо по дискретным наблюдениям x_i случайного процесса $X(t)$ в моменты времени $t_i, \quad i = 1, \ldots, N$

1. идентифицировать моменты времени поступления заявок T_c,
2. оценить параметры модели m, σ^2, λ, m_c, σ_c^2, λ_c.

Наблюдения производятся через равные промежутки времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

2 Решение в случае бесконечного времени обработки заявки

Рассмотрим случай, когда $\lambda_c \to 0$, т. е. при поступлении заявка увеличивает уровень загрузки сервера на постоянную величину и ресурсы, выделенные на обработку заявки никогда не освобождаются.

2.1 Итеративный метод

2.1.1 Идентификация моментов времени прихода заявок T_c

Предположим, что в отрезке времени $[t_k, t_{k+n}]$ не пришло ни одной заявки. Тогда $n+1$ наблюдений $x_k, \ldots, x_{k+n}$ представляют собой наблюдения $B(t)$. Оценим по этим наблюдениям параметры $B(t)$.

Рассмотрим разности соседних наблюдений — они представляют собой наблюдения нормально распределённой случайной величины:

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \sigma\mathcal{W}(t_{i+1}) - \sigma\mathcal{W}(t_i) = \sigma\mathcal{N}(0, \Delta t) = \mathcal{N}(0, \sigma^2\Delta t).$$

Построим точечную оценку $\widehat{\sigma}^2$ методом максимального правдоподобия:[2]

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} ((x_{k+i} - x_{k+i-1}) - 0)^2.$$

[1] Функция Хевисайда: $\mathrm{I}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

[2] См. § 3.5 пункт 1 в [1].

Обозначим гипотезу о том, что в промежутке времени $[t_{k+n}, t_{k+n+1}]$ не пришло ни одной заявки, как H_0. Тогда

$$\big(X(t_{k+n+1}) - X(t_{k+n})|H_0\big) = \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Delta t).$$

В качестве критерия принятия гипотезы H_0 с уровнем значимости α возьмём условие, что разность значений наблюдений $(x_{k+n+1} - x_{k+n})$ лежит в $(1-\alpha)$ квантиле нормального распределения $\mathcal{N}(0, \widehat{\sigma}^2 \Delta t)$, обозначенного как $\mathcal{N}_{1-\alpha}$:

$$H_0 \text{ принимается } \iff (x_{k+n+1} - x_{k+n}) < \mathcal{N}_{1-\alpha}$$

(рассматривается только правый квантиль нормального распределения, т. к. заявка может дать только положительное увеличение уровня нагрузки сервера).

Алгоритм нахождения моментов времени поступления заявок T_c состоит в следующем:

1. В предположении, что в первые $n+1$ наблюдений не пришло ни одной заявки, оценим $\widehat{\sigma}$ и построим критерий для принятия H_0.
2. Будем добавлять к первым $n+1$ наблюдениям по одному наблюдению и проверять гипотезу H_0. Если H_0 принимается, то $\widehat{\sigma}$ и критерий для принятия H_0 пересчитываются для добавленного наблюдения.
3. Как только встретиться наблюдение $n+1+l$, для которого гипотеза H_0 отвергается, то $t_{n+1+l} \in \widehat{T}_c$. Все наблюдения до $t_{n+1+l+1}$ отбрасываются и алгоритм начинается с шага 1 для поиска следующего момента времени прихода заявки.

2.1.2 Оценка интенсивности поступления заявок λ

Зная оценку времени прибытия заявок $\widehat{T}_c$ интенсивность поступления заявок можно оценить методом максимального правдоподобия:[3]

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{|\widehat{T}_c|} \sum_{i=1}^{|\widehat{T}_c|} (t_{c_{i+1}} - t_{c_i}).$$

2.1.3 Оценка параметров фоновой нагрузки m и σ

Оценку m и σ произведём по наблюдениям уровня загруженности сервера до поступления первой заявки t_{c_1}, т. к. дальше изменение уровня фоновой нагрузки сервера сравнимо с дисперсией уровня увеличения нагрузки от прихода заявки:

$$\sigma \approx \sigma_c.$$

Оценку произведём методом максимального правдоподобия для нормального распределения:[4]

$$\widehat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K-1} x_i, \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K-1} (x_i - \widehat{m})^2,$$

где $K = t_{c_1}/\Delta t$ — номер наблюдения x_i, когда, согласно приведённой выше оценке, пришла первая заявка.

2.1.4 Оценка параметров увеличения уровня загрузки ресурсов сервера от заявок m_c и σ_c

Рассмотрим ненормированный разностный аналог производной случайного процесса $X(t)$:

$$\mathrm{d}X(t) = X(t) - X(t - \Delta t).$$

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution#Maximum_likelihood или в общем случае в § 3.5 пункт 1 в [1].
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution#Estimation_of_parameters.

$\mathrm{d}\,X(t)$ в момент времени прихода заявки t_c выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X(t_c) &= X(t_c) - X(t_c - \Delta t) = B(t_c) + K_{t_c}(t_c) - B(t_c - \Delta t) = \\ &= \sigma\mathcal{W}(t_c) - \sigma\mathcal{W}(t_c - \Delta t) + \mathcal{N}(m_c, \sigma_c^2) = \\ &= \sigma\mathcal{N}(0, \Delta t) + \mathcal{N}(m_c, \sigma_c^2) = \mathcal{N}(m_c, \sigma^2\Delta t + \sigma_c^2),\end{aligned}$$

предполагая, что в момент времени $t_c - \Delta t$ заявки не было.

Наблюдения $\mathrm{d}X(t)$ в моменты времени T_c соответствуют наблюдениям нормально распределённой случайной величины $\mathcal{N}(m_c, \sigma^2\Delta t + \sigma_c^2)$ — оценим по этим наблюдениям параметры m_c и σ_c^2 методом максимального правдоподобия аналогично оценкам в пункте 2.1.3.

2.2 Оценивание EM-алгоритмом

В пункте 2.1.4 было показано, что $\mathrm{d}\,X(t)$ в момент времени прихода заявки t_c выражается как:

$$\mathrm{d}X(t_c) = \mathcal{N}(m_c, \sigma^2\Delta t + \sigma_c^2),$$

предполагая, что в момент времени $t_c - \Delta t$ заявки не было.

Во время отсутствия заявок $\mathrm{d}X(t)$ выражается как:

$$\mathrm{d}X(t) = X(t) - X(t - \Delta t) = B(t) - B(t - \Delta t) = \mathcal{N}(0, \sigma^2\Delta t).$$

Значит в каждый отдельно взятый момент времени t случайная величина $\mathrm{d}X(t)$ представляет собой смесь двух нормально распределённых случайных величин, причем параметры случайных величин со временем не меняются. Оценим их параметры EM-алгоритмом (на основе примера из [2]).

Введём скрытые случайные величины $Z_i, \quad i = 1, \ldots, N$, принимающие значения 1 или 2, в зависимости от того, пришла ли заявка в момент времени t_i или нет соответственно, а z_i — наблюдения Z_i в момент времени t_i.

$$\begin{array}{lclcll}\mathrm{d}X(t_i)|(Z_i = 1) & \sim & \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) & = & \mathcal{N}(m_c, \sigma^2\Delta t + \sigma_c^2), & (\text{случай } t_i \in T_c), \\ \mathrm{d}X(t_i)|(Z_i = 2) & \sim & \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) & = & \mathcal{N}(0, \sigma^2\Delta t), & (\text{случай } t_i \notin T_c).\end{array}$$

Случайная величина Z_i распределена по закону Пуассона $\mathcal{P}(\lambda)$, её можно аппроксимировать Биномиальным законом $\mathcal{B}(N, p)$:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(Np) = \mathcal{B}(N, p),$$

т. к. N велико, $\lambda = Np$ невелико, а значит p мало (см. §1.1 пункт 3 в [1]).

Пусть $\mathbf{P}(Z_i = 1) = \tau_1$ и $\mathbf{P}(Z_i = 2) = \tau_2 = 1 - \tau_1$.

Введём обозначения: $\theta = (\tau_1, \tau_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N)$.

Построим функцию правдоподобия:

$$L(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{z}|\theta) = \prod_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{2} \mathbb{I}(z_i = j)\, \tau_j\, f(x_i, \mu_j, \sigma_j^2),$$

где $\mathbb{I}(\mathrm{expr})$ — функция индикатор,[5] а $f(x, \mu, \sigma^2)$ — это функция плотности распределения, в данном случае нормального:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Перепишем функцию правдоподобия в экспоненциальной форме:

$$L(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{2} \mathbb{I}(z_i = j)\left[\log\tau_j - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \log(\sigma_j) - \frac{(x_i - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right]\right\}.$$

2.2.1 EM-алгоритм

Пусть имеется начальная оценка параметров θ: $\theta^{(0)}$ (использованный способ вычисления $\theta^{(0)}$ описан в пункте 2.2.2). Последовательно выполняя E- и M-шаги будем уточнять оценку $\theta^{(k)}$, пока она не сойдётся: $\theta^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \widehat{\theta}$. Вектор $\widehat{\theta}$ примем за результат оценки.

[5] Функция индикатор: $\mathbb{I}(\mathrm{expr}) = \begin{cases} 0, & \mathrm{expr} = \mathrm{False} \\ 1, & \mathrm{expr} = \mathrm{True} \end{cases}$.

E-шаг Имея текущую оценку параметров $\theta^{(k)}$, вычислим по теореме Байеса условную вероятность принадлежности i-го наблюдения j-му нормальному распределению:

$$T_{j,i}^{(k)} = \mathbf{P}(Z_i = j |\, \mathrm{d}X(t_i) = x_i; \theta^{(k)}) = \frac{\tau_j^{(k)} f(x_i; \mu_j^{(k)}, \sigma_j^{(k)})}{\tau_1^{(k)} f(x_i; \mu_1^{(k)}, \sigma_1^{(k)}) + \tau_2^{(k)} f(x_i; \mu_2^{(k)}, \sigma_2^{(k)})}.$$

Построим функцию — математическое ожидание логарифма функции правдоподобия:

$$Q\left(\theta|\theta^{(k)}\right) = \mathbf{E}\left[\log L(\theta; \mathbf{x}, \mathbf{z})\right] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{2} T_{j,i}^{(k)} \left[\log \tau_j - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \log(\sigma_j) - \frac{(x_i - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right].$$

M-шаг Теперь найдём параметры $\theta^{(k+1)}$ максимизирующие $Q\left(\theta|\theta^{(k)}\right)$:

$$\theta^{(k+1)} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}\, Q\left(\theta|\theta^{(k)}\right).$$

В соответствии с вычислениями в [2]:

$$\tau_j^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} T_{j,i}^{(k)}, \quad \mu_j^{(k+1)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} T_{j,i}^{(k)} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} T_{j,i}^{(k)}}, \quad \sigma_j^{(k+1)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} T_{j,i}^{(k)} (x_i - \mu_j^{(k+1)})^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} T_{j,i}^{(k)}}.$$

2.2.2 Вычисление θ_0

В качестве начальных значений τ возьмём равные вероятности:

$$\tau_1^{(0)} = \tau_2^{(0)} = 0.5.$$

Для вычисления $\mu_j^{(0)}$ построим полигон частот[6] $\mathrm{d}x_i$: в качестве $\mu_1^{(0)}$ возьмём последний локальный максимум частот, а в качестве $\mu_2^{(0)}$ — первый (т. к. $\mathbf{E}\left[B(t) - B(t - \Delta t)\right] = 0$, а $\mathbf{E}\left[B(t_c) + K_{t_c}(t_c) - B(t - \Delta t)\right] = m_c > 0$).

В качестве $\sigma_j^{(0)}$ возьмём $\frac{1}{3}(\mu_1^{(0)} - \mu_2^{(0)}), \quad j = 1, 2$.

2.2.3 Получение искомых оценок

Из оценки θ несложно найти искомые оценки σ^2, m_c, σ_c:

$$\widehat{m_c} = \mu_1, \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_2^2}{\Delta t}, \quad \widehat{\sigma_c}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_2^2.$$

Из $T_{j,i}^{(k)}$, полученного на последнем шаге EM-алгоритма, можно идентифицировать моменты времени прихода заявок:

$$\widehat{T_c} = \left\{t_i \quad i = 1, \ldots, N | T_{1,i}^{(k)} > T_{2,i}^{(k)}\right\}.$$

Оценку m можно провести по наблюдениям $X(t)$ до момента времени прихода первой заявки аналогично тому, как это было сделано в пункте 2.1.3.

Оценку λ можно получить так же, как было сделано в пункте 2.1.2.

3 Решение в случае конечного времени обработки заявки

Рассмотрим случай, когда интенсивность освобождения ресурсов λ_c существенно больше нуля и, сервер успевает обрабатывать заявки: $\exists \sup\left\{X(t)\right\}$.

[6] См. § 2.1 пункт 4 в [1].

$\mathrm{d}\,X(t)$ в момент времени, когда не пришло ни одной заявки $t \notin T_c$, выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= X(t) - X(t-\Delta t) = \\ &= \left(B(t) + \sum_{t_c \in T_c,\ t_c \leqslant t} K_{t_c}(t)\right) - \left(B(t-\Delta t) + \sum_{t_c \in T_c,\ t_c \leqslant (t-\Delta t)} K_{t_c}(t-\Delta t)\right). \end{aligned}$$

Будем считать приход заявок достаточно редким: таким, что на уровень загруженности ресурсов сервера существенно влияет лишь последняя пришедшая заявка в момент времени $t_c < t$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= X(t) - X(t-\Delta t) = \\ &= \big(B(t) + K_{t_c}(t)\big) - \big(B(t-\Delta t) + K_{t_c}(t-\Delta t)\big) = \\ &= \big(\sigma\mathcal{W}(t) - \sigma\mathcal{W}(t-\Delta t)\big) + \Big(\mathcal{N}(m_c, \sigma_c^2)\cdot e^{-\lambda_c(t-t_c)} - \mathcal{N}(m_c, \sigma_c^2)\cdot e^{-\lambda_c(t-\Delta t-t_c)}\Big) = \\ &= \mathcal{N}(0, \sigma^2\Delta t) + \mathcal{N}(m_c, \sigma_c^2)\cdot\Big(e^{-\lambda_c(t-t_c)} - e^{-\lambda_c(t-\Delta t-t_c)}\Big). \end{aligned}$$

В условиях предположения о влиянии только последней заявки, в момент прихода заявки t_c:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t_c) &= X(t_c) - X(t_c-\Delta t) = \\ &= \big(B(t_c) + K_{t_c}(t_c)\big) - \big(B(t_c-\Delta t) + 0\big) = \\ &= \mathcal{N}(0, \sigma^2\Delta t) + \mathcal{N}(m_c, \sigma_c^2) = \\ &= \mathcal{N}(m_c, \sigma^2\Delta t + \sigma_c^2). \end{aligned}$$

3.1 Идентификация времени прихода заявок

Построим вариационный ряд наблюдений $\mathrm{d}X(t_i)$:

$$\mathrm{d}x_{(1)} \leqslant \mathrm{d}x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{d}x_{(N)}.$$

Приходящие заявки вносят существенно большее изменение уровня загруженности ресурсов сервера, чем фоновая нагрузка, поэтому в правой части этого ряда будут находиться наблюдения $\mathrm{d}X(t_c)$. Воспользуемся итеративным методом из пункта 2.1.1 для выделения наблюдений прихода заявок из вариационного ряда — получим оценку множества моментов времени прихода заявок $\widehat{T}_c$.

3.2 Оценка параметров увеличения уровня загрузки ресурсов сервера от заявок m_c и σ_c

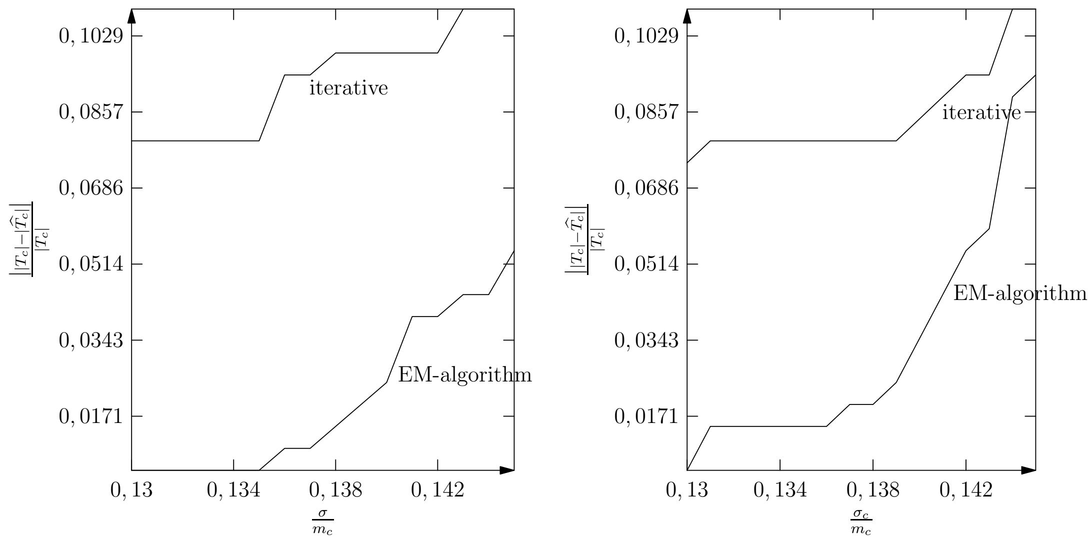
Рассмотрим промежуток времени между приходами заявок $[t_k, t_{k+n}]$. На нём $\mathrm{d}X(t)$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= \mathcal{N}(0, \sigma^2\Delta t) + \mathcal{N}(m_c, \sigma_c^2)\cdot\Big(e^{-\lambda_c(t-t_c)} - e^{-\lambda_c(t-\Delta t-t_c)}\Big) \\ &= \Big(\mathcal{N}(0, \sigma^2\Delta t) + \mathcal{N}(0, \sigma_c^2)\cdot\Big(e^{-\lambda_c(t-t_c)} - e^{-\lambda_c(t-\Delta t-t_c)}\Big)\Big) + m_c\cdot\Big(e^{-\lambda_c(t-t_c)} - e^{-\lambda_c(t-\Delta t-t_c)}\Big). \end{aligned}$$

Оценим m_c и λ_c методом наименьших квадратов. Для этого необходимо минимизировать сумму квадратов отклонений:

$$\begin{aligned} (m_c, \lambda_c) &= \operatorname*{argmin}_{m_c,\ \lambda_c} S(m_c, \lambda_c) = \\ &= \operatorname*{argmin}_{m_c,\ \lambda_c} \sum_{i=1}^{n}\Big(\mathrm{d}x_i - m_c\cdot\Big(e^{-\lambda_c(t_i-t_k)} - e^{-\lambda_c(t_i-\Delta t-t_k)}\Big)\Big)^2. \end{aligned}$$

$S(m_c, \lambda_c)$ выпукла вниз на интересущей для анализа области, поэтому для нахождения аргументов, обращающих её в минимум, можно воспользоваться численными методами минимизации, в данной работе был использован метод покоординатного спуска.



(a) Зависимость относительной погрешности оценивания $|T_c|$ от σ.

(b) Зависимость относительной погрешности оценивания $|T_c|$ от σ_c.

Рис. 1: Погрешности оценивания итеративным методом и EM-алгоритмом.

3.3 Оценка параметров фоновой нагрузки m и σ

Оценку m и σ, при найденной оценке $\widehat{T}_c$, можно получить так же, как было сделано в пункте 2.1.3.

4 Результаты работы

4.1 Случай бесконечного времени обработки заявки

Графики зависимости относительной погрешности полученных оценок числа заявок $|T_c|$ в пунктах 2.1 и 2.2 от среднеквадратичных отклонений данных σ и σ_c приведёны на рис. 1.

Список литературы

[1] Г.И. Ивченко and Ю.И. Медведев. *Введение в математическую статистику*. М: Издательство ЛКИ, 2010.

[2] Wikipedia: Expectation-maximization algorithm. `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Expectation-maximization_algorithm&oldid=423422317`.