Modelarea unei funcții necunoscute

Studenți: Enescu Ruxandra, Hegheș Antonia, Niculiță Roxana
Grupa: 30134
Număr identificare: 40

CUPRINS

PARTE INTRODUCTIVĂ – Motivație

Ce este o funcție necunoscută?

- O funcție necunoscută este descrisă de o intrare și o ieșire dată, dar a cărei formă nu este specificată.

Ce este aproximarea?

- Aproximarea este o metodă care ne permite să construim modele matematice plecând de la un set de date reale al unei funcții necunoscute.
- Aceasta este o metodă fundamentală care stă la baza mai multor concepte esențiale în identificarea sistemelor: predicție, simulare, simplificare, control.

PARTE INTRODUCTIVĂ – Descrierea problemei

- Se dau urmatoarele date (#40): un set de date de intrare și ieșire.
- Ieșirea este generată de o funcție necunoscută neliniară, afectată de zgomot de medie zero.
- Comportamentul funcției necunoscute se poate observa cu ajutorul regresiei liniare, care descrie modul în care variabilele independente (i.e. X{1} , X{2}) influențează variabila dependentă (i.e. Y).
- Scopul problemei este găsirea vectorului de parametri θ ce minimizează media erorilor pătratice, pentru care aproximarea funcției este cât se poate de exactă.

ALGORITM ȘI PROCES – Prezentare date

- Identificarea sistemelor se bazează pe separarea setului de date în identificare și validare.
- Astfel, se utilizează vectorii X1_id și X2_id pentru construirea matricei de regresori phi_id și matricea Y_id pentru datele de identificare, respectiv X1_val, X2_val și matricea Y_val pentru datele de validare.

ALGORITM ȘI PROCES – Descriere aproximator

- Aproximatorul polinomial are formă variabilă în funcție de gradul *m* ales.

- Exemplu: pentru gradul *m=3* și două variabile de intrare, aproximatorul are forma:

$$\hat{g}(x) = [1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1^3, x_2^3, x_1 x_2, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2] \cdot \theta$$

- Dimensiunea polinomului este:

$$C_{m+2}^{m}$$

ALGORITM ȘI PROCES – Descriere sistem

- Pentru *m=2*, sistemul arată astfel:

$$
\begin{pmatrix}
y(x1\{1\}, x2\{1\}) \\
y(x1\{2\}, x2\{1\}) \\
y(x1\{3\}, x2\{1\}) \\
\ldots \\
y(x1\{41\}, x2\{1\}) \\
y(x1\{1\}, x2\{2\}) \\
\ldots \\
\ldots \\
y(x1\{40\}, x2\{41\}) \\
y(x1\{41\}, x2\{41\})
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & x1\{1\} & x2\{1\} & x1\{1\}x2\{1\} & x1\{1\}^2 & x2\{1\}^2 \\
1 & x1\{2\} & x2\{1\} & x1\{2\}x2\{1\} & x1\{2\}^2 & x2\{1\}^2 \\
1 & x1\{3\} & x2\{1\} & x1\{2\}x2\{1\} & x1\{3\}^2 & x2\{1\}^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & x1\{41\} & x2\{1\} & x1\{41\}x2\{1\} & x1\{41\}^2 & x2\{1\}^2 \\
1 & x1\{1\} & x2\{2\} & x1\{1\}x2\{2\} & x1\{1\}^2 & x2\{2\}^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & x1\{40\} & x2\{41\} & x1\{40\}x2\{41\} & x1\{40\}^2 & x2\{41\}^2 \\
1 & x1\{41\} & x2\{41\} & x1\{41\}x2\{41\} & x1\{41\}^2 & x2\{41\}^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6
\end{pmatrix}
$$

ALGORITM ȘI PROCES – Găsire parametri θ

- Este cunoscut că ieșirea dată Y_id a sistemului este rezultatul înmulțirii dintre matricea phi_id și vectorul θ, momentan necunoscut.

$$Y = \Phi\theta$$

- Astfel, aplicând metoda regresiei liniare, vectorul θ va rezulta din expresia:

$$\theta = (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top Y$$

- **Observație**: programul MATLAB folosit în elaborarea soluției ne pune la dispoziție operatorul “\” – left division, care substituie algoritmul regresiei liniare.

REZULTATE – Calcul ieșiri aproximate

- Ieșirea aproximată este rezultatul înmulțirii dintre matricea phi_id, respectiv phi_val și vectorul de parametri θ.

$$\hat{Y} = \Phi\theta$$

- Exemplu: *m=5*

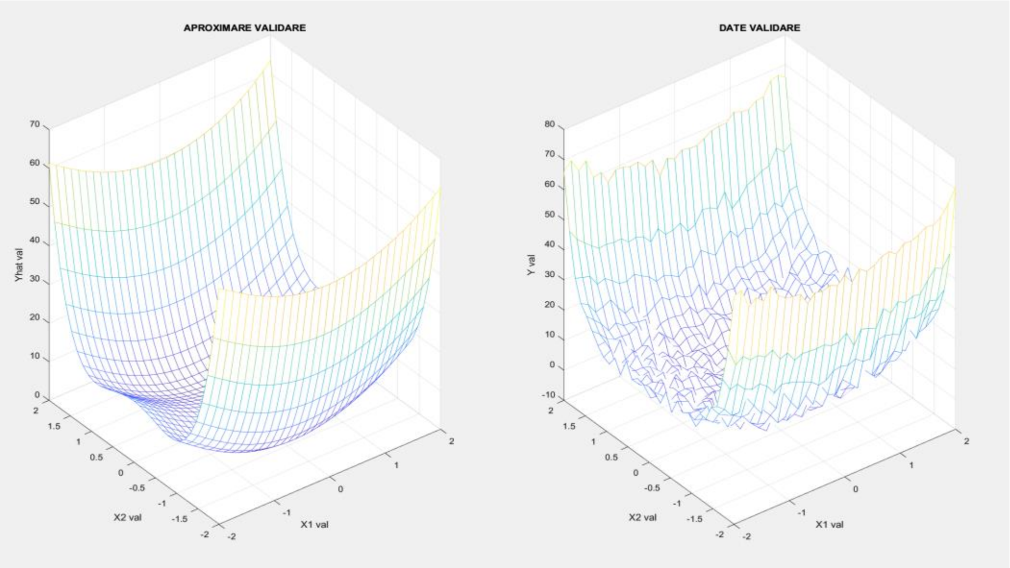

Fig. 3.1.1

REZULTATE – Grafice și observații

Subantrenare

m=2

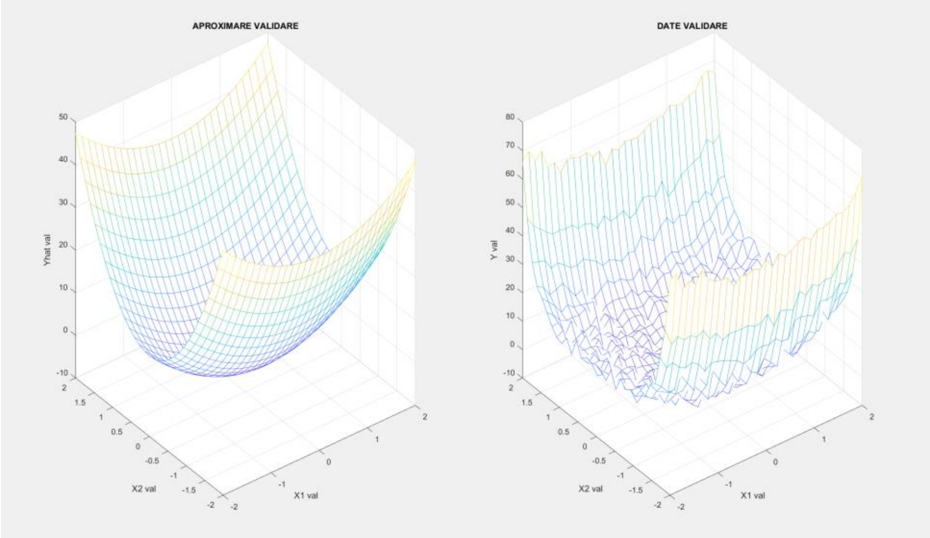

Fig. 3.2.1

Supraantrenare

m=40

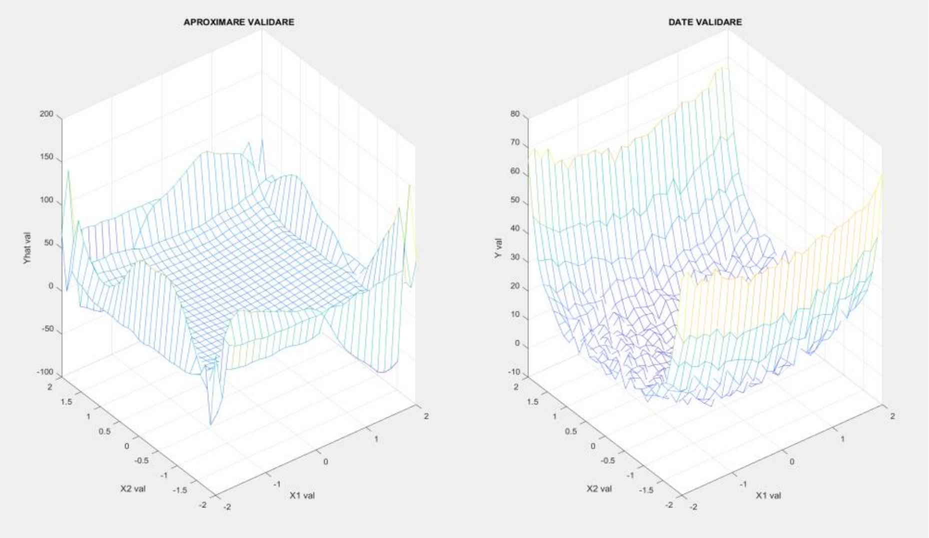

Fig. 3.2.2

REZULTATE – Grafice și observații

- Se observă conform fig. 3.2.1 și fig. 3.2.2, două fenomene ce apar atunci când modelul este prea simplu, respectiv prea complex: subantrenare și supraantrenare.
- Ce este subantrenarea?

Subantrenarea intervine atunci când un model nu reușește să captureze suficient de bine relațiile din datele de identificare.

- Ce este supraantrenarea?

Supraantrenarea intervine atunci când un model se adaptează foarte bine la datele de identificare, dar interpreteaza și zgomotul.

DISCUȚII ALE PROBLEMEI – Optimizare soluție

- De remarcat este că o valoare mai mare a lui m nu înseamnă o soluție mai bună.
- Pentru alegerea acestei valori nu există o regulă prestabilită, variind de la model la model, iar acest proces implică multiple încercări și mai ales erori.
- Astfel, găsirea unui m optim se poate face calculând “mean squared error” (MSE) pe măsură ce acesta crește.

DISCUȚII ALE PROBLEMEI – Optimizare soluție

- MSE se calculează cu formula:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

- Obiectivul principal este găsirea unei valori MSE minime corespunzătoare gradului m optim.
- În figura următoare se poate observa că pentru valori mari ale lui m rezultatele încep să nu mai fie relevante. Creșterea bruscă a erorii sugerează antrenarea sistemului până la o valoare maximă m din intervalul [25, 30].

DISCUȚII ALE PROBLEMEI – Concluzii

- Subantrenare: Performanța slabă atât pe setul de identificare cât și pe setul de validare.
- Supraantrenare: Performanță excelentă pe setul de identificare, dar performanță slabă pe setul de validare.

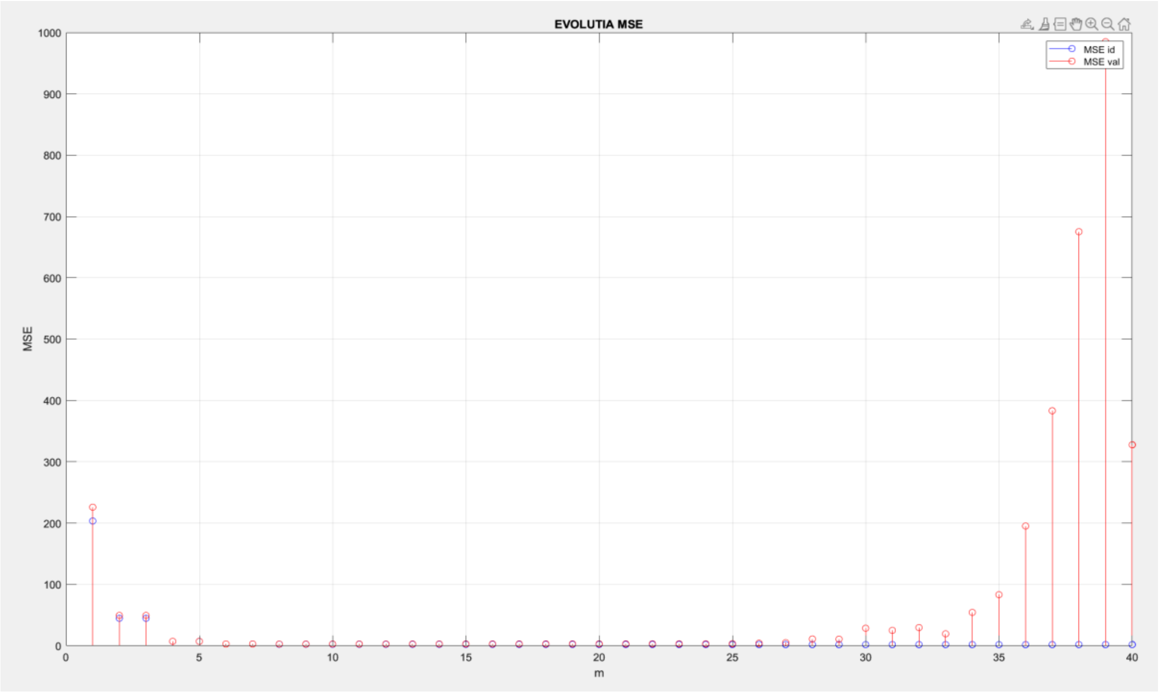

Fig. 4.2.1

Vă mulțumim!

ANEXA COD (#40)

```
clear all
close all
clc

% CITIREA DATELOR

load('proj_fit_40.mat');

X1_id = id.X{1};
X2_id = id.X{2};
Y_id = id.Y;

X1_val = val.X{1};
X2_val = val.X{2};
Y_val = val.Y;


% GENERAREA MATRICEI DE REGRESORI PT IDENTIFICARE
grad = 30;
mse_id = ones(1 , grad);
mse_val = ones(1, grad);

for m=1:grad

phi_id = zeros(length(X1_id)*length(X2_id), nchoosek(m+2 , m));
y_v = zeros(length(X1_id)^2 , 1); % vectorul matricei Y_id

j=1;
while (j<=length(X2_id))
    for i = 1:length(X1_id)^2 % for asta e pt parcurgere X1_id (am pus la patrat
pentru ca nr de linii din phi este 1681)
        k = 1;
        for a = 0:m
            for b = 0:m-a
                if a+b<=m && a <= m && b <= m
                    if  mod(i,41) == 0
                        phi_id(i, k) = (X1_id(41)^a)*(X2_id(j)^b);
                        y_v(i , 1) = Y_id(41, j);
                    else
                        phi_id(i, k) = (X1_id(mod(i,41))^a)*(X2_id(j)^b);
                        y_v(i , 1) = Y_id(mod(i, 41) , j);

                    end

                end
                k = k+1;
            end
        end
        if mod(i, 41) == 0
            j=j+1;
        end
    end
end


% IDENTIFICARE COEFICIENTI THETA
```

```
theta = ones(nchoosek(m+2, m) , 1);
theta = phi_id\y_v ;

% GENERAREA MATRICEI DE REGRESORI PT VALIDARE

phi_val = zeros( length(X1_val)*length(X1_val), nchoosek(m+2 , m));

j=1;
while (j<=length(X2_val))
    for i = 1:length(X1_val)^2 % for asta e pt parcurgere X1_val (am pus la patrat
pentru ca nr de linii din phi este 961)
        k = 1;
        for a = 0:m
            for b = 0:m-a
                if a+b<=m && a <= m && b <= m
                    if  mod(i,31) == 0
                        phi_val(i, k) = (X1_val(31)^a)*(X2_val(j)^b);
                    else
                        phi_val(i, k) = (X1_val(mod(i,31))^a)*(X2_val(j)^b);
                    end
                end
                k = k+1;
            end
        end
        if mod(i, 31) == 0
            j=j+1;
        end
    end
end

% GENERARE APROXIMARE YHAT_VALIDARE

Yhat_val_v = ones(length(X1_val)^2 , 1);
Yhat_val = ones(length(X1_val) , length(X2_val));
Yhat_val_v = phi_val * theta;

j =1;
while(j<= length(X1_val))
for i = 1:length(X1_val)^2
    if  mod(i,31) == 0
        Yhat_val(31 , j) = Yhat_val_v(i ,1);
        j= j+1;
    else
        Yhat_val(mod(i , 31) , j) = Yhat_val_v(i ,1);
    end

end
end


% GENERARE APROXIMARE YHAT_IDENTIFICARE

Yhat_id_v = ones(length(X1_id)^2 , 1);
Yhat_id = ones(length(X1_id) , length(X2_id));
Yhat_id_v = phi_id * theta;

j =1;
while(j<= length(X1_id))
```

```
for i = 1:length(X1_id)^2
    if  mod(i,41) == 0
        Yhat_id(41 , j) = Yhat_id_v(i ,1);
        j= j+1;
    else
        Yhat_id(mod(i , 41) , j) = Yhat_id_v(i ,1);
    end

end
end

% MSE IDENTIFICARE

MSE_id=0;

for p=1:41
    for q=1:41
        MSE_id = MSE_id + (Y_id(p, q)-Yhat_id(p, q))*(Y_id(p, q)-Yhat_id(p, q));
    end
end

MSE_id = MSE_id/(41*41);

% MSE VALIDARE

MSE_val=0;

for p=1:31
    for q=1:31
        MSE_val = MSE_val + (Y_val(p, q)-Yhat_val(p, q))*(Y_val(p, q)-Yhat_val(p,
q));
    end
end

MSE_val = MSE_val/(31*31);

mse_id(1, m) = MSE_id;
mse_val(1 , m) = MSE_val;

end

stem(mse_id, 'b');
hold on
stem(mse_val, 'r');
grid;
xlabel('m');
ylabel('MSE');
title ('EVOLUTIA MSE');
legend('MSE id' , 'MSE val');

% GRADELE MSE MINIME

mse_min_id = min(mse_id);
for i = 1:m
    if mse_min_id == mse_id(1, i)
        grad_mse_min_id = i;
    end
end
```

```
mse_min_val = min(mse_val);
for i = 1:m
    if mse_min_val == mse_val(1, i)
        grad_mse_min_val = i;
    end
end

% PENTRU GRADUL MINIM AL VALIDARII =>

m = grad_mse_min_val;
phi_id = zeros( length(X1_id)*length(X1_id), nchoosek(m+2 , m));
y_v = zeros(length(X1_id)^2 , 1); % vectorul matricei Y_id

j=1;
while (j<=length(X2_id))
    for i = 1:length(X1_id)^2 % for asta e pt parcurgere X1 (am pus la patrat
pentru ca nr de linii din phi este 1681)
        k = 1;
        for a = 0:m
            for b = 0:m-a
                if a+b<=m && a <= m && b <= m
                    if  mod(i,41) == 0
                        phi_id(i, k) = (X1_id(41)^a)*(X2_id(j)^b);
                        y_v(i , 1) = Y_id(41, j);
                    else
                        phi_id(i, k) = (X1_id(mod(i,41))^a)*(X2_id(j)^b);
                        y_v(i , 1) = Y_id(mod(i, 41) , j);

                    end

                end
                k = k+1;
            end
        end
        if mod(i, 41) == 0
            j=j+1;
        end
    end
end


% IDENTIFICARE COEFICIENTI THETA

theta = ones(nchoosek(m+2, m) , 1);
theta = phi_id\y_v ;

% GENERAREA MATRICEI DE REGRESORI PT VALIDARE

phi_val = zeros( length(X1_val)*length(X1_val) , nchoosek(m+2 , m));
j=1;
while (j<=length(X2_val))
    for i = 1:length(X1_val)^2 % for asta e pt parcurgere X1 (am pus la patrat
pentru ca nr de linii din phi este 1681)
        k = 1;
        for a = 0:m
            for b = 0:m-a
                if a+b<=m && a <= m && b <= m
                    if  mod(i,31) == 0
                        phi_val(i, k) = (X1_val(31)^a)*(X2_val(j)^b);
```

```
                    else
                        phi_val(i, k) = (X1_val(mod(i,31))^a)*(X2_val(j)^b);
                    end
                end
                k = k+1;
            end
        end
        if mod(i, 31) == 0
           j=j+1;
        end
    end
end

% GENERARE APROXIMARE YHAT_VALIDARE

Yhat_val_v = ones(length(X1_val)^2 , 1);
Yhat_val = ones(length(X1_val) , length(X2_val));
Yhat_val_v = phi_val * theta;

j =1;
while(j<= length(X1_val))
for i = 1:length(X1_val)^2
    if  mod(i,31) == 0
        Yhat_val(31 , j) = Yhat_val_v(i ,1);
        j= j+1;
    else
        Yhat_val(mod(i , 31) , j) = Yhat_val_v(i ,1);
    end

end
end


% GENERARE APROXIMARE YHAT_IDENTIFICARE

Yhat_id_v = ones(length(X1_id)^2 , 1);
Yhat_id = ones(length(X1_id) , length(X2_id));
Yhat_id_v = phi_id * theta;

j =1;
while (j<= length(X1_id))
for i = 1:length(X1_id)^2
    if  mod(i,41) == 0
        Yhat_id(41 , j) = Yhat_id_v(i ,1);
        j= j+1;
    else
        Yhat_id(mod(i , 41) , j) = Yhat_id_v(i ,1);
    end

end
end

% AFISARI APROXIMARI

figure;

subplot(121);
mesh(X1_val , X2_val, Yhat_val);
%hold on
```

```
%mesh(X1_val , X2_val, Y_val);

xlabel('X1 val');
ylabel('X2 val');
zlabel('Yhat val');
title('APROXIMARE VALIDARE');

subplot(122);
mesh(val.X{1}, val.X{2}, val.Y);

xlabel('X1 val');
ylabel('X2 val');
zlabel('Y val');
title('DATE VALIDARE');

figure;

subplot(121);
mesh(X1_id , X2_id, Yhat_id);
%hold on
%mesh(X1_id , X2_id, Y_id);

xlabel('X1 id');
ylabel('X2 id');
zlabel('Yhat id');
title('APROXIMARE IDENTIFICARE');

subplot(122);
mesh(id.X{1}, id.X{2}, id.Y);
xlabel('X1 id');
ylabel('X2 id');
zlabel('Y id');
title('DATE IDENTIFICARE');
```