1 I

Определение (Общая задача ЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \# b_i,\ i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \ldots, n\} \end{cases}$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ - вектор переменных

Матричная запись:
$\begin{cases} f(x) = (c, x) \to \max(\min) \\ Ax \# b \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \ldots, n\} \end{cases}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Определение (Эквивалентные ЗЛП (ЗМП)). Две задачи ЛП P_1, P_2 называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению задачи P_1 соответствует некоторое допустимое решение задачи P_2 и наоборот, причем оптимальному решению одной задачи соответствует оптимальное решение другой задачи.

Теорема 1.1 (Первая теорема эквивалентности). *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей каноническая ЗЛП.*

Теорема 1.2 (Вторая теорема эквивалентности). *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей симметрическая ЗЛП.*

Определение (Система с базисом). СЛАУ - СЛАУ с базисом, если в каждом уравнении имеется переменная с коэффициентом $+1$, отсутствующая в других уравнениях. Такие переменные будем называть базисными, остальные не базисными

Определение (ПЗЛП). КЗЛП называется приведенной, если

1. СЛАУ $Ax = B$ является системой с базисом

2. Целевая функция выражена через небазисные переменные

Определение (Прямо допустимая симплексная таблица). СТ называется прямо допустимой, если $a_{i0} \geq 0, i = 1, \ldots, m$ (bшки)

Определение (Двойственно допустимая симплексная таблица). СТ называется двойственно допустимой, если $a_{0j} \geq 0, i = 1, \ldots, n+m$ (сшки)

Теорема 1.3 (Критерий разрешимости). *Целевая функция задачи ЛП ограничена сверху (снизу) на непустом множестве допустимых решений тогда и только тогда, когда задача максимизации (минимизации) разрешима*

Определение (Двойственная задача). Для ЗЛП I двойственной задачей II является ЗЛП вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \leftrightarrow g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, l \leftrightarrow y_i \geq 0, i = 1...l,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = l+1, \ldots m \leftrightarrow y_i \in \mathbb{R}, i = l+1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, i = 1, \ldots p \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, j = 1, \ldots, p$$

$$x_j \in \mathbb{R}, j = p+1, \ldots n \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, j = p+1, \ldots, n$$

Задачу I называют прямой, а II - двойственной. Стрелки соответствуют сопряженным ограничениям

Теорема 1.4 (Первая теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач разрешима, то разрешима и другая, причем оптимальное значение целевых функций совпадает, т.е $f(x^*) = g(y^*)$, где x^*, y^* - оптимальные решения задач I, II соответственно*

Теорема 1.5 (Первый критерий оптимальности). *Вектор* $x^* \in D_I$ *является оптимальным решением задачи I* $\Leftrightarrow \exists y^* \in D_{II}$ *т.ч* $g(y^*) = f(x^*)$

Определение (Условия дополняющей нежесткости). Будем говорить, что $x \in D_I, y \in D_{II}$ удовлетворяют УДН, если при подстановке в любую пару сопряженных неравенств хотя бы одно из них обращается в равенство. Это означает, что следующие характеристические произведения обращаются в 0:

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i)y_i = 0, i = 1, \dots m$$

$$x_i(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j) = 0, j = 1, \dots n$$

Теорема 1.6 (Вторая теорема двойственности). $x^* \in D_I, y^* \in D_{II}$. *оптимальны в задачах I, II тогда и только тогда, когда они удовлетворяют УДН.*

Теорема 1.7 (Второй критерий оптимальности (следствие)). $x^* \in D_I$ *является оптимальным решением I* $\Leftrightarrow$ $\exists y^* \in D_{II}$ *т.ч.* x^* *и* y^* *удовлетворяют УДН*

Определение (Малое (допустимое) изменение). Малое (допустимое) изменение ресурса Р1 - такое изменение $\Delta b_1 = b_1' - b_1$ для кот в задаче I' существует оптимальное решение той же структуры, что и оптимальное решение исходной задачи I

Определение (3-я теорема двойственности). При допустимом изменении i-того ресурса приращение целевой функции прямо пропорционально изменению ресурса с коэффициентом пропорциональности, равным y_i^*

$$\Delta_i F = \Delta b_i y_i^*, \Delta_i F = F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + \Delta b_i, \dots, b_m) - F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, \dots, b_m)$$

2 II

Определение (Выпуклое множество). Множество называется выпуклым, если вместе с двумя его точками оно содержит отрезок, их соединяющий, или

$$\forall x^1, x^2 \in D \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad x^* = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in D$$

Определение (Выпуклая функция). Функция $f : D \to R$ (D - выпкуло) называется выпуклой, если

$$\forall x^1, x^2 \in D, \forall \lambda \in (0,1) \quad f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Определение (Задача ВП). :

$$\begin{gathered} f(x) \to \min \\ \phi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ x \in G \end{gathered}$$

Здесь ϕ_i, f - выпуклые в G функции, G - выпуклое замкнутое множество $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+)$

Определение (Условие Слейтера). **(УС)**

$$\exists \overline{x} \in G, \phi_i(\overline{x}) < 0.$$

$$D = \{x \in G | \phi_i \leq 0, i = 1, \dots, m\} - \textbf{множество допустимых решений задачи ВП.}$$

УС гарантирует существование внутренних точек множества D.

Теорема 2.1 (О градиенте и производной по направлению). *Если* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x^0*, то предел*

$$\lim_{\lambda \to 0+0} \frac{f(x^0 + \lambda z) - f(x^0)}{\lambda},$$

существует и равен

$$f_z'(x^0) = (\nabla f(x^0), z)$$

Пусть задана точка $x_0 \in D$. $I_0 = \{i \mid \phi_i(x^0) = 0\}$ - множество индексов *активных* ограничений

Определение (Возможное направление)**.** Направление z называется возможным (допустимым) в x^0, если $(\nabla\phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0$

Определение (Прогрессивное направление)**.** Направление z называется прогрессивным в точке x^0, если

$$\begin{cases} (\nabla\phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0 \\ (\nabla f(x^0), z) < 0 \end{cases}$$

Теорема 2.2 (Критерий оптимальности ЗВП)**.** *$x^* \in D$ - оптимальное решение задачи ВП $\Leftrightarrow$ в точке x^* нет прогрессивного направления, т.е не существует $z \in R^n$:*

$$\begin{cases} (\nabla\phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0 \\ (\nabla f(x^0), z) < 0 \end{cases}$$

Определение (Каноническая ЗВП)**.** Канонической задачей ВП называется задача ВП с линейной целевой функцией, т.е $f(x) = (c, x) \to \min$

Теорема 2.3 (Теорема Куна-Таккера о седловой точке)**.** *$x^* \in G$ - оптимальное решение задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует $y^* \geq 0$, такое что (x^*, y^*) является седловой точкой функции Лагранжа*

Определение (Задача ЦЛП)**.**

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \# b_i, i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$c_j, b_i, a_{ij} \in \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$

Определение (Правильное отсечение)**.** Доп. линейное ограничение - правильное отсечение, если

1. оно отсекает часть области D, содержащее нецелочисленное оптимальное решение x^0 текущей задачи ЛП.
2. В отсекаемой части области не должно быть ни одного допустимого решения задачи ЦЛП (ограничение сохраняет все допустимые целочисленные решения)

Определение (Отсечение Гомори)**.** Имеем оптимальную с-таблицу $a_{ij,i=0,\ldots,m,j=0,\ldots,n}$
Рассмотрим $a_{l0} \notin \mathbb{Z}$. l выбираем с наибольшей дробной частью по правилу "первая сверху"($l \in \{0, \ldots, n\}$)
Отсечение Гомори - дополнительное линейное ограничение

$$\sum_{j \in Nb} \{a_{lj}\} x_j \geq \{a_{l0}\}$$

, где Nb - множество индексов небазисных переменных, $\{x\}$ - дробная часть x