3-раскраска графа

Вход: неориентированный граф без кратных ребер и петель $G = (V, E)$ с n вершинами.

Выход: $\begin{cases} 1, \text{если существует правильная 3-раскраска графа,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$

Лемма 1 (Геллер)**.** *$G(V, E)$ – произвольный связный неориентированный граф с n вершинами и m ребрами. Тогда* $\dfrac{n^2}{n^2 - 2m} \leqslant \chi(G)$

Доказательство. Пусть, $V_1, V_2 ... V_\chi$ - множества вершин, окрашенных в соответствующие цвета при правильной покраске графа G.

$$m \leqslant \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\chi}|V_i|(|V_i|-1) \Rightarrow \frac{n^2}{n^2-2m} \leqslant \frac{n^2}{n^2 - n(n-1) + \sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|(|V_i|-1)} =$$

$$= \frac{n^2}{n + \sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|(|V_i|-1)} = \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i| + \sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|(|V_i|-1)} = \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|^2} = \frac{(\sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|)^2}{\sum\limits_{i=1}^{\chi}|V_i|^2} \leqslant \chi.$$

▶

Для обеспечения невозможности 3-раскраски необходимо, чтобы $\chi(G) \geqslant 4$. Тогда

$$\frac{n^2}{n^2-2m} \geqslant 4 \implies 8m \geqslant 3n^2$$

Генерический алгоритм

1. Если $8|E| \geqslant 3|V|^2$, то правильной 3-раскраски не существует.

   Иначе ответ - "не знаю".

Доказательство.

$$I_n = \{G = (V, E) \mid |V| = n\}, |I_n| = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$
$$S = \{G = (V, E) \mid 8|E| < 3|V|^2\}$$
$$S \cap I_n = \{G = (V, E) \mid |V| = n, |E| = m, 8m < 3n^2\}$$

Рассмотрим матрицы смежности неориентированных (m, n)-графов. Единиц в таких матрицах в два раза больше, чем ребер в графе, поэтому верно следующее:

$$|S \cap I_n| = |\{\text{множество симметричных булевых матриц n x n с нулями на главной диагонали,}$$
$$\text{у которых выше главной диагонали единиц меньше, чем } \frac{3}{8}n^2\}| =$$

▶

$|I_n \backslash (I_n \cap S)|$ - множество графов такое, что $\forall v \in V \deg(v) \geq 3$, т.е для них не существует правильной 3-раскраски (каждой вершине инцидентно не менее трех других вершин, а у нас лишь 3 цвета для раскраски, следовательно, по принципу Дирихле, как минимум у 2 вершин совпадают цвета).

Для множества S: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) < 3|V|$.

$$S = \{G = (V, E) \mid |E| < \frac{3}{2}|V|\} = \{M \mid \text{число единиц в матрице} < 3|V|\}$$

$$S_1 = \{G = (V, E) \mid \text{графы с множеством матриц (смежности) такие, что в каждой строчке}$$

$$\text{единиц правее главной диагонали меньше или равно } 2\}$$

Заметим, что $S_1 \supseteq S$, т.к. для матриц из S_1 верно следующее - если правее главной диагонали в каждой строке единиц меньше или равно 2, то в каждой строке единиц меньше или равно 4, т.е всего единиц в матрице $\leq 4|V| = 4n$.

Мы рассматриваем симметричные матрицы смежности (т.к неориентированный граф). Тем самым:

$$|I_n| = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$|I_n \cap S_1| = 2\prod_{i=1}^{n-2}((n-i)(n-i-1) + n - i + 1)$$

$$\rho(S_1) = \lim_{n \to \infty} \frac{2\prod_{i=1}^{n-2}((n-i)(n-i-1) + n - i + 1)}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}}$$

Заметим, что сверху полином $n^{2(n-2)}$ степени, поэтому предел равен 0.

(т.к $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$)

Подмножество пренебрежимого множества пренебрежимо, тем самым S также пренебрежимо. Алгоритм является генерическим.

v