Дифференциальные уравнения

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $$\phi_1(x)\psi_1(y)dx = \phi_2(x)\psi_2(y)dy$$

$$\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy$$

2. $$y' = f(ax + by) \implies z = ax + by$$

Однородные уравнения

Однородные уравнения

Однородная функция своих аргументов измерения n - функция $f(x, y)$, для которой выполняется

$$f(tx, ty) \equiv t^n f(x, y)$$

ДУ однородно относительно x, y, если $f(x, y)$ - однородная функция. Такое уравнение всегда можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$$

и применить замену

$$u = \frac{y}{x},$$

приведя уравнения к уравнению с РП:

$$x\frac{du}{dx} = \phi(u) - u$$

Если решение $u = u_0$ - корень уравнения $\phi(u) - u = 0$, то решение однородного уравнения будет $u = u_0$, или $y = u_0 x$.

Уравнения, приводящиеся к однородным:

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1})$$

Если $c = c_1 = 0$, то уравнение однородно и интегрируется как выше. Иначе:

1. $$\det = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

Вводим новые переменные

$$\{\begin{matrix} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{matrix},$$

где h и k пока неопределенные, приведем уравнение к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f(\frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1})$$

h, k решения системы

$$\begin{cases} ah + bk + c & = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 & = 0 \end{cases},$$

получаем однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta})$$

Пример.

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \implies \det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 = 0 \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Замена $x = \xi - 1, y = \eta + 3$.

$$(\xi + \eta)d\xi + (\xi - \eta)d\eta = 0$$

Уравнение однородное ($f(tx, ty) \equiv t^n f(x, y)$)

Замена $\eta = u\xi$. $\implies$ $(1 + 2u - u^2)d\xi + \xi(1 - u)du = 0$

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{1 - u}{1 + 2u - u^2}du = 0$$

Интегрируем, возвращаемся к x и y.

2.

$$\det = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

В этом случае замена $z = ax + by$ приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

Линейные уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

1. $q(x) \equiv 0$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

2. $q(x) = 0$

    1. Метод вариации произвольной постоянной

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

Подставляем y в уравнение, находим $C(x)$.

2. Метод Бернулли

Полагаем $y = u(x)v(x)$, одна из функций может быть выбрана произвольно. Подставляем в уравнение, получаем

$$vu' + (pv + v')u = q(x)$$

v найдем как частное решение уравнение $v' + pv = 0, v = 0$

Уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

сводится к обычному линейному уравнению первого порядка (если n не равно 0 или 1) заменой $z = \frac{1}{y^{n-1}}$

Уравнения в полных диффференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнения в ПД

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

уравнение в пд, если левая часть является дифференциалом некоторой функции u(x,y)

Теорема Уравнение в ПД тогда и только тогда, когда $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$

Решение уравнения:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = C = u$$

$$u(x, y) = \int Mdx + \phi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = N = (\int Mdx)'_y + \phi'(y)$$

Аналогично ищем, если интегрируем N и функция $\phi(x)$ представляет интеграл от M

Интегрирующий множитель

В некоторых случаях, если уравнение не является уравнением в ПД, можно подобрать функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть превращается в полный дифференциал $du = \mu Mdx + \mu Ndy$

такая функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем. Его можно искать, используя следующие формулы:

- $$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$
- $$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = (\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})\mu$$

- $$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - N\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Частные случаи:

- $$\mu = \mu(x), \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0 \implies \frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{d\mu}{dx}\mu^{-1} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{(\partial M/\partial y) - (\partial N/\partial x)}{N}$$
- $$\mu = \mu(y) \implies \frac{\mu'}{\mu} = \frac{(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)}{M}$$
- $$\omega(x,y) = \omega(x,y)(x,y), \mu = \mu(\omega), \frac{\partial\mu}{\partial\omega\mu(\omega)} = \frac{M_y' - N_x'}{N\omega_x' - M\omega_y'}$$

Теорема существования и единственности задачи Коши

ДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной

Уравнения, допускающие понижение порядка

Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка

Линейно независимые функции.

Определитель Вронского.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема. Если система функций ЛНЗ, то ее определитель Вронского тождественно равен 0.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, a_0 = 0$$

Поиск общего решения (Метод Эйлера): Составляем характеристическое уравнение $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

- все корни вещественные и различные

  $$y_{\text{о.о}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

- корни вещественные, но среди них есть кратные (например λ_k кратности k)

  $$y_{\text{о.о}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + e^{\lambda_k x}(C_k + xC_{k+1} + \dots + x^{n-k} C_n)$$

- среди корней есть комплексные

  парам корней $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ соответствуют $C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\sin bx$

- есть кратные комплексные корни

  каждой паре $\lambda = a \pm bi$ кратности k соответствует 2k фундаментальных решений

$$e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \cos bx, xe^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos bx, x^{k-1} e^{ax} \sin bx$$

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), a_0 = 0$$

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

$y_{\text{о,о}}$ находим по предыдущему пункту, положив f(x) равным 0.

Если правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx],$$

то есть два случая:

1. $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения

$$y_{\text{ч.н}} = (\widetilde{P_k}(x) \cos \beta x + \widetilde{Q_k}(x) \sin \beta x)e^{ax}, k = \max(m, n)$$

2. $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности s

$$y_{\text{ч.н}} = x^s(\widetilde{P_k}(x) \cos \beta x + \widetilde{Q_k}(x) \sin \beta x)e^{ax}, k = \max(m, n)$$

Забавная **теорема**

Если дифференциальное уравнение $L[y] = f_1(x) + if_2(x)$ имеет решение $y = u(x) + iv(x)$, то $u(x)$ есть решение уравнение $L[y] = f_1(x)$, а $v(x)$ - решение уравнения $L[y] = f_2(x)$

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), a_0 = 0, a_k(x), f \in C(\alpha, \beta)$$

1. Находим систему фундаментальных решений уравнения $Ly = 0$ и $y_{oo} = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ 2)Общее решение неоднородного уравнения $Ly = f(x)$ ищем в виде $y_{o\text{н}} = y = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$

Система уравнений для $c_k^{'}(x)$:

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)y_1(x) + \dots + c_n^{'}(x)y_n(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)y_1^{'}(x) + \dots + c_n^{'}(x)y_n^{'}(x) = 0 \\ \dots \\ c_1^{'}(x)y_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n^{'}(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1^{'}(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n^{'}(x)y_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

Определитель системы - определитель Вронского, не равный нулю. Ищем решения в виде:

$$c_k^{'}(x) = \frac{W_k(x)}{W(x)}$$

$$c_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)} + c_k$$

$$y_{\text{ОН}} = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x)$$

Системы дифференциальных уравнений

Основные определения

Опр. **Система ДУ** первого порядка из m уравнений от n переменных:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') = 0, \\ \ldots \\ F_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') = 0 \end{cases}$$

Опр. Нормальная система ДУ:

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1', \\ \ldots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n' \end{cases}$$

> число уравнений равно числу неизвестных **(m = n)** и f_i не зависят от производных

Матричная запись:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t)$$

Опр. Линейная система ДУ:

$$\begin{cases} a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + g_1(t) = x_1', \\ \ldots \\ a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + g_n(t) = x_n' \end{cases}$$

Матричная запись:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + G(t)$$

Опр. Автономная система ДУ:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1', \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n' \end{cases}$$

> Производная $\frac{dX}{dt}$ характеризует скорость движения. В этой системе скорость не меняется с течением времени. Такое движение называют **установившимся**.

Опр. Решением системы дифференциальных уравнений первого порядка $x = \phi(t)(x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t))$ называется любой набор дифференцируемых функций, обращающий все уравнения системы в **тождество**.

Решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Понятие устойчивости по Ляпунову

Опр.

Решение $\phi_i(t), i = 1, 2, ..., n$, системы

$$\frac{dX}{dt} = \Phi(t, X)$$

называется устойчивым, или, точнее, **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого решения y(t) системы, начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta, i = 1, 2, ..., n,$$

для всех $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \phi_i(t)| < \varepsilon, i = 1, 2, ..., n.$$

> Таким образом, устойчивость означает, что близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \geq t_0$.

Опр. Решение системы $X = \Phi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\lim_{t \to +\infty} |y_i(t) - \phi_i(t)| = 0, i = 1, \dots, n$$

при

$$|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta$$

Опр. Точка покоя $x(t) \equiv 0$ системы $\frac{dX}{dt} = F(X, t)$ называется устойчивой по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что:

$$|x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)| < \epsilon, t \geq t_0.$$

Опр. Точка покоя $x(t) \equiv 0$ системы $\frac{dX}{dt} = F(X, t)$ называется асимптотически устойчивой, если существует $\delta > 0$ такое, что:

$$\lim_{t \to \infty} |x_i(t)| = 0, i = 1, \dots, n$$

Исследование вопроса устойчивости некоторого решения y(t) системы 1.17 может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения (точки покоя, положения равновесия) x(t) ≡ 0 соответствующей системы, получающейся преобразованием исходной к новым переменным с помощью замены: x(t) = y(t) − y(t)

Условия устойчивости для систем линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Признаки отрицательности действительных частей корней многочлена