3-раскраска графа

Вход: неориентированный граф без кратных ребер и петель $G = (V, E)$ с n вершинами.

Выход: $\begin{cases} 1, \text{если существует правильная 3-раскраска графа,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$

Предлагаемый алгоритм

Если граф является надграфом K_4, то возвращаем 0.
Иначе "?".

Утверждение. *Алгоритм является генерическим.*

Доказательство. Граф K_4 нельзя раскрасить в 3 цвета, значит, если он является подграфом некоторого графа, то сам граф также нельзя раскрасить тремя цветами.

Докажем, что множество графов, не содержащих подграфа K_4 (обозначим его G_n), является пренебрежимым.

Граф определяется своей матрицей смежности. Количество матриц смежности графов размера n - $|I_n| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$|G_n| = |\{\text{графы размера n, матрицы смежности которых} \\ \text{не содержат подматрицы вида } J_{4\times4} - E_4\}|$$

В частности, на диагонали расположены $n/4$ подматрицы 4×4, разрешенных вариантов по $2^6 - 1$.

Если мы рассмотрим множество матриц, где запрет наложен только на $n/4$ диагональных подматриц (обозначим множество G'_n), а не на все C_n^4, то получим большее по мощности множество.

$$|G'_n| = (2^6 - 1)^{n/4} \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{6n}{4}} = (2^6 - 1)^{n/4} \cdot 2^{\frac{n^2-4n}{2}}$$

$$\mu(G') = \lim_{n\to\infty} \frac{|G'_n|}{|I_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^6 - 1)^{n/4} \cdot 2^{\frac{n^2-4n}{2}}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \lim_{n\to\infty} (2^6 - 1)^{n/4} \cdot 2^{-\frac{3}{2}n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{2^6 - 1}{2^6})^{n/4} = 0$$

Получаем, что множество G' пренебрежимо. Очевидно, что G_n также пренебрежимо, ибо $G_n \subseteq G'_n$. ▶