

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>1</b>
<b>2 Линейное программирование</b>	<b>2</b>
2.1 Постановка задачи (ЛП), теоремы эквивалентности . . . . .	2
2.2 Каноническая задача ЗЛП. Базисные решения . . . . .	2
2.3 Симплекс-метод . . . . .	2
2.3.1 Симплекс-метод для приведенной ЗЛП . . . . .	3
2.4 Каноническая ЗЛП . . . . .	3
2.5 Двойственность в ЛП . . . . .	3
2.6 Теоремы двойственности . . . . .	4
2.7 Критерий разрешимости ЛП . . . . .	4
2.8 Классификация пар двойственных задач . . . . .	4
2.9 Экономическая интерпретация двойственной задачи и теорема двойственности . . . . .	5
2.10 Анализ на чувствительность модели ЛП . . . . .	5
2.11 О конечности симплекс-метода . . . . .	6
2.12 Двойственный симплекс-метод . . . . .	6
<b>3 Целочисленное линейное программирование</b>	<b>7</b>
3.1 Задачи ЦЛП . . . . .	7
3.2 Метод отсечения . . . . .	7
3.3 Метод ветвей и границ (МВ и Г) . . . . .	8
<b>4 Выпуклое программирование</b>	<b>8</b>
4.1 Выпуклое множество и выпуклая функция . . . . .	8

## 1 Введение

**Определение** (Методы оптимизации). Раздел прикладной математики, содержание которого составляет теория и методы решения оптимизационных задач

**Определение** (Оптимизационная задача). Задача выбора наилучшего варианта (в некотором смысле) из имеющихся

**Определение** (Задача оптимизации).  $\begin{cases} f(x) \rightarrow \min(\max) \\ x \in D \end{cases}$

$D$  - множество допустимых решений,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

**Определение** (Задача МП).  $\begin{cases} (1) f(x) \rightarrow \min(\max)[extr](opt) \\ (2) g_i(x) \neq 0, i = 1, \dots, m - \text{ограничения} \\ (3) x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

**Определение** (Допустимое решение).  $x \in \mathbb{R}^n$ , удовл (2), называется допустимым решением задачи.

**Определение** (Оптимальное решение). Допустимое решение  $x^* \in D$  задачи 1 - 3 называется оптимальным решением, если  $f(x) \leq f(x^*) \forall x \in D$  в случае задачи максимизации и  $f(x) \geq f(x^*) \forall x \in D$  в случае задачи минимизации

Глобальный оптимум -  $x^*$

**Определение** (Локальный оптимум). Допустимое решение  $\tilde{x} \in D$  задачи 1 - 3 называется локальным оптимумом, если  $f(x) \leq f(\tilde{x})$  для всех  $x$  из некоторой окрестности  $\tilde{x}$  в случае задачи максимизации и  $f(x) \geq f(\tilde{x})$  для всех  $x$  из некоторой окрестности  $\tilde{x}$  в случае задачи минимизации

**Определение** (Разрешимая/неразрешимая). Задача 1 - 3, которая обладает оптимальным решением, называется разрешимой, иначе неразрешимой

## 2 Линейное программирование

### 2.1 Постановка задачи (ЛП), теоремы эквивалентности

**Определение** (Общая задача ЛП).  $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  - вектор переменных

Матричная запись:

$$\begin{cases} f(x) = (c, x) \rightarrow \max(\min) \\ Ax \leq b \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Определение** (Стандартная (симметрическая) форма).  $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$

**Определение** (КЗЛП).  $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$

**Определение** (Основная задача ЛП).  $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \end{cases}$

**Определение** (Эквивалентные ЗЛП (ЗМП)). Две задачи ЛП  $P_1, P_2$  называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению задачи  $P_1$  соответствует некоторое допустимое решение задачи  $P_2$  и наоборот, причем оптимальному решению одной задачи соответствует оптимальное решение другой задачи.

**Теорема 2.1** (Первая теорема эквивалентности). Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей каноническая ЗЛП.

**Теорема 2.2** (Вторая теорема эквивалентности). Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей симметрическая ЗЛП.

### 2.2 Каноническая задача ЗЛП. Базисные решения

**Определение** (Базисное решение). Пусть  $\bar{x}$  - решение  $Ax = B$ . Тогда вектор  $\bar{x}$  называется базисным решением СЛАУ, если система вектор-столбцов матрицы  $A$ , соответствующая ненулевым компонентам вектора  $\bar{x}$ , ЛНЗ

*Замечание.* Если система однородная, то  $x = \bar{0}$  - базисное решение

**Определение.** Неотрицательное базисное решение СЛУ называется базисным решением канонической задачи ЛП

**Определение** (Вырожденное БР).  $\bar{x}$  - БР КЗЛП называется вырожденным, если число ненулевых компонент меньше ранга матрицы  $A$ , иначе невырожденное

**Лемма 2.1.** Если  $x$  и  $x'$  - Б.Р. КЗЛП,  $x \neq x'$ , то

$$J(x) \neq J(x'), J(x) \subset J(x'), J(x) \supset J(x'),$$

где  $J(x) = \{j | x_j \neq 0, j = 1 \dots n\}$

**Теорема 2.3** (О конечности множества базисных решений). Число базисных решений КЗЛП конечно

**Теорема 2.4** (О существовании оптимальных БР). Если КЗЛП разрешима, то существует ее оптимальное БР

### 2.3 Симплекс-метод

Рассмотрим КЗЛП.

### 2.3.1 Симплекс-метод для приведенной ЗЛП

**Определение** (Система с базисом). СЛАУ - СЛАУ с базисом, если в каждом уравнении имеется переменная с коэффициентом +1, отсутствующая в других уравнениях. Такие переменные будем называть базисными, остальные не базисными

**Определение** (ПЗЛП). КЗЛП называется приведенной, если

1. СЛАУ  $Ax = B$  является системой с базисом
2. Целевая функция выражена через небазисные переменные

**Определение** (Прямо допустимая симплексная таблица). СТ называется прямо допустимой, если  $a_{i0} \geq 0, i = 1, \dots, m$  (вшки)

**Определение** (Двойственно допустимая симплексная таблица). СТ называется двойственно допустимой, если  $a_{0j} \geq 0, j = 1, \dots, n + m$  (сшки)

**Теорема 2.5.** Если симплекс-таблица является прямо допустимой и  $a_{0j} \geq 0, j = 1 \dots, n + m$ , то соответствующее базисное решение является оптимальным

**Теорема 2.6.** Если в симплекс-таблице существует  $a_{0q} < 0, a_{iq} \leq 0, \forall i = 1 \dots, m$ , то задача неразрешима, потому что  $f$  неограничена на множестве допустимых решений

**Теорема 2.7.** Если ведущая строка выбирается из условия минимума ключевого отношения, то следующая симплексная таблица будет прямо допустимой

**Теорема 2.8** (Об улучшении базисного решения). Если  $\exists a_{0j} < 0, j = 1 \dots n + m$ , то возможен переход к новой прямо допустимой симплекс таблице, причем  $f(x) \leq f(x')$ , где  $x$  - БР старой таблицы,  $x'$  - БР новой таблицы,  $f(x) = a_{00}$  старой таблицы,  $f(x') = a_{00} - \frac{a_{p0}a_{0q}}{a_{pq}}, a_{p0} = 0$  - вырожденное решение

## 2.4 Каноническая ЗЛП

Метод искусственного базиса

**Определение** (искусственные).  $t_i \geq 0$  - искусственные переменные

**Замечание** (Свойства ВЗЛП). 1. ВЗЛП почти приведенная (нужно выразить  $t_i$ )

2.  $h(x, t) \leq 0 \quad \forall (x, t) \in \tilde{D}$
3.  $\tilde{D} \neq \emptyset$  (например, есть  $(0, \dots, n, b_1, \dots, b_m)$ ,  $n$  нулей)
4. ВЗЛП всегда разрешима

**Теорема 2.9** (О существовании допустимого решения исходной КЗЛП).

$$D \neq \emptyset \Leftrightarrow h^*(x, t) = 0$$

**Теорема 2.10** (О преобразовании КЗЛП в эквивалентную ей приведенную). Если множество допустимых решений исходной КЗЛП непусто, то ПЗЛП, эквивалентная исходной КЗЛП, может быть получена из последней симплекс таблицы - таблицы ВЗЛП

## 2.5 Двойственность в ЛП

**Определение.** Будем говорить, что знаки линейных ограничений ЗЛП согласованы с целевой функцией, если в задаче на max ограничения неравенства имеют вид " $\leq$ " а в задаче на min ограничения на неравенство имеют вид " $\geq$ "

**Определение** (Двойственная задача). Для ЗЛП I двойственной задачей II является ЗЛП вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \Leftrightarrow g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min,$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, l \Leftrightarrow y_i \geq 0, i = 1 \dots l,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = l+1, \dots, m \leftrightarrow y_i \in \mathbb{R}, i = l+1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, i = 1, \dots, p \leftrightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \leq c_j, j = 1, \dots, p$$

$$x_j \in \mathbb{R}, j = p+1, \dots, n \leftrightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \leq c_j, j = p+1, \dots, n$$

Задачу I называют прямой, а II - двойственной. Стрелки соответствуют сопряженным ограничениям

**Теорема 2.11** (Основное неравенство двойственности).

$$\forall x \in D_I, \forall y \in D_{II}, f(x) \leq g(y)$$

## 2.6 Теоремы двойственности

**Лемма 2.2** (основная лемма). Пусть  $\forall x \in D_I \neq \emptyset, f(x) \leq M < +\infty \implies \exists y \in D_{II} g(y) \leq M$

**Теорема 2.12** (Первая теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач разрешима, то разрешима и другая, причем оптимальное значение целевых функций совпадает, т.е.  $f(x^*) = g(y^*)$ , где  $x^*, y^*$  - оптимальные решения задач I, II соответственно

**Теорема 2.13.** Вектор  $x^* \in D_I$  является оптимальным решением задачи I  $\Leftrightarrow \exists y^* \in D_{II}$  т.ч.  $g(y^*) = f(x^*)$

**Определение** (Условия дополняющей нежесткости). Будем говорить, что  $x \in D_I, y \in D_{II}$  удовлетворяют УДН, если при подстановке в любую пару сопряженных неравенств хотя бы одно из них обращается в равенство. Это означает, что следующие характеристические произведения обращаются в 0:

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i\right)y_i = 0, i = 1, \dots, m$$

$$x_i\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j\right) = 0, j = 1, \dots, n$$

**Теорема 2.14** (Вторая теорема двойственности).  $x^* \in D_I, y^* \in D_{II}$ . оптимальны в задачах I, II тогда и только тогда, когда они удовлетворяют УДН.

**Теорема 2.15** (Второй критерий оптимальности (следствие)).  $x^* \in D_I$  является оптимальным решением I  $\Leftrightarrow \exists y^* \in D_{II}$  т.ч.  $x^*$  и  $y^*$  удовлетворяют УДН

## 2.7 Критерий разрешимости ЛП

**Определение** (Точная верхняя грань функции).  $M^*$  называется точной верхней гранью функции  $f(x)$  на множестве D, если

1.  $\forall x \in D \quad f(x) \leq M^*$
2.  $\forall M < M^* \quad \exists x \in D \quad f(x) > M$

**Лемма 2.3** (О точной верхней грани функции  $g(y)$  на  $D_{II}$ ).  $M^* < +\infty$  - точная верхняя грань  $f(x)$  на  $D_I$ , тогда  $\forall y \in D_{II} \quad g(y) \geq M^*$

**Теорема 2.16** (Критерий разрешимости). Целевая функция задачи ЛП ограничена сверху (снизу) на непустом множестве допустимых решений тогда и только тогда, когда задача максимизации (минимизации) разрешима

## 2.8 Классификация пар двойственных задач

**Теорема 2.17** (Малая теорема двойственности). Если  $D_I \neq \emptyset, D_{II} \neq \emptyset \implies$  обе задачи точно разрешимы

**Теорема 2.18** (О причинах неразрешимости ЗЛП).  $D_I \neq \emptyset$ , целевая функция неограничена сверху на  $D_I$  тогда и только тогда, когда II неразрешима, так как  $D_{II} = \emptyset$

## Классификация

1.  $D_I \neq \emptyset, D_{II} \neq \emptyset$  обе задачи разрешимы, т.к.  $f(x^*) = g(y^*)$
2.  $D_I \neq \emptyset, D_{II} = \emptyset$  обе неразрешимы, т.к.  $f(x)$  неограничена,  $D_{II} = \emptyset$
3.  $D_I = \emptyset, D_{II} \neq \emptyset$  обе неразрешимы, т.к.  $D_I = \emptyset, g \rightarrow +\infty$  на  $D_{II}$
4.  $D_I = \emptyset, D_{II} = \emptyset$  обе неразрешимы

## 2.9 Экономическая интерпретация двойственной задачи и теорема двойственности

**Экономический смысл двойственной переменной и задачи** Линейные ограничения двойственной задачи связывают задачи всех ресурсов, идущих на производство 1 ед. продукции, с прибылью от продажи этой единицы продукции  $\Rightarrow y_i$  измеряются в ед. стоимости

Т.к.  $y_i$  соответствует ресурсам, то  $y_i$  - некая цена ресурса. Будем называть ее условной ценой (двойственной оценкой на ресурсы).

Для интерпретации двойственной задачи посмотрим на предприятие как **на продавца ресурсов**.

Задача (II) определяет справедливые цены на ресурсы, в которой требуется определить набор оценок всех ресурсов, при котором для каждого вида продукции ресурсов затрачено на производство 1 ед. продукции **не меньше** дохода от ее реализации, при этом суммарная оценка ресурсов будет минимальна

**Теорема 2.19** (1). *Суммарная прибыль от продажи произведенной продукции = суммарной оценке всех ресурсов*

$y_i^*$  - ценность i-того ресурса для производителя - доход, который может быть получен от 1 единицы использованного i-того ресурса

**Теорема 2.20** (2). • ресурс 1 и 2 расходуется полностью - их называют дефицитными - они соответствуют  $y_i^* \geq 0$

- $x_1^* > 0, x_2^* > 0$ , т.е. продукция произвед.  $\Rightarrow$  расходы ресурсов равны стоимости продажи этих продуктов если стоимость ресурсов, требуемых для производства 1 ед. прод  $>$  прибыль

## 2.10 Анализ на чувствительность модели ЛП

**Определение** (Анализ чувствительности модели ЛП). Анализ чувствительности модели ЛП - исследование влияния изменения входных данных на оптимальное решение

Рассмотрим частную задачу - анализ изменения оптимального решения при изменении запаса только одного ресурса.

$y_i^*$  рассмотрим как потенциальную возможность получить доп. доход.

Рассмотрим три задачи:

$$\begin{cases} (I)f = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ b = (b_1, \dots, b_m) \end{cases}$$
$$\begin{cases} (I')f = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b' \\ x \geq 0 \\ b' = (b_1 + \Delta b_1, \dots, b_m), D_I \subset I' \end{cases}$$
$$\begin{cases} (\bar{I})f = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq \bar{b} \\ x \geq 0 \\ \bar{b} = \alpha b + (1 - \alpha)b', \alpha \in (0, 1) \end{cases}$$

**Определение** (решения, имеющие одинаковую структуру). Будем говорить, что решения  $x \in D_I$  и  $x' \in D_{I'}$  имеют одинаковую структуру, если

1. совпадают по ассортименту, т.е.  $x_j = 0 \Leftrightarrow x_j' = 0, j = 1, \dots, n$

2. имеют одни и те же дефицитные ресурсы, т.е.  $i$ -тое ограничение  $I$  выполняется на равенство тогда и только тогда, когда  $i$ -тое ограничение  $I'$  задачи выполняется на равенство

**Лемма 2.4** (О планах одинаковой структуры). Пусть  $x^*$  - опт. решение  $I$  и  $x' \in D_{I'}$  - решение той же структуры, тогда

1.  $x'$  - опт. решение задачи  $I'$ ;
2. для любого  $\alpha \in (0, 1)$  существует оптимальное решение  $\bar{I}$  имеющее эту же структуру

**Замечание.** Изменять запас ресурса  $P_1$  можно до тех пор, пока в задаче  $I'$  будет существовать оптимальный план той же структуры, что и в  $I$

**Определение** (Малое (допустимое) изменение). Малое (допустимое) изменение ресурса  $P_1$  - такое изменение  $\Delta b_1 = b'_1 - b_1$  для кот в задаче  $I'$  существует оптимальное решение той же структуры, что и оптимальное решение исходной задачи  $I$

В силу леммы, если  $\Delta b_1$  - допустимое изменение ресурса, то и все меньшие изменения также допустимы.

Пусть  $F(b_1, \dots, b_m)$  - макс. доход, который можно получить при запасах ресурсов  $b_i$

**Определение** (3-я теорема двойственности). При допустимом изменении  $i$ -того ресурса приращение целевой функции прямо пропорционально изменению ресурса с коэффициентом пропорциональности, равным  $y_i^*$

$$\Delta_i F = \Delta b_i y_i^*, \Delta_i F = F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + \Delta b_i, \dots, b_m) - F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, \dots, b_m)$$

## 2.11 О конечности симплекс-метода

**Определение** (вырожденная КЗЛП). КЗЛП является вырожденной, если среди ее БР имеются вырожденные.

1. Если КЗЛП не является вырожденной - в процессе работы симплекс-метода  $f(x_1) < \dots < f(x^*)$  (с-метод конечен)
2.  $a_{p0} = 0 \implies f(x) = f(x')$  БР сохраняется, но меняется набор базисных переменных

после некоторого числа итераций возможен возврат к уже встречавшимся ранее наборам базисных переменных - с-м может заиклиться

### Уточняющие правила

1. Правило Данцига - выбирается столбец

$$a_{0q} = \min_{j: a_{0j} < 0} a_{0j}$$

2. правило наибольшего приращения: выбираем такое  $q$ , при котором приращение наибольшее

$$a'_{00} = a_{00} - \frac{a_{0q} a_{p0}}{a_{pq}}$$

3. Правило Бленда

Строка и столбец выбираются в соответствии с обычными правилами выбора, причем каждый раз из возможных выбирается переменная с наименьшим номером

4. Лексикографическое правило выбора ведущей строки

$$\frac{\vec{a}_p}{a_{pq}} = \min_{a_{iq} > 0} \frac{\vec{a}_i}{a_{iq}}$$

## 2.12 Двойственный симплекс-метод

мне по. чисто по.

## 3 Целочисленное линейное программирование

### 3.1 Задачи ЦЛП

**Определение** (Задача ЦЛП).

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$c_j, b_i, a_{ij} \in \mathbb{Z}$  или  $\mathbb{Q}$

**Определение** (Релаксационная задача). (1-3) - задача ЛП, которая называется соответствующей непрерывной или релаксационной задачей.

$D$  - область допустимых решений (1 - 3), а  $D_Z$  - множество всех целочисленных точек области  $D$ .

### 3.2 Метод отсечения

шаг 1 Решается задача ЛП (1-3). Если она не имеет решения, то и задача ЦЛП не имеет решения. **СТОП**

шаг 2 Пусть  $x^0 \in D$  - оптимальное решение задачи ЛП. Если оно из  $D_Z$  - то оно оптимальное решение задачи ЦЛП. **СТОП**

шаг 3 Строится дополнительно линейное ограничение (отсечение)

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \geq \beta$$

Отсечение добавляется к задаче ЛП. После этого осуществляется возврат на шаг 1, на котором решается задача ЛП.

**Определение** (Правильное отсечение). Доп. ограничение - правильное, если

1. оно отсекает часть области  $D$ , содержащее нецелочисленное оптимальное решение  $x^0$  текущей задачи ЛП.
2. В отсекаемой части области не должно быть ни одного допустимого решения задачи ЦЛП (ограничение сохраняет все допустимые целочисленные решения)

1.  $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^0 < \beta$

2.  $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \geq \beta \quad \forall x \in D_Z$

**Отсечение Гомори** Имеем оптимальную с-таблицу  $a_{ij}, i=0, \dots, m, j=0, \dots, n$

Рассмотрим  $a_{l0} \notin \mathbb{Z}$ . 1 выбираем с наибольшей дробной частью по правилу "первая сверху" ( $l \in \{0, \dots, m\}$ )

Дробная часть:  $\{\frac{5}{4}\} = \frac{1}{4}$ ,  $\{-\frac{5}{4}\} = \frac{3}{4}$

Дополнительное ограничение:

$$\sum_{j \in Nb} \{a_{lj}\} x_j \leq \{a_{l0}\}$$

Приводится к канон. виду и добавляется в ограничение

**Теорема 3.1.** Отсечение Гомори является правильным.

### Первый алгоритм Гомори

1. Все ЗЛП решаются ЛДСМ (кроме, быть может, самой первой)
2. Специальное правило выбора производящей строки - "первая сверху"
3. Отсечение Гомори добавляется снизу к симплекс-таблице, причем таблица имеет размерность  $(n + m + 2) \times (n - 1)$

Применяем ЛДСМ, выбирая ведущей строку отсечения s1, после выполнения итерации строка s1 становится тривиальной - можно удалить => размер таблицы не растет

**Теорема 3.2.**  $D_Z \neq \emptyset$  или  $f$  ограничена снизу на  $D$ , то первый алгоритм Гомори конечен.

### 3.3 Метод ветвей и границ (МВ и Г)

МВ и Г используется для решения различных классов оптимизационных задач, в основном для задач дискретной оптимизации (в которых  $D$  конечно или счетно).

Алгоритмы ветвей и границ основаны на последовательном разбиении допустимого множества решений на подмножества (ветвление) и вычислении оценок значений целевой функции на них (вычислении границ), позволяющий отбрасывать подмножества не содержащие оптимального решения, что может существенно сократить перебор.

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \max \\ x \in D \end{cases}$$

**Определение** (Верхняя оценка целевой функции). Пусть  $\bar{D} \subset D \Rightarrow \phi(\bar{D})$  - верхняя оценка целевой функции  $f(x)$  на  $\bar{D}$ , если

$$f(x) \leq \phi(\bar{D}) \quad \forall x \in \bar{D}$$

Алгоритм Лэнд и Дойг

## 4 Выпуклое программирование

### 4.1 Выпуклое множество и выпуклая функция

**Определение** (Выпуклое множество). Множество называется выпуклым, если вместе с двумя его точками оно содержит отрезок, их соединяющий, или

$$\forall x^1, x^2 \in D \quad \forall \lambda \in (0, 1) \quad x^* = (1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2 \in D$$

**Определение** (Выпуклая функция).

**Утверждение.** 1. Пересечение выпуклых множеств выпукло.

2. Коническая комбинация выпуклых функций выпуклая.

**Теорема 4.1.** Локальный минимум выпуклой функции на выпуклом множестве совпадает с глобальным минимумом