Содержание

1 Интегралы, зависящие от параметра

1.1 Интегралы, зависящие от параметра. Принцип равномерной сходимости

$\sqsupset f(x,y) : [a,b] \times Y$

Для $\forall y \in Y f_y(x) = f(x,y) - \sqsupset$ она $\in R([a,b])$ (интегрируема)

$\implies \forall \alpha$ и $\beta \in [a,b]$ определена функция $F(y,\alpha,\beta) = \int_a^b f_y(x)dx = \int_a^b f(x,y)dx$

$F(y,\alpha,\beta)$ - функция, заданная интегралом, зависящим от параметра

$[F(y,a,b)$ - частный случай функции]

Определение. $X \times Y \subset \mathbb{R}^2, f(x,y)$ определена на $X \times Y$, пусть y_0 - предельная точка Y

1. пусть $\forall x \in X \quad \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) := \phi(x)$
2. пусть $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon)$ такая что $|y - y_0| < \delta |f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon$ для $\forall x \implies$ тогда говорят, что $f(x,y)$ равномерно сходится к $\phi(x)$

Теорема 1.1 (Свойства равномерной сходимости)**.** *$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, y_0$ - предельная точка Y*

1. *$f(x,y)$ равномерно на X сходится к $\phi(x)$ тогда и только тогда, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) : \forall x \in X \forall y', y'' \in Y$ $|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ [Критерий Коши]*
2. *$f(x,y)$ равномерно по X стремится к $\phi(x)$ тогда и только тогда, если для $\forall \{y_n\}$ так что $y_n \longrightarrow y_0$ - последовательность $\{f(x,y_n)\}$ равномерно сходится к $\phi(x)$ [сходимость по Гейне]*
3. *Если при $\forall y$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x (интегрируема) и $f(x,y)$ равномерно сходится к $\phi(x)$, то $\phi(x)$ - непрерывна и интегрируема*
4. *$\sqsupset x_0, y_0$ предельные точки X и Y, $f(x,y)$ равномерно по x сходится к $\phi(x)$,*
   $\sqsupset \forall y \in Y \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) =: \psi(y)$, тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) [= \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)]$

Доказательство.

1. $\triangleleft \Rightarrow \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) =: \phi(y)$

   $|f(x,y') - f(x,y'')| = |f(x,y') - \phi(x) - f(x,y'') + \phi(x)| \le |f(x,y') - \phi(x)| + |f(x,y'') - \phi(x)|$

   $\Leftarrow x \in X |f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ при $\begin{matrix} |y_0 - y'| < \delta \\ |y_0 - y''| < \delta \end{matrix}$ $\Leftarrow$ при $\forall x \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) =: \phi(x)$

   $|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$, $y'' \to y_0$

   $|f(x,y') - \phi(x)| \le \epsilon$,$f(x,y) \rightrightarrows \phi(x)$

2. Необходимость очевидна

   Достаточность: $\{y_n\} \to y_0$

   $\{f(x,y_n)\} \to \phi(x)$, пусть $|y_0 - y_n| < \delta = \frac{1}{n} \implies \quad y_n \ \to y_0$

   и $|f(x,y_n) - \phi(x)| > \epsilon$; $f(x,y_n) \nrightarrow \phi(x)$ противоречие

3. $\sqsupset \{y_n\} \to y_0, f_n(x) = f(x,y_n)$

   $f_n(x)$ равномерно сходится к $\phi(x)$ по 2

   Далее $\phi(x)$ равномерный предел хороших функий $\implies \phi(x)$ хорошая

   Попа дробнее... (для последовательности функций от одной переменной)

   $|s(x_0 + h) - s(x_0)| = |s(x_0 + h) + s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) - s_n(x_0 + h) + s_n(x_0) - s(x_0)|$

   $\le |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|$

   Каждое из этих слагаемых меньше $\epsilon/3$(среднее по причине непрерывности $s_n(x)$, остальные по причине равномерной сходимости)

4. $f(x,y) \rightrightarrows \phi(x), \sqsupset\epsilon > 0$, выберем $\delta > 0$ такое что:
   $|y_0 - y'| < \delta$ и $|y_0 - y''| < \delta \implies$
   $|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ по к. Коши
   $x \to x_0 : |\psi(y') - \psi(y'')| \leq \epsilon \implies$
   для $\psi(y)$ верен критерий Коши $\implies$
   $\exists \lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) = A = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$
   $|f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon, |\psi(y) - A| < \epsilon$ если $|y - y_0| < \delta$
   $|\phi(x) - A| \leq |\phi(x) - f(x,y)|_{\leq\epsilon} + |f(x,y) - \psi(y)|_{<\epsilon,\text{т.к дельты}} + |\psi(y) - A|_{\leq\epsilon} \leq 3\epsilon$
   при $x \to x_0 \implies \lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = A$

▶

1.2 Теорема о коммутировании двух предельных переходов. Предельный переход под знаком интеграла

$f(x,y) : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}, y_0$ - предельная точка Y и $f_y(x) = f(x,y)$ - интегрируема на $[a,b]$
$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Теорема 1.2 (О предельном переходе). *Если кроме того, что $f(x,y)$ равномерно на $[a,b]$ стремится к $\phi(x)$ при $y \to y_0$, то $\lim\limits_{y \to y_0} F(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)dx$*

Доказательство. $\lhd\phi(x)$ - равномерный предел, непрерывен
$f_y(x) \implies \phi(x)$ - интегрируема, $\sqsupset\epsilon > 0 \quad \delta(\epsilon) > 0$ выбрано из определения равномерной сходимости
$|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \phi(x)dx| = |\int_a^b (f(x,y) - \phi(x))dx| \leq \int_a^b |f(x,y) - \phi(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$ если $|y - y_0| < \epsilon$
$\lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \phi(x)dx$ ▶

1.3 Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра

Теорема 1.3 (Непрерывность). *$f(x,y)$–непрерывна, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R} \implies$
$f(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на $[c,d]$*

Доказательство. $\lhd[a,b] \times [c,d]$ компакт $\implies f(x,y)$ равномерно непрерывна на компакте
$\forall\epsilon > 0 : \begin{matrix} |x - x'| < \delta \\ |y - y'| < \delta \end{matrix} \implies |f(x,y) - f(x',y')| < \epsilon$
$x' = x, y' = y_0$
$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \epsilon$ при $|y - y_0| < \delta(\epsilon)$
$f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0) = \phi(x)$ равномерный предел не зависит от x
по теореме о предельном переходе:
$\lim\limits_{y \to y_0} F(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \phi(x)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx = F(y_0) \implies F$ непрерывна в $y_0 \in [c,d] \implies F$ непрерывна на $[c,d]$ ▶

1.4 Дифференцирование под знаком интеграла. Правило Лейбница

Теорема 1.4 (О дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра). *$f(x,y)$ - определена в $[a,b] \times [c,d]$ при $\forall y \in [c,d]$ функция $f_y(x) = f(x,y)$ непрерывна по x, $\sqsupset f'_y(x,y)\exists$ и непрерывна в прямоугольнике, тогда
$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ и $F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$*

Доказательство. $\lhd$ в силу непрерывности $f(x,y)$ по x, определена $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$
$y_0 \in [c,d], F(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx$
$F(y_0 + \triangle) = \int_a^b f(x, y_0 + \triangle)dx$
$\frac{F(y_0+\triangle) - F(y_0)}{\triangle} = \int_a^b \frac{f(x,y_0+\triangle) - f(x,y_0)}{\triangle}dx$
По теореме Лагранжа, $\exists\theta \in (0,1)$ т.ч
$\frac{f(x,y_0+\triangle) - f(x,y_0)}{\triangle} = f'_y(x, y_0 + \theta\triangle)$
т.к F непрерывна $\implies$ равномерно непрерывна $\implies$ для $\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \ \begin{matrix} |x' - x''| < \delta \\ |y' - y''| < \delta \end{matrix} \implies |f'_y(x',y') - f'_y(x'',y'')|$

$x' = x'' = x, y' = y_0 + \triangle\theta, y'' = y_0$,если $\triangle < \delta$
$|\frac{f(x,y_0+\triangle)-f(x,y_0)}{\triangle} - f'_y(x,y_0)| = |f'_y(x, y_0+\theta\triangle) - f'_y(x,y_0)| < \epsilon$ т.к $\delta(\epsilon)$
неравенство не зависит от точек, т.е
$\frac{f(x,y_0+\triangle)-f(x,y_0)}{\triangle} \rightrightarrows f'_y(x,y_0)$ равномерно по x
В силу теоремы о предельном переходе, получаем что $\int_a^b \frac{f(x,y_0+\triangle)-f(x,y_0)}{\triangle}dx \to \int_a^b f'_y(x,y_0)dx$
$\frac{F(y_0+\triangle)-F(y_0))}{\triangle} \to F'_y(y_0)$ ▶

1.5 Интегрирование под знаком интеграла

Теорема 1.5 (О интегрируемости F(y)). $\exists f(x,y)$ *непрерывна в* $[a,b]x[c,d]$, *тогда имеет место равенство* $\int_c^d(\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx$

Доказательство. $\triangleleft \exists \eta \in [c,d]$, покажем, что $\int_c^\eta(\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b(\int_c^\eta f(x,y)dy)dx$
$\int_c^\eta F(y)dy = \mathcal{F}(\eta) - \mathcal{F}(c), \mathcal{F}' = F$
Производная левой части по $\eta = F(\eta) = \int_a^b f(x,\eta)dx$
$\phi(\eta) := \int_c^\eta f(x,y)dy$ непрерывна по x
$\phi(x,\eta) \to \phi'_\eta(x,\eta)$
$\exists \Phi(x,\eta)' = \phi(x,\eta), \Phi'(x,\eta) = f$
$\phi(x,\eta) = \Phi(x,\eta) - \Phi(x,c)$
$\phi'_\eta = \Phi'_\eta = f \quad \phi'_\eta(x,\eta) = f(x,\eta)$
По предыдущей теореме $(\int_a^b \phi(x,\eta)dx)'_\eta = \int_a^b \phi'_\eta(x,\eta)dx = \int_a^b f(x,\eta)dx = F(\eta) \implies$ левая и правая часть могут отличаться лишь на const, но при $\eta = c$ обе части равны 0 $\implies C = 0$ ▶

1.6 Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменными пределами интегрирования

Теорема 1.6. $\exists f(x,y)$ *определена и непрерывна в прямоугольнике* $[a,b]\times[c,d]$
$x = \alpha(y); x = \beta(y)$ *непрерывны и не выходят за пределы прямоугольника*
Тогда $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ *непрерывен*

Доказательство. $\triangleleft y_0 \in [c,d]$
$F(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx$
т.к $\beta(y_0), \alpha(y_0) = C$, то
$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx \overset{\text{def}}{=} \widetilde{F}(y) \to \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx = \widetilde{F}(y_0)$
$|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx| \le \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} |f(x,y)|dx \le M|\beta(y) - \beta(y_0)| \to 0$, где $M \le |f(x,y)|$, при $y \to y_0$
при $y \to y_0 \quad F(y) \to \widetilde{F}(y)$
$F(y) \to \widetilde{F}(y) \to \widetilde{F}(y_0) = F(y_0)$ ▶

Теорема 1.7. $\exists f(x,y)$ *определена в* $[a,b]\times[c,d]$ *имеет в ней непрерывную производную* $f'_y(x,y)$
$\alpha'(y)$ *и* $\beta'(y)$ *- непрерывны, тогда* $F'_y(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y)$

Доказательство. $F(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx$
$(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx)'_y = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y)dx$ т.к пределы постоянные
$\frac{\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - 0}{y-y_0} = \frac{f(\widetilde{x},y)(\beta(y)-\beta(y_0))}{y-y_0}[\widetilde{x}$ между $\beta(y)$ и $\beta(y_0)]$
при $y \to y_0 \frac{\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx}{y-y_0} \to f(\beta(y_0),y_0)\beta'(y_0)$, т.е
$(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx)'_y = f(\beta(y),y)\beta'(y)$, аналогично со вторым интегралом ▶

1.7 Равномерная сходимость интегралов. Достаточные признаки равномерной сходимости

$\int_a^\omega F(x)dx$ - несобственный, если $\omega = \pm\infty$ или $f(x)$ не ограничена в окрестности ω
$\exists f(x,y)$ определена на множестве $[a,\omega)\times Y$
Для всех $y \in Y$ функция $f_y(x) = f(x,y)$ несобственно интегрируема на $[a,\omega)$, тогда $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx = \lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x,y)$

Определение. $f(b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$, тогда сходимость F(y) равносильна существованию предела $\lim\limits_{b\to\omega} F(b,y) = F(y) = F(\omega, y)$

Определение. F(y) называется равномерно сходящейся относительно y на Y, если $\forall\epsilon \quad \exists\delta(\epsilon) : \forall y \in Y \quad \forall b \in (a,\omega)|b-\omega| < \delta \implies |F(b,y) - F(y)| < \epsilon$

$F(b,y) \rightrightarrows_{b\to\omega} F(y)$

Замечание. $\sqsupset - \{b_n\}$ - последовательность сходится к ω согласно свойствам равномерной сходимости

$F(b,y) \rightrightarrows F(y) \leftrightarrow F(b_n,y) \rightrightarrows F(y)$

$a_n y \stackrel{\text{def}}{=} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x,y)dx, b_1 = a, b_j \geq a$

Тогда $F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y)$

Равномерная сходимость F(y) равносильна равномерной сходимости ряда

Теорема 1.8 (Признаки равномерной сходимости интеграла).

1. *(Вейерштрасса) $f(x,y)$ определена на $[a,\omega) \times Y, \omega$ - особая точка f(x,y) и f(x,y) интегрируема на $[a,b] \subset [a,\omega)$ Если $\exists\phi(x)|f(x,y)| \leq \phi(x) \quad \forall x \in [a,\omega)\forall y \in Y$ и $\int_a^\omega \phi(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x,y)dx = F(y)$*

2. *(Дирихле) $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx, g(x,y)$ монотонно по x -> ω равномерно по y стремится к 0 и для $\forall$ отрезка $[a,b] \subset [a,\omega)$*

   $|\int_a^b f(x,y)dx| \leq L$, тогда F(y) сходится равномерно

3. *(Абель) $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$*

   Если $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно $g(x,y)$ монотонно по x равномерно по y сходится к своему пределу

Доказательство.

1. очевидно Для F(y) используем критерий Коши

2. $\int_{b'}^{b''} f(x,y)g(x,y)dx = g(b',y)\int_{b'}^{\xi} f(x,y)dx + g(b'',y)\int_{\xi}^{b''} f(x,y)dx, \xi \in (b',b'')$

   $g(b,y) \to 0$ равномерно по y $\implies \exists B$ такое что $\forall b', b'' > B$

   $|g(b',y)| < \frac{\epsilon}{2L} \quad |g(b'',y)| < \frac{\epsilon}{2L} \implies F(y)$ сходится равномерно

3. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно $\forall\epsilon > 0\exists\delta \quad \forall b', b'' > B| \int_{b'}^{b''} f(x,y)dx|\widetilde{\epsilon}$

   т.к $g(x,y)$ равномерно сходится к G(y)

   $|g(x,y)| \leq M$ при x близком к ω

   $\widetilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2M}, |\int_{b'}^{b''} f(x,y)g(x,y)dx| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon \implies F(y)$ сходится равномерно

▶

1.8 Предельный переход в несобственном интеграле, зависящем от параметра

Теорема 1.9 (О предельном переходе). *$\sqsupset f(x,y)$ определена на $[a,\omega) \times Y$ для $\forall y \in Y$, интегрируема на $[a,b] \subset [a,\omega]$ равномерно относительно y сходится к функции $\phi(x)$ при $y \to y_0$ если $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$ $\lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \phi(x)dx = \int_a^\omega \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx$*

Доказательство. $F(b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$ это несобственный интеграл и для него верна теорема о о предельном переходе

$\lim_{y\to y_0} F(b,y) = \int_a^b \phi(x)\, dx$

$\lim_{b\to\omega} F(b,y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ - равномерно

$F(b,y)$ - для этой функции верны условии о перемене предельных переходов $\implies$

$\lim_{y\to y_0} \lim_{b\to\omega} \int_a^b f(x,y)dx = lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx$ ▶

Следствие: Если $f(x,y)$ монотонно по y $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \phi(x)$ - непрерывны, тогда

$\int_a^\omega \phi(x)dx \rightrightarrows \int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно

$\lim_{y\to y_0} F(y) = \int_a^\omega \phi(x)dx$

Доказательство. $f(x,y) \to \phi(x) \quad y \to y_0 \quad \forall\epsilon > 0\exists\delta : |y - y_0| < \delta \implies |f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon$

$\sqsupset f(x,y)$ возрастает по y, тогда $F(b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$ возрастает по y

но $f(x,y) \leq \phi(x) \implies F(b,y) \leq \int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^\omega \phi(x)dx \implies \lim_{b\to\omega} F(b,y) = \int_a^\omega f(x,y)dy$ - сходится

Равномерность по Вейерштрассу ▶

1.9 Дифференцирование по параметру несобственного интеграла

1.10 Интегрирование по параметру несобственного интеграла

2 Кратные интегралы

2.1 Двоичные разбиения. Двоичные интервалы, полуинтревалы, кубы. Свойства двоичных инервалов, кубов

2.2 Ступенчатые функции. Интеграл от ступенчатой функции (естественное и индуктивное определения). Теорема о совпадении определений

2.3 Свойства интеграла от ступенчатой функции (линейность интеграла, положительность, оценка интеграла)

2.4 Теорема о пределе интегралов убывающей последовательности функций, поточечно сходящейся к нулю

2.5 Теорема о пределе интегралов убывающей последовательности ступенчатых функций, поточечно сходящейся к нулю

2.6 Системы с интегрированием. Основной пример. Свойства систем с интегрирование

2.7 L1 норма. Множество L1*(Σ). L1-норма как интеграл от модуля функции

2.8 Свойства L1 нормы ("линейность норма функции равной нулю почти всюду и т.д.)

2.9 Субаддитивность L1-нормы

2.10 Сходимость в смысле L1

2.11 Определение понятие интеграла и интегрируемой функции

2.12 Свойства интеграла и интегрируемых функций

2.13 Множества меры ноль. Свойства функций совпадающих почти всюду

2.14 Нормально сходящиеся ряды. Теорема о нормально сходящихся рядах

2.15 Теоремы Леви для функциональных рядов и последовательностей

2.16 Огибающие для последовательности интегрируемых функций. Нижний и верхний предел последовательности

2.17 Теорема Фату о предельном переходе. Следствие из теоермы Фату

2.18 Теорема Лебега о предельном переходе

2.19 Лемма о приближении стпенчатой функции с помощью непрерывных финитных

2.20 Теорема о приближении интегрируемой функции с помощью непрерывных финитных

2.21 Измеримые функции. Свойства пространства измеримых функций. Измеримые множества

2.22 Теорема об интегрируемости измеримой функции

2.23 Теорема об измеримости предела измеримых функций

2.24 Теорема об интегрируемости предела возрастающей последовательности положительных измеримых функций

2.25 Обобщенно измеримые функции. Измеримые множества, мера множества. Теорема об измеримости объединения и пересечения измеримых множеств

2.26 Счетная аддитивность интеграла и меры