

Содержание

| | |
|--|----------|
| 1 Введение | 1 |
| 2 Линейное программирование | 1 |
| 2.1 Постановка задачи (ЛП), теоремы эквивалентности | 1 |
| 2.2 Каноническая задача ЗЛП. Базисные решения | 2 |
| 2.3 Симплекс-метод | 2 |
| 2.3.1 Симплекс-метод для приведенной ЗЛП | 2 |
| 2.4 Каноническая ЗЛП | 3 |
| 2.5 Двойственность в ЛП | 3 |
| 2.6 Теоремы двойственности | 4 |
| 2.7 Критерий разрешимости ЛП | 4 |
| 2.8 Классификация пар двойственных задач | 4 |
| 2.9 Экономическая интерпретация двойственной задачи и теорема двойственности | 5 |
| 2.10 Анализ на чувствительность модели ЛП | 5 |
| 2.11 О конечности симплекс-метода | 6 |
| 2.12 Двойственный симплекс-метод | 6 |

1 Введение

Определение (Методы оптимизации). Раздел прикладной математики, содержание которого составляет теория и методы решения оптимизационных задач

Определение (Оптимизационная задача). Задача выбора наилучшего варианта (в некотором смысле) из имеющихся

Определение (Задача оптимизации). $\begin{cases} f(x) \rightarrow \min(\max) \\ x \in D \end{cases}$

D - множество допустимых решений, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Определение (Задача МП). $\begin{cases} (1) f(x) \rightarrow \min(\max)[extr](opt) \\ (2) g_i(x) \neq 0, i = 1, \dots, m - \text{ограничения} \\ (3) x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Определение (Допустимое решение). $x \in \mathbb{R}^n$, удовл (2), называется допустимым решением задачи.

Определение (Оптимальное решение). Допустимое решение $x^* \in D$ задачи 1 - 3 называется оптимальным решением, если $f(x) \leq f(x^*) \forall x \in D$ в случае задачи максимизации и $f(x) \geq f(x^*) \forall x \in D$ в случае задачи минимизации

Глобальный оптимум - x^*

Определение (Локальный оптимум). Допустимое решение $\tilde{x} \in D$ задачи 1 - 3 называется локальным оптимумом, если $f(x) \leq f(\tilde{x})$ для всех x из некоторой окрестности \tilde{x} в случае задачи максимизации и $f(x) \geq f(\tilde{x})$ для всех x из некоторой окрестности \tilde{x} в случае задачи минимизации

Определение (Разрешимая/неразрешимая). Задача 1 - 3, которая обладает оптимальным решением, называется разрешимой, иначе неразрешимой

2 Линейное программирование

2.1 Постановка задачи (ЛП), теоремы эквивалентности

Определение (Общая задача ЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \# b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ - вектор переменных

Матричная запись:

$$\begin{cases} f(x) = (c, x) \rightarrow \max(\min) \\ Ax \# b \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение (Стандартная (симметрическая) форма). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$

Определение (КЗЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$

Определение (Основная задача ЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \end{cases}$

Определение (Эквивалентные ЗЛП (ЗМП)). Две задачи ЛП P_1, P_2 называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению задачи P_1 соответствует некоторое допустимое решение задачи P_2 и наоборот, причем оптимальному решению одной задачи соответствует оптимальное решение другой задачи.

Теорема 2.1 (Первая теорема эквивалентности). *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей каноническая ЗЛП.*

Теорема 2.2 (Вторая теорема эквивалентности). *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей симметрическая ЗЛП.*

2.2 Каноническая задача ЗЛП. Базисные решения

Определение (Базисное решение). Пусть \bar{x} - решение $Ax = B$. Тогда вектор \bar{x} называется базисным решением СЛАУ, если система вектор-столбцов матрицы A , соответствующая ненулевым компонентам вектора \bar{x} , ЛНЗ

Замечание. Если система однородная, то $x = \bar{0}$ - базисное решение

Определение. Неотрицательное базисное решение СЛУ называется базисным решением канонической задачи ЛП

Определение (Вырожденное БР). \bar{x} - БР КЗЛП называется вырожденным, если число ненулевых компонент меньше ранга матрицы A , иначе невырожденное

Лемма 2.1. *Если x и x' - Б.Р. КЗЛП, $x \neq x'$, то*

$$J(x) \neq J(x'), J(x) \subset J(x'), J(x) \supset J(x'),$$

где $J(x) = \{j | x_j \neq 0, j = 1 \dots n\}$

Теорема 2.3 (О конечности множества базисных решений). *Число базисных решений КЗЛП конечно*

Теорема 2.4 (О существовании оптимальных БР). *Если КЗЛП разрешима, то существует ее оптимальное БР*

2.3 Симплекс-метод

Рассмотрим КЗЛП.

2.3.1 Симплекс-метод для приведенной ЗЛП

Определение (Система с базисом). СЛАУ - СЛАУ с базисом, если в каждом уравнении имеется переменная с коэффициентом +1, отсутствующая в других уравнениях. Такие переменные будем называть базисными, остальные не базисными

Определение (ПЗЛП). КЗЛП называется приведенной, если

1. СЛАУ $Ax = B$ является системой с базисом
2. Целевая функция выражена через небазисные переменные

Определение (Прямо допустимая симплексная таблица). СТ называется прямо допустимой, если $a_{i0} \geq 0, i = 1, \dots, m$ (вшки)

Определение (Двойственно допустимая симплексная таблица). СТ называется двойственно допустимой, если $a_{0j} \geq 0, j = 1, \dots, n + m$ (сшки)

Теорема 2.5. Если симплекс-таблица является прямо допустимой и $a_{0j} \geq 0, j = 1 \dots, n + m$, то соответствующее базисное решение является оптимальным

Теорема 2.6. Если в симплекс-таблице существует $a_{0q} < 0, a_{iq} \leq 0, \forall i = 1 \dots, m$, то задача неразрешима, потому что f неограничена на множестве допустимых решений

Теорема 2.7. Если ведущая строка выбирается из условия минимума ключевого отношения, то следующая симплексная таблица будет прямо допустимой

Теорема 2.8 (Об улучшении базисного решения). Если $\exists a_{0j} < 0, j = 1 \dots n + m$, то возможен переход к новой прямо допустимой симплекс таблице, причем $f(x) \leq f(x')$, где x - БР старой таблицы, x' - БР новой таблицы, $f(x) = a_{00}$ старой таблицы, $f(x') = a_{00} - \frac{a_{p0}a_{0q}}{a_{pq}}, a_{p0} = 0$ - вырожденное решение

2.4 Каноническая ЗЛП

Метод искусственного базиса

Определение (искусственные). $t_i \geq 0$ - искусственные переменные

Замечание (Свойства ВЗЛП). 1. ВЗЛП почти приведенная (нужно выразить t_i)

$$2. h(x, t) \leq 0 \quad \forall (x, t) \in \tilde{D}$$

$$3. \tilde{D} \neq \emptyset \text{ (например, есть } (0, \dots, n, b_1, \dots, b_m), \text{ и нулей)}$$

$$4. \text{ ВЗЛП всегда разрешима}$$

Теорема 2.9 (О существовании допустимого решения исходной КЗЛП).

$$D \neq \emptyset \Leftrightarrow h^*(x, t) = 0$$

Теорема 2.10 (О преобразовании КЗЛП в эквивалентную ей приведенную). Если множество допустимых решений исходной КЗЛП непусто, то ПЗЛП, эквивалентная исходной КЗЛП, может быть получена из последней симплекс таблицы - таблицы ВЗЛП

2.5 Двойственность в ЛП

Определение. Будем говорить, что знаки линейных ограничений ЗЛП согласованы с целевой функцией, если в задаче на max ограничения неравенства имеют вид " \leq " а в задаче на min ограничения на неравенство имеют вид " \geq "

Определение (Двойственная задача). Для ЗЛП I двойственной задачей II является ЗЛП вида:

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max & \Leftrightarrow g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq b_i, i = 1, \dots, l \Leftrightarrow y_i \geq 0, i = 1 \dots l, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & = b_i, i = l + 1, \dots, m \Leftrightarrow y_i \in \mathbb{R}, i = l + 1, \dots, m, \\ x_j & \geq 0, j = 1, \dots, p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j = 1, \dots, p \\ x_j & \in \mathbb{R}, j = p + 1, \dots, n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j = p + 1, \dots, n \end{aligned}$$

Задачу I называют прямой, а II - двойственной. Стрелки соответствуют сопряженным ограничениям

Теорема 2.11 (Основное неравенство двойственности).

$$\forall x \in D_I, \forall y \in D_{II}, f(x) \leq g(y)$$

2.6 Теоремы двойственности

Лемма 2.2 (основная лемма). Пусть $\forall x \in D_I \neq \emptyset, f(x) \leq M < +\infty \implies \exists y \in D_{II} g(y) \leq M$

Теорема 2.12 (Первая теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач разрешима, то разрешима и другая, причем оптимальное значение целевых функций совпадает, т.е. $f(x^*) = g(y^*)$, где x^*, y^* - оптимальные решения задач I, II соответственно

Теорема 2.13. Вектор $x^* \in D_I$ является оптимальным решением задачи I $\Leftrightarrow \exists y^* \in D_{II}$ т.ч. $g(y^*) = f(x^*)$

Определение (Условия дополняющей нежесткости). Будем говорить, что $x \in D_I, y \in D_{II}$ удовлетворяют УДН, если при подстановке в любую пару сопряженных неравенств хотя бы одно из них обращается в равенство. Это означает, что следующие характеристические произведения обращаются в 0:

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i\right)y_i = 0, i = 1, \dots, m$$
$$x_i\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j - c_j\right) = 0, j = 1, \dots, n$$

Теорема 2.14 (Вторая теорема двойственности). $x^* \in D_I, y^* \in D_{II}$. оптимальны в задачах I, II тогда и только тогда, когда они удовлетворяют УДН.

Теорема 2.15 (Второй критерий оптимальности (следствие)). $x^* \in D_I$ является оптимальным решением I $\Leftrightarrow \exists y^* \in D_{II}$ т.ч. x^* и y^* удовлетворяют УДН

2.7 Критерий разрешимости ЛП

Определение (Точная верхняя грань функции). M^* называется точной верхней гранью функции $f(x)$ на множестве D, если

1. $\forall x \in D \quad f(x) \leq M^*$
2. $\forall M < M^* \quad \exists x \in D \quad f(x) > M$

Лемма 2.3 (О точной верхней грани функции $g(y)$ на D_{II}). $M^* < +\infty$ - точная верхняя грань $f(x)$ на D_I , тогда $\forall y \in D_{II} \quad g(y) \geq M^*$

Теорема 2.16 (Критерий разрешимости). Целевая функция задачи ЛП ограничена сверху (снизу) на непустом множестве допустимых решений тогда и только тогда, когда задача максимизации (минимизации) разрешима

2.8 Классификация пар двойственных задач

Теорема 2.17 (Малая теорема двойственности). Если $D_I \neq \emptyset, D_{II} \neq \emptyset \implies$ обе задачи точно разрешимы

Теорема 2.18 (О причинах неразрешимости ЗЛП). $D_I \neq \emptyset$, целевая функция неограничена сверху на D_I тогда и только тогда, когда II неразрешима, так как $D_{II} = \emptyset$

Классификация

1. $D_I \neq \emptyset, D_{II} \neq \emptyset$ обе задачи разрешимы, т.к. $f(x^*) = g(y^*)$
2. $D_I \neq \emptyset, D_{II} = \emptyset$ обе неразрешимы, т.к. $f(x)$ неограничена, $D_{II} = \emptyset$
3. $D_I = \emptyset, D_{II} \neq \emptyset$ обе неразрешимы, т.к. $D_I = \emptyset, g \rightarrow +\infty$ на D_{II}
4. $D_I = \emptyset, D_{II} = \emptyset$ обе неразрешимы

2.9 Экономическая интерпретация двойственной задачи и теорема двойственности

Экономический смысл двойственной переменной и задачи Линейные ограничения двойственной задачи связывают задачи всех ресурсов, идущих на производство 1 ед. продукции, с прибылью от продажи этой единицы продукции $\Rightarrow y_i$ измеряются в ед. стоимости

Т.к y_i соответствует ресурсам, то y_i - некая цена ресурса. Будем называть ее условной ценой (двойственной оценкой на ресурсы).

Для интерпретации двойственной задачи посмотрим на предприятие как **на продавца ресурсов**.

Задача (II) определяет справедливые цены на ресурсы, в которой требуется определить набор оценок всех ресурсов, при котором для каждого вида продукции ресурсов затрачено на производство 1 ед. продукции **не меньше** дохода от ее реализации, при этом суммарная оценка ресурсов будет минимальна

Теорема 2.19 (1). *Суммарная прибыль от продажи произведенной продукции = суммарной оценке всех ресурсов*

y_i^* - ценность i-того ресурса для производителя - доход, который может быть получен от 1 единицы использованного i-того ресурса

Теорема 2.20 (2). • ресурс 1 и 2 расходуется полностью - их называют дефицитными - они соответствуют $y_i^* \geq 0$

• $x_1^* > 0, x_2^* > 0$, т.е продукция произвед. \Rightarrow расходы ресурсов равны стоимости продажи этих продуктов если стоимость ресурсов, требуемых для производства 1 ед. прод > прибыль

2.10 Анализ на чувствительность модели ЛП

Определение (Анализ чувствительности модели ЛП). Анализ чувствительности модели ЛП - исследование влияния изменения входных данных на оптимальное решение

Рассмотрим частную задачу - анализ изменения оптимального решения при изменении запаса только одного ресурса.

y_i^* рассмотрим как потенциальную возможность получить доп. доход.

Рассмотрим три задачи:

$$\begin{cases} (I)f = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ b = (b_1, \dots, b_m) \end{cases}$$
$$\begin{cases} (I')f = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b' \\ x \geq 0 \\ b' = (b_1 + \Delta b_1, \dots, b_m), D_I \subset I' \end{cases}$$
$$\begin{cases} (\bar{I})f = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq \bar{b} \\ x \geq 0 \\ \bar{b} = \alpha b + (1 - \alpha)b', \alpha \in (0, 1) \end{cases}$$

Определение (решения, имеющие одинаковую структуру). Будем говорить, что решения $x \in D_I$ и $x' \in D_{I'}$ имеют одинаковую структуру, если

1. совпадают по ассортименту, т.е. $x_j = 0 \Leftrightarrow x'_j = 0, j = 1, \dots, n$
2. имеют одни и те же дефицитные ресурсы, т.е i-тое ограничение I выполняется на равенство тогда и только тогда, когда i-тое ограничение I' задачи выполняется на равенство

Лемма 2.4 (О планах одинаковой структуры). Пусть x^* - опт решение I и $x' \in D_{I'}$ - решение той же структуры, тогда

1. x' - опт решение задачи I';
2. для любого $\alpha \in (0, 1)$ существует оптимальное решение \bar{I} имеющее эту же структуру

Замечание. Изменять запас ресурса P_1 можно до тех пор, пока в задаче Γ будет существовать оптимальный план той же структуры, что и в I

Определение (Малое (допустимое) изменение). Малое (допустимое) изменение ресурса P_1 - такое изменение $\Delta b_1 = b'_1 - b_1$ для кот в задаче Γ существует оптимальное решение той же структуры, что и оптимальное решение исходной задачи I

В силу леммы, если Δb_1 - допустимое изменение ресурса, то и все меньшие изменения также допустимы.

Пусть $F(b_1, \dots, b_m)$ - макс доход, который можно получить при запасах ресурсов b_i

Определение (3-я теорема двойственности). При допустимом изменении i -того ресурса приращение целевой функции прямо пропорционально изменению ресурса с коэффициентом пропорциональности, равным y_i^*

$$\Delta_i F = \Delta b_i y_i^*, \Delta_i F = F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + \Delta b_i, \dots, b_m) - F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, \dots, b_m)$$

2.11 О конечности симплекс-метода

Определение (вырожденная КЗЛП). КЗЛП является вырожденной, если среди ее БР имеются вырожденные.

1. Если КЗЛП не является вырожденной - в процессе работы симплекс-метода $f(x_1) < \dots < f(x^*)$ (с-метод конечен)
2. $a_{p0} = 0 \implies f(x) = f(x')$ БР сохраняется, но меняется набор базисных переменных

после некоторого числа итераций возможен возврат к уже встречавшимся ранее наборам базисных переменных - с-м может заиклиться

Уточняющие правила

1. Правило Данцига - выбирается столбец

$$a_{0q} = \min_{j: a_{0j} < 0} a_{0j}$$

2. правило наибольшего приращения: выбираем такое q , при котором приращение наибольшее

$$a'_{00} = a_{00} - \frac{a_{0q}a_{p0}}{a_{pq}}$$

3. Правило Бленда

Строка и столбец выбираются в соответствии с обычными правилами выбора, причем каждый раз из возможных выбирается переменная с наименьшим номером

4. Лексикографическое правило выбора ведущей строки

$$\frac{\vec{a}_p}{a_{pq}} = \min_{a_{iq} > 0} \frac{\vec{a}_i}{a_{iq}}$$

2.12 Двойственный симплекс-метод

мне по. чисто по.