

# Содержание

<b>1</b>	<b>Вероятностное пространство</b>	<b>1</b>
1.1	Некоторые следствия аксиоматики . . . . .	2
1.1.1	Индикатор . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Условные вероятности и независимость</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Случайные величины</b>	<b>3</b>
3.1	Многомерные законы распределения . . . . .	5
3.2	Независимость случайных величин . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Случайные величины (общий случай)</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Математическое ожидание</b>	<b>7</b>
5.1	Правила для вычисления . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Производящие функции</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Характеристические функции</b>	<b>9</b>

## 1 Вероятностное пространство

**Определение (Алгебра).** Семейство  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Omega$  называется алгеброй, если выполнены след. аксиомы:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A} \implies \bar{A} \in \mathcal{A}$
3. (аддитивность)  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$

**Определение ( $\sigma$ -алгебра).** Алгебра называется  $\sigma$ -алгеброй, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

**Определение (мера).**  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0; \infty)$  - мера, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j : \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{счетная аддитивность}$$

Мера конечная, если  $\mu(\Omega) < \infty$   
 Мера вероятностная, если  $\mu(\Omega) = 1$

**Определение (Вероятностное пространство).** Тройка  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , где

1.  $\Omega$  - пространство элементарных событий;
2.  $\mathcal{A}$  -  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$  (события);
3.  $P$  - вероятностная счетно-аддитивная мера на  $\mathcal{A}$  (вероятность); называется вероятностным пространством.

Все элементарные исходы равновозможны

**Определение (Классическая вероятность).** Модель вероятностного пространства ( $A$  - событие)

1.  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  - конечное пространство
2.  $\mathcal{A}$  все подмножества  $\Omega$
3.  $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$

**Определение (Геометрическая вероятность).**  $V \in \mathbb{R}^n$

1.  $\Omega = V$
2.  $\mathcal{A}$  - борелевская  $\sigma$ -алгебра (минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все компакты) подмножеств  $V$
3.  $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(V)}$

## 1.1 Некоторые следствия аксиоматики

1.

**Аксиома** (Аксиома непрерывности). Если  $A_1 \supset A_2, \dots, \supset A_n \supset A, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

*Доказательство.* Пусть  $B_n \downarrow \emptyset$ . Тогда обозначим  $A_n = B_n \setminus B_{n+1}, n = 1, \dots, \dots A_n$  попарно несовместны и

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k,$$

поэтому из счетной аддитивности меры следует сходимость ряда

$$P(B_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

и сумма остатка ряда

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

►

2. (Формула включений и исключений)

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{i < j}^n P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

*Доказательство.* Выводится через обычную формулу включений и исключений для множеств по индукции

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

+

$$\begin{cases} A \cup B = A + (B \setminus AB) \\ \text{Счетная аддитивность} \\ P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) \text{ (также по счетной аддитивности)} \end{cases}$$

►

### 1.1.1 Индикатор

**Определение.** Индикатор события  $A$  - это функция  $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

#### Свойства индикатора

1.  $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
2.  $I_{A_1 \cap A_2} = I_{A_1} I_{A_2}$
3.  $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - I_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n} = 1 - I_{\bar{A}_1} \dots I_{\bar{A}_n} = 1 - (1 - I_{A_1}) \dots (1 - I_{A_n})$

## 2 Условные вероятности и независимость

**Определение** (Условная вероятность). Пусть  $P(B) > 0$ . Условной вероятностью  $P(A|B)$  события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$  (или просто: при условии  $B$ ), назовем отношение

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Применяется также обозначение  $P_B(A)$

**Теорема 2.1** (Теорема умножения). Пусть события  $A_1, \dots, A_n$  таковы, что  $P(A_1, \dots, A_{n-1}) > 0$ . Тогда

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1, \dots, A_{n-1}}(A_n)$$

*Доказательство.* Из условия теоремы вытекает, что существуют все условные вероятности из формулы.

База индукции  $P(AB) = P(B)P_B(A)$ .

Переход:  $B = A_1, \dots, A_{n-1}, A = A_n$ , применим формулу выше ►

**Определение** (Разбиение). Систему событий  $A_1, \dots, A_n$  будем называть конечным разбиением (в дальнейшем - просто разбиением), если они попарно несовместны и

$$A_1 + \dots + A_n = \Omega$$

**Теорема 2.2** (Формула полной вероятности). Если  $A_1, \dots, A_n$  - разбиение и все  $P(A_k) > 0$ , то для любого события  $B$  имеет место формула

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

## 3 Случайные величины

**Определение** (Случайная величина). Случайной величиной (СВ)  $X(\omega)$  называется функция элементарного события  $\omega$  с областью определения  $\Omega$  и областью значений  $\mathbb{R}$  такая, что событие  $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$  принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$  при любом действительном  $x \in \mathbb{R}$ . Значения  $x$  функции  $X(\omega)$  называются реализациями СВ  $X(\omega)$ .

**Определение** (Алгебра, порожденная случайной величиной). Пусть  $x_1 < \dots < x_k$  - значения, принимаемые случайной величиной  $\xi$ . Каждая такая величина определяет разбиение из событий  $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ . Т.к.  $x_i \neq x_j$ , то  $A_i A_j = \emptyset$ . Сумма - достоверное событие  $\Omega$ .

Разбиение порождает алгебру событий

$$\{\xi \in B =\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$$

,  $B$  - числовое множество.

**Определение** (Закон распределения). Любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных со случайной величиной.

### Примеры законов распределения

1. Биномиальный закон
2. Гипергеометрическое распределение
3. Равномерное распределение

**Определение** (Математическое ожидание). Математическое ожидание случайной величины  $\xi = xi(\omega)$  обозначается  $M\xi$  и определяется как сумма

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)p(\omega)$$

### Свойства мат. ожидания

1.  $MI_A = P(A)$

*Доказательство.*

$$MI_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = P(A)$$

►

2. Аддитивность:  $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

*Доказательство.*

►

Из этого также следует конечная аддитивность.

3. Для любой константы  $C$

$$M(C\xi) = cM\xi, \quad MC = C$$

4. Математическое ожидание  $\xi$  выражается через закон распределения случайной величины  $\xi$  формулой

$$M\xi = \sum_{i=1}^k x_i P\{\xi = x_i\}$$

Подставляя в числовую функцию случайную величину, мы также получаем случайную величину. Например, если  $\eta = g(\xi)$ , то

$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^k g(x_i)P\{\xi = x_i\}$$

При этом

$$g(x_i) = \sum_{i=1}^k g(x_i)I_{\xi=x_i}$$

**Определение** (n-ый момент случайной величины). Математическое ожидание  $M\xi^n$  называется n-ым моментом (или моментом n-ого порядка) случайной величины  $\xi$  (или ее закона распределения).

**Определение** (Абсолютный n-ый момент). Математическое ожидание  $M|\xi|^n$ .

**Определение** (Центральный момент n-ого порядка).  $M(\xi - M\xi)^n$

**Определение** (Абсолютный центральный момент n-ого порядка).  $M|\xi - M\xi|^n$

**Определение** (Дисперсия).  $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$

**Определение** (Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение)).  $\sqrt{D\xi}$

### Свойства дисперсии

1.  $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$
2.  $D\xi \leq 0$  и  $D\xi = 0$  тогда и только тогда, когда существует такая константа  $c$ , что  $P\{\xi = c\} = 1$
3. Для любой константы  $c$   $D(c\xi) = c^2 D\xi$ ,  $D(\xi + c) = D\xi$

**Теорема 3.1** (Неравенство Иенсена). Если числовая функция  $g(x)$ , то для любой случайной величины  $\xi$

$$Mg(\xi) \leq g(M\xi)$$

**Теорема 3.2** (Неравенство Ляпунова). Для любых положительных  $\alpha \leq \beta$

$$(M|\xi|^\alpha)^{1/\alpha} \leq (M|\xi|^\beta)^{1/\beta}$$

**Теорема 3.3** (Неравенство Коши-Буняковского).

## Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p)$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda$$

### 3.1 Многомерные законы распределения

### 3.2 Независимость случайных величин

**Определение** (Независимость случайных величин).  $\xi_1, \dots, \xi_n$  называются независимыми, если порожденные ими алгебры

$$\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}$$

независимы.

**Определение** (Независимость случайных величин).  $\xi_1, \dots, \xi_n$  называются независимыми, если для любых  $x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}$

$$P\{\xi_1 = x_{1j_1}, \xi_n = x_{nj_n}\} = \prod_{i=1}^n P\{\xi_i = x_{ij_i}\}$$

**Теорема 3.4.** Если случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы, а  $g_i(x)$  - числовые функции, то случайные величины  $\eta_1 = g_1(\xi_1), \dots, \eta_n = g_n(\xi_n)$  также независимы.

**Теорема 3.5** (Мультипликативное свойство математических ожиданий). Если случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы, то

$$M\xi_1, \dots, \xi_n = \prod_{i=1}^n M\xi_i$$

**Теорема 3.6** (Аддитивное свойство дисперсии). Если случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$$

**Евклидово пространство случайных величин** Условное мат. ожидание  $M(\xi|\eta)$ - ортогональная проекция  $\xi$  на линейное подпространство  $\eta$

### Условные математические ожидания

**Определение** (Условная вероятность). Условная вероятность  $P(B|\mathcal{A}(\alpha))$  относительно  $\mathcal{A}(\alpha)$  как случайную величину, которая принимает значение  $P(B|A_k)$  при  $\omega \in A_k$ .

**Определение** (Условный закон распределения). Условный закон распределения  $\eta$  при заданном значении  $\xi = x_k$  назовем набор условных вероятностей

$$P\{\eta = y_t | \xi = x_k\} = \frac{P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}, \quad t = 1, \dots, m$$

**Определение** (Условное мат.ожидание). Условное мат.ожидание  $\eta$  при заданном значении  $\xi = x_k$

$$M\{\eta | \xi = x_k\} = \sum_{t=1}^m P\{\eta = y_t | \xi = x_k\} y_t = \frac{\sum_{t=1}^m y_t P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}$$

Условное матожидание является функцией от  $\eta$ . Случайная величина  $M(\eta|\xi)$  - условное мат.ожидание при заданном  $\xi$

**Определение.**

$$M[M(\eta|\xi)] = \sum_{k=1}^n P\{\xi = x_k\} M\{\eta|\xi = x_k\}$$

**Теорема 3.7.**

$$M[M(\eta|\xi)] = M\eta$$

**Теорема 3.8** (Неравенство Чебышева). *Для любого  $x > 0$  имеют место неравенства:*

$$P\{|\xi| \geq x\} \leq \frac{M|\xi|}{x}$$

$$P\{|\xi - M\xi| \geq x\} \leq \frac{D\xi}{x^2}$$

## 4 Случайные величины (общий случай)

**Определение.** Числовая функция  $\xi = \xi(\omega)$  от элементарного события  $\omega \in \Omega$  называется случайной величиной, если для любого числа  $x$

$$\{\xi \leq x\} = \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

**Определение** (Функция распределения случайной величины  $\xi$ ).

$$F(x) = F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$$

, определенная при всех  $x \in R$

При помощи этой функции можно выразить вероятность попадания  $\xi$  в интервалы.

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\{\xi < x\} : \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ x - \frac{1}{n-1} < \xi \leq x - \frac{1}{n} \right\}$$

$$P(\xi = x) = F(x) - F(x-0)$$

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1-0)$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2-0) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2-0) - F(x_1-0)$$

**Теорема 4.1** (Свойства функции распределения). *Функция распределения  $F(x)$  обладает следующими свойствами:*

1.  $F(x)$  не убывает
2.  $F(x)$  непрерывна справа
3.  $F(+\infty) = 1$
4.  $F(-\infty) = 0$

**Определение** (Борелевская  $\sigma$ -алгебра).  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}$  числовых множеств, порожденная всевозможными интервалами вида  $x_1 < x \leq x_2$ , называется борелевской; множества  $A$ , входящие в  $\mathcal{A}$ , называются борелевскими.

**Определение** ( $\sigma$ -алгебра, порожденная случайной величиной  $\xi$ ). Совокупность  $\xi^{-1}(B)$  для всех борелевских множеств борелевской алгебры.

## Примеры дискретных распределений

1. Биномиальное
2. Пуассоновское
3. Геометрическое

**Теорема 4.2.** Если  $\xi$  - случайная величина, а  $g(x)$  - борелевская функция, то  $\eta = g(\xi)$  есть случайная величина

**Определение** (Распределение вероятностей).  $P_\xi(B)$ , определенная для всех  $B \in \mathcal{B}$ , называется распределением вероятностей случайной величины  $\xi$

**Определение** (величина с дискретным распределением). величина имеет дискретное распределение, если в точках разрыва функции распределения вероятности таковы, что их сумма  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

**Определение** (Плотность распределения).  $p(x) = p_\xi(x)$  - плотность распределения случайной величины  $\xi$ , если для любых  $x_1 < x_2$

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x) dx$$

**Свойства**

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

## 5 Математическое ожидание

**Определение** (Простая случайная величина). Случайная величина простая, если она представима в виде

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{j=1}^m x_j I_{A_j}(\omega)$$

где события  $A_1, \dots, A_m$  составляют разбиение, т.е.  $A_i A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $\sum_{j=1}^m A_j = \Omega$

**Определение** (Мат. ожидание простой случайной величины).

$$M\xi = \sum_{j=1}^m x_j P(A_j)$$

**Определение** (Мат. ожидание неотрицательной случайной величины).

$$M\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi^n$$

**Определение** (Мат. ожидание в общем случае).

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,$$

где  $\xi^+ = \xi I_{\{\xi \geq 0\}}$ ,  $\xi^- = |\xi| I_{\{\xi < 0\}}$

**Свойства мат. ожидания**

1. Свойство линейности
2. Свойство положительности
3. Свойство конечности

## Джентльменский набор абсолютно непрерывных распределений

### 1. Нормальное (гауссово) распределение

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $(a, \sigma)$ ,  $-\infty < a < \infty, \sigma > 0$ , если она имеет плотность

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение с параметрами  $(0, 1)$  называется стандартным.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Для плотности истинно условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| t = \frac{x}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = |\text{гауссов интеграл}| = 1$$

### 2. Равномерное распределение

**Определение.** Случайная величина  $\xi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[a, b]$  если ее плотность имеет вид:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} C & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b \end{cases}$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = C \int_a^b dx = C(b-a) = 1,$$

то  $C = b - a$ .

### 3. Гамма-распределение

**Определение** (гамма распределение).

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} & x \geq 0, \end{cases}$$

где  $\alpha > 0, \lambda > 0$  - параметры

При  $\alpha = 1$  имеем показательное распределение

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left| -\lambda x = t, dt = -\lambda dx \right| = - \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{-\lambda} dt = e^t \Big|_{-\infty}^0 = 1 - 0 = 1$$

$p_{\xi}(x)$	$F_{\xi}(x)$	$M(\xi)$	$D(\xi)$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}})]$	$a$	$\sigma^2$
$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\begin{cases} x^{\alpha-1} \frac{e^{-x\lambda}}{\lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\dots$	$\alpha \lambda^{-1}$	$\alpha \lambda^{-2}$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$



## 5.1 Правила для вычисления

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi}(x)dx$$

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_{\xi}(x)dx$$

## 6 Производящие функции

**Определение** (Целочисленная случайная величина). Дискретная случайная величина  $\xi$ , принимающая только целые неотрицательные значения.

Закон распределения:

$$p_n = P\{\xi = n\}, n = 0, 1, \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

**Определение** (Производящая функция).

$$\phi_{\xi}(s) = Ms^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

Ряд абсолютно сходится при  $|s| \leq 1$

### Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} = -\ln(1-s)$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p), \quad \phi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (ps + 1 - p)^n$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p^k (1-p)s^n = \frac{p}{1-(1-p)s}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda, \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n s^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$

## 7 Характеристические функции

129-137

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$$

$$|M\xi| \leq M|\xi|$$

**Определение.** Функция  $f_{\xi}(t)$  называется характеристической функцией случайной величины  $\xi$ , если она имеет вид

$$f_{\xi}(t) = Me^{it\xi}$$

Если  $\xi$  - целочисленная случайная величина, то  $\phi_\xi(z) = Mz^\xi$

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = M(e^{it})^\xi = \phi_\xi(e^{it})$$

(Свойства х.ф.)

1.  $|f_\xi(t)| \leq 1, f_\xi(0) = 1$
2.  $f_\xi$  - равномерно непрерывна по  $t$
3.  $f_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi)}e^{itb} = e^{itb}Me^{i\xi(at)} = e^{itb}f_\xi(at)$
4.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  - независимы, тогда

$$f_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(t)$$

$$Me^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} = M \prod_{i=1}^n e^{it\xi_i} = \prod_{j=1}^n Me^{it\xi_j} = \prod_{j=1}^n f_{\xi_j}(t)$$

5.  $f_\xi(-t) = \overline{f_\xi(t)}$

$$Me^{-it\xi} = \overline{Me^{it\xi}} = \overline{f_\xi(t)}$$

6.  $\exists m_1, \dots, m_n = M\xi^n$  (существуют первые  $n$  моментов), тогда

$$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} m_k + R_n(t),$$

где  $R_n(t) = o(t^n)$  при  $t \rightarrow 0$

- 7.

$$\zeta \begin{cases} \xi, p \\ \eta, 1-p, \end{cases} \quad p \in (0, 1)$$

$$f_\zeta(t) = pf_\xi(t) + (1-p)f_\eta(t)$$

*Пример.* 1.  $\cos(t)$

мы не знаем косинус...

$$\xi = \begin{cases} -1 & p = 1/2 \\ 1 & p = 1/2 \end{cases} \quad \text{Бернуллиевская случайная величина}$$

$$Me^{it\xi} = \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} = \cos t$$

2.  $\cos^3(t)$

свойство про независимость

3.  $\frac{\cos(t) + \cos(2t)}{2}$

свойство про независимость, свойство про выпуклую комбинацию (3)

4.  $e^{-t^4}$

шестое свойство, по формуле Тейлора

$$e^{-t^4} = 1 - t^4 + o(t^4)$$

функция обращения - слишком тяжело, проверяем по свойствам а потом мучаемся (Фурье, Лаплас?)

$\xi = C$  с вероятностью 1

$$Me^{i\xi t} = e^{iCt}$$

*Замечание.* В силу 6 свойства, можно обобщить - если моменты до второго равны 0, то уже не характеристическая функция. (сравниваем с х.ф тождественного нуля, а  $t^4$  высоко)

1. Стандартное распределение

$$f_\xi(t) = e^{-t^2/2}$$

можно получить нормальное при помощи 3 свойства.

2. равномерное на  $[a, b]$ :

$$f_{\xi} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

3. Гамма распределение с параметром  $\alpha$

$$f_{\xi}(t) = (1 - it)^{-\alpha}$$

многозначная функция - нужно выделять ветвь

### Абсолютно непрерывный случай

$$f_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx \quad \text{Преобразование Фурье}$$

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_{\xi}(t) dt \quad \text{Обратное преобразование Фурье}$$