

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теория булевых функций</b>	<b>1</b>
1.1	Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от $n$ переменных. Таблица истинности БФ	1
1.2	Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия)	1
1.3	Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами	1
1.4	Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций	2
1.5	Тождественно истинные (ложные) и выполнимые БФ	2
1.6	ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения	3
1.7	СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения	3
1.8	Минимизация нормальных форм (карты Карно)	3
1.9	Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения	3
1.10	Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций	3
1.11	Полные системы булевых функций, базисы	3
1.12	Классы $T_0, T_1$ (функции, сохраняющие 0 и 1)	3
1.13	Класс $S$ самодвойственных функций, определение двойственной БФ	3
1.14	Класс монотонных функций	4
1.15	Класс линейных функций	4
1.16	Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях	4
1.17	Теорема Поста о полноте системы булевых функций	5
1.18	Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи)	5
<b>2</b>	<b>Логика высказываний</b>	<b>5</b>
2.1	Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела	5
2.2	Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований.	5
2.3	Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем	5
2.4	Понятия необходимых и достаточных условий	5
2.5	Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов	5
2.6	Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов	5
2.7	Теорема о дедукции для ИВ	5
2.8	Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ	5
2.9	ИВ Генцена, его полнота	5
2.10	Метод резолюций для логики высказываний (без обоснования корректности)	5
<b>3</b>	<b>Логика предикатов</b>	<b>5</b>
3.1	Понятие предиката и операции, их представления, примеры	5
3.2	Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы	6
3.3	Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов	6
3.4	Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы	6
3.5	Истинность формул на алгебраической системе	6
3.6	Изоморфизм систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм	8
3.7	Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности	8
3.8	Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем	8
3.9	Эквивалентность формул логики предикатов	8
3.10	Тождественно истинные (ложные) и выполнимые формулы	8
3.11	Пренексный вид формулы	8
3.12	Основные эквивалентности логики предикатов	8
3.13	Классы формул $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$ . Соотношения между классами	8
3.14	Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах)	8
3.15	Проверка существования вывода методом резолюций (алгоритм)	8
3.16	Логическое следование в логике предикатов	8
3.17	Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов	8
3.18	Теория. Модель теории	8
3.19	Непротиворечивая теория. Полная теория. Свойства непротиворечивых и полных теорий	8

3.20	Теорема о существовании модели (без доказательства)	8
3.21	Теорема о связи выводимости и противоречивости	8
3.22	Теоремы о корректности и полноте ИП	8
3.23	Теорема компактности	8
3.24	Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы. Конечно аксиоматизируемые теории	8
3.25	Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы)	8
3.26	Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности)	8

## 1 Теория булевых функций

### 1.1 Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от n переменных. Таблица истинности БФ

**Определение.** Булева функция от n переменных - это отображение  $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

*Замечание.* Количество БФ от n переменных -  $2^{2^n}$

*Доказательство.* Каждая булева функция определяется своим столбцом значений. Столбец является булевым вектором длины  $m = 2^n$ , где n - число аргументов функции. Число различных векторов длины m (а значит и число булевых функций, зависящих от n переменных) равно  $2^m = 2^{2^n}$  ►

### 1.2 Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия)

	x	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	
Булевы функции одной переменной:	0	0	0	1	1	$f_1$ - тождественный 0, $f_2$ - тождественная функция, $f_3$ - отрицание ( $\neg$ ), $f_4$ - тождественная 1
	1	0	1	0	1	

	x	y	0	$\wedge$	$\rightarrow'$	$x$	$\leftarrow'$	y	+	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$y'$	$\leftarrow$	$x'$	$\rightarrow$		1
Булевы функции двух переменных	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

1.  $\wedge$  - конъюнкция
2.  $\leftarrow$  - антиимпликация
3.  $\rightarrow$  - импликация
4.  $\vee$  - дизъюнкция
5. | - штрих Шеффера
6.  $\downarrow$  - стрелка Пирса
7. + - взаимоисключающее или, сложение по модулю 2 (XOR)

### 1.3 Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами

**Определение.** Формула логики высказываний - слово алфавита логики высказываний, построенное по следующим правилам:

1. символ переменной - формула
2. символы 0 и 1 - формулы
3. если  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  - формулы, то слова  $(\Phi_1 \& \Phi_2)$ ,  $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$ ,  $(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$ ,  $(\Phi_1 | \Phi_2)$ ,  $\dots$ ,  $\Phi_1'$  тоже формулы

Очевидно, что каждой формуле логики высказываний можно поставить в соответствие булеву функцию, причем если формуле  $F_1$  соответствует функция  $f_2$ , а формуле  $F_2$  функция  $f_2$  и  $F_1 \equiv F_2$ , то  $f_1 \equiv f_2$ .

Каждая формула  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  логики высказываний однозначно определяет некоторую булеву функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Это булева функция, определенная таблицей истинности формулы  $\Phi$ .

## 1.4 Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций

**Определение.** Формулы логики высказываний  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  эквивалентные, если для всех наборов значений  $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$   $\Phi(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \Psi(a_1, \dots, a_n) = 1$

**Теорема 1.1** (Об эквивалентных формулах). 1.

**Теорема 1.2.** Справедливы следующие эквивалентности

1.  $a \vee b \equiv b \vee a$  *симметричность*
2.  $a \wedge b \equiv b \wedge a$
3.  $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$  *ассоциативность*
4.  $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$
5.  $a \wedge (b \vee c) \equiv a \wedge b \vee a \wedge c$  *транзитивность*
6.  $a \vee b \wedge c \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
7.  $a \vee a \equiv a$  *идемпотентность*
8.  $a \wedge a \equiv a$
9.  $\overline{(a \vee b)} \equiv \bar{a} \wedge \bar{b}$  *законы де Моргана*
10.  $\overline{(a \wedge b)} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$
11.  $\bar{\bar{a}} \equiv a$  *двойное отрицание*
12.  $a \vee a \wedge b \equiv a$  *поглощение*
13.  $a \wedge (a \vee b) \equiv a$
14.  $a \vee \bar{a} \wedge b \equiv a \vee b$  *слабое поглощение*
15.  $a \wedge (\bar{a} \vee b) \equiv ab$
16.  $a \vee 0 \equiv a$
17.  $a \wedge 0 \equiv 0$
18.  $a \vee 1 \equiv 1$
19.  $a \wedge 1 \equiv a$
20.  $a \vee \bar{a} \equiv 1$
21.  $a\bar{a} \equiv 0$
22.  $a \rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b$
23.  $a \leftrightarrow b \equiv \bar{a} \wedge \bar{b} \vee a \wedge b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
24.  $a + b \equiv \overline{a \leftrightarrow b} \equiv \bar{a} \wedge b \vee a \wedge \bar{b}$
25.  $a|b \equiv \overline{a \wedge b}$
26.  $a \downarrow b \equiv \overline{a \vee b}$

*Доказательство.* Доказательство сводится к построению таблиц истинности для левой и правой частей каждой эквивалентности ►

## 1.5 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые БФ

**Определение.** Формула  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  называется тождественно истинной (ложной), если для любого набора значений  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 1(0)$

**Определение.** Формула  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  называется выполнимой, если существует набор значений, для которого  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 1$

## 1.6 ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения

## 1.7 СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения

## 1.8 Минимизация нормальных форм (карты Карно)

## 1.9 Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения

## 1.10 Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций

## 1.11 Полные системы булевых функций, базисы

## 1.12 Классы $T_0, T_1$ (функции, сохраняющие 0 и 1)

**Определение.** Класс  $T_0 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$

**Определение.** Класс  $T_1 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$

	$T_0$	$T_1$	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$x$	+	+	-	+	+
$\neg x$	-	-	+	-	+
$xy$	+	+	-	+	-
$x \vee y$	+	+	-	+	-
$x \oplus y$	+	-	-	-	+
$x \leftrightarrow y$	-	+	-	-	+
$x \rightarrow y$	-	+	-	-	-
$x y$	-	-	-	-	-
$x \downarrow y$	-	-	-	-	-

*Замечание.* Классы  $T_0, T_1$  являются замкнутыми.

*Доказательство.* Докажем для  $T_0$ . Достаточно взять булевы функции  $g, g_1, \dots, g_n \in T_0$  и доказать, что их суперпозиция из класса  $T_0$ .

$$g(g_1(0, \dots, 0), \dots, g_n(0, \dots, 0)) = g(0, \dots, 0) = 0$$

►

## 1.13 Класс S самодвойственных функций, определение двойственной БФ

**Определение.** Булева функция  $g(x_1, \dots, x_n)$  называется двойственной к БФ  $f(x_1, \dots, x_n)$  (обозначается  $g = f^*$ ), если  $g(x_1, \dots, x_n) = f'(x'_1, \dots, x'_n)$ .

Из закона двойного отрицания следует, что  $(f^*)^* = f$

**Определение.** Булева функция  $f$  называется самодвойственной, если  $f = f^*$ .

**Определение.** Класс самодвойственных функций  $= \{f \mid f = f^*\}$

*Замечание.* Класс S является замкнутым.

*Доказательство.* Возьмем БФ  $g, g_1, \dots, g_k \in S$  и докажем, что их суперпозиция будет также из класса S.

Если  $F(x_1, \dots, x_n) = g(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$ ,

то  $F^*(x_1, \dots, x_n) = \neg F(\neg x_1, \dots, \neg x_n) = \neg g(g_1(\neg x_1, \dots, \neg x_n), \dots, g_k(\neg x_1, \dots, \neg x_n))$ .

Так как  $g_i \in S$ , то  $g_i(x_1, \dots, x_n) = \neg g_i(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$ , что эквивалентно  $\neg g_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$ . Следовательно,  $F^*(x_1, \dots, x_n) = \neg g(\neg g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \neg g_k(x_1, \dots, x_n))$ .

Так как  $g \in S$ , то  $\neg g(\neg g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \neg g_k(x_1, \dots, x_n)) = g(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)) \implies f^*(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$

►

## 1.14 Класс монотонных функций

**Определение.** Назовем два набора из 0 и 1  $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$  **соседними**, если все их координаты (кроме одной) совпадают.

**Определение.** Пусть  $k$  - номер единственной координаты, по которой отличаются соседние наборы  $a, b$ . Если  $a_k = 0, b_k = 1$ , то мы будем говорить, что набор  $a$  **меньше** набора  $b$  ( $a \prec b$ )

**Определение** (Монотонная функция). БФ  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется монотонной, если  $\forall$  соседних наборов  $a, b$  таких, что  $a \prec b \implies f(a) \leq f(b)$

*Замечание.* Класс  $M$  является замкнутым.

*Доказательство.*  $g, g_1, \dots, g_k \in M, F(x_1, \dots, x_n) = g(g_1, \dots, g_k)$  и рассмотрим два произвольных набора  $a \prec b$ . Пусть  $c_1 = g_1(a), d_1 = g_1(b), \dots, c_k = g_k(a), \dots, d_k = g_k(b)$

$$g_i \in M \implies c_i \leq d_i$$

Если наборы  $c = (c_1, \dots, c_k)$  и  $d = (d_1, \dots, d_k)$  - соседние, то и  $F(c) \leq F(d)$

В противном случае легко показать, что  $\exists$  цепочка

$$c \prec e_1 \prec \dots \prec e_l \prec d$$

(то есть наши наборы сравнимы по определению Ашаева)

$$\text{и } g(c) \leq g(d) \implies F(c) \leq F(d) \implies F \in M$$

►

## 1.15 Класс линейных функций

### 1.16 Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях

**Лемма 1.1** (о несамодвойственной функции). Если БФ  $f(x_1, \dots, x_n)$  несамодвойственна, то замыкание класса  $[f, \neg x]$  содержит тождественно ложную БФ 0 и тождественно истинную БФ 1.

*Доказательство.* Так как  $f$  несамодвойственна, то существует набор  $a_1, \dots, a_n$  значений аргументов такой, что  $f(a_1, \dots, a_n) \neq \neg f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$

Так как БФ принимают только значения 0 и 1, то  $f(a_1, \dots, a_n) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$

Составим функцию  $g(x) = f(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$ , где

$$x^a = \begin{cases} x & \text{если } a = 1 \\ \neg x & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что  $g \in [f, \neg x]$ , так как является их суперпозицией.

$$g(0) = f(0^{a_1}, \dots, 0^{a_n}) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n), g(1) = f(1^{a_1}, \dots, 1^{a_n}) = f(a_1, \dots, a_n),$$

$g(0) = g(1)$  -  $g$  - константа,  $g$  и  $\neg g$  принимают значения 0 и 1 чтд.

►

**Лемма 1.2** (О немонотонной функции). Если  $f(x_1, \dots, x_n)$  немонотонна, то  $x' \in [f, 0, 1]$

*Доказательство.* Из немонотонности  $f$  следует существование двух соседних наборов  $a = (a_1, \dots, a_n) \prec (b_1, \dots, b_n) = b$  такие, что  $f(a) > f(b)$ . Б.О.О считаем, что они отличаются только в первой координате

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = 1$$

$$a_i = b_i$$

$$\angle g(x, a_2, \dots, a_n) \in [f, 0, 1]$$

$$g(0) = f(a) = 1, g(1) = f(b) = 0 \implies g \equiv x'$$

►

**Лемма 1.3** (О нелинейной функции).  $f(x_1, \dots, x_n) \notin L \implies xy \in [f, 0, 1, x']$

*Доказательство.*  $f(x_1, \dots, x_n) \notin L \implies$  полином Жегалкина функции  $f$  содержит конъюнкцию двух переменных  $x_1$  и  $x_2$

$$\implies f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 h_{12}(x_3, \dots, x_n) + x_1 h_1(x_3, \dots, x_n) + h_0(x_3, \dots, x_n)$$

$$f \notin L \implies h_{12} \neq 0 \implies \exists (a_3, \dots, a_n) h_{12}(a_3, \dots, a_n) = 1$$

Подставим этот набор в ПЖ  $f$ :

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, a_3, \dots, a_n) = x_1 x_2 h_{12}(a_3, \dots, a_n) + x_1 h_1(a_3, \dots, a_n) + h_0(a_3, \dots, a_n)$$

$$h_i \in \{0, 1\} \implies \exists 8 \text{ вариантов того, как выглядит полином Жегалкина}$$

1. Система функций  $[g, \neg, 0, 1]$  полна и содержит конъюнкцию

2.  $g$  - конъюнкция

3.  $xy = g(x, y') \vee xy = g(x', y) \implies xy \in \text{замыкание}$

Т.к  $g$  выражается через  $f(x_1, \dots, x_n), 0, 1$ , то конъюнкция также лежит в замыкании  $[f, \neg, 0, 1]$



### 1.17 Теорема Поста о полноте системы булевых функций

1.18 Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи)

## 2 Логика высказываний

2.1 Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела

2.2 Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований.

2.3 Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем

2.4 Понятия необходимых и достаточных условий

2.5 Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов

2.6 Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов

2.7 Теорема о дедукции для ИВ

2.8 Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ

2.9 ИВ Генцена, его полнота

2.10 Метод резолюций для логики высказываний (без обоснования корректности)

## 3 Логика предикатов

3.1 Понятие предиката и операции, их представления, примеры

**Определение.**  $n$ -местный предикат на множестве  $A$  - это отображение вида  $P : A^n \rightarrow \{0, 1\}$

**Определение.**  $n$ -местная операция на множестве  $A$  - это отображение вида  $f : A^n \rightarrow A$

Предикат можно задать как множество тех аргументов, на которых он является истинным

**Пример.**  $P = \{1, 3\} : P = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

**Пример.**  $Q = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

Способы задания:

1. описательный

2. множество (отношения)

3. таблица (истинности)

4. графы

для предиката  $P(x, y)$  ребро  $(x, y)$  обозначает  $P(x, y) = 1$

для операции  $f(x)$  дуга  $(x, y)$  обозначает  $y = f(x)$

### 3.2 Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы

**Определение.** Сигнатура - набор предикатных, функциональных и константных символов с указанием местностей

**Пример.**  $\sigma = \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, c\}$

**Определение.** Две сигнатуры считаем *равными*, если в них одинаковое кол-во символов каждого сорта и местности соответствующих символов равны

**Определение.** Интерпретация сигнатуры  $\sigma$  на множестве  $A$  - это отображение, которое

1. каждому  $n$ -местному предикатному символу  $P^{(n)} \in \sigma$  сопоставляет  $n$ -местный предикат на  $A$
2. каждому  $n$ -местному функциональному символу  $f^{(n)} \in \sigma$  сопоставляет  $n$ -местную операцию на  $A$
3. каждому константному символу сопоставляет элемент множества  $A$

**Определение.** Алгебраическая система - набор, состоящий из множества  $A$ , сигнатуры  $\sigma$  и интерпретации  $\sigma$  на  $A$ . Множество  $A$  называют основным множеством системы ( $\mathbf{a} = \langle A, \sigma \rangle$ )

### 3.3 Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов

Зафиксируем сигнатуру  $\sigma$ . Алфавит логики предикатов сигнатуры  $\sigma$  — это множество

$$\sigma_{\text{ЛП}} = \sigma \cup \{x_1, x_2, \dots, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists, (, ), =, ,\}$$

**Определение.** Терм - слово алфавита логики предикатов, построенное по правилам:

1. символ переменной - терм
2. константный символ - терм
3. если  $t_1, \dots, t_n$  - термы,  $f^{(n)} \in \sigma$ , то и  $f(t_1, \dots, t_n)$  - терм

**Определение.** Атомарная формула сигнатуры  $\sigma$  - это слово одного из двух видов:

1.  $t_1 = t_2$ , где  $t_1, t_2$  - термы
2. предикат  $P(t_1, \dots, t_n)$ ,  $P^{(n)} \in \sigma$ ,  $t_1, \dots, t_n$  - термы

**Определение.** Формула ЛП сигнатуры  $\sigma$  - слово, построенное по правилам:

1. атомарная формула - формула
2. если  $\phi_1$  и  $\phi_2$  - формулы, то слова  $(\phi_1 \& \phi_2)$ ,  $(\phi_1 \vee \phi_2)$ ,  $(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$ ,  $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ ,  $\neg \phi_1$  тоже формулы
3. если  $\phi$  - формула, то слова  $(\forall x \phi)$  и  $(\exists x \phi)$  тоже формулы

### 3.4 Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы

**Определение.** Вхождение переменной  $x$  в формулу  $\phi$  **связанное**, если  $x$  попадает в область действия квантора  $\exists x / \forall x$ , в противном случае вхождение  $x$  **свободное**

**Определение.** Переменная  $x$  **свободна** в формуле  $\phi$ , если есть хотя бы одно свободное вхождение  $x$  в  $\phi$ , в противном случае она **связанная**

**Определение.** Формула замкнутая, если она не содержит свободных переменных.

### 3.5 Истинность формул на алгебраической системе

Каждый терм  $t(x_1, \dots, x_n)$  определяет в системе  $\mathbf{a}$  функцию  $t_{\mathbf{a}} : A^n \rightarrow A$  следующим образом: в терме все функциональные и константные символы заменяются на их интерпретации в системе  $A$ , после чего вычисляется полученная суперпозиция от входных аргументов.

Пусть также  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  — формула со свободными переменными  $x_1, \dots, x_n$ . Определим понятие истинности формулы  $\phi$  на наборе элементов  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}$  в алгебраической системе  $\mathbf{a}$  (обозначение:  $\mathbf{a} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ ) следующим образом.

**Определение.** 1. Пусть  $\phi$  имеет вид  $t_1 = t_2$ . Тогда  $A \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow t_{1A}(a_1, \dots, a_n) = t_{2A}(a_1, \dots, a_n)$  (здесь  $t_{iA}$  — функция, определяемая термом  $t_i$  в системе  $A$ ).

2. Пусть  $\phi$  имеет вид  $P(t_1, \dots, t_k)$ . Тогда  $A \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow P_A(t_{1A}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_{kA}(a_1, \dots, a_n)) = 1$ , где  $P_A$  — интерпретация предикатного символа  $P$  в системе  $A$ .
3. Пусть  $\phi$  имеет вид  $(\phi_1 \& \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \rightarrow \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), \neg \phi_1$ . Тогда истинность формулы  $\phi$  определяется по значениям  $\phi_1(a_1, \dots, a_n)$  и  $\phi_2(a_1, \dots, a_n)$  по таблицам истинности логических связок.
4. Пусть  $\phi(x_1 \dots, x_n)$  имеет вид  $(\forall x \phi(x, x_1, \dots, x_n))$ . Тогда  $A \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$  для всех элементов  $b \in A$  выполнено  $A \models \phi(b, a_1, \dots, a_n)$ .
5. Пусть  $\phi(x_1 \dots, x_n)$  имеет вид  $(\exists x \phi(x, x_1, \dots, x_n))$ . Тогда  $A \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$  для некоторого элемента  $b \in A$  выполнено  $A \models \phi(b, a_1, \dots, a_n)$ .

**Определение.** Формула  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  сигнатуры  $\sigma$  тождественно истинная (ложна) в алгебраической системе  $A = \langle A, \sigma \rangle$ , если для всех наборов элементов  $a_1 \dots a_n \in A$  выполнено  $A \models \phi(a_1 \dots a_n)$  ( $A \not\models \phi(a_1 \dots a_n)$ ).

**Определение.** Формула  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  выполнима в алгебраической системе  $A = \langle A, \sigma \rangle$ , если для хотя бы одного набора элементов  $a_1 \dots a_n \in A$  выполнено  $A \models \phi(a_1 \dots a_n)$ .

**Определение.** Формула  $\phi$  сигнатуры  $\sigma$  тождественно истинная (ложна), если  $\phi$  тождественно истинна (ложна) во всех алгебраических системах сигнатуры  $\sigma$ .

**Определение.** Формула  $\phi$  сигнатуры  $\sigma$  выполнима, если  $\phi$  выполнима хотя бы в одной алгебраической системе сигнатуры  $\sigma$ .



- 3.6 Изоморфизм систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм
- 3.7 Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности
- 3.8 Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем
- 3.9 Эквивалентность формул логики предикатов
- 3.10 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые формулы
- 3.11 Пренексный вид формулы
- 3.12 Основные эквивалентности логики предикатов
- 3.13 Классы формул  $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$ . Соотношения между классами
- 3.14 Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах)
- 3.15 Проверка существования вывода методом резолюций (алгоритм)
- 3.16 Логическое следование в логике предикатов
- 3.17 Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов
- 3.18 Теория. Модель теории
- 3.19 Непротиворечивая теория. Полная теория. Свойства непротиворечивых и полных теорий
- 3.20 Теорема о существовании модели (без доказательства)
- 3.21 Теорема о связи выводимости и противоречивости
- 3.22 Теоремы о корректности и полноте ИП
- 3.23 Теорема компактности
- 3.24 Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы. Конечно аксиоматизируемые теории
- 3.25 Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы)
- 3.26 Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности)