

Содержание

1	Вероятностное пространство	1
1.1	Свойства \mathcal{P} из учебника	2
1.2	Некоторые следствия аксиоматики	3
1.2.1	Индикатор	3
2	Условные вероятности и независимость	4
2.1	Формулы Байеса	4
2.2	Независимость событий	5
2.3	Независимость разбиений, алгебр/ σ -алгебр	5
2.4	Независимые испытания	6
2.4.1	Схема Бернулли	7
3	Случайные величины	7
3.1	Примеры законов распределения	7
3.2	Свойства мат. ожидания	7
3.3	Свойства дисперсии	8
3.4	Джентльменский набор	8
3.5	Многомерные законы распределения	9
3.6	Независимость случайных величин	9
3.7	Евклидово пространство случайных величин	9
3.8	Условные математические ожидания	9
4	Случайные величины (общий случай)	10
4.1	Примеры дискретных распределений	10
4.2	Свойства	10
5	Математическое ожидание	11
5.1	Свойства мат. ожидания	11
5.2	Джентльменский набор абсолютно непрерывных распределений	11
5.3	Правила для вычисления	12
6	Производящие функции	12
6.1	Джентльменский набор	13
7	Характеристические функции	13
7.1	Абсолютно непрерывный случай	14

1 Вероятностное пространство

Определение (Алгебра). Семейство \mathcal{A} подмножеств множества Ω называется алгеброй, если выполнены след. аксиомы:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies \bar{A} \in \mathcal{A}$
3. (аддитивность) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$

Т.е алгебра является замкнутой относительно замыкания и объединения

Определение (σ -алгебра). Алгебра называется σ -алгеброй, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

Определение (мера). $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0; \infty)$ - мера, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j : \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{счетная аддитивность}$$

Мера конечная, если $\mu(\Omega) < \infty$
 Мера вероятностная, если $\mu(\Omega) = 1$

Короче говоря, вероятностная мера:

1. неотрицательность
2. нормированность
3. счетная аддитивность (иногда счетная аддитивность заменяется на аддитивность и непрерывность)

1.1 Свойства P из учебника

1. $A \subseteq B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \geq 0$

представить B как $B = A + (B \setminus A)$,

2. $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

3. $\forall A \in \mathcal{A} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

5. $P(\emptyset) = 0$

6. Конечная аддитивность (следует из счетной)

- 7.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

- 8.

$$B_k = A_k \setminus (A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_{k-1}) \implies \bigcup_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n B_k \implies P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\sum_{k=1}^n B_k\right) |P(B_k) \leq P(A_k)|$$

- 9.

$$\forall A, B \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

раздробить объединение через минус + аддитивность + 1 свойство

Определение (Вероятностное пространство). Тройка (Ω, \mathcal{A}, P) , где

1. Ω - пространство элементарных событий;
2. \mathcal{A} - σ -алгебра подмножеств Ω (события);
3. P - вероятностная счетно-аддитивная мера на \mathcal{A} (вероятность); называется вероятностным пространством.

Все элементарные исходы равновозможны

1. Размещение (упорядоченный набор) $A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$
2. Перестановка (частный случай размещения при $N = n$)
3. Сочетание (подмножество) $C_N^n = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

Определение (Классическая вероятность). Модель вероятностного пространства (A - событие)

1. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ - конечное пространство
2. \mathcal{A} все подмножества Ω
3. $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Определение (Геометрическая вероятность). $V \in \mathbb{R}^n$

1. $\Omega = V$
2. \mathcal{A} - борелевская σ -алгебра (минимальная σ -алгебра, содержащая все компакты) подмножеств V
3. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(V)}$

1.2 Некоторые следствия аксиоматики

1.

Аксиома (Аксиома непрерывности). Если $A_1 \supset A_2, \dots, \supset A_n \supset A, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

Доказательство. Пусть $B_n \downarrow \emptyset$. Тогда обозначим $A_n = B_n \setminus B_{n+1}, n = 1, \dots, \dots A_n$ попарно несовместны и

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k,$$

поэтому из счетной аддитивности меры следует сходимость ряда

$$P(B_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

и сумма остатка ряда

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

►

2. (Формула включений и исключений)

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Доказательство. Выводится через обычную формулу включений и исключений для множеств по индукции

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

+

$$\begin{cases} A \cup B = A + (B \setminus AB) \\ \text{Счетная аддитивность} \\ P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) \text{ (также по счетной аддитивности)} \end{cases}$$

►

1.2.1 Индикатор

Определение. Индикатор события A - это функция $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Свойства индикатора

1. $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
2. $I_{A_1 \cap A_2} = I_{A_1} I_{A_2}$
3. $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - I_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n} = 1 - I_{\bar{A}_1} \dots I_{\bar{A}_n} = 1 - (1 - I_{A_1}) \dots (1 - I_{A_n})$

2 Условные вероятности и независимость

Определение (Условная вероятность). Пусть $P(B) > 0$. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при условии, что произошло событие B (или просто: при условии B), назовем отношение

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Применяется также обозначение $P_B(A)$

Теорема 2.1 (Теорема умножения). Пусть события A_1, \dots, A_n таковы, что $P(A_1, \dots, A_{n-1}) > 0$. Тогда

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1, \dots, A_{n-1}}(A_n)$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что существуют все условные вероятности из формулы.

База индукции $P(AB) = P(B)P_B(A)$.

Переход: $B = A_1, \dots, A_{n-1}, A = A_n$, применим формулу выше ►

Определение (Разбиение). Систему событий A_1, \dots, A_n будем называть конечным разбиением (в дальнейшем - просто разбиением), если они попарно несовместны ($A_i A_j = \emptyset, i \neq j$) и

$$A_1 + \dots + A_n = \Omega$$

Теорема 2.2 (Формула полной вероятности). Если A_1, \dots, A_n - разбиение и все $P(A_k) > 0$, то для любого события B имеет место формула

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

Доказательство.

$$B = B\Omega = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$$

сумма попарно несовместных событий. Тогда

$$P(B) = P(B\Omega = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n) = \sum_{k=1}^n P(BA_k)$$

$$P(BA_k) = P(A_k)P_{A_k}(B) = P(A_k)P(B|A_k)$$
►

2.1 Формулы Байеса

Теорема 2.3 (Формулы Байеса). Если A_1, \dots, A_n - разбиение и все $P(A_k) > 0$, то для любого события B ($P(B) > 0$) имеют место формулы:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

Доказательство.

$$P(A_k B) = P(A_k)P(B|A_k) = P(B)P(A_k|B) \implies P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)}$$

Применяем к $P(B)$ формулу полной вероятности. ►

1. $P(A_k)$ - априорные вероятности (до опыта)
2. $P(A_k|B)$ - апостериорные вероятности (после опыта)

2.2 Независимость событий

Определение (независимость 2 событий). A и B - независимы, если

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

иначе зависимы

Определение (независимость n событий (в совокупности)). A_1, \dots, A_n называются независимыми, если для любых $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n, 2 \leq m \leq n$

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_m}),$$

иначе зависимы.

Теорема 2.4. Если A_1, \dots, A_n независимы, $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$ - индексы все различны, вероятность $P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) > 0$, тогда

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} | A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{j_1} \dots A_{j_s})$$

Доказательство. A_1, \dots, A_n независимы, поэтому

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_r})$$

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s}) = P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_s})$$

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_r}) P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_s})$$

поэтому

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} \cap A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) \times P(A_{j_1} \dots A_{j_s})$$

+ формула условной вероятности ►

2.3 Независимость разбиений, алгебр/ σ -алгебр

Определение (Порожденная алгебра). γ - система множеств. Наименьшая алгебра множеств $\mathcal{A}(\gamma)$, содержащая γ , называется **алгеброй, порожденной системой** γ .

Определение (Порожденная σ -алгебра). Аналогично.

Замечание. Алгебра, порожденная разбиением, является конечной, состоит из пустого множества и множеств вида

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \dots A_{i_m}$$

Теорема 2.5. Каждая конечная алгебра множеств порождается некоторым разбиением

Доказательство. \mathcal{B} - конечная алгебра событий. Обозначим \mathcal{B}_w - совокупность событий B из \mathcal{B} , для которых $w \in B$.

Для каждого $w \in \Omega$ введем $B_w = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_w} B$

Покажем, что для двух $\omega \neq \omega'$

$$\begin{cases} B_w = B_{w'} \\ B_w \cap B_{w'} = \emptyset \end{cases}$$

Для любых $\omega \in \Omega$ и $B \in \mathcal{B}$ истинно свойство: если $\omega \in B$, то $B_w \subseteq B$ (т.к. B_w - пересечение всех таких B из алгебры, в которых лежит ω)

Пусть теперь $\omega \in B_{w'}$, тогда $B_w \subseteq B_{w'}$ (транзитивность $B_w \subseteq B \subseteq B_{w'}$)

Далее если $\omega' \in B_w$, то $B_{w'} \subseteq B_w$ и, следовательно, $B_{w'} = B_w$

Случай $\omega' \in \overline{B_w}$ невозможен, так как противоречие $B_{w'} \subseteq \overline{B_w}$ (а уже было доказано, что $B_w \subseteq B_{w'}$)

Выберем среди B_w разные множества B_1, \dots, B_r . Это разбиение, т.к. $B_1 + \dots + B_r = \Omega$ и $B_i B_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Так как $\forall B \in \mathcal{B}$ представимо в виде $B = \bigcup_{\omega \in B} B_w$, то это разбиение порождает алгебру \mathcal{B} . ►

Определение (Независимые разбиения). $\alpha_k : A_{k1} + \dots + A_{kr_k} = \Omega, k = 1, \dots, n$ независимые, если для любых $i_k, 1 \leq i_k \leq r_k, k = 1, \dots, n$

$$P(A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n}) = P(A_{1i_1}) P(A_{2i_2}) \dots P(A_{ni_n})$$

По-русски: есть n разбиений, они могут быть разной мощности. Берем по любому событию из каждого разбиения. (всего получается n событий) (то есть вариантов формулы всего $|\alpha_1| \times \dots \times |\alpha_n|$)

Определение (Независимые алгебры (σ -алгебры)). $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}$ - независимы, если $\forall A_i \in \mathcal{A}$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

Теорема 2.6. Конечные алгебры $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}$ независимы тогда и только тогда, когда независимы порождающие их разбиения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

Доказательство. \Rightarrow Разбиение есть подсистема порожденной алгебры. Из независимости алгебр следует независимость разбиений.

Лемма 2.1. 1. Если события A и B независимы, то \bar{A} и B также независимы

2. Если A_1 и B независимы и A_2 и B независимы, а $A_1 A_2 = \emptyset$, то $A_1 + A_2$ и B независимы.

Доказательство. 1. A и B независимы, тогда

$$P(B\bar{A}) = P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$$

2. A_i и B независимы: $P(A_i B) = P(A_i)P(B)$

$$P((A_1 + A_2)B) = P(A_1)P(B) + P(A_2)P(B) = P(B)(P(A_1) + P(A_2)) = P(B)P(A_1 + A_2)$$

►

\Leftarrow Каждое событие из алгебры - сумма попарно несовместных событий из соответствующего разбиения.
Обратный вывод по лемме. ►

Замечание. Каждое событие A порождает разбиение $A + \bar{A} = \Omega$, порождающее алгебру $\mathcal{A}(A)$. Из леммы вытекает, что независимость событий A_1, \dots, A_n и независимость порожденных ими алгебр $\mathcal{A}(A_1), \dots, \mathcal{A}(A_n)$ эквивалентны.

2.4 Независимые испытания

Если имеем n независимых испытаний, то можно построить одно большое вероятностное пространство, элементы которого являются прямыми произведениями соответствующих Ω_i и т.д.

Подалгебры должны быть независимы, тогда такое пространство всегда можно построить

Прямое произведение вероятностей:

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), p(\omega) = p_1(\omega_1) \dots p_n(\omega_n), \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

$$P = P_1 \times \dots \times P_n$$

События являются "прямоугольниками":

$$A = A_1 \times \dots \times A_n$$

состоит из векторов $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i \in A_i \in \mathcal{A}$

Вероятность A :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in A_1} p_1(\omega_1) \dots \sum_{\omega \in A_n} p_n(\omega_n) = \prod_{k=1}^n P_k(A_k)$$

Пусть \mathcal{A}' - подалгебра \mathcal{A} , где все $A_i = \Omega_i$ для всех компонент прямоугольника ($i \neq k$)

События из этой алгебры (A'_i) изоморфны событиям из A_i .

$$P(A'_i) = P_i(A_i)$$

Событие A является пересечением событий $A'_k, k = 1, \dots, n$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A'_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A'_k)$$

Поэтому алгебры A'_j независимы.

2.4.1 Схема Бернулли

n испытаний, в котором либо успех, либо неудача (неуспех) (в каждом испытании вероятность успеха и неудачи равны), тогда вероятность элементарного события (вектора из событий каждого испытания, он булев, так как каждое ω_i либо 0, либо 1)

$$p(\omega) = \prod_{i=1}^n p^{\omega_i} q^{1-\omega_i}$$

Обозначим $B_k = \{\omega : \omega_1 + \dots + \omega_n = k\}$

Для $\omega \in B_k$ $p(\omega) = p^k q^{n-k}$

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 1, \dots, n - \text{Биномиальное распределение}$$

Еще есть полиномиальная схема. там не по 2 исхода, а по r .

3 Случайные величины

Определение (Случайная величина). Случайной величиной (СВ) $X(\omega)$ называется функция элементарного события ω с областью определения Ω и областью значений \mathbb{R} такая, что событие $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} при любом действительном $x \in \mathbb{R}$. Значения x функции $X(\omega)$ называются реализациями СВ $X(\omega)$.

Определение (Алгебра, порожденная случайной величиной). Пусть $x_1 < \dots < x_k$ - значения, принимаемые случайной величиной ξ . Каждая такая величина определяет разбиение из событий $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$. Т.к $x_i \neq x_j$, то $A_i A_j = \emptyset$. Сумма - достоверное событие Ω .

Разбиение порождает алгебру событий

$$\{\xi \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$$

, B - числовое множество.

Определение (Закон распределения). Любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных со случайной величиной.

3.1 Примеры законов распределения

1. Биномиальный закон
2. Гипергеометрическое распределение: распределение числа белых шаров ξ в выборке без возвращения объема n из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров

$$P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, m = 0, 1, \dots, \min(n, M)$$

3. Равномерное распределение

Определение (Математическое ожидание). Математическое ожидание случайной величины $\xi = xi(\omega)$ обозначается $M\xi$ и определяется как сумма

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) p(\omega)$$

среднее значение ξ

3.2 Свойства мат. ожидания

1. $MI_A = P(A)$

Доказательство.

$$MI_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = P(A)$$

►

2. Аддитивность: $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

Доказательство. ►

Из этого также следует конечная аддитивность.

3. Для любой константы C

$$M(C\xi) = cM\xi, \quad MC = C$$

4. Если $\xi \geq \eta$, то $M\xi \geq M\eta$. $\xi \geq 0 \& M\xi = 0 \implies P\{\xi = 0\} = 1$

5. Математическое ожидание ξ выражается через закон распределения случайной величины ξ формулой

$$M\xi = \sum_{i=1}^k x_i P\{\xi = x_i\}$$

Подставляя в числовую функцию случайную величину, мы также получаем случайную величину. Например, если $\eta = g(\xi)$, то

$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^k g(x_i) P\{\xi = x_i\}$$

При этом

$$g(x_i) = \sum_{i=1}^k g(x_i) I_{\xi=x_i}$$

Определение (n -ый момент случайной величины). Математическое ожидание $M\xi^n$ называется n -ым моментом (или моментом n -ого порядка) случайной величины ξ (или ее закона распределения).

Определение (Абсолютный n -ый момент). Математическое ожидание $M|\xi|^n$.

Определение (Центральный момент n -ого порядка). $M(\xi - M\xi)^n$

Определение (Абсолютный центральный момент n -ого порядка). $M|\xi - M\xi|^n$

Определение (Дисперсия). $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$

Определение (Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение)). $\sqrt{D\xi}$

3.3 Свойства дисперсии

1. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

2. $D\xi \leq 0$ и $D\xi = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая константа c , что $P\{\xi = c\} = 1$

3. Для любой константы c $D(c\xi) = c^2 D\xi$, $D(\xi + c) = D\xi$

Теорема 3.1 (Неравенство Иенсена). Если числовая функция $g(x)$, то для любой случайной величины ξ

$$Mg(\xi) \leq g(M\xi)$$

Теорема 3.2 (Неравенство Ляпунова). Для любых положительных $\alpha \leq \beta$

$$(M|\xi|^\alpha)^{1/\alpha} \leq (M|\xi|^\beta)^{1/\beta}$$

Теорема 3.3 (Неравенство Коши-Буняковского).

3.4 Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p)$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda$$

3.5 Многомерные законы распределения

3.6 Независимость случайных величин

Определение (Независимость случайных величин). ξ_1, \dots, ξ_n называются независимыми, если порожденные ими алгебры

$$\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}$$

независимы.

Определение (Независимость случайных величин). ξ_1, \dots, ξ_n называются независимыми, если для любых $x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}$

$$P\{\xi_1 = x_{1j_1}, \xi_n = x_{nj_n}\} = \prod_{i=1}^n P\{\xi_i = x_{ij_i}\}$$

Теорема 3.4. Если случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы, а $g_i(x)$ - числовые функции, то случайные величины $\eta_1 = g_1(\xi_1), \dots, \eta_n = g_n(\xi_n)$ также независимы.

Теорема 3.5 (Мультипликативное свойство математических ожиданий). Если случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы, то

$$M\xi_1, \dots, \xi_n = \prod_{i=1}^n M\xi_i$$

Теорема 3.6 (Аддитивное свойство дисперсии). Если случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$$

3.7 Евклидово пространство случайных величин

Условное мат. ожидание $M(\xi|\eta)$ - ортогональная проекция ξ на линейное подпространство η

3.8 Условные математические ожидания

Определение (Условная вероятность). Условная вероятность $P(B|\mathcal{A}(\alpha))$ относительно $\mathcal{A}(\alpha)$ как случайную величину, которая принимает значение $P(B|A_k)$ при $\omega \in A_k$.

Определение (Условный закон распределения). Условный закон распределения η при заданном значении $\xi = x_k$ назовем набор условных вероятностей

$$P\{\eta = y_t|\xi = x_k\} = \frac{P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}, \quad t = 1, \dots, m$$

Определение (Условное мат.ожидание). Условное мат.ожидание η при заданном значении $\xi = x_k$

$$M\{\eta|\xi = x_k\} = \sum_{t=1}^m P\{\eta = y_t|\xi = x_k\} = \frac{\sum_{t=1}^m y_t P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}$$

Условное мат.ожидание является функцией от η . Случайная величина $M(\eta|\xi)$ - условное мат.ожидание при заданном ξ

Определение.

$$M[M(\eta|\xi)] = \sum_{k=1}^n P\{\xi = x_k\} M\{\eta|\xi = x_k\}$$

Теорема 3.7.

$$M[M(\eta|\xi)] = M\eta$$

Теорема 3.8 (Неравенство Чебышева). Для любого $x > 0$ имеют место неравенства:

$$P\{|\xi| \geq x\} \leq \frac{M|\xi|}{x}$$
$$P\{|\xi - M\xi| \geq x\} \leq \frac{D\xi}{x^2}$$

4 Случайные величины (общий случай)

Определение. Числовая функция $\xi = \xi(\omega)$ от элементарного события $\omega \in \Omega$ называется случайной величиной, если для любого числа x

$$\{\xi \leq x\} = \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Определение (Функция распределения случайной величины ξ).

$$F(x) = F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$$

, определенная при всех $x \in R$

При помощи этой функции можно выразить вероятность попадания ξ в интервалы.

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\{\xi < x\} : \sum_{n=1}^{\infty} \{x - \frac{1}{n-1} < \xi \leq x - \frac{1}{n}\}$$

$$P(\xi = x) = F(x) - F(x-0)$$

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1 - 0)$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0)$$

Теорема 4.1 (Свойства функции распределения). *Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:*

1. $F(x)$ не убывает
2. $F(x)$ непрерывна справа
3. $F(+\infty) = 1$
4. $F(-\infty) = 0$

Определение (Борелевская σ -алгебра). σ -алгебра \mathcal{A} числовых множеств, порожденная всевозможными интервалами вида $x_1 < x \leq x_2$, называется борелевской; множества A , входящие в \mathcal{A} , называются борелевскими.

Определение (σ -алгебра, порожденная случайной величиной ξ). Совокупность $\xi^{-1}(B)$ для всех борелевских множеств борелевской алгебры.

4.1 Примеры дискретных распределений

1. Биномиальное
2. Пуассоновское
3. Геометрическое

Теорема 4.2. Если ξ - случайная величина, а $g(x)$ - борелевская функция, то $\eta = g(\xi)$ есть случайная величина

Определение (Распределение вероятностей). $P_\xi(B)$, определенная для всех $B \in \mathcal{B}$, называется распределением вероятностей случайной величины ξ

Определение (величина с дискретным распределением). величина имеет дискретное распределение, если в точках разрыва функции распределения вероятности таковы, что их сумма $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Определение (Плотность распределения). $p(x) = p_\xi(x)$ - плотность распределения случайной величины ξ , если для любых $x_1 < x_2$

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x) dx$$

4.2 Свойства

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

5 Математическое ожидание

Определение (Простая случайная величина). Случайная величина простая, если она представима в виде

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{j=1}^m x_j I_{A_j}(\omega)$$

где события A_1, \dots, A_m составляют разбиение, т.е. $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\sum_{j=1}^m A_j = \Omega$

Определение (Мат. ожидание простой случайной величины).

$$M\xi = \sum_{j=1}^m x_j P(A_j)$$

Определение (Мат. ожидание неотрицательной случайной величины).

$$M\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi^n$$

Определение (Мат. ожидание в общем случае).

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,$$

где $\xi^+ = \xi I_{\{\xi \geq 0\}}$, $\xi^- = |\xi| I_{\{\xi < 0\}}$

5.1 Свойства мат. ожидания

1. Свойство линейности
2. Свойство положительности
3. Свойство конечности

5.2 Джентльменский набор абсолютно непрерывных распределений

1. Нормальное (гауссово) распределение)

Определение. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ) , $-\infty < a < \infty, \sigma > 0$, если она имеет плотность

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$ называется стандартным.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Для плотности истинно условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = |t = \frac{x}{\sqrt{2}}| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = |\text{гауссов интеграл}| = 1$$

2. Равномерное распределение

Определение. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ если ее плотность имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} C & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b \end{cases}$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = C \int_a^b dx = C(b-a) = 1,$$

то $C = b - a$.

3. Гамма-распределение

Определение (гамма распределение).

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} & x \geq 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0, \lambda > 0$ - параметры

При $\alpha = 1$ имеем показательное распределение

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = | -\lambda x = t, dt = -\lambda dx | = - \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{-\lambda} dt = e^t |_{-\infty}^0 = 1 - 0 = 1$$

$p_{\xi}(x)$	$F_{\xi}(x)$	$M(\xi)$	$D(\xi)$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}})]$	a	σ^2
$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\begin{cases} x^{\alpha-1} \frac{e^{-x\lambda}}{\lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	\dots	$\alpha \lambda^{-1}$	$\alpha \lambda^{-2}$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

5.3 Правила для вычисления

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx$$

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\xi}(x) dx$$

6 Производящие функции

Определение (Целочисленная случайная величина). Дискретная случайная величина ξ , принимающая только целые неотрицательные значения.

Закон распределения:

$$p_n = P\{\xi = n\}, n = 0, 1, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Определение (Производящая функция).

$$\phi_{\xi}(s) = Ms^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

Ряд абсолютно сходится при $|s| \leq 1$

6.1 Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} = -\ln(1-s), \quad f_{\xi}(t) = -\ln(1-e^{it})$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p), \quad \phi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (ps + 1-p)^n, \\ f_{\xi}(t) = (pe^{it} + 1-p)^n$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p^k (1-p)s^n = \frac{p}{1-(1-p)s}, \quad f_{\xi}(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda, \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n s^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}, \quad f_{\xi}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

7 Характеристические функции

129-137

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$$

$$|M\xi| \leq M|\xi|$$

Определение. Функция $f_{\xi}(t)$ называется характеристической функцией случайной величины ξ , если она имеет вид

$$f_{\xi}(t) = Me^{it\xi}$$

Если ξ - целочисленная случайная величина, то $\phi_{\xi}(z) = Mz^{\xi}$

$$f_{\xi}(t) = Me^{it\xi} = M(e^{it})^{\xi} = \phi_{\xi}(e^{it})$$

(Свойства х.ф.)

$$1. |f_{\xi}(t)| \leq 1, f_{\xi}(0) = 1$$

$$2. f_{\xi} - \text{равномерно непрерывна по } t$$

$$3. f_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi)} e^{itb} = e^{itb} Me^{i\xi(at)} = e^{itb} f_{\xi}(at)$$

$$4. \xi_1, \dots, \xi_n - \text{независимы, тогда}$$

$$f_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(t)$$

$$Me^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} = M \prod_{i=1}^n e^{it\xi_i} = \prod_{j=1}^n Me^{it\xi_j} = \prod_{j=1}^n f_{\xi_j}(t)$$

$$5. f_{\xi}(-t) = \overline{f_{\xi}(t)}$$

$$Me^{-it\xi} = \overline{Me^{it\xi}} = \overline{f_{\xi}(t)}$$

$$6. \exists m_1, \dots, m_n = M\xi^n \text{ (существуют первые } n \text{ моментов), тогда}$$

$$f_{\xi}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} m_k + R_n(t),$$

где $R_n(t) = o(t^n)$ при $t \rightarrow 0$

7.

$$\zeta \begin{cases} \xi, p \\ \eta, 1-p, \end{cases} \quad p \in (0, 1)$$

$$f_{\zeta}(t) = pf_{\xi}(t) + (1-p)f_{\eta}(t)$$

Пример. 1. $\cos(t)$

мы не знаем косинус...

$$\xi = \begin{cases} -1 & p = 1/2 \\ 1 & p = 1/2 \end{cases} \quad \text{Бернуллиевская случайная величина}$$

$$Me^{it\xi} = \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} = \cos t$$

2. $\cos^3(t)$

свойство про независимость

3. $\frac{\cos(t) + \cos(2t)}{2}$

свойство про независимость, свойство про выпуклую комбинацию (3)

4. e^{-t^4}

шестое свойство, по формуле Тейлора

$$e^{-t^4} = 1 - t^4 + o(t^4)$$

функция обращения - слишком тяжело, проверяем по свойствам а потом мучаемся (Фурье, Лаплас?)

$\xi = C$ с вероятностью 1

$$Me^{i\xi t} = e^{iCt}$$

Замечание. В силу 6 свойства, можно обобщить - если моменты до второго равны 0, то уже не характеристическая функция. (сравниваем с х.ф тождественного нуля, а t^4 высоко)

1. Стандартное распределение

$$f_{\xi}(t) = e^{-t^2/2}$$

можно получить нормальное при помощи 3 свойства.

2. равномерное на $[a, b]$:

$$f_{\xi} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

3. Гамма распределение с параметром α

$$f_{\xi}(t) = (1 - it)^{-\alpha}$$

многозначная функция - нужно выделять ветвь

7.1 Абсолютно непрерывный случай

$$f_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx \quad \text{Преобразование Фурье}$$

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_{\xi}(t) dt \quad \text{Обратное преобразование Фурье}$$

Замечание (Вырожденное распределение).

$$P\{\xi = C\} = 1, \quad f_{\xi}(t) = e^{itC}$$