Содержание

1 Определение графа. Примеры графов. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях

Определение. Граф (неориентированный) состоит из непустого конечно множества V и конечного множества E неупорядоченных пар элементов из V (записывается G = (V, E)).

Элементы множества $V = V_G$ называются **вершинами**, а элементы множества $E = E_G$ - **ребрами** графа G. Те и другие называются **элементами** графа.

Определение. Если $\{u, v\} \in E$, то будем записывать $e = uv$ и говорить, что вершины u и v смежны, а вершина u и ребро e инцидентны (так же, как вершина v и ребро e). Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

Определение. Степенью вершины v в графе G называется число ребер, инцидентных вершине v (обозначается $d_G(v) = d(v)$).

Вершина степени 0 - изолированная, вершина степени 1 - висячая. Минимальная и максимальная степени вершин графа G обозначаются $\delta(G), \Delta(G)$.

Последовательность степеней вершин графа G, выписанных в порядке неубывания называется степенной последовательностью или вектором степеней графа G.

Определение. Кратные ребра - два и более ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин.

Определение. Петли - ребра, соединяющие вершины сами с собой.

Определение. Мультиграф - граф с кратными ребрами

Определение. Обыкновенный граф - граф без петель и кратных ребер.

Примеры графов:

1. Граф G = (V, E) с n вершинами и m ребрами называется (n, m)-графом, (1, 0)-граф называется тривиальным.
2. Пустой граф - O_n
3. Полный граф $K_n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$
4. Двудольный граф $G = (V_1, V_2; E)$
5. Полный двудольный граф - $K_{p,q}$
6. Звезда - полный двудольный граф $K_{1,q}$
7. Простой цикл C_n
8. Регулярный (однородный) граф - граф, все вершины которого имеют одну и ту же степень. Кубические графы - 3-регулярные
9. Графы многогранников

Лемма 1.1 (О рукопожатиях). *Сумма степеней всех вершин произвольного графа $G = (V, E)$ - четное число, равное удвоенному числу его ребер:* $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$

Доказательство. Индукция по числу ребер.
База: если в графе G нет ребер, то $\sum_{v \in V} d_G(v) = 0$.
Предположим, что формула верна для любого графа, число ребер в котором не превосходит $m \leq 0$.
Пусть $|E| = m + 1$. Рассмотри произвольное ребро $e = uv \in E$ и удалим его из графа G. Получим граф $G' = (V, E'), |E'| = m$. По предположению индукции $\sum_{v \in V} d_{G'}(v) = 2|E'| = 2m$
Тогда $\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} d_G(v) + 2 = 2m + 2 = 2|E|$. ▶

Теорема имеет место быть и для мультиграфов.

Следствие. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

2 Маршруты, цепи, циклы. Лемма о выделении простой цепи. Лемма об объединении простых цепей

Определение. Маршрутом, соединяющим вершины u, v (или (u,v)-маршрутом) называется чередующаяся последовательность вершин и ребер графа

$$(u = v_1, e_1, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1} = v)$$

такая, что $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1, \ldots, k$. Маршрут замкнут, если $v_1 = v_{k+1}$.

Определение. Цепь - маршрут, в котором все ребра различны.

Определение. Простая цепь - маршрут, в котором все вершины различны(м. б. кроме 1 и последней). (P_k)

Определение. Цикл - замкнутая цепь.

Простой цикл - замкнутая простая цепь. (C_k)

Лемма 2.1 (О выделении простой цепи). *Всякий незамкнутый (u,v)-маршрут содержит простую (u,v)-цепь.*

Следствие. Всякий замкнутый маршрут содержит простой цикл.

Лемма 2.2 (Об объединении простых цепей). *Объединение двух несовпадающих простых (u, v)-цепей содержит простой цикл.*

Следствие (Свойство циклов). Если C и D - два несовпадающих простых цикла, имеющих общее ребро e, то граф $(C \cup D) - e$ содержит простой цикл.

Расстояние - это метрика.

3 Эйлеровы графы. Критерий существования эйлерова цикла (теорема Эйлера)

Пусть $G = (V, E)$ - произвольный, возможно мультиграф.

Определение. Цикл в графе называется эйлеровым, если он содержит все ребра этого графа. Граф эйлеров, если содержит эйлеров цикл.

Теорема 3.1 (Эйлер). *В связном $G = (V, E)$ существует эйлеров цикл, если и только если все его вершины имеют четную степень.*

Теорема 3.2. *Цепь в графе G - эйлерова, если содердит все ребра графа. Граф, содержащий эту цепь, называется полуэйлеровым.*

Следствие (Эйлер). В связном графе существует (незамкнутая) эйлерова цепь тогда и только тогда, когда все его вершины за исключением, быть может, двух, имеют четную степень.

4 Гамильтоновы графы. Достаточные условия существования гамильтонова цикла (теоремы Оре и Дирака)

Определение. Простой цикл называется гамильтоновым, если содержит все вершины графа. Граф называется гамильтоновым, если он содержит гамильтонов цикл.

Теорема 4.1 (Оре). *Пусть $n \geq 3$. Если в n-вершинном графе G для любой пары u, v несмежных вершин выполнено неравенство $d(u) + d(v) \geq n$, то G - гамильтонов граф.*

Теорема 4.2 (Дирак). *Пусть $n \geq 3$. Если в n-вершинном графе G для любой вершины v выполнено неравенство $d(v) \geq n/2$, то G - гамильтонов граф.*

5 Изоморфизм графов. Помеченные и непомеченные графы. Теорема о числе помеченных n-вершинных графов

Определение. Графы $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ называются изоморфными ($G \cong H$), если между множествами их вершин существует взаимно однозначное соответствие $\phi : V_G \to V_H$, сохраняющее смежность:

$$\forall u, v \in V_G \quad u, v \in E_G \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E_H$$

Отношение изоморфизма - отношение эквивалентности

Определение. Граф **помеченный**, если его вершины отличаются одна от другой какими-либо метками. Если же графы различаются лишь с точностью до изоморфизма, говорят о **непомеченных** графах.

Теорема 5.1. *Число p_n различных помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин V равно $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$*

Теорема 5.2 (Формула Пойа). *q_n(количество непомеченных n-вершинных)$\sim \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$*

6 Проблема изоморфизма. Инварианты графа. Примеры инвариантов. Пример полного инварианта

Определение. Подграфом графа $G = (V, E)$ называется произвольный граф $H = (U, D)$ такой, что $U \subseteq V, D \subseteq E$ (обозначается $H \subseteq G$)

Определение. Подграф $H = (U, D)$ называется порожденным, если

$$\forall u, v \in U \quad uv \in D \Leftrightarrow uv \in E$$

Определение. Остовный подграф - это подграф графа G, содержащий все его вершины

G - U, G - D тоже подграфы.

Определение. Инвариант графа G - это величина $i(G)$ (число, набор чисел, или функция), связанная с графом и принимающая одно и то же значение на любом графе, изоморфном G, т.е. $G \cong H \Rightarrow i(G) = i(H)$. Инвариант называется полным, если для любых графов G и H $i(G) = i(H) \Rightarrow G \cong H$

[Примеры инвариантов]

1. n(G) вершины
2. m(G) ребра
3. $\delta(G)$ минимальная степень
4. Степенная последовательность (в порядке неубывания)
5. Определитель матрицы смежности, характеристический многочлен

Определение (Полный инвариант - миникод)**.** Пусть $G = (V, E), V = \{1, \ldots, n\}, A(G)$ - матрица смежности. Выпишем в определенном порядке лишь элементы, расположенные выше главной диагонали, например по столбцам:

$$a_{12}, a_{13}, a_{23} \ldots, a_{1n}, a_{2n} \ldots, a_{(n-1)n}$$

Полученное двоичное слово длины $\frac{(n-1)n}{2}$ называется двоичным кодом матрицы $A(G)$. Число

$$\mu(G) = a_{12}2^0 + a_{13}2^1 \cdots + a_{(n-1)n}2^{k-1}$$

называется каноническим кодом матрицы $A(G)$. Канонические коды одного и того же графа зависят от нумерации его вершин. Наименьший канонический код будем называть миникодом $\mu(G)$ графа G.

Миникод - число от 0 до $2^{\frac{(n-1)n}{2}} - 1$

Теорема 6.1. $(\mu(G), n(G))$ *- полная система инвариантов (миникод и число вершин графа).*

7 Связные и несвязные графы. Лемма об удалении ребра. Оценки числа ребер связного графа

Определение. Вершины u, v в графе G называются соединимыми, если в G существует (u, v)-маршрут.

Определение. Граф G называется связным, если любые его две вершины соединимы.

Тривиальный (1, 0)-граф по определению считается связным.

Определение. Компонента связности графа G - максимальный(по включению) связный подграф.

Определение. Ребро называется циклическим, если оно принадлежит некоторому циклу, и ациклическим в противном случае.

Лемма 7.1 (Об удалении ребра)**.** *Пусть $G = (V, E)$ - связный граф, $e \in E$.*

1. *Если e - циклическое ребро, то граф G - e связен;*
2. *Если e - ациклическое, то граф G - e имеет ровно две компоненты связности*

Следствие. Если граф $G = (V, E)$ имеет k компонент связности и $e \in E$, то граф G-e имеет k или k+1 компонент.

Лемма 7.2 (Об удалении вершины)**.** *В любом нетривиальном связном графе G существует вершина, после удаления которой граф остается связным.*

Следствие. В любом нетривиальном связном графе существует не менее двух вершин, после удаления каждой из которых граф остается связным.

Теорема 7.1 (Оценки числа ребер связного графа)**.** *Если G - связный (n, m)-граф, то*

$$n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

8 Плоские и планарные графы. Графы Куратовского. Формула Эйлера для плоских графов

Определение. Плоский граф - граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра - непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек вне вершин.

Определение. Планарный граф - граф, изоморфный некоторому плоскому.

Определение. Два графа называются гомеоморфными, если их можно получить из одного и того же графа с помощью разбиений ребер, т.е. замены некоторых ребер простыми цепями.

Графы Куратовского

Замечание. Графы $K_{3,3}$ и K_5 непланарны

Доказательство. $K_{3,2}$ - плоский, в нем по формуле Эйлера 3 грани независимо от способа изображения. Пытаемся добавить 6 вершину, подставляя ее в каждую грань, получаем каждый раз противоречие - невозможность соединить вершину с необходимыми. Аналогично для K_5. ▶

Теорема 8.1 (Понтрягин-Куратовский)**.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ или K_5*

Определение. Гранью плоского графа называется максимальное множество точек плоскости такое, что каждая пара из которого может быть соединена непрерывной линией, не пересекающей ребер графа.

Теорема 8.2 (Формула Эйлера для плоских графов)**.** *Для любого связного плоского графа G = (V, E) верно $n - m + l = 2$, где $n = |V|$, $m = |E|$, l - число граней*

Доказательство. Рассмотрим две операции перехода от связного плоского графа G к его связному плоскому подграфу, не изменяющие величины $n - m + l$

1. удаление ребра, принадлежащего сразу 2 граням (одна из которых может быть внешней) **уменьшает m и l на 1**
2. удаление висячей вершины (вместе с инцидентным ребром) **уменьшает m и n на 1**

Очевидно, что любой связный граф после этих операций может быть приведен к тривиальному, а для него формула верна $\implies$ верна и для данного ▶

9 Деревья. Теорема о деревьях (критерии)

Определение. Граф называется ациклическим, если в нем нет циклов.

Определение. Дерево - связный ациклический граф.

Определение. Лес - несвязный ациклический граф.

Теорема 9.1 (о деревьях №1)**.** *Для (n, m)-графа G следующие определения эквивалентны:*

1. *G - дерево*
2. *G - связный граф и $m = n - 1$*
3. *G - ациклический граф и $m = n - 1$*

*Доказательство.*1 → 2 Дерево - связный, планарный граф (имеет 1 грань) $\implies n - m + 1 = 2 \implies m = n - 1$

$2 \to 3$ Пусть граф не ациклический $\implies$ есть цикл и e - циклическое ребро. Тогда по лемме об удалении ребра граф $G - e$ также связен и имеет m - 1 = n - 2 ребер $\implies$ противоречие оценке числа ребер связного графа $\implies$ граф ациклический

$3 \to 1$ Обозначим число компонент связности - k. Пусть T_i - iтая компонента, является (n_i, m_i)-графом. Т.к T_i - дерево, то по ранее доказанному ($1 \to 2$) $m_i = n_i - 1, i = \overline{1,k} \implies n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k \implies k = 1 \implies$ граф связный ▶

Теорема 9.2 (о деревьях №2)**.** *Для (n, m)-графа G следующие определения эквивалентны:*

1. *G - дерево*
2. *G - ациклический граф и если ∀ пару несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно 1 цикл*
3. *∀ 2 вершины графа G соединены единственной простой цепью*

Доказательство. $1 \to 2$ В связном графе все несмежные вершины соединены простой цепью **(по лемме о выделении простой цепи)** $\implies$ добавление ребра e = uv приведет к образованию цикла, а два цикла образоваться не может в силу свойства циклов

$2 \to 3$ любые две несмежные вершины u,v графа G соединимы, иначе при добавлении ребра uv не появится цикл $\implies$ в силу леммы о выделении простой цепи любые две вершины соединены простой цепью. А она единственная, иначе по лемме об объединении простых цепей в графе G был бы цикл.

$3 \to 1$ из условия следует, что граф связен, а существование цикла противоречит условию единственности цепи $\implies$ граф ациклический.

▶

Лемма 9.1 (О листьях дерева)**.** *В любом нетривиальном дереве имеется не менее двух листьев*

Доказательство. $\forall v \in V \ d(v) \geq 1$

$\sum_{v \in V} = 2|E| = 2m = 2(n-1) = 2n - 2$

Если 2 листа - то у 2 вершин степень 1 и у остальных n-2 как минимум 2, а для меньшего количества листьев оценка суммы неверна

$\sum_{v \in V} \leq 2 + (n-2)2 = 2n - 2$ ▶

10 Перечисление деревьев. Теорема Кэли о числе помеченных n-вершинных деревьев

Теорема 10.1 (Кэли)**.** *Число помеченных деревьев с n вершинами равно* $t(n) = n^{n-2}$

11 Центр дерева. Центральные и бицентральные деревья. Теорема Жордана

Определение. Эксцентриситет вершины v в связном графе $G = (V, E)$ - $\epsilon(v) = \max_{u \in V} d(v, u)$ - расстояние от v до самой удаленной вершины.

Определение. Радиус связного графа - наименьший из эксцентриситетов $r(G) = \min_{v \in V} \epsilon(v)$

Определение. Вершина $v \in V$ называется центральной, если $\epsilon(v) = r(G)$

Определение. Множество всех центральных вершин графа называется его центром.

Теорема 11.1 (Жордан)**.** *Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.*

Определение. Дерево, центр которого состоит из 1 вершины, называется центральным (если из 2, то бицентральным)

12 Изоморфизм деревьев. Процедура кортежирования. Теорема Эдмондса

Теорема 12.1 (Теорема Эдмондса)**.** *Два дерева изоморфны ⇔ совпадают их центральные кортежи*

Доказательство. ⇒ Если деревья изоморфны, то любой изоморфизм биективно отображает V_1 на V_1' (листья каждого уровня, $V_2 = T - V_1$etc). Поэтому для соответствующих вершин совпадают уровень и их кортежи, в т.ч и центральные.

⇐ Пусть центральные вершины v и v' произвольных деревьев T и T' имеют одинаковые кортежи. По кортежу однозначно восстанавливаются кортежи смежных с v вершин низших уровней $(1, \ldots s)$, их количество и порядок следования, в поддереве T_v это все вершины, смежные с v, то же самое справедливо для вершин из T'. Таким образом, из совпадения центральных кортежей следует совпадение кортежей для вершин $v_j, v_j', j = 1, \ldots s$. После применения к каждой паре невисячих вершин v_j, v_j'получаем изоморфизм T_v, T_v'

Для центрального дерева доказательство закончено, а для бицентрального повторяем доказательство для второй пары центральных вершин.

▶

13 Вершинная и реберная связность графа. Основное неравенство связности

Определение. Вершинной связностью нетривиального графа G называется наименьшее число $\varkappa(G)$ вершин графа G, в результате удаления которых получается несвязный или тривиальный граф. Для тривиального графа полагаем $\varkappa(O_1) = 0$.

Определение. Реберной связностью нетривиального графа G называется наименьшее число $\lambda(G)$ ребер графа G, в результате удаления которых получается несвязный граф. Для тривиального графа полагаем $\lambda(O_1) = 0$.

Теорема 13.1 (Основное неравенство связности). *Для любого графа $G = (V, E)$*

$$\varkappa(G) \leq \lambda(G)$$

14 Отделимость и соединимость. Теорема Менгера

Определение. Пусть G = (V, E) - связный граф, s, t - две его несмежные вершины. Говорят, что множество вершин $W \subset V$ **разделяет** вершины s, t, если они принадлежат разным компонентам связности графа G - W.

Определение. Несмежные вершины s, t называются **k-отделимыми**, если k равно наименьшему числу вершин, разделяющих s и t. Говорят также, что отделимость вершин s, t равна k.

Определение. Две простые цепи, соединяющие вершины s, t называются вершинно-независимыми, если они не имеют общих вершин, отличных от s и t.

Определение. Вершины s, t называются l-соединимыми, если наибольшее число вершинно-независимых (s,t)-цепей равно l. Говорят также, что в этом случае соединимость вершин s, t равна l.

Теорема 14.1 (Менгер). *В связном графе несмежные вершины k-отделимы тогда и только тогда, когда они k-соединимы.*

15 Реберный вариант теоремы Менгера

Определение. G = (V, E) - связный граф, s, t - две его произвольные вершины. Две простые цепи, соединяющие s, t называются реберно независимыми, если они не имеют общих ребер.

Определение. Вершины s,t называются l-реберно-соединимыми, если наибольшее число реберно-независимых (s,t)-цепей равно l.

Определение. Множество ребер $R \subseteq E$ разделяет s, t, если s и t принадлежат разным компонентам связности графа G-R

Определение. Вершины s, t называются k-реберно-отделимыми, если k равно наименьшему числу ребер, разделяющему s и t.

Теорема 15.1. *В связном графе G две вершины k-реберно-отделимы тогда и только тогда, когда они k-реберно соединимы.*

16 Критерии вершинной и реберной k-связности графа (без доказательства)

Теорема 16.1. *Граф G k-связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена не менее, чем k вершинно-независимыми цепями.*

Теорема 16.2. *Граф k-реберно-связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена не менее, чем k-реберно-независимыми цепями.*

17 Ориентированные графы. Основные понятия. Ормаршруты и полумаршруты. Ориентированые аналоги теоремы Менгера

Определение. Ориентированный граф(орграф) G состоит из непустого конечного множества V и конечного множества $E \subseteq V \times V$ упорядоченных пар элементов множества V. Элементы множества E - дуги.

Если e = uv - дуга, то u - ее начало, а v - конец.

Определение. Полустепень исхода $d^+(v)$ вершины v - число дуг, выходящих из v, а полустепень захода $d^-(v)$ вершины v - число дуг, заходящих в v. Степень вершины - $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$

Лемма 17.1 (Орлемма о рукопожатиях). *Сумма полустепеней исхода всех вершин орграфа $G = (V, E)$ равна сумме полустепеней захода и равно числу дуг орграфа:*

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$$

Определение. Подграфом орграфа $G = (V, E)$ называется произвольный орграф $H = (U, D)$ такой, что $U \subseteq V, D \subseteq E$ (обозначается $H \subseteq G$).

Определение. Подграф $H = (U, D)$ называется порожденным, если

$$\forall u, v \in U \quad uv \in D \Leftrightarrow uv \in E$$

Определение. Орграфы $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ называются изоморфными ($G \cong H$), если между множествами их вершин существует взаимно однозначное соответствие $\phi : V_G \to V_H$, сохраняющее смежность:

$$\forall u, v \in V_G \quad u, v \in E_G \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E_H$$

Определение. Ориентированным (v_1, v_{k+1})-маршрутом (ормаршрутом) в орграфе G называется чередующаяся последовательность вершин и дуг

$$P = (v_1, e_1, \dots, e_k, v_{k+1})$$

в которой $e_i = v_i v_{i+1}$

Если в орграфе нет кратных дуг, то ормаршрут может быть задан последовательностью входящих в него вершин. В любом случае ормаршрут задается дугами.

Определение. Орцепь - ормаршрут, в котором все дуги различны.

Определение. Простая орцепь (путь) - ормаршрут, в котором все вершины различны. (м.б кроме 1 и последней)

Определение. Орцикл - замкнутая орцепь.

Определение. Контур - замкнутый путь.

Определение. Полумаршрут - последовательность вершин и дуг орграфа, если для $\forall i = \overline{1, k}$ $e_i = v_i v_{i+1} \in E$ $\vee e_i = v_{i+1} v_i \in E$

Аналогично определяются **полупуть и полуконтур**.

Определение. Орграф называется обыкновенным, если он не содержит петель и кратных дуг.

Определение. Орграф называется направленным, не имеющий симметричных пар дуг.

Определение. Основание орграфа G - неориентированный орграф, полученный снятием ориентации всех дуг.

Определение. Два (s, t)-пути называются вершинно-независимыми, если у них нет общих вершин, отличных от s и t, и независимыми по дугам, если они не имеют общих дуг.

Определение. Множество W вершин орграфа G называется (s, t)-разделяющим, если в орграфе G - W вершина t не достижима из s.

Определение. Множество R дуг орграфа G называется (s, t)-разделяющим, если в орграфе G - R вершина t не достижима из s.

Теорема 17.1. *G = (V, E) - слабо связный орграф. Для любой пары вершин $s, t \in V$ таких, что $st \notin E$, наименьшее число вершин в (s, t)-разделяющем множестве равно наибольшему числу вершинно-независимых (s, t)-цепей.*

Теорема 17.2. *G = (V, E) - слабо связный орграф. Для любой пары вершин $s, t \in V$ наименьшее число дуг в (s, t)-разделяющем множестве равно наибольшему числу независимых по дугам (s, t)-цепей.*

18 Ориентированные графы. Достижимость и связность. Три типа связности. Критерии сильной, односторонней и слабой связности орграфа

Определение. Если в орграфе G = (V, E) существует ориентированный (u, v)-маршрут, то говорят, что вершина v достижима из вершины u. Любая вершина считается достижимой из самой себя.

Определение. Орграф называется сильно связным(или сильным), если любые его две вершины взаимно достижимы.

Определение. Орграф называется односторонне связным, если для любой пары его вершин хотя бы одна достижима из другой.

Определение. Орграф называется слабо связным, если любые две его вершины соединены полумаршрутом.

Определение. Орграф называется несвязным, если он даже не является слабым.

Замечание. Орграф несвязен тогда и только тогда, когда его основание - несвязный граф.

Тривиальный орграф является сильным, односторонним и слабым.

Теорема 18.1 (Критерий сильной связности). *Орграф является сильно связным тогда и только тогда, когда в нем есть остовный замкнутый ормаршрут.*

Теорема 18.2 (Критерий односторонней связности). *Орграф является односторонне связным тогда и только тогда, когда в нем есть остовный ормаршрут.*

Теорема 18.3 (Критерий слабой связности). *Орграф является слабо связным тогда и только тогда, когда в нем есть остовный полумаршрут.*

19 Основные структуры данных для представления графов в памяти компьютера. Их достоинства и недостатки

1. Матрица инцидентности

   Классический способ представления графа в теории.

   $\Theta(nm)$ ячеек памяти, большинство из которых занято нулями.

   Ответ на вопрос "смежны ли некоторые вершины u, v?"или "существует ли вершина, смежная с данной вершиной v? $O(m)$.

2. Матрица смежности

   $\Theta(n^2)$ ячеек памяти

   Начальное заполнение матрицы - $\Theta(n^2)$

   "смежны ли некоторые вершины u, v? O(1).

   "существует ли вершина, смежная с данной вершиной v? $O(n)$.

3. Массив ребер или дуг

4. Списки соседних вершин (списки инцидентности)

5. Списки соседних вершин с перекрестными ссылками

6. Списки соседних вершин для орграфов

20 Влияние структур данных на трудоемкость алгоритмов (на примере алгоритма отыскания эйлерова цикла)

21 Задача о минимальном остовном дереве. Алгоритм Прима

22 Задача о кратчайших путях. Случай неотрицательных весов дуг. Алгоритм Дейкстры

23 Потоки в сетях. Увеличивающие пути. Лемма об увеличении потока

Определение. Пусть задана двухполюсная сеть $G = (V, E)$ с источником s, стоком t. Для произвольной вершины $u \in V$ обозначим

$$A(u) = \{v \in V : uv \in E\} \quad B(u) = \{v \in V : vu \in E\}$$

Потоком из s в t в сети G называется функция $f : E \to R$, удовлетворяющая условиям:

$$0 \leq f(e) \leq c(e) \forall e \in E$$

(условие допустимости)

$$\sum_{v \in A(u)} f(uv) - \sum_{v \in B(u)} f(vu) = \begin{cases} b & u = s \\ 0 & u \notin \{s, t\} \\ -b & u = t \end{cases} \qquad (1)$$

(условие баланса)

Определение. $b = b(f) \geq 0$ - величина потока. Поток называется максимальным, если $b(f^*) = \max\limits_{f-\text{поток}} b(f)$

Определение. f(e) - дуговые потоки. Дуга $e \in E$ называется насыщенной потоком f, если $f(e) = c(e)$, и пустой, если $f(e) = 0$

Лемма 23.1 (об увеличении потока). *Если для потока f в сети G существует увеличивающий путь P, то поток может быть увеличен.*

24 Алгоритм Эдмондса-Карпа построения максимального потока

25 Разрезы. Лемма о потоках и разрезах. Следствие

Определение (Разрез). Пусть $W \subseteq V, \overline{W} = V \backslash W$. Разрезом $(W, \overline{W})$ в сети G называется множество всех дуг вида $e = uv, u \in W, v \in \overline{W}$.

Определение (Разрез разделяет вершины). Говорят, что разрез $(W, \overline{W})$ разделяет вершины s и t, если $s \in W, t \in \overline{W}$.

Определение. Пропускной способностью разреза $(W, \overline{W})$ называется число $c(W, \overline{W}) = \sum\limits_{e \in (W, \overline{W})} c(e)$

Определение. Минимальным разрезом, разделяющим s и t, называется разрез с минимальной пропускной способностью среди всех таких разрезов.

Определение. Если $f : E \to R_+$ - поток из s в t, то потоком через разрез $(W, \overline{W})$ называется число $f(W, \overline{W}) = \sum\limits_{e \in (W, \overline{W})} f(e)$

Лемма 25.1 (о потоках и разрезах). *Для любого потока f из s в t и произвольного разреза $(W, \overline{W})$, разделяющего s и t, имеет место равенство*

$$b(f) = f(W, \overline{W}) - f(\overline{W}, W)$$

Следствие. В любой сети величина любого потока из s в t не превосходит пропускной способности любого разреза, разделяющего s и t.

26 Теорема Форда-Фалкерсона

Теорема 26.1. *В любой конечной сети $G = (V, E)$ величина максимального потока из s в t равна пропускной способности минимального разреза, разделяющего s и t.*

27 Два критерия максимальности потока.

Теорема 27.1 (I). *Поток f^* максимален, если и только если не существует пути, увеличивающего f^*.*

Теорема 27.2 (II). *Поток f^* максимален тогда и только тогда, когда он насыщает все дуги некоторого разреза $(W, \overline{W})$, оставляя пустыми все дуги обратного разреза $(\overline{W}, W)$.*

28 Приложения теории потоков в сетях. Задачи анализа структурно-надежных коммуникационных сетей

При проектировании сложных систем сетевой структуры необходимо учитывать требования, предъявленные к надежности этих систем. Важно отметить, что надежность сети не сводится только к функциональной надежности, т.е надежности выполнения отдельных функций, возлагаемых на систему, но и к структурной надежности, т.е свойству непрерывно сохранять работоспособность в некоторых условиях.

Определение. Коммуникационная сеть называется структурно надежной, если она сохраняет работоспособность при выходе из строя определенного количества узлов связи и/или линий связи.

При моделировании КС графом: узлы соответствуют вершинам, линии - ребрам. Выход из строя узла равнозначен удалению вершины и аналогично с удалением ребра. При этом исправной сети соответствует связный граф, а понятие "структурная надежность сети"переносится в понятие вершинной и/или реберной связности графа.

Определение. Локальная вершинная связность пары несмежных вершин s,t связного графа - наименьшее число $\varkappa(s,t)$ вершин, в результате удаления которых получается несвязный граф, причем вершины s, t лежат в разных компонентах связности. Множество удаленных вершин называется **(s,t)-разделяющим множеством вершин**.

Определение. Локальная реберная связность произвольных вершин s, t связного графа называется минимальное число $\lambda(s,t)$ ребер, в результате удаления которого получается несвязный граф, причем s, t лежат в разных компонентах связности. Множество удаленных ребер называют **(s,t)-разделяющим множеством ребер**.

Утверждение. Для любого связного графа, не являющегося полным

$$\varkappa(G) = \min_{s,t \text{ несмежные}} \varkappa(s,t); \quad \lambda(G) = \min_{s,t \in V} \lambda(s,t)$$

(Для K_n $\varkappa(G) = \lambda(G) = n-1$)

Доказательство. ▶

Пусть G нетривиальный связный граф, не полный. $\varkappa(s,t)$ для всех несмежных s, t = наибольшее число вершинно независимых простых (s, t)-цепей.

Теорема 28.1 (Реберный аналог теоремы Менгера в новых определениях). *$\lambda(s,t) \forall s,t \in V$ (нетривиальный, связный) = наибольшее число реберно независимых простых (s, t)-цепей*

Локальная связность пары вершин вычисляется с помощью потоковых алгоритмов Пусть G = (V, E), != K_n, неориентированный связный граф, $n \geq 3, (s,t) \in V$

Теорема 28.2 (Алгоритм 1, $\lambda(s,t)$).
1. *Заменим ребра на пару симметричных дуг, получим орграф G'*
2. *Положим пропуск. способность каждой дуги равна 1*
3. *Вычисляем максимальный поток s,t*

Теорема 28.3. *Величина $max(s,t)$ потока в сети G' = $\lambda(s,t)$ в G*

Доказательство. По теореме Форда-Фалкерсона максимальный поток G' = пропускная способность min разреза. Так как пропускная способность всех дуг = 1, то п.с минимального разреза = числу дуг в разрезе = минимальное число ребер в (s,t)-разделяющем множестве в графе G = $\lambda(s,t)$ ▶

G = (V, E) - n-вершинный связный, неориентированный граф, $n \geq 3$, (s,t) несмежные

Теорема 28.4 (Алгоритм 2, $\varkappa(s,t)$).
1. *Заменим ребра на пару симметричных дуг, получим орграф G'*
2. *Все вершины (не s, t) заменить на дугу v'v". Все старые дуги входят в v', выходят из v". Получим орграф G".*
3. *Положим пропуск. способность каждой дуги равна 1*
4. *Вычисляем максимальный поток s,t в G"*

Теорема 28.5. *Величина $max(s,t)$ потока в сети G" = $\varkappa(s,t)$ в G*

Доказательство. По теореме Форда-Фалкерсона максимальный поток в G" = пропускная способность min разреза. Так как пропускная способность всех дуг = 1, то п.с минимального разреза = числу дуг в разрезе.

Кроме того, заметим что в G" существует минимальный разрез, состоящий из дуг v' v", а число дуг в таком разрезе равно минимальному числу вершин в (s, t)-разделяющем множестве в графе G =$\varkappa(s,t)$ ▶

1. Трудоемкость вычисления $\lambda(s,t)$ определяется трудоемкостью потокового алгоритма в п.3 алгоритма 1.

   $b(f^*) = \lambda(s,t) \leq n-1 \implies$ применяем Эдмондса-Карпа $\implies T_{A1}(n) = O(n^2 b^*) = O(n^3)$
2. Трудоемкость вычисления $\lambda(G) = \min \lambda(s,t)$, всего C_n^2 пар $\implies$ трудоемкость $O(n^5)$
3. $T_{A2} = O(n^3)$ Вычислительная сложность $\varkappa(G) = O(n^5)$

29 Задачи комбинаторной оптимизации. Массовая и индивидуальная задачи. Трудоемкость алгоритма. Полиномиальные и экспоненциальные алгоритмы

Теория сложности вычислений строится для задач распознавания свойств. Такие задачи имеют только два возможных решения «да» и «нет».

Определение. Массовая задача распознавания P состоит из двух множеств: множества P_I всевозможных индивидуальных задач и множества P_Y всех индивидуальных задач с ответом «да», $P_Y \subseteq P_I$.

Типичным примером массовой задачи распознавания служит известная задача о гамильтоновом цикле, в которой требуется определить, содержит ли заданный обыкновенный неориентированный граф гамильтонов цикл.

Определение. Будем говорить, что алгоритм решает массовую задачу распознавания P, если он останавливается (т. е. заканчивает работу) на всех индивидуальных задачах I из P (т. е. для всех $I \in P_I$) и даёт ответ «да» для всех $I \in P_Y$ и только для них.

30 Задачи распознавания свойств. Детерминированные и недетерминированные алгоритмы. Классы P и NP. Проблема "P vs NP"

Определение (Класс P)**.** Класс P определяется как класс массовых задач распознавания, разрешимых полиномиальными алгоритмами. Другими словами, задача распознавания P принадлежит классу P, если и только если существует полиномиальный алгоритм который решает задачу P.

Определение (Недетерминированный алгоритм)**.** Недетерминированный алгоритм состоит из двух стадий — стадии угадывания и стадии проверки. На стадии угадывания по заданной индивидуальной задаче I происходит просто «угадывание» некоторой структуры S — подсказки.

Затем I и S вместе подаются на вход стадии проверки, которая представляет собой обычный детерминированный алгоритм и либо заканчивается ответом «да», либо ответом «нет», либо продолжается бесконечно (последние две возможности обычно не различают).

Определение. Говорят, что недетерминированный алгоритм решает задачу распознавания P, если для любой индивидуальной задачи $I \in P_I$ выполнено условие:

$I \in P_Y$ тогда и только тогда, когда существует такая подсказка S, угадывание которой для входа I приводит к тому, что стадия проверки, начиная работу на входе (I, S), заканчивается ответом «да».

Определение. Класс $\mathcal{NP}$ - это класс всех массовых задач распознавания, разрешимых недетерминированными алгоритмами за полиномиальное время.

Теорема 30.1. *$P \subseteq \mathcal{NP}$*

31 Полиномиальная сводимость задач распознавания. Свойства полиномиальной сводимости

Определение (Полиномиальная сводимость)**.** Пусть P, Q - две задачи распознавания и A - такой полиномиальный алгоритм, который для любой индивидуальной задачи $I \in P_I$ строит некоторую задачу $A(I) \in Q_I$. Если при этом

$$I \in P_Y \Leftrightarrow A(I) \in Q_Y,$$

то говорят, что задача P полиномиально сводится к задаче Q ($P \propto Q$)

32 NP-полные задачи распознавания. Теорема о сложности NP-полных задач. Примеры NP-полных задач

Определение ($\mathcal{NP}$-полная задача)**.** Задача распознавания Q называется $\mathcal{NP}$-полной, если $Q \in \mathcal{NP}$и для любой задачи $P \in \mathcal{NP}$ $P \propto Q$.

Определение. Класс всех $\mathcal{NP}$-полных задач обозначается $\mathcal{NPC}$(NP complete)

Теорема 32.1 (О сложности $\mathcal{NP}$-полных задач)**.**

1. *Если хотя бы одна $\mathcal{NP}$-полная задача полиномиально разрешима, то $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

2. *Если хотя бы одна задача класса $\mathcal{NP}$ трудно решаема (т. е $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$) то все $\mathcal{NP}$-полные задачи трудноразрешаемы.*