1 I

Определение (Задача линейного программирования)**.** Задачей ЛП называется задача поиска максимума или минимума линейной функции на множестве, которое описывается линейными ограничениями (равенствами и/или неравенствами)

Определение (Общая задача ЛП)**.** $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \# b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ - вектор переменных

Матричная запись:
$\begin{cases} f(x) = (c, x) \to \max(\min) \\ Ax \# b \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Определение (Допустимое решение задачи ЛП)**.** вектор $x \in R^n$, удовлетворяющий ограничениям задачи, называется допустимым решением задачи ЛП

Определение (Оптимальное решение задачи ЛП)**.** Допустимое решение $x^* \in D$ задачи ЛП называется оптимальным решением, если $f(x) \leq f(x^*) \, \forall x \in D$ в случае задачи максимизации и $f(x) \geq f(x^*) \, \forall x \in D$ в случае задачи минимизации

Определение (Разрешимая задача ЛП)**.** Задача ЛП называется разрешимой, если она имеет оптимальное решение.

Определение (Неразрешимая задача ЛП)**.** Задача ЛП называется разрешимой, если она не имеет оптимального решения.

Определение (Каноническая задача ЛП)**.** $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$

Определение (Стандартная (симметричная) форма)**.** $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$

Определение (Эквивалентные ЗЛП (ЗМП))**.** Две задачи ЛП P_1, P_2 называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению задачи P_1 соответствует некоторое допустимое решение задачи P_2 и наоборот, причем оптимальному решению одной задачи соответствует оптимальное решение другой задачи.

Теорема 1.1 (Первая теорема эквивалентности)**.** *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей каноническая ЗЛП.*

Теорема 1.2 (Вторая теорема эквивалентности)**.** *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей симметрическая ЗЛП.*

Определение (Система с базисом)**.** СЛАУ - СЛАУ с базисом, если в каждом уравнении имеется переменная с коэффициентом $+1$, отсутствующая в других уравнениях. Такие переменные будем называть базисными, остальные не базисными

Определение (ПЗЛП)**.** КЗЛП называется приведенной, если

1. СЛАУ $Ax = B$ является системой с базисом

2. Целевая функция выражена через небазисные переменные

Определение (Базисное решение)**.** Пусть $\overline{x}$ - решение $Ax = B$. Тогда вектор $\overline{x}$ называется базисным решением СЛАУ, если система вектор-столбцов матрицы А, соответствующая ненулевым компонентам вектора $\overline{x}$, ЛНЗ

Замечание. Если система однородная, то x = $\overline{0}$ - базисное решение

Определение (Базисное решение КЗЛП)**.** Неотрицательное базисное решение СЛУ называется базисным решением канонической задачи ЛП

Определение (Прямо допустимая симплексная таблица)**.** СТ называется прямо допустимой, если $a_{i0} \geq 0, i = 1, \ldots, m$ (bшки)

Определение (Двойственно допустимая симплексная таблица)**.** СТ называется двойственно допустимой, если $a_{0j} \geq 0, i = 1, \ldots, n+m$ (сшки)

Определение (Проверка на оптимальность в симплекс-методе)**.** Если $a_{0j} \geq 0$ для любого $j = 1, \ldots, n+m$, то конец - базисное решение x, соответствующее симплексной таблице, оптимально.

Определение (Проверка на неразрешимость в симплекс-методе)**.** Если существует столбец с номером $q \in \{1, ..., n+m\}$ такой, что $a_{0q} < 0$, и $a_{iq} < 0, i = 1, \ldots, m$, то конец - задача ЛП неразрешима

Определение (Выбор ведущего столбца в симплекс-методе)**.** Столбец с номером $q \in \{1, ..., n+m\}$ выбирается ведущим, если $a_{0q} < 0$. Если таких столбцов несколько, то выбирается любой из них.

Определение (Выбор ведущей строки в симплекс-методе)**.** Строка с номером $p \in \{1, ..., m\}$ выбирается ведущей, в соответствии с минимальным ключевым отношением

$$\frac{a_{p0}}{a_{pq}} = \min_{a_{iq}>0} \frac{a_{i0}}{a_{iq}}$$

Определение (Правило прямоугольника)**.**

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{iq}}{a_{pq}} a_{pj}, i = 0, \ldots, m, i \neq p, j = 0, \ldots, n+m$$

(в полной симплексной таблице)

Определение (Вспомогательная задача ЛП (в методе искусственного базиса))**.**

$$h(x,t) = -\sum_{i=1}^{m} t_i \to \max$$

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + t_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n + t_2 = b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n + t_m = b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, ..., n, t_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

Теорема 1.3 (Критерий разрешимости)**.** *Если целевая функция задачи ЛП ограничена сверху (снизу) на непустой множестве допустимых решений, то задача максимизации (минимизации) имеет оптимальное решение*

Определение (Двойственная задача). Для ЗЛП I двойственной задачей II является ЗЛП вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \leftrightarrow g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, l \leftrightarrow y_i \geq 0, i = 1...l,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = l+1, \ldots m \leftrightarrow y_i \in \mathbb{R}, i = l+1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, i = 1, \ldots p \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j, j = 1, \ldots, p$$

$$x_j \in \mathbb{R}, j = p+1, \ldots n \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j, j = p+1, \ldots, n$$

Задачу I называют прямой, а II - двойственной. Стрелки соответствуют сопряженным ограничениям

Теорема 1.4 (Первая теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач разрешима, то разрешима и другая, причем оптимальное значение целевых функций совпадает, т.е $f(x^*) = g(y^*)$, где x^*, y^* - оптимальные решения задач I, II соответственно*

Теорема 1.5 (Первый критерий оптимальности). *Вектор $x^* \in D_I$ является оптимальным решением задачи I $\Leftrightarrow \exists y^* \in D_{II}$ т.ч $g(y^*) = f(x^*)$*

Определение (Условия дополняющей нежесткости)**.** Будем говорить, что $x \in D_I, y \in D_{II}$ удовлетворяют УДН, если при подстановке в любую пару сопряженных неравенств хотя бы одно из них обращается в равенство. Это означает, что следующие характеристические произведения обращаются в 0:

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i)y_i = 0, i = 1, \dots m$$

$$x_i(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j) = 0, j = 1, \dots n$$

Теорема 1.6 (Вторая теорема двойственности). *$x^* \in D_I, y^* \in D_{II}$. оптимальны в задачах I, II тогда и только тогда, когда они удовлетворяют УДН.*

Теорема 1.7 (Второй критерий оптимальности (следствие)). *$x^* \in D_I$ является оптимальным решением I $\Leftrightarrow$ $\exists y^* \in D_{II}$ т.ч. x^* и y^* удовлетворяют УДН*

Определение (Малое (допустимое) изменение)**.** Малое (допустимое) изменение ресурса P1 - такое изменение $\Delta b_1 = b_1' - b_1$ для кот в задаче I' существует оптимальное решение той же структуры, что и оптимальное решение исходной задачи I

Определение (3-я теорема двойственности)**.** При допустимом изменении i-того ресурса приращение целевой функции прямо пропорционально изменению ресурса с коэффициентом пропорциональности, равным y_i^*

$$\Delta_i F = \Delta b_i y_i^*, \Delta_i F = F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + \Delta b_i, \dots, b_m) - F(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, \dots, b_m)$$

2 II

Определение (Выпуклое множество)**.** Множество называется выпуклым, если вместе с двумя его точками оно содержит отрезок, их соединяющий, или

$$\forall x^1, x^2 \in D \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad x^* = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in D$$

Определение (Выпуклая функция)**.** Функция $f : D \to R$ (D - выпкуло) называется выпуклой, если

$$\forall x^1, x^2 \in D, \forall \lambda \in (0,1) \quad f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Определение (Задача ВП)**.** :

$$\begin{gathered} f(x) \to \min \\ \phi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ x \in G \end{gathered}$$

Здесь ϕ_i, f - выпуклые в G функции, G - выпуклое замкнутое множество $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+)$

Определение (Условие Слейтера)**. (УС)**

$$\exists \overline{x} \in G, \phi_i(\overline{x}) < 0.$$

$$D = \{x \in G | \phi_i \leq 0, i = 1, \dots, m\} - \textbf{множество допустимых решений задачи ВП.}$$

УС гарантирует существование внутренних точек множества D.

Теорема 2.1 (О градиенте и производной по направлению). *Если $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, то предел*

$$\lim_{\lambda \to 0+0} \frac{f(x^0 + \lambda z) - f(x^0)}{\lambda},$$

существует и равен

$$f_z'(x^0) = (\nabla f(x^0), z)$$

Пусть задана точка $x_0 \in D$. $I_0 = \{i \mid \phi_i(x^0) = 0\}$ - множество индексов *активных* ограничений

Определение (Возможное направление)**.** Направление z называется возможным (допустимым) в x^0, если $(\nabla\phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0$

Определение (Прогрессивное направление)**.** Направление z называется прогрессивным в точке x^0, если

$$\begin{cases} (\nabla\phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0 \\ (\nabla f(x^0), z) < 0 \end{cases}$$

Теорема 2.2 (Критерий оптимальности ЗВП)**.** *$x^* \in D$ - оптимальное решение задачи ВП $\Leftrightarrow$ в точке x^* нет прогрессивного направления, т.е не существует $z \in R^n$:*

$$\begin{cases} (\nabla\phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0 \\ (\nabla f(x^0), z) < 0 \end{cases}$$

Определение (Каноническая ЗВП)**.** Канонической задачей ВП называется задача ВП с линейной целевой функцией, т.е $f(x) = (c, x) \to \min$

Теорема 2.3 (Теорема Куна-Таккера о седловой точке)**.** *$x^* \in G$ - оптимальное решение задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует $y^* \geq 0$, такое что (x^*, y^*) является седловой точкой функции Лагранжа*

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i\phi_i(x), y_i \geq 0, i = 1, \dots, m$$

Обозначим

$$\nabla_x L_x(x^*, y^*) = (\frac{\partial L}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial L}{\partial x_n})|_{(x^*,y^*)}$$

$$\nabla_x L_y(x^*, y^*) = (\frac{\partial L}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial L}{\partial y_n})|_{(x^*,y^*)} = (\phi_1(x^*), \dots, \phi_m(x^*))$$

Теорема 2.4 (Куна-Таккера в дифференциальной форме 1)**.** *Точка $x^* \geq 0$ является оптимальным решением задачи (I) тогда и только тогда, когда существует $y^* \geq 0$ такой, что выполняются следующие условия:*

1. *$\nabla_x L(x^*, y^*) \geq 0$, т.е. $\frac{\partial L(x,y^*)}{\partial x_j}|_{x=x^*} \geq 0, \forall j = 1, \dots, n$*
2. *$(x^*, \nabla_x L(x^*, y^*)) = 0$ т.е $\sum_{i=1}^n x_j^* \frac{\partial L(x,y^*)}{\partial x_j}|_{x^*} = 0$*
3. *$\nabla_y L(x^*, y^*) \leq 0$, т.е $\phi_i(x^*) \leq 0, i = 1, ..., m$*
4. *$(y^*, \nabla_y L(x^*, y^*)) = 0$, т.е $\sum_{i=1}^m y_i^*\phi_i(x^*) = 0$*

Теорема 2.5 (Куна-Таккера в дифференциальной форме 2)**.** *Точка $x^* \in R^n$ является оптимальной точкой задачи (II) тогда и только тогда, когда существует $y^* \geq 0$ такое, что выполняются условия*

1. *$\nabla_x L(x^*, y^*) = 0$, т.е. $\frac{\partial L(x,y^*)}{\partial x_j}|_{x=x^*} = 0, \forall j = 1, \dots, n$*
2. *$\nabla_y L(x^*, y^*) \leq 0$, т.е $\phi_i(x^*) \leq 0, i = 1, ..., m$*
3. *$(y^*, \nabla_y L(x^*, y^*)) = 0$, т.е $\sum_{i=1}^m y_i^*\phi_i(x^*) = 0$, или $\forall i : y_i^*\phi_i(x^*) = 0$*

Определение (Задача ЦЛП)**.**

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \# b_i, i = 1, \dots, m \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \tag{3}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n \tag{4}$$

$c_j, b_i, a_{ij} \in \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$

Определение (Правильное отсечение)**.** Доп. линейное ограничение - правильное отсечение, если

1. оно отсекает часть области D, содержащее нецелочисленное оптимальное решение x^0 текущей задачи ЛП.

2. В отсекаемой части области не должно быть ни одного допустимого решения задачи ЦЛП (ограничение сохраняет все допустимые целочисленные решения)

Определение (Отсечение Гомори)**.** Имеем оптимальную с-таблицу $a_{ij,i=0,\ldots,m,j=0,\ldots,n}$
Рассмотрим $a_{l0} \notin \mathbb{Z}$. l выбираем с наибольшей дробной частью по правилу "первая сверху"($l \in \{0, \ldots, n\}$)
Отсечение Гомори - дополнительное линейное ограничение

$$\sum_{j \in Nb} \{a_{lj}\} x_j \geq \{a_{l0}\}$$

, где Nb - множество индексов небазисных переменных, $\{x\}$ - дробная часть x