05.09.2022

Воспоминания $\mathbb{R}^n : M-$ подмножество ограниченных функций на $\mathbb{R}^n$

Определение. На M вводится равномерная норма $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$ Аналогично можно рассмотреть функции, ограниченные на подмножестве $X \subset \mathbb{R}^n$ - это $L_\infty(x)$ и на нем ввести норму $||\cdot||_\infty$.

Определение. $\{f_n\}$ - последовательность функций из $L_\infty(x)$, говорят, что $\{f_n\}$ сходится поточечно к $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f_n = f(x)$ для $\forall x \in X$.

Определение. $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \mathbb{N} \quad \forall n > \mathbb{N}\ ||f_n - f||_\infty < \epsilon$.

Замечание. $f_n \to f$ поточечно:

$\forall x \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \mathbb{N}(\epsilon, x) \quad \forall n > \mathbb{N}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

$f_n \rightrightarrows f$ равномерно:

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \mathbb{N}(\epsilon) \quad \forall n > \mathbb{N}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Пример. $f_n = x^n$ на $[0;1] : f_n \to f, f_n \not\rightrightarrows f$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

.

1 Интегралы, зависящие от параметра

$\sqsupset f(x,y) : [a,b] \times Y$

Для $\forall y \in Y f_y(x) = f(x,y) - \sqsupset$ она $\in R([a,b])$ (интегрируема) $\implies \forall \alpha$ и $\beta \in [a,b]$ определена функция $F(y,\alpha,\beta) = \int_a^b f_y(x)dx = \int_a^b f(x,y)dx$

$F(y,\alpha,\beta)$ - функция, заданная интегралом, зависящим от параметра

$[F(y,a,b)$ - частный случай функции$]$

1.1 Равномерная сходимость

Определение. $X \times Y \subset \mathbb{R}^2, f(x,y)$ определена на $X \times Y$, пусть y_0 - предельная точка Y

1. пусть $\forall x \in X \quad \exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) := \phi(x)$
2. пусть $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon)$ такая что $|y - y_0| < \delta |f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon$ для $\forall x \implies$ тогда говорят, что $f(x,y)$ равномерно сходится к $\phi(x)$

Замечание. $\{f_n(x)\} : f(x,n) := f_n(x)$

$y \in Y, y_0 = \infty$ и тогда равномерная сходимость $f(x,n)$ на X $\iff$ равномерно сходится $\{f_n(x)\}$ "игреками нумеруем функции"

Теорема 1.1 (Свойства равномерной сходимости)**.** $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, y_0$ *- предельная точка* Y

1. *$f(x,y)$ равномерно на X сходится к $\phi(x)$ тогда и только тогда, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) : \forall x \in X \forall y', y'' \in Y\ |f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ [Критерий Коши]*

2. *$f(x,y)$ равномерно по X стремится к $\phi(x)$ так, что $\{y_n\}$ так что $y_n \longrightarrow y_0$ - последовательность $\{f(x,y_n)\}$ равномерно сходится к $\phi(x)$ [сходимость по Гейне]*

3. *Если при $\forall y$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x (интегрируема) и $f(x,y)$ равномерно сходится к $\phi(x)$, то $\phi(x)$ - непрерывна и интегрируема*

4. *$\sqsupset x_0, y_0$ предельные точки X и Y, $f(x,y)$ равномерно по x сходится к $\phi(x)$,*
   $\sqsupset \forall y \in Y \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) =: \psi(y)$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} \psi(x) [= \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)]$

Доказательство. 1. $\lhd \Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) =: \phi(y)$

$|f(x,y') - f(x,y'')| = |f(x,y') - \phi(x) - f(x,y'') + \phi(x)| \le |f(x,y') - \phi(x)| + |f(x,y'') - \phi(x)|$

$\Leftarrow x \in X |f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ при $\begin{matrix} |y_0 - y'| < \delta \\ |y_0 - y''| < \delta \end{matrix}$ $\Leftarrow$ при $\forall x \exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) =: \phi(x)$

$|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$, $y'' \to y_0$

$|f(x,y') - \phi(x)| \le \epsilon$,$f(x,y) \rightrightarrows \phi(x)$

2. Необходимость очевидна

   Достаточность: $\{y_n\} \to y_0$

   $\{f(x,y_n)\} \to \phi(x)$, пусть $|y_0 - y_n| < \delta = \frac{1}{n} \implies y_n \to y_0$

   и $|f(x,y_n) - \phi(x)| > \epsilon$; $f(x,y_n) \nrightarrow \phi(x)$ противоречие

3. $\sqsupset \{y_n\} \to y_0, f_n(x) = f(x,y_n)$

   $f_n(x)$ равномерно сходится к $\phi(x)$ по 2

   Далее $\phi(x)$ равномерный предел хороших функий $\implies \phi(x)$ хорошая

4. $f(x,y) \rightrightarrows \phi(x), \sqsupset \epsilon > 0$, выберем $\delta > 0$ такое что:

   $|y_0 - y'| < \delta$ и $|y_0 - y''| < \delta \implies$

   $|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ по к. Коши

   $x \to x_0 : |\psi(y') - \psi(y'')| \le \epsilon \implies$

   для $\psi(y)$ верен критерий Коши $\implies$

   $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \psi(y) = A = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$

   $|f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon, |\psi(y) - A| < \epsilon$ если $|y - y_0| < \delta$

   $|\phi(x) - A| \le |\phi(x) - f(x,y)|_{\le\epsilon} + |f(x,y) - \psi(y)|_{<\epsilon,\text{т.к дельты}} + |\psi(y) - A|_{\le\epsilon} \le 3\epsilon$

   при $x \to x_0 \implies \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = A$

▶

1.2 Теоремы о непрерывности/дифференцируемости/интегрируемости по параметру

$f(x,y) : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}, y_0$ - предельная точка Y и $f_y(x) = f(x,y)$ - интегрируема на $[a,b]$
$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Теорема 1.2 (О предельном переходе)**.** *Если кроме того, что $f(x,y)$ равномерно на $[a,b]$ стремится к $\phi(x)$ при $y \to y_0$, то $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx$*

Доказательство. $\lhd\phi(x)$ - равномерный предел, непрерывен

$f_y(x) \implies \phi(x)$ - интегрируема, $\sqsupset\epsilon > 0 \quad \delta(\epsilon) > 0$ выбрано из определения равномерной сходимости

$|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \phi(x)dx| = |\int_a^b (f(x,y)-\phi(x))dx| \leq \int_a^b |f(x,y)-\phi(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$ если $|y-y_0| < \epsilon$

$\lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \phi(x)dx$ ▶

Теорема 1.3 (Непрерывность). *$f(x,y)-$непрерывна, $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R} \implies$*
$f(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на $[c,d]$

Доказательство. $\lhd[a,b]\times[c,d]$ компакт $\implies f(x,y)$ равномерно непрерывна на компакте

$\forall\epsilon > 0: \begin{matrix} |x-x'| < \delta \\ |y-y'| < \delta \end{matrix} \implies |f(x,y) - f(x',y')| < \epsilon$

$x' = x, y' = y_0$

$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \epsilon$ при $|y-y_0| < \delta(\epsilon)$

$f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0) = \phi(x)$ равномерный предел не зависит от x

по теореме о предельном переходе:

$\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \phi(x)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx = F(y_0) \implies F$ непрерывна в $y_0 \in [c,d] \implies F$ непрерывна на $[c,d]$ ▶

09.09.2022

Теорема 1.4 (О дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра). *$f(x,y)$ - определена в $[a,b]\times[c,d]$ при $\forall y \in [c,d]$ функция $f_y(x) = f(x,y)$ непрерывна по x, $\sqsupset f'_y(x,y)\exists$ и непрерывна в прямоугольнике, тогда*
$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ и $F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$

Доказательство. $\lhd$ в силу непрерывности $f(x,y)$ по x, определена $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

$y_0 \in [c,d], F(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx$

$F(y_0 + \triangle) = \int_a^b f(x, y_0 + \triangle)dx$

$\frac{F(y_0+\triangle)-F(y_0)}{\triangle} = \int_a^b \frac{f(x,y_0+\triangle)-f(x,y_0)}{\triangle}dx$

По теореме Лагранжа, $\exists\theta \in (0,1)$ т.ч

$\frac{f(x,y_0+\triangle)-f(x,y_0)}{\triangle} = f'_y(x, y_0 + \theta\triangle)$

т.к F непрерывна $\implies$ равномерно непрерывна $\implies$ для $\epsilon > 0\exists\delta > 0 \quad \begin{matrix} |x'-x''| < \delta \\ |y'-y''| < \delta \end{matrix} \implies |f'_y(x',y') - f'_y(x'',y'')|$

$x' = x'' = x, y' = y_0 + \triangle\theta, y'' = y_0$,если $\triangle < \delta$

$|\frac{f(x,y_0+\triangle)-f(x,y_0)}{\triangle} - f'_y(x,y_0)| = |f'_y(x,y_0+\theta\triangle) - f'_y(x,y_0)| < \epsilon$ т.к $\delta(\epsilon)$

неравенство не зависит от точек, т.е

$\frac{f(x,y_0+\triangle)-f(x,y_0)}{\triangle} \rightrightarrows f'_y(x,y_0)$ равномерно по x

В силу теоремы о предельном переходе, получаем что $\int_a^b \frac{f(x,y_0+\triangle)-f(x,y_0)}{\triangle}dx \to \int_a^b f'_y(x,y_0)dx$

$\frac{F(y_0+\triangle)-F(y_0))}{\triangle} \to F'_y(y_0)$ ▶

Теорема 1.5 (О интегрируемости F(y)). *$\sqsupset f(x,y)$ непрерывна в $[a,b]x[c,d]$, тогда имеет место равенство*
$\int_c^d(\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx$

Доказательство. $\lhd\sqsupset\eta \in [c,d]$, покажем, что $\int_c^\eta(\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b(\int_c^\eta f(x,y)dy)dx$

$\int_c^\eta F(y)dy = \mathcal{F}(\eta) - \mathcal{F}(c), \mathcal{F}' = F$

Производная левой части по $\eta = F(\eta) = \int_a^b f(x,\eta)dx$
$\phi(\eta) := \int_c^\eta f(x,y)dy$ непрерывна по x
$\phi(x,\eta) \to \phi'_\eta(x,\eta)$
$\exists \Phi(x,\eta)' = \phi(x,\eta), \Phi'(x,\eta) = f$
$\phi(x,\eta) = \Phi(x,\eta) - \Phi(x,c)$
$\phi'_\eta = \Phi'_\eta = f \quad \phi'_\eta(x,\eta) = f(x,\eta)$

По предыдущей теореме $(\int_a^b \phi(x,\eta)dx)'_\eta = \int_a^b \phi'_\eta(x,\eta)dx = \int_a^b f(x,\eta)dx = F(\eta) \implies$ левая и правая часть могут отличаться лишь на const, но при $\eta = c$ обе части равны 0 $\implies C = 0$ ▶

Пример (1). $f(x,y) = x^y \quad [0,1]\times[a,b]$
т.к f - непрерывна, то $\int_0^1(\int_a^b x^y dy)dx = \int_a^b(\int_0^1 x^y dx)dy$
$\int_0^1(\int_a^b x^y dy)dx = \int_0^1 \frac{x^b}{lnx} - \frac{x^a}{lnx}dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{lnx}dx$
$\int_a^b(\int_0^1 x^y dx)dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}dy = \ln\frac{b+1}{a+1} \implies$ несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{lnx}dx$ сходится, т.к вычислен напрямую

$\lhd$ случай интегралов вида $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$

Теорема 1.6. $\exists f(x,y)$ *определена и непрерывна в прямоугольнике* $[a,b]\times[c,d]$
$x = \alpha(y); x = \beta(y)$ *непрерывны и не выходят за пределы прямоугольника*
Тогда $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ *непрерывен*

Доказательство. $\lhd y_0 \in [c,d]$
$F(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx$
т.к $\beta(y_0), \alpha(y_0) = C$, то
$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{F}(y) \to \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx = \widetilde{F}(y_0)$
$|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx| \le \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} |f(x,y)|dx \le M|\beta(y) - \beta(y_0)| \to 0$, где $M \le |f(x,y)|$, при $y \to y_0$
при $y \to y_0 \quad F(y) \to \widetilde{F}(y)$
$F(y) \to \widetilde{F}(y) \to \widetilde{F}(y_0) = F(y_0)$ ▶

Теорема 1.7. $\exists f(x,y)$ *определена в* $[a,b]\times[c,d]$ *имеет в ней непрерывную производную* $f'_y(x,y)$
$\alpha'(y)$ *и* $\beta'(y)$ *- непрерывны, тогда* $F'_y(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y)$

Доказательство. $F(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx$
$(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx)'_y = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y)dx$ т.к пределы постоянные
$\frac{\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - 0}{y - y_0} = \frac{f(\widetilde{x},y)(\beta(y)-\beta(y_0))}{y-y_0}[\widetilde{x}$ между $\beta(y)$ и $\beta(y_0)]$
при $y \to y_0 \frac{\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx}{y-y_0} \to f(\beta(y_0),y_0)\beta'(y_0)$, т.е
$(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx)'_y = f(\beta(y),y)\beta'(y)$, аналогично со вторым интегралом ▶

Теорема 1.8. *Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Доказательство. (Гаусса)
$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_k \in \mathbb{C}$
$x = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad x^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$
$f(x) = P(x) + iQ(x), \quad P(x), Q(x) \in \mathbb{R}$
покажем, что для некоторого x $P^2(x) + Q^2(x) = 0$
$\exists P^2 + Q^2 \ne 0, \exists U = \arctan\frac{P}{Q}$

$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{(\frac{\partial P}{\partial r}Q - P\frac{\partial Q}{\partial r})\frac{1}{Q^2}}{1+\frac{P^2}{Q^2}} = \frac{\frac{\partial P}{\partial r}Q - P\frac{\partial Q}{\partial r}}{P^2+Q^2}$
$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \theta}Q - P\frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2+Q^2}$
$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = \frac{H(r,\theta)}{(P^2+Q^2)^2}$, если $P^2 + Q^2 \neq 0$
$I_1 = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} d\theta = \int_0^R \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_0^{2\pi} dr$
$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} dr = \int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_0^R d\theta > \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi \neq I_1$
$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}$ - непрерывна
$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \theta}Q - P\frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2+Q^2} = \frac{nr^{2n}+\dots}{r^{2n}+\dots} \underset{R\to\infty}{\to} n$
$f(x) = x^n + ase \dots = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) + r^{n-1} \dots$
$P = r^n \cos n\theta + r^{n-1} \dots, \quad Q = r^n i \sin n\theta + r^{n-1} \dots$
Можно взять R настолько большим, что $\frac{\partial U}{\partial \theta} > \frac{1}{2}$
$I_1 \neq I_2$ противоречие, $\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \implies P^2 + Q^2 = 0$ ▶

12.09.22

1.3 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

$\int_a^\omega F(x)dx$ - несобственный, если $\omega = \pm\infty$ или $f(x)$ не ограничена в окрестности ω
$\sqsupset f(x,y)$ определена на множестве $[a,\omega) \times Y$
Для всех $y \in Y$ функция $f_y(x) = f(x,y)$ несобственно интегрируема на $[a,\omega)$, тогда $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx = \lim\limits_{b\to\omega} \int_a^b f(x,y)$

Определение. $f(b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$, тогда сходимость F(y) равносильна существованию предела $\lim\limits_{b\to\omega} F(b,y) = F(y) = F(\omega,y)$

Определение. F(y) называется равномерно сходящейся относительно y на Y, если $\forall \epsilon \quad \exists \delta(\epsilon)$: $\forall y \in Y \quad \forall b \in (a,\omega) |b-\omega| < \delta \implies |F(b,y) - F(y)| < \epsilon$
$F(b,y) \rightrightarrows_{b\to\omega} F(y)$

Пример. $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$ сходится $\forall y \in Y$
$\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx = F(y) = \int_0^b ye^{-xy}dx = -e^{xy}\Big|_{x=b}^{x=\infty} = e^{-by} = |F(b,y) - F(y)| = \frac{1}{e}, y = \frac{1}{b}$
нет равномерной сходимости
Если $y \in [\epsilon, +\infty), \epsilon > 0$, на этом луче сходимость будет равномерной
$e^{-by} < e^{-b\xi} \to 0, e^{-b\xi} < \epsilon$
$b > -\frac{\ln\epsilon}{\xi}, b \to \infty$

Замечание. $\sqsupset - \{b_n\}$ - последовательность сходится к ω согласно свойствам равномерной сходимости
$F(b,y) \rightrightarrows F(y) \leftrightarrow F(b_n,y) \rightrightarrows F(y)$
$a_n y \overset{\text{def}}{=} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x,y)dx, b_1 = a, b_j \geq a$
Тогда $F(y) = \sum_{n=1}^\infty a_n(y)$
Равномерная сходимость F(y) равносильна равномерной сходимости ряда

Теорема 1.9 (Признаки равномерной сходимости интеграла). *1. (Вейерштрасса) $f(x,y)$ определена на $[a,\omega) \times Y, \omega$ - особая точка f(x,y) и f(x,y) интегрируема на $[a,b] \subset [a,\omega)$ Если $\exists \phi(x) |f(x,y)| \leq \phi(x) \quad \forall x \in [a,\omega) \forall y \in Y$ и $\int_a^\omega \phi(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x,y)dx = F(y)$*

2. *(Дирихле) $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx, g(x,y)$ монотонно по x -> ω равномерно по y стремится к 0 и для $\forall$ отрезка $[a,b] \subset [a,\omega)$*

   $|\int_a^b f(x,y)dx| \leq L$, тогда F(y) сходится равномерно

3. *(Абель) $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$*

   Если $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно $g(x,y)$ монотонно по x равномерно по y сходится к своему пределу

Доказательство. 1. очевидно Для F(y) используем критерий Коши

2. $\int_{b'}^{b''} f(x,y)g(x,y)dx = g(b',y)\int_{b'}^{\xi} f(x,y)dx + g(b'',y)\int_{\xi}^{b''} f(x,y)dx, \xi \in (b',b'')$

   $g(b,y) \to 0$ равномерно по y $\implies \exists B$ такое что $\forall b', b'' > B$

   $|g(b',y)| < \frac{\epsilon}{2L} \quad |g(b'',y)| < \frac{\epsilon}{2L} \implies F(y)$ сходится равномерно

3. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно $\forall \epsilon > 0 \exists \delta \quad \forall b', b'' > B |\int_{b'}^{b''} f(x,y)dx| \widetilde{\epsilon}$

   т.к $g(x,y)$ равномерно сходится к G(y)

   $|g(x,y)| \leq M$ при x близком к ω

   $\widetilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2M}, |\int_{b'}^{b''} f(x,y)g(x,y)dx| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon \implies F(y)$ сходится равномерно

▶

Пример. $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{ex^2}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} x_0 = \sqrt{\frac{n}{3}} \quad \sup_{x \leq 0} f_n(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}}e^{-\frac{3}{2}} \to 0$

$f_n \rightrightarrows 0$

$\int_0^\infty 0dx = 0 \quad \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{ex^2}}dx = 0$

$\frac{1}{x} = t, dx = \frac{t}{t^2}dt$

$= \int_0^\infty nt^3 e^{-\frac{nt^2}{2}} \frac{1}{t^2}dt = \int_0^\infty nte^{\frac{nt^2}{2}}dt = -e^{\frac{nt^2}{2}} \Big|_0^\infty = 1$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

Теорема 1.10 (О предельном переходе). *$\sqsupset f(x,y)$ определена на $[a,\omega) \times Y$ для $\forall y \in Y$, интегрируема на $[a,b] \subset [a,\omega]$ равномерно относительно y сходится к функции $\phi(x)$ при $y \to y_0$ если $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$ $\lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \phi(x)dx = \int_a^\omega \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx$*

Доказательство. $F(b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$ это несобственный интеграл и для него верна теорема о о предельном переходе

$\lim_{y\to y_0} F(b,y) = \int_a^b \phi(x)\,dx$

$\lim_{b\to\omega} F(b,y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ - равномерно

$F(b,y)$ - для этой функции верны условии о перемене предельных переходов $\implies$

$\lim_{y\to y_0} \lim_{b\to\omega} \int_a^b f(x,y)dx = lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx$ ▶

Следствие: Если $f(x,y)$ монотонно по y $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \phi(x)$ - непрерывны, тогда

$\int_a^\omega \phi(x)dx \rightrightarrows \int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно

$\lim_{y\to y_0} F(y) = \int_a^\omega \phi(x)dx$

Доказательство. $f(x,y) \to \phi(x) \quad y \to y_0 \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta : |y - y_0| < \delta \implies |f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon$

$\sqsupset f(x,y)$ возрастает по y, тогда $F(b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$ возрастает по y

но $f(x,y) \leq \phi(x) \implies F(b,y) \leq \int_a^b \phi(x)dx \leq \int_a^\omega \phi(x)dx \implies \lim_{b\to\omega} F(b,y) = \int_a^\omega f(x,y)dy$ - сходится

Равномерность по Вейерштрассу ▶

Теорема 1.11 (О непрерывности интеграла). *$\sqsupset f(x,y)$ - определена на $[a,\omega) \times [c,d]$ и непрерывна*

$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно y на [c,d]

Тогда F(y) - непрерывная функция на [c,d]

15.09.22

Доказательство. ◁ Пусть $y_0 \in [c,d]$

$F(x,y) \to_{y\to y_0} \phi(x), [a,b] \subset [a,\omega)$

$[a,b] \times [c,d]$ - компакт $\implies f(x,y)$ равномерно сходится на $[a,b] \times [c,d]$

$f(x,y) \rightrightarrows_{y\to y_0} \phi(x)$ равномерно по x

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |y - y_0| < \delta \forall x \in [a,b] |f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \begin{array}{l} |x' - x''| < \delta_1 \\ |y' - y''| < \delta_1 \end{array} \; |f(x',y') - f(x'',y'')| < \epsilon$

$\forall \epsilon \exists \delta_2(x) > 0 : |y - y_0| < \delta_2 \implies |f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon$

Фиксируем $x_0, \delta_1 = \delta_2(x_0)$

$\forall x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta_1 \implies$ если $|y - y_0| < \delta_2 \implies |f(x,y) - \phi(x)| \leq |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - \phi(x_0)| \leq \epsilon$

Выбираем конечное подпокрытие [a,b] такими окрестностями $x_0 \pm \delta(x_0)$, выбираем наименьшее δ_2

Тогда если $|x' - x''| < \delta_2 \implies \exists x_0 : |x' - x_0| < \delta_2$ и $|x'' - x_0| < \delta_2$

Тогда $|f(x',y) - \phi(x')| \leq |f(x',y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - \phi(x_0)| + |\phi(x') - \phi(x_0)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon$

Тогда $F(y,b) = \int_a^b f(x,y)dx$ - непрерывна по y

$\lim_{b\to\omega} F(y,b) = \int_a^\omega f(x,y)dx = F(y)$

$\lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^\omega \phi(x)dx = F(y_0$

$\phi(x) = f(x,y_0) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$

▶

Следствие: Если f(x,y)>=0, то из непрерывности F(y) следует равномерная сходимость $\int_a^\omega f(x,y)dx$

Доказательство. $F(b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$ неубывает с ростом b

Предельная функция - F(b, y) это F(y)

$\forall \epsilon > 0 \exists B \quad b', b'' \in (\omega - B, \omega) \forall y |\int_{b'}^{b''} f(x,y)dx| \leq \epsilon$

$F(b,y) \to F(y)$

$\forall \epsilon \exists B : \forall b' \in (\omega - B, \omega) |\int_{b'}^\omega f(x,y)dx| < \epsilon$

$|\int_{b'}^{b''} f(x,y)dx| \leq |\int_{b'}^\omega f(x,y)dx| < \epsilon$ ▶

Теорема 1.12 (О дифференцируемости несобственных интегралов). *Пусть f(x,y) непрерывна по x на $[a,b] \times [c,d]$, ее производная по y непрерывна на этом множестве*

Пусть $\forall y F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится, и сходится равномерно $\int_a^\omega f'_y(x,y)dx$ по y

Тогда F(y) дифференцируемо на [c,d] и $F'(y) = \int_a^\omega f'_y(x,y)dx$

Доказательство. $\frac{F(y_0+\Delta) - F(y_0)}{\Delta} = \int_a^\omega \frac{f(x,y_0+\Delta) - f(x,y_0)}{\Delta} dx$

на $[a,b] \subset [a,\omega) \frac{f(x,y_0+\Delta) - f(x,y_0)}{\Delta} \rightrightarrows_{\Delta\to 0} f'_y(x,y_0)$

$\int_a^\omega f'_y(x,y)dx$ по y сходится равномерно по условию

$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \begin{array}{l} |b-\omega| < \delta \\ |b''\omega| < \delta \end{array} \implies |\int_{b'}^{b''} f'_y(x,y)dx| < \epsilon$

Пусть $\Phi(y) = \int_{b'}^{b''} f(x,y)dx$, тогда $\Phi'(y) = \int_{b'}^{b''} f'_y(x,y)dx \implies |\Phi'(y)| < \epsilon$

$\frac{\Phi(y+\Delta)-\Phi(y)}{\Delta} = \Phi'(\eta), \eta \in (y, y+\Delta)$

$|\int_{b'}^{b''} \frac{f(x,y+\Delta)-f(x,y)}{\Delta}dx| < \epsilon$ сходится равномерно

Тогда имеем право перейти к пределу $\Delta \to 0$

$\lim_{\Delta\to 0} \frac{F(y+\Delta)-F(y)}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \int_a^\omega \frac{f(x,y+\Delta)-f(x,y)}{\Delta}dx = \int_a^\omega f'_y(x,y)dx = F'(y)$

▶

Теорема 1.13. *пусть $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a,\omega) \times [c,d]$ и $F(y) = \int)a^\omega f(x,y)dx$ - сходится равномерно, тогда*

$\int_c^d F(y)dy = \int_a^\omega dx(\int_c^d f(x,y)dy)$

Доказательство. $\exists b \in (a,\omega)$ тогда $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx(\int_c^d f(x,y)dy)$ по теореме о интегрировании собственного интеграла

$F(b,y) = \int_a^b f(x,y)dx \rightrightarrows_{b\to\omega} F(y)$

$\int_c^d F(b,y)dy = \int_c^d F(y)dy$ по $b \to \omega$

$\int_c^d F(y)dy = \lim_{b\to\omega} \int_c^d dx \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{b\to\omega} \int_a^b dx(\int_c^d f(x,y)dy)$

$\int_c^d F(y)dy = \int_a^\omega dx(\int_c^d f(x,y)dy)$ ▶

Теорема 1.14 (о несобственном интегрировании несобственного интеграла)**.** *f(x,y)- определена и непрерывна на $[a,\omega') \times [b,\omega'')$*

Пусть $\int_a^{\omega'} f(x,y)dx$ и $\int_b^{\omega''} f(x,y)dy$ сходится равномерно относительно y и x в любом промежутке

Доказательство. $\exists\exists \int_a^{\omega'} dx \int_c^{\omega''} |f(x,y)|dy$

Для $\forall d \in (c,\omega'')[c,d]F(y)$ интегрируема

$\int_c^d \int_a^\omega f(x,y) = \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy$ (Предыдущая теорема)

$G(d,x) = \int_c^d f(x,y)dx$ - непрерывна и при $d \to \omega''$ стремится к $\int_c^{\omega''} |f(x,y)|dx$ равномерно относительно x $\quad |\int_a^{\omega'} dx \int_c^d |f(x,y)|dy|$ сходится $\implies \int_a^{\omega'} dx \int_c^d |f(x,y)|dy$ сходится равномерно по d

$\int_c^d dy \int_a^{\omega'} dx|f(x,y)|$ сходится равномерно по d

Тогда $b \to \omega'$ и применяем теорему о предельном переходе

$\int_c^{\omega''} \int_a^{\omega'} |f(x,y)|dx = \int_a^{\omega'} dx \int_c^\omega dy$ ▶

Следствие: Если f(x,y) интегрируема и неотрицательна и $\int_a^{\omega'} f(x,y)dx$ и $\int_c^{\omega''} f(x,y)dy$ сходится равномерно (Достаточно непрерывности)

Тогда из $\exists$ одного из интегралов следует существование второго и их равенство

Доказательство. $\int_a^{\omega'} dx \int_c^\omega f(x,y)dy$, $\int_c^\omega dy \int_a^{\omega'} f(x,y)dx$ следует существование второго и их равенства

$\int_a^{\omega'} f(x,y)$ - непрерывна и f$>=0$, то по следствию теоремы о непрерывности интегралов $\int_a^{\omega'} f(x,y)dx$сх
равномерно

▶

1.4 Эйлеровы интегралы

Определение. $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(t-1)^{y-1}dt$ - бета-функция

$\Gamma(x,y)=\int_0^\infty t^(x-1)e^t dt$ - гамма-функция

B и Γ определены при x>0 и y>0

Замечание. Если $y=\frac{u}{1+u}$, тогда $B(x,y)=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}=\int_0^\infty (\frac{u}{u+1})^{x-1}(\frac{1}{u+1})^{y-1}\frac{1}{(1+u)^2}du=\int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$

1. $B(x,y)=B(y,x)$

   $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{t-1}dt=\left|1-t=u\right|=\int_0^1(1-u)^{x-1}u^{y-1}du=B(y,x)$

2. $B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y), B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}B(x,y)$

   $B(x+1,y)=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\int t^x d(\frac{(1-t)^y}{y})=-t^x\frac{(1-t)^y}{y}\Big|_0^1+\frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt=\frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)dt=\frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=-\frac{x}{y}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\frac{x}{y}B(x,y)-\frac{x}{y}B(x+1,y)$

3. 19.09.22

   $B(x,n)=\frac{1...(n-1)}{x...(x+n-1)}$

   $B(x,1)=\int_0^1 t^{x-1}dt=\frac{1}{x}$ - база индукции

   $\sqsupset B(x,n)=\frac{1...(n-1)}{x...(x+n-1)}$

   $B(x,n+1)=\frac{n}{x+n}B(x,n)$

   $B(m,n+1)=\frac{1...n}{\frac{(n+m)!}{(m-1)!}}=\frac{n!(m-1)!}{(n+m)!}=\frac{1}{(n+1)C_{n+m}^{m-1}}$

4. $\Gamma(x)\in C^\infty((0;+\infty))$

   $x_0\in(0;+\infty),\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

   $f(t)=t^x-1e^{-t}$ дифференцируема на x

   $f^{(n)}(t)=t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n, n=0,1,2\dots$

   $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt$ сходится равномерно на $[\alpha,\beta], x_0\in[\alpha,\beta]$

   $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt-$ сходится равномерно

   $t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\le t^{\beta-1}(\ln t)^n e^{-t}\le e^{\frac{-t}{2}}[t^{\beta-1}(\ln t)^n\le e^{\frac{-t}{2}}]$

   $\int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt$ - сходится

   $\int_0^1 e^{\frac{-t}{2}}$ - сходится

   $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt$

   $t^{x-1}e^{-1}(\ln t)^n dt\le t^{\alpha-1}(\ln t)^n\le t^{\frac{\alpha-1}{2}-\epsilon},\quad \epsilon$ такой что $(\ln t^n<t^{-\epsilon})$

   $\alpha-1-\epsilon>-1,\quad \int_0^1 t^{\alpha-1-\epsilon}dt$ сходится $\implies$

   $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt$ сходится равномерно относительно x на $[\alpha,\beta]\implies$ для всех n имеется право дифференцировать интегралы, и интеграл - непрерывная функция

5. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

   $\Gamma(x+1\int_0^\infty t^x e^{-t}dt=-\int_0^\infty t^x d(e^{-t})=t^x e^{-t}\Big|_0^\infty+x\int_0^\infty t^{x-1}e{-}tdt=x\Gamma(x)$

6. $\Gamma(n+1) = n!$
   $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ база
   $\Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$

7. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, x>0, y>0$

Доказательство. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \left| t = a\xi \right| = \int_0^\infty (a\xi)^{x-1}e^{-a\xi}d(a\xi) = a^x\int_0^\infty \xi^{x-1}e^{-a\xi}d\xi \implies$
$\frac{\Gamma(x)}{a^x} = \int_0^\infty \xi^{x-1}e^{-a\xi}d\xi$

$\frac{\Gamma(x+y)}{a^{x+y}} = \int_0^\infty \xi^{x+y-1}e^{-a\xi}d\xi \left| \begin{array}{l} a \to (1-t) \\ \cdot t^{x-1} \end{array} \right.$

$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+t)^{x+y}}t^{x-1} = \int_0^\infty \xi^{x+y-1}t^{x-y}e^{-\xi}e^{-\xi t}d\xi \quad \left| \int_0^\infty dt \right.$

$\Gamma(x+y)\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt = \int_0^\infty dt(\xi^{x+y-1}e^{-1}e^{-\xi t}d\xi), \quad \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt = B(x,y)$

$\Gamma(x+y)B(x,y) = \int_0^\infty d\xi e^{-\xi}\xi^{x+y-1}(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\xi t}dt) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-at}dt = \frac{\Gamma(x)}{a^x} = \int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)}{\xi^x}d\xi = \Gamma(x)\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{y-1}d\xi = \Gamma(x)\Gamma(y)$

$x, y > 1$

$t^{x-1}\xi^{x+y-1}e^{-(1+t)\xi} > 0$ и непрерывна

$t^{x-1}\int_0^\infty \xi^{x+y-1}e^{-(1+t)\xi}d\xi$ непрерывная, монотонная функция

$\frac{t^{x-1}\Gamma(x+y)}{(1+\xi)^{x+y}}$ по следствию из теоремы об интегрировании несобств. интегралов

$t^{x-1}\int_0^\infty \xi^{x+y-1}e^{-(1+t)d\xi}$ - сходится равномерно

$e^{-\xi}\xi^{x+y-1}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t\xi}dt = \frac{e^{-\xi}\xi^{x+y-1}\Gamma(x)}{\xi^x}$ непрерывна и монотонна $\implies$ интеграл сходится равномерно $\implies$ перестановка интегралов законна

$\sqsupset x, y \in (0,1)$

$B(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+2+y)} = \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$

$B(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1}B(x, y+1) = \frac{xy}{(x+y+1)(x+y)}B(x,y)$

▶

2 Интеграл Лебега

2.1 Общие идеи, наводящие соображения

Определение. $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если можно указать конечный набор n-мерных непересекающихся кубов так, что на $\forall$ кубе $f(x) = c$

Определение. Мера(Объем) n-мерного куба Q, обозн. $\mu_n(Q)$
Если ребро куба равно a, то $\mu_n(Q) = a^n$

Определение. Интегралом $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ из пространства R^n н-ся число $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sum_{i=1}^\infty f_i\mu_n(Q_i), \quad f_i$ постоянное значение f на кубе Q_i

Пример. $\exists M \subset \mathbb{R}^n, M \neq \emptyset, f, g : M \to \widehat{\mathbb{R}}$и $A \subset M$

Определение. Будем говорить, что $f \leq g$ на A, если $\forall x \in A \quad f(x) \leq g(x)$
$f \leq g \implies f \leq g$ на M

Замечание. $f \leq g$ отношение порядка

Определение. $\{f_n\}$ последовательность неубывает $\Leftrightarrow f_{n+1} > f_n$ невозрастает

Замечание. Если $|f| = \sup_{x \in M} |f(x)|, \{f_n\} \to f$

Определение. Если $\{f_n\}$ не возрастает и сходится к f, то $f_n \searrow f$ сходится сверху
$\{f_n\}$ не убывает и сходится к f $\implies f_n \nearrow f$(снизу)

Определение. $f : M \to \mathbb{R}$
$f^+ = \max 0, f(x), f^+, f^- \leq 0$
$f^- = \max 0, -f(x), f^+, f^- \leq 0$
$f = f^+ - f^-$

$\exists x \in M$,если $f(x) \leq 0$
$f^+(x) = f(x), f^-(x) = 0 \implies f^+(x) - f^-(x) = f(x)$
Если f(x)<0
$f^+(x) = 0, f^-(x) = -f(x) \implies f^+(x) - f^-(x) = f(x)$
$|f|(x) = |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$

Определение. $\exists A \subset \mathbb{R}^n$,, функция

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Индикатор множества A, характеристическое изложение

Замечание. $X_A(x) \equiv 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$
$X_A(x) \equiv 1 \Leftrightarrow A = \mathbb{R}^n$

Лемма 2.1. $A, B \subset M$
$A \subset B \Leftrightarrow X_A \leq X_B$
Если $\{A_n\} \subset M$ *и* $A = \cup_{n=1} A_n$, *то* $X_A \leq \sum_{n=1}^{\infty} X_{A_n}$, *если* $\{A_n\}$ *попарно не пересекаются, то равенство*

Доказательство. очевидно ▶

23.09.22

Определение. $\alpha =< a_i, b_i > \times < a_n, b_n > \mathbb{R}^n, b_j > a_j, l_j = b_j - a_j -$длина ребра

$\mu(\alpha) = \Pi_{j=1}^n (b_j - a_j) -$мера, объем
$\alpha = [a_1, b_1) \times [a_n, b_n)$ - полуоткрытый прямоугольнике

Определение. Двоичный полуинтервал - полуинтервал вида [a, b), где a $= \frac{s}{2^r}$, b $= \frac{s+1}{2^r}$, r - ранг полуинтервала
$\mu([a, b)) = \frac{1}{2^r}$

Определение. Двоичный брус - это произведение двоичных интервалов одного ранга r - ранг бруса

Замечание. Если f - ступенчатая, то существуют числа $f_1, \dots f_n$ и прямоугольники $\alpha_1, \dots \alpha_n$ т.ч $f(x) = \sum_{n=1}^{n} f_k \chi_{\alpha_k}(x)$

Замечание. Любой полуинтервал - объединение двоичных полуинтервалов

Предложение (Свойства двоичных полуинтервалов)

1. α и β - двоичные полуинтервалы ранга r и s соответственно

   Доказательство. $r \leq s$,тогда если они пересекаются $=>$ $(\alpha \cap \beta \neq \emptyset)$, то $\beta \subset \alpha$

   $\alpha = [\frac{n}{2^r}, \frac{n+1}{2^r})$, $\beta = [\frac{m}{2^s}, \frac{m+1}{2^s}))$

   пусть они пересекаются $=>$ x общая точка

   $\frac{n}{2^r} \leq x < \frac{n+1}{2^r} \quad \frac{m}{2^s} \leq x < \frac{m+1}{2^s} | 2^s$

   $n2^{s-r} \leq x2^r < (n+1)2^{s-r} \quad m \leq x2^s < m+1$

   $n2^{s-r} < m+1 \implies n2^{s-r} \leq m \implies \frac{n}{2^r} \leq \frac{m}{2^s}$

   $(n+1)2^{s-r} > m \implies (n+1)2^{s-r} \geq n+1 \quad \frac{n+1}{2^r} \leq \frac{m+1}{2^s}$

   ▶

2. Если αи β двойные полуинтервалы и их ранги равны, то они либо не пересекаются, либо совпадают

   Доказательство. ▶

3. Если $n \in \mathbb{N}$то каждая точка из $\mathbb{R}$принадлежит ровно одному полуинтервалу ранга r

   Доказательство. $\forall x \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} : x\tau^r \in [m, m+1)$ ▶

4. Если [a,b) - двоичный полуинтервал ранга r, $c = \frac{a+b}{2}$, то [a,c), [c, b) двоичные полуинтервалы ранга r+1

   Доказательство. ▶

Замечание. Двоичные полуинтервалы фиксированного ранга r образуют разбиение $\mathbb{R}$ на непересекающиеся классы (множества)

Замечание. все свойства двоичных полуинтервалов переносятся на брусы

Замечание. $\exists \alpha = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ - некоторый прямоугольник, причем каждые из чисел a_i, b_i имеют вид $\frac{p}{2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, тогда α конечное объединение брусов фиксированного ранга

Доказательство. r - макс q т.ч $a_i b_i = \frac{p}{2^q}$
$\exists [a_i, b_i)$прямоуг $= [\frac{p_1}{2^{q_1}}, \frac{p_2}{2^{q_2}}), q_1, q_2 \leq r$
очевидно можно $[a_i, b_i)$ записать в виде $[\frac{m}{2^r}, \frac{k}{2^r})$
$[\frac{m}{2^r}, \frac{k}{2^r}) = [\frac{m}{2^r}, \frac{m+1}{2^r}) \cup \dots \cup [\frac{k-1}{2^r}, \frac{k}{2^r})$
$\alpha-$конечное произведение конечных объединений (конечное объединение брусов) ▶

Лемма 2.2. *A - компактное множество в* $\mathbb{R}^n \implies \exists$*конечное множество брусов ранга r, покрывающих A*

Доказательство. A - ограничено $\implies M \subset N, A \subset [-M, M]^n$
$[-M, M]$ подходит под условия предыдущей леммы
$M = \frac{M}{2^0} = \frac{2M}{2^1} \implies [-M, M]^n -$конечное объединение брусов ранга r ▶

Определение. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ступенчатая функция, если f - лин. комбинация конечного числа двоичных брусов

Замечание. f образуют линейное пространство ступенчатых функций $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Замечание. Если $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, то f можно представить в виде линейной комбинации конечного числа брусов одного ранга

Доказательство. очевидно $\blacktriangleright$

Лемма 2.3. *f - ступенчатая функция, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*
$\sum_{k=1}^m f_k\chi_{\alpha_k}$, α_k - не пересекающиеся кубы, тогда $|f| = \sum_{k=1}^m f_k\chi_{\alpha_k}$, α_k

Доказательство. $\alpha = \bigcup \alpha_k$
Если $x \notin \alpha \implies \forall k, x \in \alpha_k \implies f(x) = 0$
$|f|(x) = |f(x)| = 0 = \sum_{k=1}^m |f_k|\chi_{\alpha_k}$, α_k
Если $x \in \alpha \implies \exists! \alpha_j : x \in \alpha_j$
$f(x) = f_j, |f|(x) = |f(x)| = |f_j|$
$\sum_{j=1}^m |f_j|\chi_{\alpha_j} = |f_j| \implies |f| = \sum |f_j|\chi_{\alpha_j}$ $\blacktriangleright$

Для всякой $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ можно указать число, которое будем называть интегралом от f по $\mathbb{R}^n$ и обозначать
$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$

Замечание. n = 1 $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ все функции оттуда ограничены и имеют лишь конечное число точек разрыва => определен интеграл Римана
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^m f_k\chi_{\alpha_k}(x)dx = \sum_{k=1}^m f_k \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\alpha_k}(x)dx = \sum_{k=1}^m f_k \int_{a_k}^{b_k} 1dx = \sum_{k=1}^m f_k\mu(\alpha_k)$
r = 1 разумно считать, что $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^m f_k\mu(\alpha_k)$

Определение. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и $f = \sum_{k=1}^m f_j\chi_{\alpha_j}$
α_j - попарно не пересекаются, тогда
$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sum_{k=1}^n f_k\mu_n(\alpha_k)$

Замечание. Вообще говоря, нужно доказывать независимость интеграла от представления функции в виде линейных компонент индикатора

Мы не будем доказывать корректность, по-другому определим интеграл, а затем покажем, что новое определение совпадет со старым

Доказательство. 1. n = 1, $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^n f_k\mu_n(\alpha_k)$

2. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{n}+\mathbb{1}})$
   $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{n}+\mathbb{1}} = \mathbb{R}^{\mathbb{n}} \times \mathbb{R} = (y, z)$ и
   $f(x) = \sum_{k=1}^m f_k\chi_{\alpha_k}(x)$, α_k - куб в $\mathbb{R}^{n+1}$
   $\alpha_k = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_{n+1}, b_{n+1}) = \beta_k \times \gamma_k$
   $\mu_{n+1}(\alpha_k) = \mu_n(\beta_k)\mu_k(\gamma_k)$
   $y \in \beta$ тогда $f_y(z) = f(y, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $f_y(z) = \sum_{k=1}^m f_k\chi_{\beta_k}(y)\chi_{\gamma_k}(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$
   $\int_{\mathbb{R}} f_y(z)dz = \sum_{k=1}^m f_k\chi_{\beta_k}(y)\mu_1(\gamma_k)$
   $F(y) = \int_{\mathbb{R}} f_y(z)dx$ - ступенчатая из $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \implies \int_{\mathbb{R}} F(y)dy = \sum_{k=1}^n f_k\mu_1(\gamma_k)\mu_n(\beta_k) = \sum_{k=1}^n f_k\mu_{n+1}(\alpha_k)$
   положим что $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x)dx = \int_R F(y)dy = \int_{R^n} dy(\int_R f_y(z)dz) = \int_{R^n}(\int_R f(y,z)dz)dy$
   т.о мы определим интеграл для $\forall n$

$\blacktriangleright$

26.09.22

Замечание. $\sqsupset f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ тогда для любого хорошего отрезка [a, b] верно равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)dx$

$[a, b]$ - объединение конечных приращений

Теорема 2.1. $\sqsupset f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *тогда*

$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$

Доказательство. $f = \sum_{i=1}^m f_k\chi_{\alpha_i}, g = \sum_{i=1}^k f_j\chi_{\beta_j}$

$(\lambda f + \mu g) = \sum_{n=1}^m \mu f_i\chi_{\alpha_i} + \sum_{j=m+1}^{m+k} \mu g_{j-k}\chi_{\beta_{j-k}}$

$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g)(x)dx = \sum_{i=1}^m \mu f_i\mu(\alpha_i) + \sum_{j=m+1}^{m+k} \mu g_{j-k}\mu(\beta_{j-k}) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$ ▶

Теорема 2.2. *Если* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *и* $f(x) > 0$ *для* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, *то* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq 0$

Доказательство. ▶

Лемма 2.4. $\sqsupset f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *и* $|f(x)| \leq L$ *на* $\mathbb{R}^n$, *Пусть* $P = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ *такой, что* $\forall x \notin P \implies f(x) = 0$, *тогда*

$|\int_{\mathbb{R}^n}| \leq L\mu_n(P) = L\prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$

Доказательство. База n =1, $|\int_{\mathbb{R}} f(x)dx| = |\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx| \leq L(b_1 - a_1)$

Переход $P_{n+1} = P_n \times P_1$ Проводя те же рассуждения, что и для определения интеграла

$|\int_{\mathbb{R}^{n+1}}| = |\int_{\mathbb{R}} dz \int_{\mathbb{R}^b} f(y, z)dy| \leq |\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z)dy||b_{n+1} - a_{n+1}| \leq L\prod_{k=1}^n (b_k - a_k)(b_{n+1} - a_{n+1})$ ▶

Теорема 2.3. $\{f_n\}$ *убывающая последовательность функций определена на* $[a, b] \subset \mathbb{R}$

если каждая $f_n(x)$ *интегрируема на* $[a, b]$ *и* $f_n(x) \to 0, n \to \infty$ *в основном, тогда* $\int_a^b f_n(x)dx \to 0, n \to \infty$

Доказательство. $\sqsupset, \Delta = [\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$F_n(\Delta) = \int_\alpha^\beta f_n(x)dx$ функции отрезка

так как $\{f_n\}^\alpha$ убывает и $f_n \to 0$, $f_n \leq 0$ в основном, тогда $F_n(\Delta) \leq 0$

$F_{n+1}(\Delta) \leq F_n(\Delta) \quad \forall n\forall\Delta$

$\{f_n(\Delta)\}$ убывает, ограничена снизу $\implies \exists \lim_{n\to\infty} F_n(\Delta) = F(\Delta) \geq 0$

Если Δ_1, Δ_2 - два отрезка, $\Delta_1 \cap \Delta_2$ состоит не более чем из 1 точки

это верно для F_n

$F_n(\Delta_1 \cup \Delta_2) = F_n(\Delta_1) + F_n(\Delta_2)$

$F_n(\Delta)$ непрерывные функции и $0 \leq F(\Delta) \leq F_n(\Delta)$

$F(\Delta)$ тоже непрерывна

M_0-множество $x \in (a, b)$, что $f_n(x) \nrightarrow 0$ не более чем счетно

$\Delta F_n(x) = \lim_{\Delta\to x} \frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|}[]$

ΔF_n в основном равно $\delta_n, \quad t \in (0, 1)$

$\frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{\int_\alpha^\beta f_n(x)dx}{\beta-\alpha} = \frac{(\beta-\alpha)f_n(\alpha+t(\beta-\alpha))}{\beta-\alpha} \to f_n(x)$

$M_n - \{x \in (a, b) : \lim_{\Delta\to x} \frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|}\} \neq f_n(x)$ не более чем счетно

$M = M_0 \cup M_1 \cup \dots$ не более чем счетно

$x \in (a, b)\diagdown M \quad f_n(x) \to 0 n \to \infty \quad \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \forall n > n_0 \implies f_n \leq \frac{\epsilon}{2}$

$x \in M \implies \Delta F_n(x) = f_n(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$ начиная с n_0

найдем $|\frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|} - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ начиная с n_0 $[\delta > 0, |\Delta| < \delta]$

$\frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|} \leq f_n(x) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, то $F_n(\Delta) \geq F(\Delta) \implies 0 \leq \frac{F(\Delta)}{|\Delta|} < \epsilon$, если $|\Delta| < \delta \implies \Delta F(x) = 0 \quad \forall x \notin M$

$F(x)$ почти везде постоянна
$F(\Delta) = 0$ иначе $\frac{F(\Delta)}{|\Delta|} < \epsilon$ не верно
$F(\Delta) = 0 \implies F([a,b]) = 0$
$F([a,b]) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 0$ ▶

Теорема 2.4 (О пределе интегралов убывающей последовательности функций поточечно сходящейся к 0)**.** $\sqsupset \{f_m\}$ *убывающая последовательность функций из* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *поточечно сходится к 0, тогда* $\int_{\mathbb{R}^m} f_m(x) \to 0 \quad n \to \infty$

Доказательство. Индукция по n
База m = 1 => применяем предыдущую теорему
Переход $\sqsupset$ это верно для m: $\{f_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+1}), x = (y,z),\ x \in \mathbb{R}^{n+1}, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$
при фиксированном y определена ступенчатая функция
$F_m(y) = \int_{\mathbb{R}} f_m(y,z)dz$
$F_m(y) = \int_{\mathbb{R}} f_m(y,z)dz \geq \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(y,z)dz = F_{m+1}(y)$
$F_m(y) \geq 0$
$\lim_{m\to\infty} F_m(y) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(y,z)dz = 0$
$\{F_m\}$ к ним применить индукционное предположение
$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}} f_m(y,z)dz \to 0, m \to \infty$ ▶

2.2 Интеграл Лебега

$\sqsupset M-$ некоторое подмножество $\mathbb{R}^n, M \neq \emptyset$
$\mathcal{F}-$множество функций из M в $\mathbb{R} \quad dom\mathcal{F} = M$
$I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ функционал, т.е для $\forall f \in \mathcal{F}$определено число I(f)

Определение. $(M, \mathcal{F}, I)$ система с интегрированием, если

1. R1 $\mathcal{F}$ - лин пространство
2. R2 $f \in \mathcal{F}$, то $|f| \in \mathcal{F}$
3. R3 Функционал I линеен: $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$
4. R4 Если $f \in \mathcal{F}$ и $f \leq 0$ на M, то $I(f) \geq 0$
5. R5 Если $\{f_n\}$ послед. убывает $f_n(x) \to 0 \quad n \to \infty, \forall x \in M$, то $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0$

Замечание. $(M, \mathcal{F}, I)$, система с интегрированием, тогда M - базисное, $\mathcal{F}-$ множество основных или простых функций
$I(f)$ - интеграл от f по M
I интеграл системы
$R1 - R5$ аксиомы

Пример. $M = \mathbb{R}^n, \mathcal{F}-$ ступенчатая на $\mathbb{R}^n$
интеграл от f $I = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$
Очевидно, что $(M, \mathcal{F}, I)$ - система с интегрированием

Замечание. Если $(M, \mathcal{F}, I)$ - система с интегрированием
$\forall f \in \mathcal{F}, f^+, f^- \in \mathcal{F}$

$$f^+ = \frac{f + |f|}{2} = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$f^- = \frac{-f+|f|}{2} \in \mathcal{F}$

$$max\{f,g\} = \begin{cases} f(x) & f(x) \le g(x) \\ g(x) & g(x) \le f(x) \end{cases}$$

$f, g \in \mathcal{F} \implies max\{f,g\}, min\{f,g\} \in \mathcal{F}$
$min\{f,g\}(x) = (f-(f-g)^+)(x)$
$max\{f,g\}(x) = (g+(f-g)^+)(x)$

30.09.22

Лемма 2.5. *Если f и g - простые функции и $f \le g$, тогда $I(f) \le I(g)$*

Доказательство. $h = f - g \le 0 \implies R4 \implies I(h) \le 0$
$I(h) = I(f) - I(g) \le 0$ ▶

Лемма 2.6. *Если $f \in \mathcal{F}$, то $|I(f)| \le I(|f|)$*

Доказательство. $|I(f)| = |I(f^+ - f^-)| = |I(f^+) - I(f^-)| \le |I(f^+)| + |I(f^-)| = I(f^+) + I(f^-) = I(f^+ + f^-) = I(|f|)$ ▶

Лемма 2.7. *f и $\{f_n\} \in \mathcal{F}$, f_n возрастает*
если для любых x из M $f(x) \le \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, то $I(f) \le \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

Доказательство. Т.к f_n возрастает, то $I(f_n)$ тоже возрастает, имеет предел (возможно ∞)
$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \sup_n I(f_n), V(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
$\{f - f_n\}$ убывает, $u_n = (f-f_n)^+$, u_n тоже убывает
Если $u_n(x) = 0 \implies (f-f_n)(x) < 0 \implies$
$\forall m > n (f-f_m)(x) < 0 \implies u_m(t) = 0$
Если $u_n(x) > 0 \implies (f-f_n)(x) > 0$
$\forall m > n (f-f_m)(x) \le (f-f_n)(x) \implies u_m = (f-f_m)^+ \le u_n$
$f - f_n \le u_n, \quad I(f-f_n) \le I(u_n)$
$I(f) \le I(f_n) + I(u_n)$
$V(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ge f(x) \implies f - v \le 0$
$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f-f_n)^+(x) = (f-v)^+(x) = 0$
$\{u_n\} \to 0, n \to \infty$ применяем аксиому R5 $\implies \lim I(u_n) = 0$
$\lim I(f) \le \lim I(f_n) + \lim I(u_n)$
$I(f) \le \lim_{n\to\infty} I(f_n)$ ▶

2.2.1 L1-мера и ее свойства

$(M, f, I)-$система с интегрированием
$f : M \to \bar{R}$, положим $0*\infty = 0$
$\exists f : M \to \bar{R}\{f_n\}$ последовательность функций из M в R
Будем говорить, что $\{f_n\}$ - мажорирует f если

1. $f_n \le 0$
2. $\{f_n\}$ возрастает
3. $|f(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \forall x \in M$

Замечание. Если $f_n \in \mathcal{F}$ и $\{f_n\}$ возрастает, то $\{I(f_n)\} \implies \lim_{n\to\infty} I(f_n) - \exists$

Определение. $f : M \to \bar{R}, h \in \bar{R}$,будем говорить, что h - верхнее число функции f, если $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{F}$, кот. мажорирует f т.ч $h = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

$W(f)-$множество всех верхних чисел для f

Определение. L_1 нормой f будем называть $\inf W(f)$ и обозначать

$||f||_{L_1(M,F,I)}, ||f||_{L_1(\Sigma)}, ||f||_{L_1}$

Замечание. Если W(f) пусто, т.е нет посл. мажорирующих f, то $||f||_{L_1} = \infty$

Замечание. $||f||_{L_1} \leq 0$

Определение. $L_1^*(\Sigma)$ множество всех функций т.ч $||f||_{L1} \in \mathbb{R}$

Лемма 2.8. *Если* $f \in \mathcal{F}$, *то* $||f||_{L1} = I(|f|)$

Доказательство. $\sqsupset \{f_n\}$произвольная мажорирующая последовательность f $|f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \implies I(f) \leq \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

$I(|f|) > ||f||_{L1} = \inf(\lim I(f_n))$

Рассмотрим $f_n = |f|$ и $\forall n$ мажорирует функцию f

$|f(x)| \leq f_n(x) = |f(x)|$

$\lim I(f_n) = \lim I(|f|) = I(|f|)-$верхнее число f

$||f||_{L1} \leq I(|f|)$ ▶

Следствие. Если $f(x) \equiv 0$, то $||f||_{L1} = 0$

Доказательство. $I(f) = I(0 * f) = 0I(f) = 0$ $[f(x) \in \mathcal{F}]$

$I(f) = I(|f|) = ||f||_{L1}$ ▶

Лемма 2.9. $\sqsupset f-$*функция* $f \in L_1^*(\Sigma), \alpha \in R$, *тогда* $||\alpha f||_{L_1} = |\alpha|||f||_{L_1}$

Доказательство. $\alpha \neq 0$

Норма конечна => $\exists \{f_n\}$который мажорирует f

$\{|\alpha| f_n\}$ мажорирует αf

$|\alpha f| \leq |\alpha| \lim_{n\to\infty} f_n \implies$

$||\alpha f||_{L1} \leq |\alpha| \lim_{n\to\infty} I(f_n) \implies ||\alpha f||_{L1} \leq |\alpha|$

$||f||_{L1}, g = \alpha f, \beta = 1\alpha$

$||\beta g||_{L1} \leq |\beta|||g||_{L1}$

$||f||_{L1} \leq \frac{1}{|\alpha|}, \quad ||\alpha f||_{L1} \geq |\alpha|||f||_{L1}$

Если $\alpha = 0$, тогда $\alpha f \equiv 0 \implies ||\alpha f||_L 1 = 0$

$\alpha||f||_{L1} = 0$ ▶

Следствие. Для $\forall f$функции $||f||_{L1} = ||-f||_{L1}$

Следствие. $||v - u||_{L1} = ||u - v||_{L1}$

Лемма 2.10 (Субаддитивность нормы L1). $\sqsupset f, \{f_n\}-$*функции* $M \to \bar{R}$ *для* $\forall x \in M$ *верно*

$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$

Тогда $||f||_{L1} = \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{L1}$

Доказательство. Будем считать, что $||f_n||_{L1} < +\infty$

$\sqsupset \{f_n\}_m$ - последовательность функций из $\mathcal{F}$ мажорирующих f_n

$\lim_{x\to\infty} I(f_{n_m}) < ||f_n||_{L1} + \frac{\epsilon}{2^n m}$

$g_m = \sum_{j=1}^{m} f_{j_m}$

$g_{m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} f_{j_{m+1}} \geq \sum_{j=1}^{m} f_{j_{m+1}} \geq \sum_{j=1}^{m} f_{j_m} = g_m$

$f_{j_{m+1}} \geq f_{j_m}$

$g_m(x) = \sum_{j=1}^{m} f_{j_m} \to \implies$ верно при $m \leq 0$
$\lim_{n\to\infty} g_m(x) \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j(x)| \quad (|f_j| \leq \lim_{m\to\infty} f_{j_m})$
предел по $n \to \infty$
$\lim_{n\to\infty}(g_m(x)) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| \geq |f(x)|$
g_m мажорирует f
$\{g_m\} \subset \mathcal{F}, \quad ||f|| \leq \lim_{n\to\infty} I(g_m)$
$I(f_{n_m}) \leq \lim_{n\to\infty} I(f_m) < ||f_n||_{L1} + \frac{\epsilon}{2^n}$
$I(g_m) = \sum_{j=1}^{n} I(f_{j_m}) < \sum_{j=1}^{m} ||f_j||_{L1} + \epsilon(1 - \frac{1}{2^m})$
$\lim_m(g_m) \leq \sum_{j=1}^{\infty} ||f_j||_{L1} + \epsilon$
$||f||_{L1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} ||f_j|| + \epsilon$
$||f||_{L1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} ||f_j||_{L1}$ ▶

Следствие. $f_1, \ldots f_n, f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ и $|f(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j(x)|$
$\forall x \in M$ то $||f||_{L1} \leq \sum_{j=1}^{n} ||f_j||_{L1}$
Следствие. Если $|f(x)| \leq |g(x)| \forall x \in M$, то $||f||_{L1} \leq ||g||_{L1}$
Следствие. Для $\forall f, g$
$||f + g||_{L1} \leq ||f||_{L1} + ||g||_{L1}$ (неравенство для L1 нормы)
$||f||_{L1} \leq ||f - g||_{L1} + ||g||_{L1}$
$||g||_{L1} \leq ||f - g||_{L1} + ||f||_{L1}$
Следствие. $||f||_{L1} = |||f|||_{L1}$

Доказательство. $f \leq |f| \implies ||f|| \leq |||f|||_{L1}$
$||f|| \leq |f| \; |||f|||_{L1} \leq ||f||_{L1}$ ▶

Следствие. $|||f|||_{L1} - |||g|||_{L1} \leq ||f - g||_{L1}$

Доказательство. $||f - g||_{L1} \geq ||f||_{L1} - ||g||_{L1}$
$||f - g||_{L1} \geq ||g||_{L1} - ||f||_{L1}$
$||f - g||_{L1} \geq |||f||_{L1} - ||g||_{L1}|$ ▶

03.10.22 $\Sigma = (M, \mathcal{F}, I)-$ система с интегралом

Определение. $\{f_n\}$ последовательность всюду определенных функций на M, $f_n : M \to \mathbb{R}$
f_n сходится к f в смысле L1 нормы, Если

1. $\forall n ||f_n = f||_{L1} < +\infty$
2. $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L1} = 0$

Определение. $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ интегрируема, если $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{F}$
$f_n \to_{L1} f$

Определение. Множество всех интегрируемых функций:$L_1(\Sigma)$ или L_1

Замечание. f, g, h - функции на M, причем g, h всюду конечна $\implies \forall x |g(x) - h(x)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - h(x)|$

Доказательство.
1. f(x) - конечно, то верно (неравенство треугольника)
2. f(x) = $\infty \implies ||g - h||_{L1} \leq ||g - f||_{l1} + ||f - h||_{L1}$

▶

Лемма 2.11. $f \in L_1(\Sigma) \implies \exists \lim_{g:||f-g||_{L1}\to 0} I(g) < +\infty$

Доказательство. 1. $g,h \in \mathcal{F} \implies |I(g)-I(h)| = |I(g-h)| \leq I(|g-h|) = ||g-h||_{L1} \leq ||g-f||_{L1} + ||f-h||_{L1}$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta (|g-f| < \delta \implies ||f-g||_L 1 < \frac{\epsilon}{2}) \implies |I(g)-I(h)| < \epsilon \implies$ по критерию Коши I(g) имеет предел

▶

$I^*(f) = \lim_{g:||g-f||_{L1} \to 0} I(g)$
Если $f \in \mathcal{F} \implies |I(g)-I(f)| \leq ||f-g||_{L1} \to 0 \implies \lim_{g:||g-f||_{L1} \to 0} I^*(f) = I(f) = I^*(f)$
$\forall f \in \mathcal{F}(I^*_(f) = I(f))$

Замечание. $\forall f_n \subset \mathcal{F}(||f_n - f||_{L1} \to 0 (n \to \infty))$ и $f \in L1(\Sigma) \implies I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

Лемма 2.12. $f_n, f_n : M \to R$ *и* $\exists c > 0 : |f_n| \leq C$ *и* $f_n \to f[n \to \infty, L1], f : M \to \bar{R} \implies$

1. $||f||_{L1} = +\infty \implies \forall n ||f_n||_{L1} = +\infty$

2. $||f||_{L1} < +\infty \implies ||f||_{L1} = \lim_{n\to\infty} ||f_n||_{L1}$

3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \alpha f_n \to^{L1} \alpha f$

4. $|f_n \to^{L1} |f|$

Доказательство. $||f||_{L1} \leq ||f-f_n||_{L1} + ||f_n||_{L1} \implies ||f_n||_{L1} = +\infty$
$|||f||_{L1} - ||f_n||_{L1}| \leq ||f-f_n||_{L1} \to_{n\to\infty} 0 \implies ||f|| \to_{L1, n\to\infty} ||f||_{L1}$
$||\alpha f_n - \alpha f||_{L1} = |\alpha| ||f_n - f||_{L1} \to 0 \implies \alpha f_n \to_{L1, n\to\infty} \alpha f$
$||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)| \implies |||f_n| - |f||| \leq ||f_n - f||_{L1} \to_{n\to\infty} 0 \implies |f_n| \to^{L1} |f|$ ▶

Лемма 2.13. $f_n, f_n \to^{L1} f, g_n, g_n \to^{L1} g \implies \{f_n + g_n\} : f_n + g_n \to^{L1} f + g$

Доказательство. $\forall x \in M |f_n(x) g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \implies ||f_n + g_n - f - g||_{L1} \leq ||f_n - f||_{L1} + ||g_n - g||_{L1}$ ▶

Теорема 2.5. *1.* $\forall (f \in L1(\Sigma) \implies \alpha f \in L1(\Sigma) : I(\alpha f) = \alpha I(f))$

2. $(f, g \in L1(\Sigma) \implies f + g \in L1(\Sigma) : I(f+g) = I(f) + I(g))$

Доказательство. $f \in \mathcal{F} \implies I^*(f) = I(f)$
применяем лемму ▶

Следствие. $(f, g \in L1(\Sigma) and f \geq g) \implies (I(f) \geq I(g))$
Резюме:
$\Sigma = (M, \mathcal{F}, I)$
определена L1 норма на всех функциях из M
$f_n \subset \mathcal{F} and \lim_{n\to\infty} f_n =^{L1} f$
$I^*(f) = \lim I(f_n)$ (если есть пробел)

Замечание. $\Sigma = (M, \mathcal{F}, I) -$система с интегрированием

Определение. $\phi(x)$мажорирует f(x), если $\phi(x) \geq |f(x)|$

Определение. $||f||_{\mathbb{R}} = \inf_{\phi \in \mathcal{F}, \phi \geq |f|} (I(\phi))$ есть норма Римана

Определение. f интегрируема в смысле Римана, если $\exists f_n \subset \mathcal{F}$т.ч $f_n \to^{||\cdot||_{\mathbb{R}}} f$, $I^*(f) = \lim I(f_n)$

Замечание. для нормы Римана не выполнено свойство субаддитивности

2.2.2 Свойства, выполненные почти всюду

Определение. $f : M \to \bar{R}$ называется пренебрежимой, если $||f||_{L1} = 0$

Определение. $E \subset M$называется пренебрежимым (множеством меры 0), если χ_E суть пренебрежимая функция

Замечание. $\emptyset-$множество меры 0, так как индикатор тождественно равен нулю, как и мера L1

Замечание. $(R^n.\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n})$в любое одноточечное множество пренебрежимо.

Доказательство. $E = \{p\}$

E_r-двоичный куб, содержащий р, ребро - r

$||\chi_E||_{L1} \leq ||\chi_{E_r}||_{L1} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_r}(x)dx = \frac{1}{(2^r)^n} \to 0, n \to \infty$ ▶

Теорема 2.6. $||f||_{L1} < +\infty \implies \mu(\{x|f(x) = \infty\}) = 0$

Доказательство.

1. $E = \{x|f(x) = +\infty\}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}(0 \leq n\chi_E(x) \leq |f(x)|) \implies \forall n||n\chi_E||_{L1} \leq ||f||_{L1} \implies \forall n||\chi_E||_{L1} \leq \frac{1}{n}||f||_{L1} < +\infty \implies ||\chi_E||_{L1} = 0$

▶

Лемма 2.14. $f : M \to \bar{\mathbb{R}}, S(f) = \{x|f(x) \neq 0\}$

f - пренебрежима тогда и только тогда, когда $S(f)$ меры 0

Доказательство.

1. $f_n = |f| \implies |\chi_{S(f)}(x)| = \chi_{S(t)}(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

   $x \notin S(f) \implies 0 \leq 0, ok$

   $x \in S(f) \implies \chi_{S(t)}(x) = 0 \vee \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f| = +\infty \implies$ по свойству субаддитивности$||\chi_{S(f)}|| \leq ||f_n||_{L1}$

   f - пренебрежима $\implies ||f||_{L1} = 0 \implies |||f|||_{L1} = ||f|| = 0 \implies ||\chi_{S(f)}|| = 0$,т.е S(f) имеет меру 0
2. S(f) имеет меру 0

   $f_n(x) = \chi_{S(f)}(x) \implies ||f(x)|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

   $||f||_{L1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{L1} = 0 \implies ||f||_{L1} = 0$

▶

Замечание. $f, g : M \to \bar{R}$(f = g почти всюду) $\implies ||f||_{L1} = ||g||_{L1} \wedge ||f - g||_{L1} = 0 \wedge f \in \mathcal{L}_1(\Sigma) \implies g \in \mathcal{L}(\Sigma) : I(f) = I(g)$

Доказательство.

$$h(x) = \begin{cases} 0 & f(x) = g(x) \\ +\infty & f(x) \neq g(x) \end{cases}$$

$||h||_{L1} = 0$

$|f(x)| \leq |g(x) + h(x)| \wedge |g(x)| \leq |f(x) + h(x)|, \quad |f(x)| \leq |g(x)| + |h(x)|$

$\implies ||f||_{L1} \leq ||g||_{L1} + ||h||_{L1} = ||g||_{L1},$ аналогично $||g||_{L1} \leq ||f||_{L1} \implies ||f||_{L1} = ||g||_{L1}$

$\{f_n\} \subset \mathcal{F} : f_n \to_{n\to\infty}^{L1} f$

$f_n - f$ и $f - g$ совпадают почти всюду $\implies ||f - f_n||_{L1} = ||g - f_n||_{l1} \implies f_n \to_{n\to\infty}^{L1} g \implies g \in \mathcal{L}_1\Sigma \wedge I(f) = I(g)$

▶

07.10.22

Замечание. Если f интегрируемая функция, то при изменении значения функции f на множестве меры 0, то $||f||_{l1}$ на $I(f)$ не изменяется

Лемма 2.15. *Если A - множество меры 0, и $E \subset A$ то E - множество меры 0*

Пусть $E_1 ... E_n$ - множества меры 0, тогда их объединение - множество меры 0.

Доказательство. $||\chi_A||_{L1} = 0$, $E \subset A \implies |\chi_E| \leq |\chi_A| \implies ||\chi_E||_{L1} \leq ||\chi_A||_{L1} = 0$

$|\chi_E| = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$, $\quad ||\chi_E||_{L1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||\chi_{E_n}||_{L1} = 0$ ▶

Замечание. любое не более чем счетное подмножество $\mathbb{R}$ имеет меру $\mathbb{R}$

Пример. $D(x) = 1, x \in Q; 0, x \notin Q, ||D||_{L1} = 0$, тк мера Q равна 0

Следствие. Если $\{P_n(X)\}$ - семейство условий, верных почти всюду, тогда почти всюду выполняются все $\{P_n\}$

Доказательство. E_n = множество тех x: P(x) верно.

объединение E_n - множество тех x, что кто-то из P_n не выполнен. Мера E_n равна 0 $\implies$ мера объединения E_n равна 0 ▶

Теорема 2.7. *Если f почти всюду определена и интегрируема, то f^+, f^- тоже всюду интегрируемы.*

Если еще и g почти всюду определена и интегрируема, то $\max f, g$ и $\min f, g$ также интегрируемы

Доказательство.

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если f(x) определена} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$f = \widetilde{f}$ почти всюду $\implies \widetilde{f}$ интегрируема и $I(f) = I(\widetilde{f})$

$f^+ = \widetilde{f}^+$почти всюду, аналогично с минусом

Но $\widetilde{f}^+$ и $\widetilde{f}^- \implies f^+$ и f^- интегрируемы

$max\{f, g\}(x) = (g + (f - g)^+)(x)$ - интегрируема ▶

2.2.3 Пример системы с интегрированием

Пусть $[a, b] \in \bar{R}, \omega : [a, b] \to R$, ω положительна и интегрируема на (a,b), M = [a,b]

$f : M \to \bar{R}$ - финитная, если $\exists [c, d] \subset M$ т.ч $\forall x \notin [c, d] f(x) = 0$

$\mathcal{F}$ - множество всех непрерывных, финитных функций, это линейное пространство $\implies R1, R2$ верна

Положим, $I(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$

Очевидно, что I - линейный и $I(f) \geq 0$ если $f \geq 0 \implies R3, R4$ верны

Пусть $\{f_n\}$ убывающая последовательность функции

$0 \leq f_n \leq f_1$ все f_n равны 0 все отрезка [c,d], все которых $f_1 = 0$

т.к $f_n(x) \to 0$ и [c,d] конечен $\implies f_n \rightrightarrows 0$

$\int_a^b f_n(x)\omega(x)dx = \int_c^d f_n(x)\omega(x)dx \leq \int_c^d \omega(x)dx = \sup_{x \in [c,d]} f_n \to 0$ т.к $f_n \rightrightarrows 0 \implies$

$0 \leq \int_a^b f_n(x)\omega(x)dx \leq 0 \implies R5$ верно

$(M, \mathcal{F}, I)$- система с интегрированием

Интеграл в этой системе называется интегралом Лебега относительно веса ω (Лебега-Стилтьеса)

В частности, можно взять вместо $[a, b] = \bar{R}$, $\omega = 1$

Замечание. В этой системе функция Дирихле интегрируема и I(D) = 0

2.3 Теорема о предельном переходе над знаком интеграла

$(M, \mathcal{F}, I)$ - система с интегрированием

Замечание. Если f совпадает с g почти всюду и существуют их L1 нормы, то они равны.

Это позволяет определить L1-норму для функций, определенных почти всюду.

Лемма 2.16. *Пусть $f : M \to R$ определена почти всюду*

$\{f_n\}$ последовательность интегрируемых функций, такая, что $||f - f_n||_{L1} \to 0$(сходится в смысле нормы l1)$n \to \infty$

Тогда f интегрируема и $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

Доказательство. Можно считать, что f и f_n всюду определены и конечны.

Для любого n $\exists g_n \in \mathcal{F} : ||f_n - g_n||_{L1} \leq \frac{1}{n}$

$||f - g_n||_{L1} \leq ||f - f_n||_{L1} + ||f_n - g_n||_{L1} \leq ||f - f_n|||_{L1} + \frac{1}{n}(||f - f_n|||_{L1} \to 0)$

$\implies g_n$ сходится к $f \implies$

f - интегрируема и $I(f) = \lim I(g_n) = \lim I(f_n)$ ▶

Определение. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n =$ функциональный ряд. Будем говорить, что ряд сходится нормально, если сходится ряд$\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{L1}$

Теорема 2.8. *пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ - нормально сходящийся ряд определенных почти всюду функций,*

для почти всех x из M $f_n(x)$ определены для каждого n

Кроме того, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится

Если $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$,тогда

$||F - \sum_{k=1}^{n} f_k||_{L1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||_{L1}$

Если все f_n интегрируемы, то F - интегрируема и $I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$

Доказательство. Пусть $E_n = \{x \in M : f_n$ не определено$\}$

E_n имеет меру ноль, их объединение имеет меру 0

Тогда для любого x не из E все $f_n(x)$ определены

$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \implies ||\Phi(x)||_{L1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n|| < \infty$

Множество всех x: $\Phi(x) = \infty$ имеет меру 0 $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится почти всюду $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится почти всюду

Положим F $= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ если сходится, 0, иначе.

$R_n(x) = F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{r=n+1}^{\infty} f_k(x)$

$|R_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \implies ||R_n||_{L1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_{L1} \to 0 \implies ||R_n||_{L1} \to 0$

пусть все f_n интегрируемы, $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k, F_n$ интегрируемы

И по первой части $||F - F_n||_{L1} \to 0$

F - интегрируема

$I(F) = \lim_{n\to\infty} I(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} I(f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I(f_k) \quad (|I(f_k)| \leq ||f_k||_{L1})$ ▶

Следствие.Теорема Леви для функциональных рядов

Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функциональный ряд, и все f_n неотрицательные и интегрируемые, тогда если сходится$\sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$, то для почти всех x определена $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и

F - интегрируема, $I(F) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$

Доказательство. т.к f_n неотрицательна, то $f_n = |f_n|$ и $||f_n||_{L1} = |||f_k|||_{L1} = I(|f_n|) = I(f_n) \implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$сходится нормально, применяем теорему, все хорошо ▶

Следствие.(Теорема Леви для последовательностей)

Пусть $\{f_n\}$ последовательность функций, интегрируемых и определенных почти всюду (за исключением множества E меры 0)

$f_n(x)$ монотонна для всех x, кроме x из E

Тогда если $I(f_n)$ ограничена, то почти для всех x из M определена $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, причем f - интегрируема и $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

Доказательство. пусть f_n возрастает, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1}(x) - f_n(x)$ состоит из положительных функций

$\forall n \sum_{k=1}^{n}(f_{k+1}(x) - f_k(x)) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$\sum_{k=1}^{n} I(f_{k+1} - f_k) = I(f_{n+1}) - I(f_n)$ - ограничена

$|I(f_n)| < A \implies \sum_{k=1}^{n} I(f_{n+1} - f_n)$ - ограничена и возрастает по n $\implies \sum_{k=1}^{n} I(f_{k+1}) - I(f_k)$

Применяем теорему Леви для рядов

$f_{n+1}(x) - f_n(x)$ - определена почти для всех x и

$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$G(x) = \lim \sum_{k=1}^{n}(f_{k+1} - f_k(x) = \lim(f_{n+1}(x) - f_n(x)) = \lim f_n(x) - f_1(x) \implies f(x) = \lim f_n(x) = G(x) + f_1(x)$

$I(G) = \lim \sum_{k=1}^{n} I(f_{k+1} - f_k) = \lim I(f_{n+1}) - I(f_1)$

$\lim I(f_n) = I(G) + I(f_1) = I(f)$ ▶

Определение. $\{f_n\}$ последовательность функций, определенных пости всюду в M, тогда почти всюду определены функции $g(x) = \inf f_n(x), h(x) = \sup f_n(x)$

$g(x)$ - нижняя огибающая последовательности f_n, а $h(x)$ - верхняя огибающая последовательности

Лемма 2.17. *Для любого множества E верны равенства*

$\sup_{x\in E}(-f(x)) = -\inf_{x\in E}(f(x))$

$\inf_{x\in E}(-f(x)) = -sup_{x\in E}(f(x))$

Доказательство. Докажите сами ▶

не хочу 21.10.22