Содержание

1 Теория булевых функций

1.1 Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от n переменных. Таблица истинности БФ

Определение. Булева функция от n переменных - это отображение $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

Замечание. Количество БФ от n переменных - 2^{2^n}

Доказательство. Каждая булева функция определяется своим столбцом значений. Столбец является булевым вектором длины $m = 2n$, где n – число аргументов функции. Число различных векторов длины m (а значит и число булевых функций, зависящих от n переменных) равно $2^m = 2^{2^n}$ ▶

1.2 Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия)

Булевы функции одной переменной:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_1 - тождественный 0, f_2 - тождественная функция, f_3 - отрицание ($\neg$), f_4 - тождественная 1

Булевы функции двух переменных

x	y	0	$\wedge$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

1. $\wedge$ - конъюнкция
2. $\leftarrow$ - антиимпликация
3. $\to$ - импликация
4. $\vee$ - дизъюнкция
5. $\mid$ - штрих Шеффера
6. $\downarrow$ - стрелка Пирса
7. $+$ - взаимоисключающее или, сложение по модулю 2 (XOR)

1.3 Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами

Определение. Формула логики высказываний - слово алфавита логики высказываний, построенное по следующим правилам:

1. символ переменной - формула
2. символы 0 и 1 - формулы
3. если Φ_1 и Φ_2 - формулы, то слова $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, $(\Phi_1 | \Phi_2)$, $\dots$, Φ_1' тоже формулы

Очевидно, что каждой формуле логики высказываний можно поставить в соответствие булеву функцию, причем если формуле F_1 соответствует функция f_2, а формуле F_2 функция f_2 и $F_1 \equiv F_2$, то $f_1\ f_2$.

Каждая формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ логики высказываний однозначно определяет некоторую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ Это булева функция, определенная таблицей истинности формулы Φ.

1.4 Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций

Определение. Формулы логики высказываний $\Phi(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ и $\Psi(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ эквивалетные, если для всех наборов значений $a_1,\ ...,\ a_n \in \{0,\ 1\}$ $\Phi(a_1,\ ...,\ a_n) = 1 \Leftrightarrow \Psi(a_1,\ ...,\ a_n) = 1$

Теорема 1.1 (Об эквивалентных формулах). *1. Если $\Phi(x_1, ..., x_n) \equiv \Psi(x_1, ..., x_n)$ и $\theta_i(x_1, ..., x_k)$, $i = 1,\ ...,\ n$, - формулы логики высказываний, то $\Phi(\theta_1, ..., \theta_n) \equiv \Psi(\theta_1, ..., \theta_n)$*

2. Если в формуле Φ заменить подформулу Ψ на эквивалетную формулу Θ, то результат замены эквивалентен Φ.

Доказательство. 1. После подстановки в $\Phi(x_1, ..., x_n)$ формул $\theta_i(x_1, ..., x_k)$ получим формулу от k переменных:

$$\Phi(\theta_1, ..., \theta_n)(x_1, ..., x_k) = \Phi(\theta_i(x_1, ..., x_k), ..., \theta_n(x_1, ..., x_k))$$

и аналогично для Ψ. Выберем произвольный набор элементов $a_1, ..., a_k \in \{0, 1\}$ и подставим:

$$\Phi(\theta_1(a_1, ..., a_k), ..., \theta_n(a_1, ..., a_k)) = \Phi(b_1, ..., b_n), b_i = \theta_i(a_1, ..., a_k),$$

$$\Psi(\theta_1(a_1, ..., a_k), ..., \theta_n(a_1, ..., a_k), ..., \theta_n(a_1, ..., a_k)) = \Psi(b_1, ..., b_n).$$

Т.к. $\Phi \equiv \Psi, \Phi(b_1, ..., b_n) = 1 \leftrightarrow \Psi(b_1, ..., b_n) = 1$, значит и $\Phi(\theta_1, ..., \theta_n)(a_1, ..., a_k) = 1 \leftrightarrow \Psi(\theta_1, ..., \theta_n)(a_1, ..., a_k)$, т.е. $\Phi(\theta_1, ..., \theta_n) \equiv \Psi(\theta_1, ..., \theta_n)$.

2. По условию $\Psi \equiv \Theta$. Обозначим результат замены в формуле Φ подформулы Ψ на Θ через $\Phi[\Psi/\Theta]$.

   Индукцию по числу логических связанок в формуле Φ. Пусть k - число связок в подфомруле Ψ.

   Заметим, что, если формула Φ содержит менее k связок, то в ней нет подформулы Ψ. А если формула Φ имеет ровно k связок, то единственный случай, когда она содержит подформулу Ψ - это $\Phi = \Psi$

   База индукции.

   (a) Формула Φ содержит не более k связок и при этом $\Phi \neq \Psi$. Тогда Φ не содержит подформулы Ψ, поэтому при данной операции не меняется: $\Phi[\Psi/\Theta] = \Phi$, отсюда $\Phi[\Psi/\Theta] \equiv \Phi$

   (b) Формула Φ содержит k связок и $\Phi = \Psi$. Тогда $\Phi[\Psi/\Theta] = \Theta$ результат замены эквивалентен исходной формуле $\Phi = \Psi$

   Шаг индукции.

   Рассмотрим формулу $\Phi(x_1, ..., x_n)$ содержающую m + 1 связки, считая, что для формул из не более, чем m связок, утверждение доказано. Тогда Φ имеет вид $\Phi_1 \wedge \Phi_2, \Phi_1 \vee \Phi_2$ и т.д.

   Рассмотрим случай конъюнкции(остальные аналогично). Выберем набор элементов $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$ и подставим в формулы:

$$\Phi(a_1, ..., a_n) = \Phi_1(a_1, ..., a_n) \wedge \Phi_2(a_1, ..., a_n),$$

$$\Phi[\Psi/\Theta](a_1, ..., a_n) = \Phi_1[\Psi/\Theta](a_1, ..., a_n) \wedge \Phi_2[\Psi/\Theta](a_1, ..., a_n).$$

   По индукционному допущению формулы $\Phi_1 \equiv \Phi_1[\Psi/\Theta]$ аналогично для Φ_2 Поэтому

$$\Phi(a_1, ..., a_n) = \Phi_1(a_1, ..., a_n) \wedge \Phi_2(a_1, ..., a_n),$$

$$\Phi[\Psi/\Theta](a_1, ..., a_n) = \Phi_1[\Psi/\Theta](a_1, ..., a_n) \wedge \Phi_2[\Psi/\Theta](a_1, ..., a_n),$$

   т.е. $\Phi \equiv \Phi[\Psi/\Theta]$

▶

Теорема 1.2. *Справедливы следующие эквивалетности*

1. $a \vee b \equiv b \vee a$ ***симметричность***

2. $a \wedge b \equiv b \wedge a$

3. $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$ ***ассоциативность***

4. $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$

5. $a \wedge (b \vee c) \equiv a{\wedge}b \vee a{\wedge}c$ ***транзитивность***

6. $a \vee b \wedge c \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

7. $a \vee a \equiv a$ ***идемпотентность***
8. $a \wedge a \equiv a$
9. $\overline{(a \vee b)} \equiv \overline{a} \wedge \overline{b}$ ***законы де Моргана***
10. $\overline{(a \wedge b)} \equiv \overline{a} \vee \overline{b}$
11. $\overline{\overline{a}} \equiv a$ ***двойное отрицание***
12. $a \vee a \wedge b \equiv a$ ***поглощение***
13. $a \wedge (a \vee b) \equiv a$
14. $a \vee \overline{a} \wedge b \equiv a \vee b$ ***слабое поглощение***
15. $a \wedge (\overline{a} \vee b) \equiv ab$
16. $a \vee 0 \equiv a$
17. $a \wedge 0 \equiv 0$
18. $a \vee 1 \equiv 1$
19. $a \wedge 1 \equiv a$
20. $a \vee \overline{a} \equiv 1$
21. $a\overline{a} \equiv 0$
22. $a \to b \equiv \overline{a} \vee b$
23. $a \leftrightarrow b \equiv \overline{a} \wedge \overline{b} \vee a \wedge b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$
24. $a + b \equiv \overline{a \leftrightarrow b} \equiv \overline{a} \wedge b \vee a \wedge \overline{b}$
25. $a|b \equiv \overline{a \wedge b}$
26. $a \downarrow b \equiv \overline{a \vee b}$

Доказательство. Доказательство сводится к построению таблиц истинности для левой и правой частей каждой эквивалентности ▶

1.5 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые БФ

Определение. Формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ называется тождественно истинной (ложной), если для любого набора значений $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 1(0)$

Определение. Формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ называется выполнимой, если существует набор значений, для которого $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 1$

1.6 ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения

Определение. Литера - это переменная или отрицание переменной

Определение. Конъюнкт(элементарная конъюнкция) - это либо литера, либо конъюнкция литер

Определение. Дизъюнктивная нормальная форма(ДНФ) - это либо конъюнкт, либо дизъюнкия конъюнктов

Определение. Дизъюнкт(элементарная дизъюнкция) - это либо литера, либо дизъюнкция литер

Определение. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) - это либо дизъюнкт, либо конъюнкция дизъюнктов

Замечание. Алгоритм построения ДНФ(КНФ) по заданной ТИ

1. Выбрать в таблице все строки со значением функции f = 1 (f = 0)
2. Для каждой такой строки (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) выписать конъюнкт(дизъюнкт) по принципу: пишем переменную с отрицанием, если ее значение 0(1), иначе пишем переменную без переменную без отрицания.

3. берем дизъюнкцию(конъюнкцию) построенных конъюнктов(дизъюнктов)

Замечание. Алгоритм приведения формулы к ДНФ/КНФ методом эквивалентностей

1. Выразить все связки в формуле через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.
2. Внести все отрицания внутрь скобок
3. Устранить двойные отрицания
4. Применять свойство дистрибутивности, пока это возможно

1.7 СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения

1.8 Минимизация нормальных форм (карты Карно)

1.9 Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения

1.10 Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций

1.11 Полные системы булевых функций, базисы

1.12 Классы T_0, T_1 (функции, сохраняющие 0 и 1)

Определение. Класс $T_0 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$

Определение. Класс $T_1 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
x	+	+	-	+	+
$\neg x$	-	-	+	-	+
xy	+	+	-	+	-
$x \vee y$	+	+	-	+	-
$x \oplus y$	+	-	-	-	+
$x \leftrightarrow y$	-	+	-	-	+
$x \to$	-	+	-	-	-
$x \mid y$	-	-	-	-	-
$x \downarrow y$	-	-	-	-	-

Замечание. Классы T_0, T_1 являются замкнутыми.

Доказательство. Докажем для T_0. Достаточно взять булевы функции $g, g_1, \dots, g_n \in T_0$ и доказать, что их суперпозиция из класса T_0.

$g(g_1(0, \dots, 0), \dots, g_n(0, \dots, 0)) = g(0, \dots, 0) = 0$ ▶

1.13 Класс S самодвойственных функций, определение двойственной БФ

Определение. Булева функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется двойственной к БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ (обозначается g = f*), если $g(x_1, \dots, x_n) = f'(x_1', \dots, x_n')$.

Из закона двойного отрицания следует, что $(f^*)^* = f$

Определение. Булева функция f называется самодвойственной, если $f = f^*$.

Определение. Класс самодвойственных функций $= \{f \mid f = f^*\}$

Замечание. Класс S является замкнутым.

Доказательство. Возьмем БФ $g, g_1, \dots g_k \in S$ и докажем, что их суперпозиция будет также из класса S.
Если $F(x_1, \dots, x_n) = g(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$,
то $F^*(x_1, \dots, x_n) = \neg F(\neg x_1, \dots, \neg x_n) = \neg g(g_1(\neg x_1, \dots, \neg x_n), \dots, g_k(\neg x_1, \dots, \neg x_n))$.

Так как $g_i \in S$, то $g_i(x_1, \dots, x_n) = \neg g_i(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$, что эквивалентно $\neg g_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$. Следовательно, $F^*(x_1, \dots, x_n) = \neg g(\neg g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \neg g_k(x_1, \dots, x_n))$.
Так как $g \in S$, то $\neg g(\neg g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \neg g_k(x_1, \dots, x_n)) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)) \implies f^*(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$ ▶

1.14 Класс монотонных функций

Определение. Назовем два набора из 0 и 1 $a = (a_1, \dots a_n), b = (b_1, \dots b_n)$ **соседними**, если все их координаты (кроме одной) совпадают.

Определение. Пусть k - номер единственной координаты, по которой отличаются соседние наборы a, b. Если $a_k = 0$, $b_k = 1$, то мы будем говорить, что набор a **меньше** набора b ($a \prec b$)

Определение (Монотонная функция)**.** БФ $f(x_1, \dots x_n)$ называется монотонной, если $\forall$ соседних наборов a, b таких, что $a \prec b \implies f(a) \leq f(b)$

Замечание. Класс M является замкнутым.

Доказательство. $g, g_1, \dots g_k \in M, F(x_1, \dots, x_n) = g(g_1, \dots g_k)$ и рассмотрим два произвольных набора $a \prec b$. Пусть $c_1 = g_1(a), d_1 = g_1(b), \dots\ c_k = g_k(a), \dots d_k = g_k(b)$

$g_i \in M \implies c_i \leq d_i$

Если наборы $c = (c_1, \dots, c_k)$ и $d = (d_1, \dots, d_k)$ - соседние, то и $F(c) \leq F(d)$

В противном случае легко показать, что $\exists$ цепочка

$$c \prec e_1 \prec \dots \prec e_l \prec d$$

(то есть наши наборы сравнимы по определению Ашаева)

и $g(c) \leq g(d) \implies F(c) \leq F(d) \implies F \in M$ ▶

1.15 Класс линейных функций

1.16 Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях

Лемма 1.1 (о несамодвойственной функции)**.** *Если БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ несамодвойственна, то замыкание класса $[f, \neg x]$ содержит тождественно ложную БФ 0 и тождественно истинную БФ 1.*

Доказательство. Так как f несамодвойственна, то существует набор $a_1, \dots, a_n$ значений аргументов такой, что $f(a_1, \dots, a_n) \neq \neg f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$

Так как БФ принимают только значения 0 и 1, то $f(a_1, \dots, a_n) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$

Составим функцию $g(x) = f(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$, где

$$x^a = \begin{cases} x & \text{если } a = 1 \\ \neg x & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $g \in [f, \neg x]$, так как является их суперпозицией.

$g(0) = f(0^{a_1}, \dots, 0^{a_n}) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$, $g(1) = f(1^{a_1}, \dots, 1^{a_n}) = f(a_1, \dots, a_n)$,

$g(0) = g(1)$ - g - константа, g и $\neg g$ принимают значения 0 и 1 чтд. ▶

Лемма 1.2 (О немонотонной функции)**.** *Если $f(x_1, \dots, x_n)$ немонотонна, то $x' \in [f, 0, 1]$*

Доказательство. Из немонотонности f следует существование двух соседних наборов $a = (a_1, \dots, a_n) \prec (b_1, \dots, b_n) = b$ такие, что $f(a) > f(b)$. Б.О.О считаем, что они отличаются только в первой координате

$$a_1 = 0$$
$$b_1 = 1$$
$$a_i = b_i$$

$\lhd g(x, a_2, \dots, a_n) \in [f, 0, 1]$

$g(0) = f(a) = 1 \quad , g(1) = f(b) = 0 \implies g \equiv x'$ ▶

Лемма 1.3 (О нелинейной функции)**.** $f(x_1, \dots, x_n) \notin L \implies xy \in [f, 0, 1, x']$

Доказательство. $f(x_1, \dots, x_n) \notin L \implies$ полином Жегалкина функции f содержит конъюнкцию двух переменных x_1 и x_2

$\implies f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 h_{12}(x_3, \dots x_n) + x_1 h_1(x_3, \dots x_n) + h_0(x_3, \dots x_n)$

$f \notin L \implies h_{12} \neq 0 \implies \exists (a_3, \dots a_n) h_{12}(a_3, \dots a_n) = 1$

Подставим этот набор в ПЖ f:

$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, a_3 \dots a_n) = x_1 x_2 h_{12}(a_3, \dots a_n) + x_1 h_1(a_3, \dots a_n) + h_0(a_3, \dots a_n)$

$h_i \in \{0, 1\} \implies \exists 8$ вариантов того, как выглядит полином Жегалкина

1. Система функций $[g, \neg, 0, 1]$ полна и содержит конъюнкцию
2. g - конъюнкция
3. $xy = g(x, y') \vee xy = g(x', y) \implies xy$ $\in$замыкание

Т.к g выражается через $f(x_1, \dots x_n), 0, 1$, то конъюнкция также лежит в замыкании $[f, \neg, 0, 1]$

►

1.17 Теорема Поста о полноте системы булевых функций

1.18 Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи)

2 Логика высказываний

2.1 Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела

2.2 Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований.

2.3 Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем

2.4 Понятия необходимых и достаточных условий

2.5 Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов

2.6 Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов

2.7 Теорема о дедукции для ИВ

2.8 Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ

2.9 ИВ Генцена, его полнота

2.10 Метод резолюций для логики высказываний (без обоснования корректности)

3 Логика предикатов

3.1 Понятие предиката и операции, их представления, примеры

Определение. n-местный предикат на множестве А - это отображение вида $P : A^n \to \{0, 1\}$

Определение. n-местная операция на множестве А - это отображение вида $f : A^n \to A$

Предикат можно задать как множество тех аргументов, на которых он является истинным

Пример. $P = \{1, 3\} : P = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Пример. $Q = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

Способы задания:

1. описательный
2. множество (отношения)
3. таблица (истинности)
4. графы
   для предиката $P(x, y)$ ребро (x, y) обозначает $P(x, y) = 1$
   для операции $f(x)$ дуга (x, y) обозначает $y = f(x)$

3.2 Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы

Определение. Сигнатура - набор предикатных, функциональных и константных символов с указанием местностей

Пример. $\sigma = \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, c\}$

Определение. Две сигнатуры считаем *равными*, если в них одинаковое кол-во символов каждого сорта и местности соответствующих символов равны

Определение. Интерпретация сигнатуры σ на множестве A - это отображение, которое

1. каждому n-местному предикатному символу $P^{(n)} \in \sigma$ сопоставляет n-местный предикат на A
2. каждому n-местному функциональному символу $f^{(n)} \in \sigma$ сопоставляет n-местную операцию на A
3. каждому константному символу сопоставляет элемент множества A

Определение. Алгебраическая система - набор, состоящий из множества A, сигнатуры σ и интерпретации σ на A. Множество A называют основным множеством системы ($\mathfrak{a} =< A, \sigma >$)

3.3 Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов

Зафиксируем сигнатуру σ. Алфавит логики предикатов сигнатуры σ — это множество
$\sigma_{\text{АЛП}} = \sigma \cup \{x_1, x_2 \ldots, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists, (,), =, ,\}$

Определение. Терм - слово алфавита логики предикатов, построенное по правилам:

1. символ переменной - терм
2. константный символ - терм
3. если $t_1, \ldots t_n$ - термы, $f^{(n)} \in \sigma$, то и $f(t_1, \ldots, t_n)$ - терм

Определение. Атомарная формула сигнатуры σ - это слово одного из двух видов:

1. $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 - термы
2. предикат $P(t_1, \ldots, t_n), P^{(n)} \in \sigma, t_1, \ldots t_n$ - термы

Определение. Формула ЛП сигнатуры σ - слово, построенное по правилам:

1. атомарная формула - формула
2. если ϕ_1 и ϕ_2 - формулы, то слова $(\phi_1 \& \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), (\phi_1 \rightarrow \phi_2), \neg\phi_1$ тоже формулы
3. если ϕ - формула, то слова $(\forall x \phi)$ и $(\exists x \phi)$ тоже формулы

3.4 Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы

Определение. Вхождение переменной x в формулу ϕ **связанное**, если x попадает в область действия квантора $\exists x / \forall x$, в противном случае вхождение x **свободное**

Определение. Переменная x **свободна** в формуле ϕ, если есть хотя бы одно свободное вхождение x в ϕ, в противном случае она **связанная**

Определение. Формула замкнутая, если она не содержит свободных переменных.

3.5 Истинность формул на алгебраической системе

Каждый терм $t(x_1, \ldots, x_n)$ определяет в системе $\mathfrak{a}$ функцию $t_{\mathfrak{a}} : A^n \rightarrow A$ следующим образом: в терме все функциональные и константные символы заменяются на их интерпретации в системе A, после чего вычисляется полученная суперпозиция от входных аргументов.

Пусть также $\phi(x_1 \ldots, x_n)$ — формула со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Определим понятие истинности формулы ϕ на наборе элементов $a_1, \ldots a_n \in \mathfrak{a}$ в алгебраической системе $\mathfrak{a}$ (обозначение: $\mathfrak{a} \models \phi(a_1, \ldots a_n)$) следующим образом.

Определение. 1. Пусть ϕ имеет вид $t_1 = t_2$. Тогда $A \models \phi(a_1, \ldots a_n) \Leftrightarrow t_{1A}(a_1, \ldots a_n) = t_{2A}(a_1, \ldots a_n)$ (здесь t_{iA} — функция, определяемая термом t_i в системе A).

2. Пусть ϕ имеет вид $P(t_1, \dots, t_k)$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots a_n) \Leftrightarrow P_A(t_{1A}(a_1, \dots a_n), \dots, t_{kA}(a_1, \dots a_n)) = 1$, где P_A — интерпретация предикатного символа P в системе A.

3. Пусть ϕ имеет вид $(\phi_1 \& \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \to \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), \neg\phi_1$. Тогда истинность формулы ϕ определяется по значениям $\phi_1(a_1, \dots a_n)$ и $\phi_2(a_1, \dots a_n)$ по таблицам истинности логических связок.

4. Пусть $\phi(x_1 \dots, x_n)$ имеет вид $(\forall x \phi(x, x_1, \dots x_n))$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots a_n) \Leftrightarrow$ для всех элементов $b \in A$ выполнено $A \models \phi(b, a_1, \dots a_n)$.

5. Пусть $\phi(x_1 \dots, x_n)$ имеет вид $(\exists x \phi(x, x_1, \dots x_n))$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots a_n) \Leftrightarrow$ для некоторого элемента $b \in A$ выполнено $A \models \phi(b, a_1, \dots a_n)$.

Определение. Формула $\phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ тождественно истинная (ложна) в алгебраической системе $A =< A, \sigma >$, если для всех наборов элементов $a_1 \dots a_n \in A$ выполнено $A \models \phi(a_1 \dots a_n) (A \not\models \phi(a_1 \dots a_n))$.

Определение. Формула $\phi(x_1, \dots, x_n)$ выполнима в алгебраической системе $A =< A, \sigma >$, если для хотя бы одного набора элементов $a_1 \dots a_n \in A$ выполнено $A \models \phi(a_1 \dots a_n)$.

Определение. Формула ϕ сигнатуры σ тождественно истинная (ложна), если ϕ тождественно истинна (ложна) во всех алгебраических системах сигнатуры σ.

Определение. Формула ϕ сигнатуры σ выполнима, если ϕ выполнима хотя бы в одной алгебраической системе сигнатуры σ.

3.6 **Изоморфизм систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм**

3.7 **Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности**

3.8 **Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем**

3.9 **Эквивалентность формул логики предикатов**

3.10 **Тождественно истинные (ложные) и выполнимые формулы**

3.11 **Пренексный вид формулы**

3.12 **Основные эквивалентности логики предикатов**

3.13 **Классы формул $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$. Соотношения между классами**

3.14 **Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах)**

3.15 **Проверка существования вывода методом резолюций (алгоритм)**

3.16 **Логическое следование в логике предикатов**

3.17 **Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов**

3.18 **Теория. Модель теории**

3.19 **Непротиворечивая теория. Полная теория. Свойства непротиворечивых и полных теорий**

3.20 **Теорема о существовании модели (без доказательства)**

3.21 **Теорема о связи выводимости и противоречивости**

3.22 **Теоремы о корректности и полноте ИП**

3.23 **Теорема компактности**

3.24 **Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы. Конечно аксиоматизируемые теории**

3.25 **Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы)**

3.26 **Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности)**