

Содержание

1	Теория булевых функций	1
1.1	Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от n переменных. Таблица истинности БФ	1
1.2	Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия)	1
1.3	Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами	1
1.4	Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций	2
1.5	Тавтологически истинные (ложные) и выполнимые БФ	2
1.6	ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения	2
1.7	СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения	2
1.8	Минимизация нормальных форм (карты Карно)	2
1.9	Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения	2
1.10	Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций	2
1.11	Полные системы булевых функций, базисы	2
1.12	Классы T_0, T_1 (функции, сохраняющие 0 и 1)	2
1.13	Класс S самодвойственных функций, определение двойственной БФ	2
1.14	Класс монотонных функций	3
1.15	Класс линейных функций	3
1.16	Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях	3
1.17	Теорема Поста о полноте системы булевых функций	3
1.18	Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи)	3
2	Логика высказываний	3
2.1	Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела	3
2.2	Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований.	3
2.3	Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем	3
2.4	Понятия необходимых и достаточных условий	3
2.5	Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов	3
2.6	Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов	3
2.7	Теорема о дедукции для ИВ	3
2.8	Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ	3
2.9	ИВ Генцена, его полнота	3
2.10	Метод резолюций для логики высказываний (без обоснования корректности)	3
3	Логика предикатов	3
3.1	Понятие предиката и операции, их представления, примеры	3
3.2	Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы	4
3.3	Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов	4
3.4	Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы	4
3.5	Истинность формул на алгебраической системе	5
3.6	Изоморфизм систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм	6
3.7	Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности	6
3.8	Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем	6
3.9	Эквивалентность формул логики предикатов	6
3.10	Тавтологически истинные (ложные) и выполнимые формулы	6
3.11	Пренексный вид формулы	6
3.12	Основные эквивалентности логики предикатов	6
3.13	Классы формул $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$. Соотношения между классами	6
3.14	Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах)	6
3.15	Проверка существования вывода методом резолюций (алгоритм)	6
3.16	Логическое следование в логике предикатов	6
3.17	Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов	6
3.18	Теория. Модель теории	6
3.19	Непротиворечивая теория. Полная теория. Свойства непротиворечивых и полных теорий	6

3.20	Теорема о существовании модели (без доказательства)	6
3.21	Теорема о связи выводимости и противоречивости	6
3.22	Теоремы о корректности и полноте ИП	6
3.23	Теорема компактности	6
3.24	Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы. Конечно аксиоматизируемые теории	6
3.25	Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы)	6
3.26	Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности)	6

1 Теория булевых функций

1.1 Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от n переменных. Таблица истинности БФ

Определение. Булева функция от n переменных - это отображение $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

Замечание. Количество БФ от n переменных - 2^{2^n}

Доказательство. Каждая булева функция определяется своим столбцом значений. Столбец является булевым вектором длины $m = 2^n$, где n - число аргументов функции. Число различных векторов длины m (а значит и число булевых функций, зависящих от n переменных) равно $2^m = 2^{2^n}$ ►

1.2 Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия)

Булевы функции одной переменной:	x	f_1	f_2	f_3	f_4	f_1 - тождественный 0, f_2 - тождественная функция, f_3 - отрицание (\neg), f_4 - тождественная 1
	0	0	0	1	1	
	1	0	1	0	1	

Булевы функции двух переменных	x	y	0	\wedge	\rightarrow'	x	\leftarrow'	y	+	\vee	\downarrow	\leftrightarrow	y'	\leftarrow	x'	\rightarrow		1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

1. \wedge - конъюнкция
2. \leftarrow - антиимпликация
3. \rightarrow - импликация
4. \vee - дизъюнкция
5. $|$ - штрих Шеффера
6. \downarrow - стрелка Пирса
7. $+$ - взаимноисключающее или, сложение по модулю 2 (XOR)

1.3 Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами

Определение. Формула логики высказываний - слово алфавита логики высказываний, построенное по следующим правилам:

1. символ переменной - формула
2. символы 0 и 1 - формулы
3. если Φ_1 и Φ_2 - формулы, то слова $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$, $(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$, $(\Phi_1 | \Phi_2)$, \dots , Φ_1' тоже формулы

- 1.4 Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций
- 1.5 Тавтологически истинные (ложные) и выполнимые БФ
- 1.6 ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения
- 1.7 СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения
- 1.8 Минимизация нормальных форм (карты Карно)
- 1.9 Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения
- 1.10 Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций
- 1.11 Полные системы булевых функций, базисы
- 1.12 Классы T_0, T_1 (функции, сохраняющие 0 и 1)

Определение. Класс $T_0 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$

Определение. Класс $T_1 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$

	T_0	T_1	S
0	+	-	-
1	-	+	-
x	+	+	-
$\neg x$	-	-	+
xy	+	+	-
$x \vee y$	+	+	-
$x \oplus y$	+	-	-
$x \leftrightarrow y$	-	+	-
$x \rightarrow y$	-	+	-
$x y$	-	-	-
$x \downarrow y$	-	-	-

Замечание. Классы T_0, T_1 являются замкнутыми.

Доказательство. Докажем для T_0 . Достаточно взять булевы функции $g, g_1, \dots, g_n \in T_0$ и доказать, что их суперпозиция из класса T_0 .

$$g(g_1(0, \dots, 0), \dots, g_n(0, \dots, 0)) = g(0, \dots, 0) = 0$$

►

1.13 Класс S самодвойственных функций, определение двойственной БФ

Определение. Булева функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется двойственной к БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ (обозначается $g = f^*$), если $g(x_1, \dots, x_n) = f'(x'_1, \dots, x'_n)$.

Из закона двойного отрицания следует, что $(f^*)^* = f$

Определение. Булева функция f называется самодвойственной, если $f = f^*$.

Определение. Класс самодвойственных функций $= \{f \mid f = f^*\}$

Замечание. Класс S является замкнутым.

Доказательство. Возьмем БФ $g, g_1, \dots, g_k \in S$ и докажем, что их суперпозиция будет также из класса S.

Если $F(x_1, \dots, x_n) = g(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$,

то $F^*(x_1, \dots, x_n) = \neg F(\neg x_1, \dots, \neg x_n) = \neg g(g_1(\neg x_1, \dots, \neg x_n), \dots, g_k(\neg x_1, \dots, \neg x_n))$.

Так как $g_i \in S$, то $g_i(x_1, \dots, x_n) = \neg g_i(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$, что эквивалентно $\neg g_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$. Следовательно, $F^*(x_1, \dots, x_n) = \neg g(\neg g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \neg g_k(x_1, \dots, x_n))$.

Так как $g \in S$, то $\neg g(\neg g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \neg g_k(x_1, \dots, x_n)) = g(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)) \implies f^*(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$

►

1.14 Класс монотонных функций

1.15 Класс линейных функций

1.16 Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях

Лемма 1.1 (о несамодвойственной функции). Если БФ $f^*(x_1, \dots, x_n)$ несамодвойственна, то замыкание класса $[f, \neg x]$ содержит тождественно ложную БФ 0 и тождественно истинную БФ 1.

Доказательство. Так как f несамодвойственна, то существует набор a_1, \dots, a_n значений аргументов такой, что $f(a_1, \dots, a_n) \neq \neg f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$

Так как БФ принимают только значения 0 и 1, то $f(a_1, \dots, a_n) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$

Составим функцию $g(x) = f(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$



1.17 Теорема Поста о полноте системы булевых функций

1.18 Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи)

2 Логика высказываний

2.1 Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела

2.2 Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований.

2.3 Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем

2.4 Понятия необходимых и достаточных условий

2.5 Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов

2.6 Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов

2.7 Теорема о дедукции для ИВ

2.8 Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ

2.9 ИВ Генцена, его полнота

2.10 Метод резолюций для логики высказываний (без обоснования корректности)

3 Логика предикатов

3.1 Понятие предиката и операции, их представления, примеры

Определение. n -местный предикат на множестве A - это отображение вида $P : A^n \rightarrow \{0, 1\}$

Определение. n -местная операция на множестве A - это отображение вида $f : A^n \rightarrow A$

Предикат можно задать как множество тех аргументов, на которых он является истинным

Пример. $P = \{1, 3\} : P = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Пример. $Q = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

Способы задания:

1. описательный
2. множество (отношения)
3. таблица (истинности)

4. графы

для предиката $P(x, y)$ ребро (x, y) обозначает $P(x, y) = 1$

для операции $f(x)$ дуга (x, y) обозначает $y = f(x)$

3.2 Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы

Определение. Сигнатура - набор предикатных, функциональных и константных символов с указанием местностей

Пример. $\sigma = \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, c\}$

Определение. Две сигнатуры считаем *равными*, если в них одинаковое кол-во символов каждого сорта и местности соответствующих символов равны

Определение. Интерпретация сигнатуры σ на множестве A - это отображение, которое

1. каждому n -местному предикатному символу $P^{(n)} \in \sigma$ сопоставляет n -местный предикат на A
2. каждому n -местному функциональному символу $f^{(n)} \in \sigma$ сопоставляет n -местную операцию на A
3. каждому константному символу сопоставляет элемент множества A

Определение. Алгебраическая система - набор, состоящий из множества A , сигнатуры σ и интерпретации σ на A . Множество A называют основным множеством системы ($\mathfrak{a} = \langle A, \sigma \rangle$)

3.3 Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов

Зафиксируем сигнатуру σ . Алфавит логики предикатов сигнатуры σ — это множество

$$\sigma_{\text{ЛПП}} = \sigma \cup \{x_1, x_2, \dots, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists, (,), =, ,\}$$

Определение. Терм - слово алфавита логики предикатов, построенное по правилам:

1. символ переменной - терм
2. константный символ - терм
3. если t_1, \dots, t_n - термы, $f^{(n)} \in \sigma$, то и $f(t_1, \dots, t_n)$ - терм

Определение. Атомарная формула сигнатуры σ - это слово одного из двух видов:

1. $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 - термы
2. предикат $P(t_1, \dots, t_n), P^{(n)} \in \sigma, t_1, \dots, t_n$ - термы

Определение. Формула ЛП сигнатуры σ - слово, построенное по правилам:

1. атомарная формула - формула
2. если ϕ_1 и ϕ_2 - формулы, то слова $(\phi_1 \& \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), (\phi_1 \rightarrow \phi_2), \neg \phi_1$ тоже формулы
3. если ϕ - формула, то слова $(\forall x \phi)$ и $(\exists x \phi)$ тоже формулы

3.4 Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы

Определение. Вхождение переменной x в формулу ϕ **связанное**, если x попадает в область действия квантора $\exists x / \forall x$, в противном случае вхождение x **свободное**

Определение. Переменная x **свободна** в формуле ϕ , если есть хотя бы одно свободное вхождение x в ϕ , в противном случае она **связанная**

Определение. Формула замкнутая, если она не содержит свободных переменных.

3.5 Истинность формул на алгебраической системе

Каждый терм $t(x_1, \dots, x_n)$ определяет в системе \mathbf{a} функцию $t_{\mathbf{a}} : A^n \rightarrow A$ следующим образом: в терме все функциональные и константные символы заменяются на их интерпретации в системе \mathbf{A} , после чего вычисляется полученная суперпозиция от входных аргументов.

Пусть также $\phi(x_1, \dots, x_n)$ — формула со свободными переменными x_1, \dots, x_n . Определим понятие истинности формулы ϕ на наборе элементов $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{a}$ в алгебраической системе \mathbf{a} (обозначение: $\mathbf{a} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$) следующим образом.

- Определение.** 1. Пусть ϕ имеет вид $t_1 = t_2$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow t_{1A}(a_1, \dots, a_n) = t_{2A}(a_1, \dots, a_n)$ (здесь t_{iA} — функция, определяемая термом t_i в системе \mathbf{A}).
2. Пусть ϕ имеет вид $P(t_1, \dots, t_k)$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow P_A(t_{1A}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_{kA}(a_1, \dots, a_n)) = 1$, где P_A — интерпретация предикатного символа P в системе \mathbf{A} .
3. Пусть ϕ имеет вид $(\phi_1 \& \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \rightarrow \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), \neg \phi_1$. Тогда истинность формулы ϕ определяется по значениям $\phi_1(a_1, \dots, a_n)$ и $\phi_2(a_1, \dots, a_n)$ по таблицам истинности логических связей.
4. Пусть $\phi(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид $(\forall x \phi(x, x_1, \dots, x_n))$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$ для всех элементов $b \in A$ выполнено $A \models \phi(b, a_1, \dots, a_n)$.
5. Пусть $\phi(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид $(\exists x \phi(x, x_1, \dots, x_n))$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$ для некоторого элемента $b \in A$ выполнено $A \models \phi(b, a_1, \dots, a_n)$.

Определение. Формула $\phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ тождественно истинная (ложная) в алгебраической системе $A = \langle A, \sigma \rangle$, если для всех наборов элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ выполнено $A \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ ($A \not\models \phi(a_1, \dots, a_n)$).

Определение. Формула $\phi(x_1, \dots, x_n)$ выполнима в алгебраической системе $A = \langle A, \sigma \rangle$, если для хотя бы одного набора элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ выполнено $A \models \phi(a_1, \dots, a_n)$.

Определение. Формула ϕ сигнатуры σ тождественно истинная (ложная), если ϕ тождественно истинна (ложна) во всех алгебраических системах сигнатуры σ .

Определение. Формула ϕ сигнатуры σ выполнима, если ϕ выполнима хотя бы в одной алгебраической системе сигнатуры σ .

- 3.6 Изоморфизм систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм
- 3.7 Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности
- 3.8 Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем
- 3.9 Эквивалентность формул логики предикатов
- 3.10 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые формулы
- 3.11 Пренексный вид формулы
- 3.12 Основные эквивалентности логики предикатов
- 3.13 Классы формул $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$. Соотношения между классами
- 3.14 Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах)
- 3.15 Проверка существования вывода методом резолюций (алгоритм)
- 3.16 Логическое следование в логике предикатов
- 3.17 Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов
- 3.18 Теория. Модель теории
- 3.19 Непротиворечивая теория. Полная теория. Свойства непротиворечивых и полных теорий
- 3.20 Теорема о существовании модели (без доказательства)
- 3.21 Теорема о связи выводимости и противоречивости
- 3.22 Теоремы о корректности и полноте ИП
- 3.23 Теорема компактности
- 3.24 Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы. Конечно аксиоматизируемые теории
- 3.25 Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы)
- 3.26 Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности)