

# Содержание

<b>1</b>	<b>Интегралы, зависящие от параметра</b>	<b>2</b>
1.1	Интегралы, зависящие от параметра. Принцип равномерной сходимости	2
1.2	Теорема о коммутировании двух предельных переходов. Предельный переход под знаком интеграла	3
1.3	Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра	3
1.4	Дифференцирование под знаком интеграла. Правило Лейбница	5
1.5	Интегрирование под знаком интеграла	5
1.6	Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменными пределами интегрирования	5
1.7	Равномерная сходимость интегралов. Достаточные признаки равномерной сходимости	5
1.8	Предельный переход в несобственном интеграле, зависящем от параметра	5
1.9	Дифференцирование по параметру несобственного интеграла	5
1.10	Интегрирование по параметру несобственного интеграла	5
<b>2</b>	<b>Кратные интегралы</b>	<b>5</b>
2.1	Двоичные разбиения. Двоичные интервалы, полуинтервалы, кубы. Свойства двоичных интервалов, кубов	5
2.2	Ступенчатые функции. Интеграл от ступенчатой функции (естественное и индуктивное определение). Теорема о совпадении определений	5
2.3	Свойства интеграла от ступенчатой функции (линейность интеграла, положительность, оценка интеграла)	5
2.4	Теорема о пределе интегралов убывающей последовательности функций, поточечно сходящейся к нулю	5
2.5	Теорема о пределе интегралов убывающей последовательности ступенчатых функций, поточечно сходящейся к нулю	5
2.6	Системы с интегрированием. Основной пример. Свойства систем с интегрированием	5
2.7	$L_1$ норма. Множество $L_1^*(\Sigma)$ . $L_1$ -норма как интеграл от модуля функции	5
2.8	Свойства $L_1$ нормы ("линейность" нормы функции равной нулю почти всюду и т.д.)	5
2.9	Субаддитивность $L_1$ -нормы	5
2.10	Сходимость в смысле $L_1$	5
2.11	Определение понятия интеграла и интегрируемой функции	5
2.12	Свойства интеграла и интегрируемых функций	5
2.13	Множества меры ноль. Свойства функций совпадающих почти всюду	5
2.14	Нормально сходящиеся ряды. Теорема о нормально сходящихся рядах	5
2.15	Теоремы Леви для функциональных рядов и последовательностей	5
2.16	Огибающие для последовательности интегрируемых функций. Нижний и верхний предел последовательности	5
2.17	Теорема Фату о предельном переходе. Следствие из теоремы Фату	5
2.18	Теорема Лебега о предельном переходе	5
2.19	Лемма о приближении ступенчатой функции с помощью непрерывных финитных	5
2.20	Теорема о приближении интегрируемой функции с помощью непрерывных финитных	5
2.21	Измеримые функции. Свойства пространства измеримых функций. Измеримые множества	5
2.22	Теорема об интегрируемости измеримой функции	5
2.23	Теорема об измеримости предела измеримых функций	5
2.24	Теорема об интегрируемости предела возрастающей последовательности положительных измеримых функций	5
2.25	Обобщенно измеримые функции. Измеримые множества, мера множества. Теорема об измеримости объединения и пересечения измеримых множеств	5
2.26	Счетная аддитивность интеграла и меры	5
2.27	Измеримые множества в $\mathbb{R}^n$ . Внешняя мера множества. Лемма о представлении открытого множества как объединения кубов. Теорема об измеримости открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$	5
2.28	Теорема о внешней мере множества	5
2.29	Лемма о приближении неотрицательной вещественной функции ступенчатыми функциями. Следствие об измеримости непрерывной почти всюду функции	5
2.30	Теорема о совпадении интегралов Римана и Лебега	5
2.31	Теорема Фубини и следствия из нее	5
2.32	Теорема Тонелли и следствия из нее	5
2.33	Диффеоморфизмы и их свойства. Теорема о замене переменной в кратном интеграле (формулировка)	5
2.34	Лемма о замене переменной при композиции диффеоморфизмов	5

2.35	Лемма о сведении замены переменной в общем случае к случаю индикатора двоичного куба . . . . .	5
2.36	Лемма о представлении диффеоморфизма в виде композиции диффеоморфизмов специального вида . . . . .	5
2.37	Теорема о замене переменной в кратном интеграле . . . . .	5

# 1 Интегралы, зависящие от параметра

## 1.1 Интегралы, зависящие от параметра. Принцип равномерной сходимости

$\square f(x, y) : [a, b] \times Y$

Для  $\forall y \in Y f_y(x) = f(x, y) - \square$  она  $\in R([a, b])$  (интегрируема)

$\implies \forall \alpha$  и  $\beta \in [a, b]$  определена функция  $F(y, \alpha, \beta) = \int_a^\beta f_y(x) dx = \int_a^\beta f(x, y) dx$

$F(y, \alpha, \beta)$  - функция, заданная интегралом, зависящим от параметра

$[F(y, a, b) - \text{частный случай функции}]$

**Определение.**  $X \times Y \subset \mathbb{R}^2, f(x, y)$  определена на  $X \times Y$ , пусть  $y_0$  - предельная точка  $Y$

1. пусть  $\forall x \in X \quad \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) := \phi(x)$
2. пусть  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon)$  такая что  $|y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - \phi(x)| < \epsilon$  для  $\forall x \implies$  тогда говорят, что  $f(x, y)$  равномерно сходится к  $\phi(x)$

**Теорема 1.1** (Свойства равномерной сходимости).  $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, y_0$  - предельная точка  $Y$

1.  $f(x, y)$  равномерно на  $X$  сходится к  $\phi(x)$  тогда и только тогда, если  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) : \forall x \in X \forall y', y'' \in Y$   
 $|f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon$  [Критерий Коши]
2.  $f(x, y)$  равномерно по  $X$  стремится к  $\phi(x)$  тогда и только тогда, если для  $\forall \{y_n\}$  так что  $y_n \longrightarrow y_0$  - последовательность  $\{f(x, y_n)\}$  равномерно сходится к  $\phi(x)$  [сходимость по Гейне]
3. Если при  $\forall y$  функция  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$  (интегрируема) и  $f(x, y)$  равномерно сходится к  $\phi(x)$ , то  $\phi(x)$  - непрерывна и интегрируема
4.  $\square x_0, y_0$  предельные точки  $X$  и  $Y, f(x, y)$  равномерно по  $x$  сходится к  $\phi(x)$ ,  
 $\square \forall y \in Y \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) =: \psi(y)$ , тогда  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \phi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) [= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)]$

**Доказательство.** 1.  $\Leftarrow \implies \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) =: \phi(y)$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| = |f(x, y') - \phi(x) - f(x, y'') + \phi(x)| \leq |f(x, y') - \phi(x)| + |f(x, y'') - \phi(x)|$$

$$\Leftarrow x \in X |f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon \text{ при } \begin{matrix} |y_0 - y'| < \delta \\ |y_0 - y''| < \delta \end{matrix} \Leftarrow \text{при } \forall x \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) =: \phi(x)$$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon, y'' \rightarrow y_0$$

$$|f(x, y') - \phi(x)| \leq \epsilon, f(x, y) \Rightarrow \phi(x)$$

2. Необходимость очевидна

Достаточность:  $\{y_n\} \rightarrow y_0$

$$\{f(x, y_n)\} \rightarrow \phi(x), \text{ пусть } |y_0 - y_n| < \delta = \frac{1}{n} \implies y_n \rightarrow y_0$$

и  $|f(x, y_n) - \phi(x)| > \epsilon; f(x, y_n) \nrightarrow \phi(x)$  противоречие

3.  $\square \{y_n\} \rightarrow y_0, f_n(x) = f(x, y_n)$

$f_n(x)$  равномерно сходится к  $\phi(x)$  по 2

Далее  $\phi(x)$  равномерный предел хороших функций  $\implies \phi(x)$  хорошая

Попа подробнее... (для последовательности функций от одной переменной)

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| = |s(x_0 + h) + s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) - s_n(x_0 + h) + s_n(x_0) - s(x_0)|$$

$$\leq |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|$$

Каждое из этих слагаемых меньше  $\epsilon/3$  (среднее по причине непрерывности  $s_n(x)$ , остальные по причине равномерной сходимости)

4.  $f(x, y) \Rightarrow \phi(x)$ ,  $\exists \epsilon > 0$ , выберем  $\delta > 0$  такое что:

$$|y_0 - y'| < \delta \text{ и } |y_0 - y''| < \delta \implies$$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon \text{ по к. Коши}$$

$$x \rightarrow x_0 : |\psi(y') - \psi(y'')| \leq \epsilon \implies$$

для  $\psi(y)$  верен критерий Коши  $\implies$

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = A = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

$$|f(x, y) - \phi(x)| < \epsilon, |\psi(y) - A| < \epsilon \text{ если } |y - y_0| < \delta$$

$$|\phi(x) - A| \leq |\phi(x) - f(x, y)|_{\leq \epsilon} + |f(x, y) - \psi(y)|_{< \epsilon, \text{ т.к. дельта}} + |\psi(y) - A|_{\leq \epsilon} \leq 3\epsilon$$

$$\text{при } x \rightarrow x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A$$

►

## 1.2 Теорема о коммутировании двух предельных переходов. Предельный переход под знаком интеграла

$f(x, y) : [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_0$  - предельная точка  $Y$  и  $f_y(x) = f(x, y)$  - интегрируема на  $[a, b]$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

**Теорема 1.2** (О предельном переходе). Если кроме того, что  $f(x, y)$  равномерно на  $[a, b]$  стремится к  $\phi(x)$  при  $y \rightarrow y_0$ , то  $\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$

*Доказательство.*  $\triangleleft \phi(x)$  - равномерный предел, непрерывен

$f_y(x) \implies \phi(x)$  - интегрируема,  $\exists \epsilon > 0 \quad \delta(\epsilon) > 0$  выбрано из определения равномерной сходимости

$$|\int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \phi(x) dx| = |\int_a^b (f(x, y) - \phi(x)) dx| \leq \int_a^b |f(x, y) - \phi(x)| dx \leq \epsilon(b-a) \text{ если } |y - y_0| < \epsilon$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \phi(x) dx$$

►

## 1.3 Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра

**Теорема 1.3** (Непрерывность).  $f(x, y)$  - непрерывна,  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \implies$

$$f(y) = \int_a^b f(x, y) dx \text{ непрерывна на } [c, d]$$

*Доказательство.*  $\triangleleft [a, b] \times [c, d]$  компакт  $\implies f(x, y)$  равномерно непрерывна на компакте

$$\forall \epsilon > 0 : \begin{matrix} |x - x'| < \delta \\ |y - y'| < \delta \end{matrix} \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon$$

$$x' = x, y' = y_0$$

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \epsilon \text{ при } |y - y_0| < \delta(\epsilon)$$

$f(x, y) \Rightarrow f(x, y_0) = \phi(x)$  равномерный предел не зависит от  $x$

по теореме о предельном переходе:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = F(y_0) \implies F \text{ непрерывна в } y_0 \in [c, d] \implies F$$

непрерывна на  $[c, d]$

►



- 1.4 Дифференцирование под знаком интеграла. Правило Лейбница
- 1.5 Интегрирование под знаком интеграла
- 1.6 Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменными пределами интегрирования
- 1.7 Равномерная сходимость интегралов. Достаточные признаки равномерной сходимости
- 1.8 Предельный переход в несобственном интеграле, зависящем от параметра
- 1.9 Дифференцирование по параметру несобственного интеграла
- 1.10 Интегрирование по параметру несобственного интеграла

## 2 Кратные интегралы

- 2.1 Двоичные разбиения. Двоичные интервалы, полуинтервалы, кубы. Свойства двоичных интервалов, кубов
- 2.2 Ступенчатые функции. Интеграл от ступенчатой функции (естественное и индуктивное определение). Теорема о совпадении определений
- 2.3 Свойства интеграла от ступенчатой функции (линейность интеграла, положительность, оценка интеграла)
- 2.4 Теорема о пределе интегралов убывающей последовательности функций, поточечно сходящейся к нулю
- 2.5 Теорема о пределе интегралов убывающей последовательности ступенчатых функций, поточечно сходящейся к нулю
- 2.6 Системы с интегрированием. Основной пример. Свойства систем с интегрированием
- 2.7  $L_1$  норма. Множество  $L_1^*(\Sigma)$ .  $L_1$ -норма как интеграл от модуля функции
- 2.8 Свойства  $L_1$  нормы ("линейность норма функции равной нулю почти всюду и т.д.)
- 2.9 Субаддитивность  $L_1$ -нормы
- 2.10 Сходимость в смысле  $L_1$
- 2.11 Определение понятие интеграла и интегрируемой функции
- 2.12 Свойства интеграла и интегрируемых функций
- 2.13 Множества меры ноль. Свойства функций совпадающих почти всюду
- 2.14 Нормально сходящиеся ряды. Теорема о нормально сходящихся рядах
- 2.15 Теоремы Леви для функциональных рядов и последовательностей
- 2.16 Огибающие для последовательности интегрируемых функций. Нижний и верхний предел последовательности
- 2.17 Теорема Фату о предельном переходе. Следствие из теоремы Фату
- 2.18 Теорема Лебега о предельном переходе
- 2.19 Лемма о приближении степенчатой функции с помощью непрерывных финитных
- 2.20 Теорема о приближении интегрируемой функции с помощью непрерывных финитных
- 2.21 Измеримые функции. Свойства пространства измеримых функций. Измеримые множества