Содержание

1 Введение

Определение (Методы оптимизации)**.** раздел прикладной математики, содержание которого составляет теория и методы решения оптимизационных задач

Определение (Оптимизационная задача)**.** задача выбора наилучшего варианта (в некотором смысле) из имеющихся

Определение (Задача оптимизации)**.** $\begin{cases} f(x) \to \min(\max) \\ x \in D \end{cases}$

D - множество допустимых решений, $f : D \to \mathbb{R}$

Определение (Задача МП)**.** $\begin{cases} (1) f(x) \to \min(\max)[extr](opt) \\ (2) g_i(x)\#0, i = 1, \dots, m - \text{ограничения} \\ (3) x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ $x = (x_1, ..., x_n)$ $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Определение (Допустимое решение)**.** $x \in \mathbb{R}^n$, удовл (2), называется допустимым решением задачи.

Определение (Оптимальное решение)**.** Допустимое решение $x^* \in D$ задачи 1 - 3 называется оптимальным решением, если $f(x) \le f(x^*) \, \forall x \in D$ в случае задачи максимизации и $f(x) \ge f(x^*) \, \forall x \in D$ в случае задачи минимизации

Глобальный оптимум - x^*

Определение (Локальный оптимум)**.** Допустимое решение $\widetilde{x} \in D$ задачи 1 - 3 называется локальным оптимумом, если $f(x) \le f(\widetilde{x})$ для всех x из некоторой окрестности $\widetilde{x}$ в случае задачи максимизации и $f(x) \ge f(\widetilde{x})$ для всех x из некоторой окрестности $\widetilde{x}$ в случае задачи минимизации

Определение (Разрешимая/неразрешимая)**.** Задача 1 - 3, которая обладает оптимальным решением, называется разрешимой, иначе неразрешимой

2 Линейное программирование

2.1 Постановка задачи (ЛП), теоремы эквивалентности

Определение (Общая задача ЛП)**.** $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \# b_i, \, i = 1, \dots, m \\ x_j \ge 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ - вектор переменных

Матричная запись:

$$\begin{cases} f(x) = (c, x) \to \max(\min) \\ Ax\#b \\ x_j \ge 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение (Стандартная (симметрическая) форма). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \le (\ge) b_i,\, i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0, j = 1,\dots,n \end{cases}$

Определение (КЗЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i,\, i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0, j = 1,\dots,n \end{cases}$

Определение (Основная задача ЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \le b_i,\, i = 1,\dots,m \end{cases}$

Определение (Эквивалентные ЗЛП (ЗМП)). Две задачи ЛП P_1, P_2 называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению задачи P_1 соответствует некоторое допустимое решение задачи P_2 и наоборот, причем оптимальному решению одной задачи соответствует оптимальное решение другой задачи.

Теорема 2.1 (Первая теорема эквивалентности). *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей каноническая ЗЛП.*

Теорема 2.2 (Вторая теорема эквивалентности). *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей симметрическая ЗЛП.*

2.2 Каноническая задача ЗЛП. Базисные решения

Определение (Базисное решение). Пусть $\overline{x}$ - решение $Ax = B$. Тогда вектор $\overline{x}$ называется базисным решением СЛАУ, если система вектор-столбцов матрицы А, соответствующая компонентам вектора $\overline{x}$, ЛНЗ

Замечание. Если система однородная, то х = $\overline{0}$ - базисное решение

Определение. Неотрицательное базисное решение СЛУ называется базисным решением канонической задачи ЛП

Определение (Вырожденное БР). $\overline{x}$ - БР КЗЛП называется вырожденным, если число ненулевых компонент меньше ранга матрицы А, иначе невырожденное

Лемма 2.1. *Если x и x' - Б.Р. КЗЛП, $x \ne x'$, то*

$$J(x) \ne J(x'), J(x) \subset J(x'), J(x) \supset J(x'),$$

где $J(x) = \{j | x_j \ne 0, j = 1 \dots n\}$

Теорема 2.3 (О конечности множества базисных решений). *Число базисных решений КЗЛП конечно*

Теорема 2.4 (О существовании оптимальных БР). *Если КЗЛП разрешима, то существует ее оптимальное БР*

2.3 Симплекс-метод

Рассмотрим КЗЛП.

2.3.1 Симплекс-метод для приведенной ЗЛП

Определение (Система с базисом). СЛАУ - СЛАУ с базисом, если в каждом уравнении имеется переменная с коэффициентом $+1$, отсутствующим в других уравнениях. Такие переменные будем называть базисными, остальные не базисными

Определение (ПЗЛП). КЗЛП называется приведенной, если

1. СЛАУ $Ax = B$ является системой с базисом
2. Целевая функция выражена через небазисные переменные

Определение (Прямо допустимая симплексная таблица). СТ называется прямо допустимой, если $a_{i0} \ge 0, i = 1,\dots,m$ (bшки)

Определение (Двойственно допустимая симплексная таблица). СТ называется двойственно допустимой, если $a_{0j} \ge 0, i = 1,\dots,n+m$ (сшки)

Теорема 2.5. *Если симплекс-таблица является прямо допустимой и* $a_{0j} \geq 0, j = 1 \ldots, n+m$*, то соответствующее базисное решение является оптимальным*

Теорема 2.6. *Если в симплекс-таблице существует* $a_{0q} < 0, a_{iq} \leq 0, \forall i = 1 \ldots, m$*, то задача неразрешима, потому что f неограничена на множестве допустимых решений*

Теорема 2.7. *Если ведущая строка выбирается из условия минимума ключевого отношения, то следующаяя симплексная таблица будет прямо допустимой*

Теорема 2.8 (Об улучшении базисного решения). *Если* $\exists a_{0j} < 0, j = 1 \ldots n+m$*, то возможен переход к новой прямо допустимой симплекс таблице, причем* $f(x) \leq f(x')$*, где x - БР старой таблицы, x'- БР новой таблицы, f(x) =* a_{00} *старой таблицы, f(x') =* $a_{00} - \frac{a_{p0}a_{0q}}{apq}$*,* $a_{p0} = 0$ *- вырожденное решение*

2.4 Каноническая ЗЛП

Метод искусственного базиса

Определение (искусственные). $t_i \geq 0$ - искусственные переменные

Замечание (Свойства ВЗЛП). 1. ВЗЛП почти приведенная (нужно выразить t_i)

2. $h(x,t) \leq 0 \quad \forall (x,t) \in \widetilde{D}$

3. $\widetilde{D} \neq 0$ (например, есть $(0, \ldots, n, b_1, \ldots, b_m)$, n нулей)

4. ВЗЛП всегда разрешима

Теорема 2.9 (О существовании допустимого решения исходной КЗЛП).

$$D \neq 0 \Leftrightarrow h^*(x,t) = 0$$

Теорема 2.10 (О преобразовании КЗЛП в эквивалентную ей приведенную). *Если множество допустимых решений исходной КЗЛП непусто, то ПЗЛП, эквивалентная исходной КЗЛП, может быть получена из последней симплекс таблицы - таблицы ВЗЛП*

2.5 Двойственность в ЛП

Определение. Будем говорить, что знаки линейных ограничений ЗЛП согласованы с целевой функцией, если в задаче на max ограничения неравенства имеют вид "$\leq$ а в задаче на min ограничения на неравенство имеют вид "$\geq$"

Определение (Двойственная задача). Для ЗЛП I двойственной задачей II является ЗЛП вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \leftrightarrow g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, l \leftrightarrow y_i \geq 0, i = 1...l,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = l+1, \ldots m \leftrightarrow y_i \in \mathbb{R}, i = l+1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, i = 1, \ldots p \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, j = 1, \ldots, p$$

$$x_j \in \mathbb{R}, j = p+1, \ldots n \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, j = p+1, \ldots, n$$

Задачу I называют прямой, а II - двойственной. Стрелки соответствуют сопряженным ограничениям

Теорема 2.11 (Основное неравенство двойственности).

$$\forall x \in D_I, \forall y \in D_{II}, f(x) \leq g(y)$$

2.6 Теоремы двойственности

Лемма 2.2 (основная лемма). *Пусть* $\forall x \in D_I \neq \varnothing, f(x) \leq M < +\infty \implies \exists y \in D_{II}\, g(y) \leq M$

Теорема 2.12 (Первая теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач разрешима, то разрешима и другая, причем оптимальное значение целевых функций совпадают, т.е* $f(x^*) = g(y^*)$, *где* x^*, y^* *- оптимальные решения задач I, II соответственно*

Определение (Условия дополняющей нежесткости). Будем говорить, что $x \in D_I, y \in D_{II}$ удовлетворяют УДН, если при подстановке в любую пару сопряженных неравенств хотя бы одно из них обращается в равенство. Это означает, что следующие характеристические произведения обращаются в 0:

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i)y_i = 0, i = 1, \ldots m$$

$$x_i(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j) = 0, j = 1, \ldots n$$

Теорема 2.13 (Вторая теорема двойственности). $x^* \in D_I, y^* \in D_{II}$. *оптимальны в задачах I, II тогда и только тогда, когда они удовлетворяют УДН.*

2.7 Критерий разрешимости ЛП

Определение (Точная верхняя грань функции). M^* называется точной верхней гранью функции f(x) на множестве D, если

1. $\forall x \in D \quad f(x) \leq M^*$
2. $\forall M < M^* \quad \exists x \in D \quad f(x) > M$

Лемма 2.3 (О точной верхней грани функции g(y) на D_{II}). $M^* < +\infty$ *- точная верхняя грань* $f(x)$ *на* D_I, *тогда* $\forall y \in D_{II} \quad g(y) \geq M^*$

Теорема 2.14 (Критерий разрешимости). *Целевая функция задачи ЛП ограничена сверху (снизу) на непустом множестве допустимых решений тогда и только тогда, когда задача максимизации (минимизации) разрешима*

2.8 Классификация пар двойственных задач

Теорема 2.15 (Малая теорема двойственности). *Если* $D_I \neq \varnothing, D_{II} \neq \varnothing \implies$ *обе задачи точно разрешимы*

Теорема 2.16 (О причинах неразрешимости ЗЛП). $D_I \neq \varnothing$, *целевая функция неограничена сверху на* D_I *тогда и только тогда, когда II неразрешима, так как* $D_{II} = \varnothing$

Классификация

1. $D_I \neq \varnothing, D_{II} \neq \varnothing$ обе задачи разрешимы, т.к $f(x^*) = g(y^*)$
2. $D_I \neq \varnothing, D_{II} = \varnothing$ обе неразрешимы, т.к $f(x)$ неограничена, $D_{II} = \varnothing$
3. $D_I = \varnothing, D_{II} \neq \varnothing$ обе неразрешимы, т.к $D_I = \varnothing, g \to +\infty$ на D_{II}
4. $D_I = \varnothing, D_{II} = \varnothing$ обе неразрешимы