3-раскраска графа

Вход: неориентированный граф без кратных ребер и петель $G = (V, E)$ с n вершинами.
Выход: $\begin{cases} 1, \text{если существует правильная 3-раскраска графа,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$

Предлагаемый алгоритм

Если граф является надграфом K_4, то возвращаем 0.
Иначе "?".

Теорема. *Алгоритм является генерическим.*

Доказательство. Граф K_4 нельзя раскрасить в 3 цвета, значит, если он является подграфом некоторого графа, то сам граф также нельзя раскрасить тремя цветами.

Пусть D_i - это множество графов размера n, которые являются надграфами K_4, образованного сочетанием вершин, $i = \overline{1, C_n^4}$. Тогда $I_n = \bigcup_{i=1}^{C_n^4} D_i$.

Воспользуемся формулой включений-исключений:

$$|I_n| = \sum |D_i| - \sum_{i<j} |D_i \cap D_j| + \dots + (-1)^{C_n^4 - 1} |D_1 \cap \dots \cap D_{C_n^4}|$$

$|D_i| = 2^{\frac{n(n-1)}{2} - 6}$ (6 ребер уже определены выбором 4 вершин для K_4)

Для вычисления $|D_i \cap D_j|$ рассмотрим следующие случаи:

1. Множества вершин, соответствующих D_i и D_j (обозначим их V_i, V_j) не пересекаются. Тогда будут однозначно определены $2 \cdot 6$ ребер. Количество пар множеств - $\frac{C_n^4 C_{n-4}^4}{2}$
2. $|V_i \cap V_j| = 1$. Аналогично предыдущему пункту. Количество пар множеств - $\frac{C_n^1 C_{n-1}^3 C_{n-4}^3}{2}$
3. $|V_i \cap V_j| = 2$. Однозначно определены $6 + 5$ ребер. Количество пар множеств - $\frac{C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2}{2}$
4. $|V_i \cap V_j| = 3$. Остается соединить только одну вершину с другими тремя. Тем самым, получаем $6 + 3$ ребра, которые определены однозначно. Количество пар множеств - $\frac{C_n^3 C_{n-3}^1 C_{n-4}^1}{2}$

Итого получаем:

$$\sum_{i<j} |D_i \cap D_j| = \frac{C_n^4 C_{n-4}^4}{2} \cdot 2^{(n-1)n/2-6-6} + \frac{C_n^1 C_{n-1}^3 C_{n-4}^3}{2} \cdot 2^{(n-1)n/2-6-6} +$$

$$+ \frac{C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2}{2} \cdot 2^{(n-1)n/2-6-5} + \frac{C_n^3 C_{n-3}^1 C_{n-4}^1}{2} \cdot 2^{(n-1)n/2-6-3} =$$

$$= |D_i| \left(\frac{C_n^4 C_{n-4}^4}{2} \cdot 2^{-6} + \frac{C_n^1 C_{n-1}^3 C_{n-4}^3}{2} \cdot 2^{-6} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2}{2} \cdot 2^{-5} + \frac{C_n^3 C_{n-3}^1 C_{n-4}^1}{2} \cdot 2^{-3} \right)$$

►