Содержание

1 Вероятностное пространство

Определение (Алгебра)**.** Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется алгеброй, если выполнены след. аксиомы:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathbb{A}$
3. (аддитивность) $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathbb{A}$

Определение (σ-алгебра)**.** Алгебра называется σ-алгеброй, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

Определение (мера)**.** $\mu : \mathcal{A} \to [0; \infty)$ - мера, если

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j : \quad \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{счетная аддитивность}$$

Мера конечная, если $\mu(\Omega) < \infty$
Мера вероятностная, если $\mu(\Omega) = 1$

Определение (Вероятностное пространство)**.** Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где

1. Ω - пространство элементарных событий;
2. $\mathcal{A}$ - $\sigma-$алгебра подмножеств Ω (события);
3. P - вероятностная счетно-аддитивная мера на $\mathcal{A}$ (вероятность); называется вероятностным пространством.

Все элементарные исходы равновозможны

Определение (Классическая вероятность)**.** Модель вероятностного пространства (A - событие)

1. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ - конечное пространство
2. $\mathcal{A}$ все подмножества Ω
3. $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p_\omega = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Определение (Геометрическая вероятность)**.** $V \in \mathbb{R}^n$

1. $\Omega = V$
2. $\mathcal{A}$ - борелевская $\sigma-$алгебра (минимальная $\sigma-$алгебра, содержащая все компакты) подмножеств V
3. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(V)}$

1.1 Некоторые следствия аксиоматики

1.

Аксиома (Аксиома непрерывности)**.** *Если* $A_1 \supset A_2, \dots, \supset A_n \supset \mathcal{A}, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

Доказательство. Пусть $B_n \downarrow \varnothing$. Тогда обозначим $A_n = B_n \setminus B_{n+1}, n = 1, \dots, ..$ A_n попарно несовместны и

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k,$$

поэтому из счетной аддитивности меры следует сходимость ряда

$$P(B_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

и сумма остатка ряда

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

►

2. (Формула включений и исключений)

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

Доказательство. Выводится через обычную формулу включений и исключений для множеств по индукции

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

+

$$\begin{cases} A \cup B = A + (B \setminus AB) \\ \text{Счетная аддитивность} \\ P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) (\text{также по счетной аддитивности}) \end{cases}$$

►

1.1.1 Индикатор

Определение. Индикатор события А - это функция $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Свойства индикатора

1. $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
2. $I_{A_1 \cap A_2} = I_{A_1} I_{A_2}$
3. $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - I_{\bar{A_1} \cap \dots \cap \bar{A_n}} = 1 - I_{\bar{A_1}} \dots I_{\bar{A_n}} = 1 - (1 - I_{A_1}) \dots (1 - I_{A_n})$

2 Условные вероятности и независимость

Определение (Условная вероятность)**.** Пусть $P(B) > 0$. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при условии, что произошло событие B (или просто: при условии B), назовем отношение

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Применяется также обозначение $P_B(A)$

Теорема 2.1 (Теорема умножения)**.** *Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ таковы, что $P(A_1, \ldots, A_{n-1)} > 0$. Тогда*

$$P(A_1, \ldots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1,\ldots,A_{n-1}}(A_n)$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что существуют все условные вероятности из формулы.

База индукции $P(AB) = P(B)P_B(A)$.

Переход: $B = A_1, \ldots, A_{n-1}, A = A_n$, применим формулу выше ▶

Определение (Разбиение)**.** Систему событий $A_1, \ldots, A_n$ будем называть конечным разбиением (в дальнейшем - просто разбиением), если они попарно несовместны и

$$A_1 + \ldots A_n = \Omega$$

Теорема 2.2 (Формула полной вероятности)**.** *Если $A_1, \ldots, A_n$ - разбиение и все $P(A_k) > 0$, то для любого события B имеет место формула*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

3 Случайные величины

Определение (Случайная величина)**.** Случайной величиной (СВ) $X(\omega)$ называется функция элементарного события ω с областью определения Ω и областью значений $\mathbb{R}$ такая, что событие $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ принадлежит σ -алгебре $\mathcal{F}$ при любом действительном $x \in \mathbb{R}$. Значения x функции $X(\omega)$ называются реализациями СВ $X(\omega)$.

Определение (Алгебра, порожденная случайной величиной)**.** Пусть $x_1 < \cdots < x_k$ - значения, принимаемые случайной величиной ξ. Каждая такая величина определяет разбиение из событий $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$. Т.к $x_i \neq x_j$, то $A_iA_j = \varnothing$. Сумма - достоверное событие Ω.

Разбиение порождает алгебру событий

$$\{\xi \in B =\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$$

, B - числовое множество.

Определение (Закон распределения)**.** Любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных со случайной величиной.

Примеры законов распределения

1. Биномиальный закон
2. Гипергеометрическое распределение
3. Равномерное распределение

Определение (Математическое ожидание)**.** Математическое ожидание случайной величины $\xi = xi(\omega)$ обозначается $M\xi$ и определяется как сумма

$$M\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)p(\omega)$$

Свойства мат. ожидания

1. $MI_A = P(A)$

   Доказательство.
   $$MI_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = P(A)$$
   ▶

2. Аддитивность: $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

   Доказательство. ▶

   Из этого также следует конечная аддитивность.

3. Для любой константы C
   $$M(C\xi) = cM\xi, \quad MC = C$$

4. Математическое ожидание ξ выражается через закон распределения случайной величины ξ формулой
   $$M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_k P\{\xi = x_i\}$$

Подставляя в числовую функцию случайную величину, мы также получаем случайную величину. Например, если $\eta = g(\xi)$, то
$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)P\{\xi = x_i\}$$

При этом
$$g(x_i) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)I_{\xi = x_i}$$

Определение (n-ый момент случайной величины). Математическое ожидание $M\xi^n$ называется n-ым моментом (или моментом n-ого порядка) случайной величины ξ (или ее закона распределения).

Определение (Абсолютный n-ый момент). Математическое ожидание $M|\xi|^n$.

Определение (Центральный момент n-ого порядка). $M(\xi - M\xi)^n$

Определение (Абсолютный центральный момент n-ого порядка). $M|\xi - M\xi|^n$

Определение (Дисперсия). $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$

Определение (Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение)). $\sqrt(D\xi)$

Свойства дисперсии

1. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$
2. $D\xi \leq 0$ и $D\xi = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая константа c, что $P\{\xi = c\} = 1$
3. Для любой константы c $D(c\xi) = c^2 D\xi, \quad D(\xi + c) = D\xi$

Теорема 3.1 (Неравенство Иенсена). *Если числовая функция $g(x)$, то для любой случайной величины ξ*
$$Mg(\xi) \leq g(M\xi)$$

Теорема 3.2 (Неравенство Ляпунова). *Для любых положительных $\alpha \leq \beta$*
$$(M|\xi|^\alpha)^{1/\alpha} \leq (M|\xi|^\beta)^{1/\beta}$$

Теорема 3.3 (Неравенство Коши-Буняковского).

Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p)$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda$$

3.1 Многомерные законы распределения

3.2 Независимость случайных величин

Определение (Независимость случайных величин). $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются независимыми, если порожденные ими алгебры

$$\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}$$

независимы.

Определение (Независимость случайных величин). $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются независимыми, если для любых $x_{1_{j_1}} \dots, x_{x_{j_n}}$

$$P\{\xi_1 = x_{1_{j_1}}, \xi_n = x_{1_{j_n}}\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i = x_{1_{j_i}}\}$$

Теорема 3.4. *Если случайные величины $\xi_1, \dots \xi_n$ независимы, а $g_i(x)$ - числовые функции, то случайные величины $\eta_1 = g_1(\xi_1), \dots \eta_n = g_n(\xi_n)$ также независимы.*

Теорема 3.5 (Мультипликативное свойство математических ожиданий). *Если случайные величины $\xi_1, \dots \xi_n$ независимы, то*

$$M\xi_1, \dots, \xi_n = \prod_{i=1}^{n} M\xi_i$$

Теорема 3.6 (Аддитивное свойство дисперсии). *Если случайные величины $\xi_1, \dots \xi_n$ независимы, то*

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$$

Евклидово пространство случайных величин Условное мат. ожидание $M(\xi|\eta)$- ортогональная проекция ξ на линейное подпространство η

Условные математические ожидания

Определение (Условная вероятность). Условная вероятность $P(B|\mathscr{A}(\alpha))$ относительно $\mathscr{A}(\alpha)$ как случайную величину, которая принимает значение $P(B|A_k)$ при $\omega \in A_k$.

Определение (Условный закон распределения). Условный закон распределения η при заданном значении $\xi = x_k$ назовем набор условных вероятностей

$$P\{\eta = y_t | \xi = x_k\} = \frac{P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}, \quad t = 1, \dots, m$$

Определение (Условное мат.ожидание). Условное мат.ожидание η при заданном значении $\xi = x_k$

$$M\{\eta|\xi = x_k\} = \sum_{t=1}^{m} P\{\eta = y_t | \xi = x_k\} = \frac{\sum_{t=1}^{m} y_t P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}$$

Условное мат.ожидание является функцией от η. Случайная величина $M(\eta|\xi)$ - условное мат.ожидание при заданном ξ

Определение.

$$M[M(\eta|\xi)] = \sum_{k=1}^{n} P\{\xi = x_k\} M\{\eta|\xi = x_k\}$$

Теорема 3.7.

$$M[M(\eta|\xi)] = M\eta$$

Теорема 3.8 (Неравенство Чебышева)**.** *Для любого $x > 0$ имеют место неравенства:*

$$P\{|\xi| \geq x\} \leq \frac{M|\xi|}{x}$$

$$P\{|\xi - M\xi| \geq x\} \leq \frac{D\xi}{x^2}$$

4 Случайные величины (общий случай)

Определение. Числовая функция $\xi = \xi(\omega)$ от элементарного события $\omega \in \Omega$ называется случайной величиной, если для любого числа x

$$\{\xi \leq x\} = \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}$$

Определение (Функция распределения случайной величины ξ)**.**

$$F(x) = F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}$$

, определенная при всех $x \in R$

При помощи этой функции можно выразить вероятность попадания ξ в интервалы.

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\{\xi < x\} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \{x - \frac{1}{n-1} < \xi \leq x - \frac{1}{n}\}$$

$$P(\xi = x) = F(x) - F(x - 0)$$

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1 - 0)$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0)$$

Теорема 4.1 (Свойства функции распределения)**.** *Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:*

1. *F(x) не убывает*
2. *F(x) непрерывна справа*
3. $F(+\infty) = 1$
4. $F(-\infty) = 0$

Определение (Борелевская σ-алгебра)**.** σ-алгебра $\mathcal{A}$ числовых множеств, порожденная всевозможными интервалами вида $x_1 < x \leq x_2$, называется борелевской; множества A, входящие в $\mathcal{A}$, называются борелевскими.

Определение ($\sigma-$алгебра, порожденная случайной величиной ξ)**.** Совокупность $\xi^{-1}(B)$ для всех борелевских множеств борелевской алгебры.

Примеры дискретных распределений

1. Биномиальное
2. Пуассоновское
3. Геометрическое

Теорема 4.2. *Если ξ - случайная величина, а $g(x)$ - борелевская функция, то $\eta = g(\xi)$ есть случайная величина*

Определение (Распределение вероятностей). $P_\xi(B)$, определенная для всех $B \in \mathscr{B}$, называется распределением вероятностей случайной величины ξ

Определение (Плотность распределения). $p(x) = p_\xi(x)$ - плотность распределения случайной величины ξ, если для любых $x_1 < x_2$

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx$$

5 Математическое ожидание

Определение (Простая случайная величина). Случайная величина простая, если она представима в виде

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{j=1}^{m} x_j I_{A_j}(\omega)$$

где события $A_1, \dots, A_m$ составляют разбиение, т.е $A_iA_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\sum_{j=1}^{m} A_i = \Omega$

Определение (Мат. ожидание простой случайной величины).

$$M\xi = \sum_{j=1}^{m} x_j P(A_j)$$

Определение (Мат. ожидание неотрицательной случайной величины).

$$M\xi = \lim_{n\to\infty} M\xi^n$$

Определение (Мат. ожидание в общем случае).

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,$$

где $\xi^+ = \xi I_{\{\xi \geq 0\}}$, $\xi^+ = |\xi| I_{\{\xi < 0\}}$

Свойства мат. ожидания

1. Свойство линейности
2. Свойство положительности
3. Свойство конечности

6 Производящие функции

Определение (Целочисленная случайная величина). Дискретная случайная величина ξ, принимающая только целые неотрицательные значения.

Закон распределения:

$$p_n = P\{\xi = n\}, n = 0, 1 \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Определение (Производящая функция).

$$\phi_\xi(s) = Ms^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

Ряд абсолютно сходится при $|s| \leq 1$

Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} = -\ln(1-s)$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p), \quad \phi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (ps+1-p)^n$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p^k (1-p) s^n = \frac{p}{1-(1-p)s}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda, \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n s^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$