Содержание

1 Конечномерные нормированные векторные пространства 2
1.1 Аксиомы нормы . . . 2
1.2 Энергетическая норма . . . 2
1.3 Эквивалентность векторных норм . . . 2

2 Примеры норм матриц и их свойства 2
2.1 Матричные нормы, подчиненные кубической, октаэдрической, евклидовой (спектральная) . . . 2
2.2 Связь между матричными нормами и спектральным радиусом матрицы . . . 2

3 Сходимость последовательностей и рядов 2
3.1 Определение сходимости . . . 2
3.2 Сходимость последовательности степеней матрицы и геометрической прогрессии матриц . . . 2
3.3 Необходимые и достаточные условия сходимости . . . 3
3.4 Достаточные условия сходимости . . . 3

4 Оценка собственных значений матриц 3
4.1 Критерии положительной определенности матрицы . . . 3
4.2 Теорема Таусски . . . 3

5 Погрешности вычислений с плавающей точкой 3
5.1 Прямой и обратный анализ ошибок . . . 3
5.2 Обратный анализ ошибок решения СЛАУ . . . 3
5.3 Число обусловленности матрицы . . . 3

6 Прямые методы решения СЛАУ 4
6.1 Методы разложения квадратных матриц на треугольную и ортогональную . . . 4
6.2 Методы отражения и вращения для решения СЛАУ, нахождения обратной матрицы . . . 4
6.3 Стратегии с перестановками строк (столбцов) . . . 4

7 Условия применимости метода и стратегии перестановок 4
7.1 Необходимость перестановок . . . 4
7.2 Стратегии перестановок . . . 4

8 Метод прогонки 5
8.1 Условия осуществимости . . . 5
8.2 Устойчивость прогонки . . . 5

9 Метод простой итерации 5
9.1 Необходимые и достаточные условия сходимости . . . 5

10 Стационарные итерационные методы 5
10.1 Стационарный метод Ричардсона, условия сходимости, оптимизация выбора параметра . . . 5
10.1.1 Метод Гаусса-Зейделя . . . 5
10.1.2 Верхняя релаксация . . . 5
10.1.3 Нижняя релаксация . . . 5
10.1.4 Условия сходимости . . . 6

11 Схемы расщепления 6
11.1 Примеры . . . 6
11.2 Условия сходимости . . . 6

12 Нестационарные итерационные методы вариационного типа 6
12.1 Сходимость . . . 6

13 Проблема собственных значений 6
13.1 Некорректность задачи . . . 6
13.2 Обратный анализ ошибки для матриц простой структуры, коэффициенты перекоса . . . 6

14 Степенной метод **6**
14.1 Поиск максимального по модулю собственного числа и соответствующего собственного вектора 6
14.2 Скорость сходимости 6
14.3 Степенной метод со сдвигом 6
14.4 Метод обратных итераций 6

15 Итерационный метод вращений **6**
15.1 Нахождение собственных чисел 6
15.2 Стратегии выбора матриц вращения 6

16 Почти треугольные матрицы (верхняя форма Хесенберга) **7**

17 Нелинейные задачи **7**
17.1 Метод простой итерации в полных метрических пространствах 7
17.2 Теоремы о сжатых отображениях 7
17.3 Примеры 7

18 Производная Фреше и метод Ньютона **7**
18.1 Метод Ньютона в банаховых пространствах 7
18.2 Достаточные условия квадратичной сходимости 8
18.3 Примеры 8
18.4 Модификации метода 8

1 Конечномерные нормированные векторные пространства

1.1 Аксиомы нормы

1.2 Энергетическая норма

1.3 Эквивалентность векторных норм

2 Примеры норм матриц и их свойства

2.1 Матричные нормы, подчиненные кубической, октаэдрической, евклидовой (спектральная)

2.2 Связь между матричными нормами и спектральным радиусом матрицы

3 Сходимость последовательностей и рядов

3.1 Определение сходимости

Пусть дана последовательность векторов $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ в нормированном пространстве X. Говорят, что последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ сходится к вектору $\mathbf{x} \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что для всех $k \geq N$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$.

3.2 Сходимость последовательности степеней матрицы и геометрической прогрессии матриц

Рассмотрим последовательность матриц $\{A^k\}_{k=1}^{\infty}$, где A — данная матрица. Говорят, что последовательность $\{A^k\}$ сходится к матрице A^*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что для всех $k \geq N$ выполняется неравенство $\|A^k - A^*\| < \varepsilon$. Аналогично определяется сходимость геометрической прогрессии матриц.

3.3 Необходимые и достаточные условия сходимости

Необходимое условие сходимости последовательности векторов (матриц) в нормированном пространстве — это фундаментальность последовательности, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что для всех $k, m \geq N$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(m)}\| < \varepsilon$.

Достаточное условие сходимости последовательности векторов (матриц) — это сходимость к пределу, как определено в соответствующем пункте.

3.4 Достаточные условия сходимости

Достаточные условия сходимости последовательности векторов (матриц) зависят от контекста и используемой теоремы. Например, для числовой последовательности достаточным условием сходимости является монотонность и ограниченность последовательности.

4 Оценка собственных значений матриц

4.1 Критерии положительной определенности матрицы

4.2 Теорема Таусски

Пусть A — эрмитова матрица (это матрица, равная своему сопряжённому транспонированному), и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — её собственные значения, упорядоченные по убыванию модуля. Тогда для любого числа k, такого что $1 \leq k \leq n$, выполняется

$$\lambda_k \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|.$$

Эта теорема дает оценку каждого собственного значения матрицы A через сумму модулей первых k собственных значений.

5 Погрешности вычислений с плавающей точкой

Погрешности вычислений с плавающей точкой являются неизбежными в численных методах из-за ограниченной точности представления действительных чисел в компьютерах.

5.1 Прямой и обратный анализ ошибок

Прямой анализ ошибок позволяет оценить ошибки, которые накапливаются в результате последовательности арифметических операций в конкретной численной задаче. Обратный анализ ошибок позволяет определить, какие исходные данные могут привести к заданным ошибкам в решении задачи.

5.2 Обратный анализ ошибок решения СЛАУ

Обратный анализ ошибок решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) помогает определить, какие погрешности в правых частях и коэффициентах уравнений приведут к определенным погрешностям в решении.

5.3 Число обусловленности матрицы

Число обусловленности матрицы является мерой её чувствительности к изменениям входных данных. Оно определяет, насколько сильно могут измениться решения системы линейных уравнений при небольших изменениях в правых частях или коэффициентах матрицы.

6 Прямые методы решения СЛАУ

6.1 Методы разложения квадратных матриц на треугольную и ортогональную

Методы разложения квадратных матриц позволяют представить исходную матрицу в виде произведения треугольной и (или) ортогональной матрицы.

- **LU-разложение**: Метод разложения матрицы A на произведение нижней треугольной L и верхней треугольной U матрицы, так что $A = LU$.
- **QR-разложение**: Метод разложения матрицы A на произведение ортогональной Q и верхней треугольной R матрицы, так что $A = QR$.

6.2 Методы отражения и вращения для решения СЛАУ, нахождения обратной матрицы

Методы отражения и вращения являются эффективными способами для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и нахождения обратной матрицы.

- **Метод отражений (метод Хаусхолдера)**: Используется для приведения матрицы к верхне-гессенберговой форме и решения СЛАУ.
- **Метод вращений (метод Якоби)**: Применяется для нахождения собственных значений и векторов симметричных матриц.

6.3 Стратегии с перестановками строк (столбцов)

Перестановки строк (или столбцов) матрицы часто используются для улучшения сходимости и устойчивости прямых методов решения СЛАУ.

7 Условия применимости метода и стратегии перестановок

7.1 Необходимость перестановок

Необходимость перестановок строк (столбцов) возникает при наличии нулевых или малых элементов на главной диагонали матрицы, что может приводить к численной неустойчивости методов.

7.2 Стратегии перестановок

- **Частичная выборка**: Перестановка только некоторых строк (или столбцов) матрицы для улучшения устойчивости.
- **Полная перестановка (перемешивание)**: Перестановка всех строк (или столбцов) матрицы для максимального улучшения условий применимости метода.

8 Метод прогонки

8.1 Условия осуществимости

8.2 Устойчивость прогонки

9 Метод простой итерации

9.1 Необходимые и достаточные условия сходимости

10 Стационарные итерационные методы

10.1 Стационарный метод Ричардсона, условия сходимости, оптимизация выбора параметра

10.1.1 Метод Гаусса-Зейделя

Метод Гаусса-Зейделя является итерационным методом решения систем линейных уравнений, который осуществляет последовательное уточнение приближенного решения.

- **Описание метода**: На каждой итерации k метода Гаусса-Зейделя значения переменных обновляются по одной, начиная с первой, и используются уже обновленные значения переменных.

- **Формула итерации**:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n$$

  Здесь $x_i^{(k)}$ обозначает i-ую компоненту вектора приближенного решения на k-й итерации, a_{ij} — элементы матрицы коэффициентов системы, а b_i — правые части уравнений.

10.1.2 Верхняя релаксация

Верхняя релаксация является модификацией метода Гаусса-Зейделя, в которой добавляется параметр релаксации ω, позволяющий ускорить сходимость метода.

- **Формула итерации**:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n$$

  где ω — параметр релаксации ($0 < \omega < 2$).

10.1.3 Нижняя релаксация

Нижняя релаксация также является модификацией метода Гаусса-Зейделя, но в отличие от верхней релаксации параметр ω находится в интервале $0 < \omega < 1$.

- **Формула итерации**:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n$$

  где ω — параметр релаксации ($0 < \omega < 1$).

10.1.4 Условия сходимости

- **Метод Гаусса-Зейделя**: Сходимость метода Гаусса-Зейделя гарантируется, если матрица системы является строго диагонально доминируемой или симметричной и положительно определённой.
- **Верхняя и нижняя релаксации**: Для сходимости методов с релаксацией параметр ω должен лежать в определённых интервалах (от 0 до 2 для верхней релаксации и от 0 до 1 для нижней релаксации), а матрица системы должна быть строго диагонально доминируемой или симметричной и положительно определённой.

11 Схемы расщепления

11.1 Примеры

11.2 Условия сходимости

12 Нестационарные итерационные методы вариационного типа

12.1 Сходимость

13 Проблема собственных значений

13.1 Некорректность задачи

13.2 Обратный анализ ошибки для матриц простой структуры, коэффициенты перекоса

14 Степенной метод

14.1 Поиск максимального по модулю собственного числа и соответствующего собственного вектора

14.2 Скорость сходимости

14.3 Степенной метод со сдвигом

14.4 Метод обратных итераций

15 Итерационный метод вращений

Итерационный метод вращений (или метод Якоби) представляет собой итерационный численный метод для нахождения собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы.

15.1 Нахождение собственных чисел

Метод вращений используется для диагонализации симметричной матрицы. Основная идея заключается в последовательном применении элементарных вращений (плоских вращений вокруг элементарных плоскостей) для приближенного приведения матрицы к диагональному виду.

- **Описание метода**: На каждом шаге выбирается пара элементов матрицы a_{ij} и a_{ji}, которые необходимо занулить с помощью вращения. Это приводит к уточнению приближенных значений собственных чисел матрицы.
- **Сходимость**: Метод сходится к диагональной форме матрицы, где на диагонали стоят собственные значения.

15.2 Стратегии выбора матриц вращения

Для успешной работы метода вращений важно правильно выбирать матрицы вращения на каждом шаге итераций.

- **Стратегии выбора**: Существует несколько стратегий выбора пар элементов для вращения:

– **Поиск максимального элемента**: Выбираются элементы с наибольшим абсолютным значением, чтобы максимально уменьшить их влияние на следующем шаге.

– **Поиск ненулевого элемента**: Выбираются первые ненулевые элементы в строке или столбце, чтобы ускорить процесс зануления элементов матрицы.

16 Почти треугольные матрицы (верхняя форма Хесенберга)

Почти треугольная матрица (верхняя форма Хесенберга) представляет собой матрицу, у которой все элементы ниже первой субдиагонали равны нулю.

- **Описание**: Почти треугольные матрицы имеют важные приложения в численных методах, таких как QR-разложение и решение систем линейных уравнений.
- **Свойства**: Характеризуются тем, что вычисления с ними могут быть эффективными благодаря структуре, близкой к треугольной.

17 Нелинейные задачи

17.1 Метод простой итерации в полных метрических пространствах

Метод простой итерации в полных метрических пространствах является одним из основных численных методов для решения нелинейных уравнений.

- **Описание метода**: Метод простой итерации заключается в построении итерационной последовательности $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, которая сходится к решению уравнения $F(x) = 0$, где F — нелинейная функция.
- **Условия сходимости**: Для обеспечения сходимости метода простой итерации необходимо выполнение условий Липшица и сжимающего отображения.

17.2 Теоремы о сжатых отображениях

Теоремы о сжатых отображениях предоставляют условия на сжимающие отображения, при которых метод простой итерации обеспечивает сходимость к единственному решению нелинейного уравнения.

- **Определение сжимающего отображения**: Отображение φ на метрическом пространстве (X, d) является сжимающим, если существует такая константа $\alpha < 1$, что для всех $x, y \in X$ выполняется:

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

- **Теорема о сжатом отображении (Банаха)**: Если φ — сжимающее отображение на полном метрическом пространстве (X, d), то оно имеет единственную неподвижную точку x^*, такую что $\varphi(x^*) = x^*$. Кроме того, для любого начального приближения $x_0 \in X$, итерационная последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*.

17.3 Примеры

Примеры использования метода простой итерации для решения нелинейных уравнений в различных областях науки и техники.

18 Производная Фреше и метод Ньютона

18.1 Метод Ньютона в банаховых пространствах

Метод Ньютона (или метод касательных) — это итерационный численный метод для решения систем нелинейных уравнений. В банаховых пространствах он обобщается на случай операторных уравнений.

- **Описание метода**: На каждой итерации k метода Ньютона вычисляется следующее приближение $x^{(k+1)}$ как решение линейной системы, которая приближает локальное поведение функции:

$$F'(x^{(k)}) \cdot (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$$

  где F — вектор-функция, а F' — производная Фреше (якобиан).

- **Сходимость**: При достаточных условиях сходимости метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью, что означает ускоренное приближение к решению.

18.2 Достаточные условия квадратичной сходимости

Для того чтобы метод Ньютона сходился к решению с квадратичной скоростью, необходимо выполнение следующих условий:

- **Локальная обратимость**: Матрица $F'(x^*)$, где x^* — точное решение, должна быть обратимой.

- **Липшицевость производной Фреше**: Существует константа L, такая что для всех x в окрестности x^* выполняется:

$$\|F'(x) - F'(x^*)\| \leq L\|x - x^*\|$$

18.3 Примеры

Примеры применения метода Ньютона в различных областях, таких как численное решение уравнений, оптимизация функций и моделирование физических систем.

18.4 Модификации метода

Метод Ньютона имеет несколько модификаций, направленных на улучшение сходимости или расширение применимости:

- **Метод с демпфированием**: Используется для улучшения сходимости метода в случае наличия вырожденности в окрестности точки.

- **Гибридные методы**: Комбинируют метод Ньютона с другими численными методами для улучшения стабильности или скорости сходимости.