

05.09.2022

Воспоминания $\mathbb{R}^n : M$ — подмножество ограниченных функций на \mathbb{R}^n

Определение. На M вводится равномерная норма $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$. Аналогично можно рассмотреть функции, ограниченные на подмножестве $X \subset \mathbb{R}^n$ — это $L_\infty(X)$ и на нем ввести норму $\|\cdot\|_\infty$.

Определение. $\{f_n\}$ — последовательность функций из $L_\infty(X)$, говорят, что $\{f_n\}$ сходится поточечно к $f(x)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(x)$ для $\forall x \in X$.

Определение. $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \|f_n - f\|_\infty < \epsilon$.

Замечание. $f_n \rightarrow f$ поточечно:

$$\forall x \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon, x) \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

$f_n \Rightarrow f$ равномерно:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \quad \forall n > N \quad \|f_n - f\|_\infty < \epsilon.$$

Пример. $f_n = x^n$ на $[0; 1] : f_n \rightarrow f, f_n \not\Rightarrow f$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

1 Интегралы, зависящие от параметра

$\square f(x, y) : [a, b] \times Y$

Для $\forall y \in Y \quad f_y(x) = f(x, y) - \square$ она $\in R([a, b])$ (интегрируема) $\implies \forall \alpha$ и $\beta \in [a, b]$ определена функция $F(y, \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f_y(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x, y) dx$

$F(y, \alpha, \beta)$ — функция, заданная интегралом, зависящим от параметра

$[F(y, a, b)$ — частный случай функции]

1.1 Равномерная сходимост

Определение. $X \times Y \subset \mathbb{R}^2, f(x, y)$ определена на $X \times Y$, пусть y_0 — предельная точка Y

1. пусть $\forall x \in X \quad \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) := \phi(x)$

2. пусть $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon)$ такая что $|y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - \phi(x)| < \epsilon$ для $\forall x \implies$ тогда говорят, что $f(x, y)$ равномерно сходится к $\phi(x)$

Замечание. $\{f_n(x)\} : f(x, n) := f_n(x)$

$y \in Y, y_0 = \infty$ и тогда равномерная сходимост $f(x, n)$ на $X \iff$ равномерно сходится $\{f_n(x)\}$ "играками нумеруем функции"

Теорема 1.1 (Свойства равномерной сходимости). $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, y_0$ — предельная точка Y

1. $f(x, y)$ равномерно на X сходится к $\phi(x)$ тогда и только тогда, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) : \forall x \in X \forall y', y'' \in Y \quad |f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon$ [Критерий Коши]

2. $f(x, y)$ равномерно по X стремится к $\phi(x)$ так, что $\{y_n\}$ так что $y_n \rightarrow y_0$ - последовательность $\{f(x, y_n)\}$ равномерно сходится к $\phi(x)$ [сходимост по Гейне]
3. Если при $\forall y$ функция $f(x, y)$ непрерывна по x (интегрируема) и $f(x, y)$ равномерно сходится к $\phi(x)$, то $\phi(x)$ - непрерывна и интегрируема
4. $\exists x_0, y_0$ предельные точки X и Y , $f(x, y)$ равномерно по x сходится к $\phi(x)$,
 $\exists \forall y \in Y \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) =: \psi(y)$, тогда $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) [= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)]$

Доказательство. 1. $\Leftarrow \Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) =: \phi(y)$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| = |f(x, y') - \phi(x) - f(x, y'') + \phi(x)| \leq |f(x, y') - \phi(x)| + |f(x, y'') - \phi(x)|$$

$$\Leftarrow x \in X |f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon \text{ при } \begin{matrix} |y_0 - y'| < \delta \\ |y_0 - y''| < \delta \end{matrix} \Leftarrow \text{при } \forall x \exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) =: \phi(x)$$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon, y'' \rightarrow y_0$$

$$|f(x, y') - \phi(x)| \leq \epsilon, f(x, y) \Rightarrow \phi(x)$$

2. Необходимость очевидна

Достаточность: $\{y_n\} \rightarrow y_0$

$$\{f(x, y_n)\} \rightarrow \phi(x), \text{ пусть } |y_0 - y_n| < \delta = \frac{1}{n} \implies y_n \rightarrow y_0$$

и $|f(x, y_n) - \phi(x)| > \epsilon$; $f(x, y_n) \nrightarrow \phi(x)$ противоречие

3. $\exists \{y_n\} \rightarrow y_0, f_n(x) = f(x, y_n)$

$f_n(x)$ равномерно сходится к $\phi(x)$ по 2

Далее $\phi(x)$ равномерный предел хороших функций $\implies \phi(x)$ хорошая

4. $f(x, y) \Rightarrow \phi(x), \exists \epsilon > 0$, выберем $\delta > 0$ такое что:

$$|y_0 - y'| < \delta \text{ и } |y_0 - y''| < \delta \implies$$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \epsilon \text{ по к. Коши}$$

$$x \rightarrow x_0 : |\psi(y') - \psi(y'')| \leq \epsilon \implies$$

для $\psi(y)$ верен критерий Коши \implies

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = A = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

$$|f(x, y) - \phi(x)| < \epsilon, |\psi(y) - A| < \epsilon \text{ если } |y - y_0| < \delta$$

$$|\phi(x) - A| \leq |\phi(x) - f(x, y)|_{\leq \epsilon} + |f(x, y) - \psi(y)|_{< \epsilon, \text{ т.к. дельта}} + |\psi(y) - A|_{\leq \epsilon} \leq 3\epsilon$$

$$\text{при } x \rightarrow x_0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A$$



1.2 Теоремы о непрерывности/дифференцируемости/интегрируемости по параметру

$f(x, y) : [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}, y_0$ - предельная точка Y и $f_y(x) = f(x, y)$ - интегрируема на $[a, b]$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Теорема 1.2 (О предельном переходе). Если кроме того, что $f(x, y)$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $\phi(x)$ при $y \rightarrow y_0$, то $\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$

Доказательство. $\langle \phi(x) \rangle$ - равномерный предел, непрерывен

$f_y(x) \implies \phi(x)$ - интегрируема, $\exists \epsilon > 0 \quad \delta(\epsilon) > 0$ выбрано из определения равномерной сходимости

$$|\int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \phi(x) dx| = |\int_a^b (f(x, y) - \phi(x)) dx| \leq \int_a^b |f(x, y) - \phi(x)| dx \leq \epsilon(b-a) \text{ если } |y - y_0| < \epsilon$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \phi(x) dx \quad \blacktriangleright$$

Теорема 1.3 (Непрерывность). $f(x, y)$ - непрерывна, $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \implies$
 $f(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ непрерывна на $[c, d]$

Доказательство. $[a, b] \times [c, d]$ компакт $\implies f(x, y)$ равномерно непрерывна на компакте

$$\forall \epsilon > 0 : \begin{matrix} |x - x'| < \delta \\ |y - y'| < \delta \end{matrix} \implies |f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon$$

$$x' = x, y' = y_0$$

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \epsilon \text{ при } |y - y_0| < \delta(\epsilon)$$

$f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0) = \phi(x)$ равномерный предел не зависит от x

по теореме о предельном переходе:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = F(y_0) \implies F \text{ непрерывна в } y_0 \in [c, d] \implies F \text{ непрерывна на } [c, d] \quad \blacktriangleright$$

09.09.2022

Теорема 1.4 (О дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра). $f(x, y)$ - определена в $[a, b] \times [c, d]$ при $\forall y \in [c, d]$ функция $f_y(x) = f(x, y)$ непрерывна по x , $\exists f'_y(x, y) \exists$ и непрерывна в прямоугольнике, тогда

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \text{ и } F'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

Доказательство. \triangleleft в силу непрерывности $f(x, y)$ по x , определена $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$

$$y_0 \in [c, d], F(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

$$F(y_0 + \Delta) = \int_a^b f(x, y_0 + \Delta) dx$$

$$\frac{F(y_0 + \Delta) - F(y_0)}{\Delta} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta) - f(x, y_0)}{\Delta} dx$$

По теореме Лагранжа, $\exists \theta \in (0, 1)$ т.ч

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta) - f(x, y_0)}{\Delta} = f'_y(x, y_0 + \theta \Delta)$$

$$\text{т.к } F \text{ непрерывна} \implies \text{равномерно непрерывна} \implies \text{для } \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \begin{matrix} |x' - x''| < \delta \\ |y' - y''| < \delta \end{matrix} \implies$$

$$|f'_y(x', y') - f'_y(x'', y'')|$$

$$x' = x'' = x, y' = y_0 + \Delta \theta, y'' = y_0, \text{ если } \Delta < \delta$$

$$|\frac{f(x, y_0 + \Delta) - f(x, y_0)}{\Delta} - f'_y(x, y_0)| = |f'_y(x, y_0 + \theta \Delta) - f'_y(x, y_0)| < \epsilon \text{ т.к } \delta(\epsilon)$$

неравенство не зависит от точек, т.е

$$\frac{f(x, y_0 + \Delta) - f(x, y_0)}{\Delta} \rightrightarrows f'_y(x, y_0) \text{ равномерно по } x$$

$$\text{В силу теоремы о предельном переходе, получаем что } \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta) - f(x, y_0)}{\Delta} dx \rightarrow \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$$

$$\frac{F(y_0 + \Delta) - F(y_0)}{\Delta} \rightarrow F'_y(y_0) \quad \blacktriangleright$$

Теорема 1.5 (О интегрируемости $F(y)$). $\exists f(x, y)$ непрерывна в $[a, b] \times [c, d]$, тогда имеет место равенство

$$\int_c^d (\int_a^b f(x, y) dx) dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx$$

Доказательство. $\triangleleft \exists \eta \in [c, d]$, покажем, что $\int_c^\eta (\int_a^b f(x, y) dx) dy = \int_a^b (\int_c^\eta f(x, y) dy) dx$

$$\int_c^\eta F(y) dy = \mathcal{F}(\eta) - \mathcal{F}(c), \mathcal{F}' = F$$

Производная левой части по $\eta = F(\eta) = \int_a^b f(x, \eta) dx$

$\phi(\eta) := \int_c^\eta f(x, y) dy$ непрерывна по x

$\phi(x, \eta) \rightarrow \phi'_\eta(x, \eta)$

$\square \Phi(x, \eta)' = \phi(x, \eta), \Phi'(x, \eta) = f$

$\phi(x, \eta) = \Phi(x, \eta) - \Phi(x, c)$

$\phi'_\eta = \Phi'_\eta = f \quad \phi'_\eta(x, \eta) = f(x, \eta)$

По предыдущей теореме $(\int_a^b \phi(x, \eta) dx)'_\eta = \int_a^b \phi'_\eta(x, \eta) dx = \int_a^b f(x, \eta) dx = F(\eta) \implies$ левая и правая часть могут отличаться лишь на const, но при $\eta = c$ обе части равны 0 $\implies C = 0$ ►

Пример (1). $f(x, y) = x^y \quad [0, 1] \times [a, b]$

т.к f - непрерывна, то $\int_0^1 (\int_a^b x^y dy) dx = \int_a^b (\int_0^1 x^y dx) dy$

$\int_0^1 (\int_a^b x^y dy) dx = \int_0^1 \frac{x^b}{\ln x} - \frac{x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

$\int_a^b (\int_0^1 x^y dx) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \frac{b+1}{a+1} \implies$ несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ сходится, т.к вычислен напрямую

◁ случай интегралов вида $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$

Теорема 1.6. $\square f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$

$x = \alpha(y); x = \beta(y)$ непрерывны и не выходят за пределы прямоугольника

Тогда $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ непрерывен

Доказательство. $\triangleleft y_0 \in [c, d]$

$F(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx$

т.к $\beta(y_0), \alpha(y_0) = C$, то

$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}(y) \rightarrow \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = \tilde{F}(y_0)$

$|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx| \leq \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} |f(x, y)| dx \leq M |\beta(y) - \beta(y_0)| \rightarrow 0$, где $M \leq |f(x, y)|$, при $y \rightarrow y_0$

при $y \rightarrow y_0 \quad F(y) \rightarrow \tilde{F}(y)$

$F(y) \rightarrow \tilde{F}(y) \rightarrow \tilde{F}(y_0) = F(y_0)$ ►

Теорема 1.7. $\square f(x, y)$ определена в $[a, b] \times [c, d]$ имеет в ней непрерывную производную $f'_y(x, y)$

$\alpha'(y)$ и $\beta'(y)$ - непрерывны, тогда $F'_y(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y)$

Доказательство. $F(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx$

$(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx)'_y = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y) dx$ т.к пределы постоянные

$\frac{\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - 0}{y - y_0} = \frac{f(\tilde{x}, y)(\beta(y) - \beta(y_0))}{y - y_0} [\tilde{x} \text{ между } \beta(y) \text{ и } \beta(y_0)]$

при $y \rightarrow y_0 \quad \frac{\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx}{y - y_0} \rightarrow f(\beta(y_0), y_0) \beta'(y_0)$, т.е

$(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx)'_y = f(\beta(y), y) \beta'(y)$, аналогично со вторым интегралом ►

Теорема 1.8. Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Доказательство. (Гаусса)

$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_k \in \mathbb{C}$

$x = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad x^k = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)$

$f(x) = P(x) + iQ(x), \quad P(x), Q(x) \in \mathbb{R}$

покажем, что для некоторого $x \quad P^2(x) + Q^2(x) = 0$

$\square P^2 + Q^2 \neq 0, \square U = \arctan \frac{P}{Q}$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{(\frac{\partial P}{\partial r} Q - P \frac{\partial Q}{\partial r}) \frac{1}{Q^2}}{1 + \frac{P^2}{Q^2}} = \frac{\frac{\partial P}{\partial r} Q - P \frac{\partial Q}{\partial r}}{P^2 + Q^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \theta} Q - P \frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2 + Q^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = \frac{H(r, \theta)}{(P^2 + Q^2)^2}, \text{ если } P^2 + Q^2 \neq 0$$

$$I_1 = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} d\theta = \int_0^R \frac{\partial U}{\partial r} \bigg|_0^{2\pi} dr$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} dr = \int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \bigg|_0^R d\theta > \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi \neq I_1$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}$ - непрерывна

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \theta} Q - P \frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^2 + Q^2} = \frac{nr^{2n} + \dots}{r^{2n} + \dots} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} n$$

$$f(x) = x^n + ase \dots = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + r^{n-1} \dots$$

$$P = r^n \cos n\theta + r^{n-1} \dots, \quad Q = r^n i \sin n\theta + r^{n-1} \dots$$

Можно взять R настолько большим, что $\frac{\partial U}{\partial \theta} > \frac{1}{2}$

$$I_1 \neq I_2 \text{ противоречие, } \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} \implies P^2 + Q^2 = 0$$

12.09.22

1.3 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

$\int_a^\omega f(x) dx$ - несобственный, если $\omega = \pm\infty$ или $f(x)$ не ограничена в окрестности ω

$\square f(x, y)$ определена на множестве $[a, \omega) \times Y$

Для всех $y \in Y$ функция $f_y(x) = f(x, y)$ несобственно интегрируема на $[a, \omega)$, тогда $F(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x, y) dx$

Определение. $f(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$, тогда сходимость $F(y)$ равносильна существованию предела $\lim_{b \rightarrow \omega} F(b, y) = F(y) = F(\omega, y)$

Определение. $F(y)$ называется равномерно сходящейся относительно y на Y , если $\forall \epsilon \exists \delta(\epsilon) : \forall y \in Y \quad \forall b \in (a, \omega) |b - \omega| < \delta \implies |F(b, y) - F(y)| < \epsilon$

$$F(b, y) \rightrightarrows_{b \rightarrow \omega} F(y)$$

Пример. $\int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$ сходится $\forall y \in Y$

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx = F(y) = \int_0^b ye^{-xy} dx = -e^{xy} \bigg|_{x=b}^{x=\infty} = e^{-by} = |F(b, y) - F(y)| = \frac{1}{e}, y = \frac{1}{b}$$

нет равномерной сходимости

Если $y \in [\epsilon, +\infty), \epsilon > 0$, на этом луче сходимость будет равномерной

$$e^{-by} < e^{-b\epsilon} \rightarrow 0, e^{-b\epsilon} < \epsilon$$

$$b > -\frac{\ln \epsilon}{\epsilon}, b \rightarrow \infty$$

Замечание. $\square - \{b_n\}$ - последовательность сходится к ω согласно свойствам равномерной сходимости

$$F(b, y) \rightrightarrows F(y) \leftrightarrow F(b_n, y) \rightrightarrows F(y)$$

$$a_n y \stackrel{\text{def}}{=} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x, y) dx, b_1 = a, b_j \geq a$$

$$\text{Тогда } F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y)$$

Равномерная сходимость $F(y)$ равносильна равномерной сходимости ряда

Теорема 1.9 (Признаки равномерной сходимости интеграла). 1. (Вейерштрасса) $f(x, y)$ определена на $[a, \omega) \times Y$, ω - особая точка $f(x, y)$ и $f(x, y)$ интегрируема на $[a, b] \subset [a, \omega)$ Если $\exists \phi(x) |f(x, y)| \leq \phi(x) \quad \forall x \in [a, \omega) \forall y \in Y$ и $\int_a^\omega \phi(x) dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x, y) dx = F(y)$

2. (Дирихле) $F(y) = \int_a^\omega f(x, y) g(x, y) dx$, $g(x, y)$ монотонно по $x \rightarrow \omega$ равномерно по y стремится к 0 и для \forall отрезка $[a, b] \subset [a, \omega)$

$$|\int_a^b f(x, y) dx| \leq L, \text{ тогда } F(y) \text{ сходится равномерно}$$

3. (Абель) $F(y) = \int_a^\omega f(x, y) g(x, y) dx$

Если $\int_a^\omega f(x, y) dx$ сходится равномерно $g(x, y)$ монотонно по x равномерно по y сходится к своему пределу

Доказательство. 1. очевидно Для $F(y)$ используем критерий Коши

$$2. \int_{b'}^{b''} f(x, y) g(x, y) dx = g(b', y) \int_{b'}^\xi f(x, y) dx + g(b'', y) \int_\xi^{b''} f(x, y) dx, \xi \in (b', b'')$$

$$g(b, y) \rightarrow 0 \text{ равномерно по } y \implies \exists B \text{ такое что } \forall b', b'' > B$$

$$|g(b', y)| < \frac{\epsilon}{2L} \quad |g(b'', y)| < \frac{\epsilon}{2L} \implies F(y) \text{ сходится равномерно}$$

$$3. \int_a^\omega f(x, y) dx \text{ сходится равномерно } \forall \epsilon > 0 \exists \delta \quad \forall b', b'' > B |\int_{b'}^{b''} f(x, y) dx| \leq \epsilon$$

т.к $g(x, y)$ равномерно сходится к $G(y)$

$$|g(x, y)| \leq M \text{ при } x \text{ близком к } \omega$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{2M}, |\int_{b'}^{b''} f(x, y) g(x, y) dx| \leq M \frac{\epsilon}{2M} + M \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon \implies F(y) \text{ сходится равномерно}$$

Пример. $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = \sqrt{\frac{n}{3}} \quad \sup_{x \leq 0} f_n(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} e^{-\frac{3}{2}} \rightarrow 0$

$$f_n \Rightarrow 0$$

$$\int_0^\infty 0 dx = 0 \quad \int_0^\infty f_n(x) dx = \int_0^\infty \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{x^2}} dx = 0$$

$$\frac{1}{x} = t, dx = \frac{t}{t^2} dt$$

$$= \int_0^\infty n t^3 e^{-\frac{nt^2}{2}} \frac{1}{t^2} dt = \int_0^\infty n t e^{\frac{nt^2}{2}} dt = -e^{\frac{nt^2}{2}} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx \neq \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Теорема 1.10 (О предельном переходе). $\exists f(x, y)$ определена на $[a, \omega) \times Y$ для $\forall y \in Y$, интегрируема на $[a, b] \subset [a, \omega)$ равномерно относительно y сходится к функции $\phi(x)$ при $y \rightarrow y_0$ если $F(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$ $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\omega f(x, y) dx = \int_a^\omega \phi(x) dx = \int_a^\omega \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$

Доказательство. $F(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$ это несобственный интеграл и для него верна теорема о о предельном переходе

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(b, y) = \int_a^b \phi(x) dx$$

$$\lim_{b \rightarrow \omega} F(b, y) = \int_a^\omega f(x, y) dx - \text{равномерно}$$

$F(b, y)$ - для этой функции верны условия о перемене предельных переходов \implies

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\omega f(x, y) dx$$

Следствие: Если $f(x, y)$ монотонно по y $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \phi(x)$ - непрерывны, тогда

$$\int_a^\omega \phi(x) dx \Rightarrow \int_a^\omega f(x, y) dx \text{ сходится равномерно}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \int_a^\omega \phi(x) dx$$

Доказательство. $f(x, y) \rightarrow \phi(x) \quad y \rightarrow y_0 \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta : |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - \phi(x)| < \epsilon$
 $\square f(x, y)$ возрастает по y , тогда $F(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$ возрастает по y
но $f(x, y) \leq \phi(x) \implies F(b, y) \leq \int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^\omega \phi(x) dx \implies \lim_{b \rightarrow \omega} F(b, y) = \int_a^\omega f(x, y) dy$ -
сходится

Равномерность по Вейерштрассу ►

Теорема 1.11 (О непрерывности интеграла). $\square f(x, y)$ - определена на $[a, \omega) \times [c, d]$ и непрерывна
 $F(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$
Тогда $F(y)$ - непрерывная функция на $[c, d]$

15.09.22

Доказательство. \triangleleft Пусть $y_0 \in [c, d]$

$F(x, y) \rightarrow_{y \rightarrow y_0} \phi(x), [a, b] \subset [a, \omega)$

$[a, b] \times [c, d]$ - компакт $\implies f(x, y)$ равномерно сходится на $[a, b] \times [c, d]$

$f(x, y) \rightrightarrows_{y \rightarrow y_0} \phi(x)$ равномерно по x

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |y - y_0| < \delta \forall x \in [a, b] |f(x, y) - \phi(x)| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \begin{matrix} |x' - x''| < \delta_1 \\ |y' - y''| < \delta_1 \end{matrix} \implies |f(x', y') - f(x'', y'')| < \epsilon$

$\forall \epsilon \exists \delta_2(x) > 0 : |y - y_0| < \delta_2 \implies |f(x, y) - \phi(x)| < \epsilon$

Фиксируем $x_0, \delta_1 = \delta_2(x_0)$

$\forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta_1 \implies$ если $|y - y_0| < \delta_2 \implies |f(x, y) - \phi(x)| \leq |f(x, y) - f(x_0, y)| +$
 $|f(x_0, y) - \phi(x_0)| \leq \epsilon$

Выбираем конечное подпокрытие $[a, b]$ такими окрестностями $x_0 \pm \delta(x_0)$, выбираем наименьшее δ_2

Тогда если $|x' - x''| < \delta_2 \implies \exists x_0 : |x' - x_0| < \delta_2$ и $|x'' - x_0| < \delta_2$

Тогда $|f(x', y) - \phi(x')| \leq |f(x', y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - \phi(x_0)| + |\phi(x') - \phi(x_0)| < \epsilon + \epsilon + \epsilon$

Тогда $F(y, b) = \int_a^b f(x, y) dx$ - непрерывна по y

$\lim_{b \rightarrow \omega} F(y, b) = \int_a^\omega f(x, y) dx = F(y)$

$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\omega f(x, y) dx = \int_a^\omega \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^\omega \phi(x) dx = F(y_0)$

$\phi(x) = f(x, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ ►

Следствие: Если $f(x, y) \geq 0$, то из непрерывности $F(y)$ следует равномерная сходимост $\int_a^\omega f(x, y) dx$

Доказательство. $F(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$ неубывает с ростом b

Предельная функция - $F(b, y)$ это $F(y)$

$\forall \epsilon > 0 \exists B \quad b', b'' \in (\omega - B, \omega) \forall y | \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx | \leq \epsilon$

$F(b, y) \rightarrow F(y)$

$\forall \epsilon \exists B : \forall b' \in (\omega - B, \omega) | \int_{b'}^\omega f(x, y) dx | < \epsilon$

$| \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx | \leq | \int_{b'}^\omega f(x, y) dx | < \epsilon$ ►

Теорема 1.12 (О дифференцируемости несобственных интегралов). Пусть $f(x, y)$ непрерывна по x на $[a, b] \times [c, d]$, ее производная по y непрерывна на этом множестве

Пусть $\forall y F(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx$ сходится, и сходится равномерно $\int_a^\omega f'_y(x, y) dx$ по y

Тогда $F(y)$ дифференцируемо на $[c, d]$ и $F'(y) = \int_a^\omega f'_y(x, y) dx$

Доказательство. $\frac{F(y_0 + \Delta) - F(y_0)}{\Delta} = \int_a^\omega \frac{f(x, y_0 + \Delta) - f(x, y_0)}{\Delta} dx$

на $[a, b] \subset [a, \omega) \frac{f(x, y_0 + \Delta) - f(x, y_0)}{\Delta} \rightrightarrows_{\Delta \rightarrow 0} f'_y(x, y_0)$

$\int_a^\omega f'_y(x, y) dx$ по y сходится равномерно по условию

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \begin{array}{l} |b - \omega| < \delta \\ |b'' - \omega| < \delta \end{array} \implies \left| \int_{b'}^{b''} f'_y(x, y) dx \right| < \epsilon$$

Пусть $\Phi(y) = \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx$, тогда $\Phi'(y) = \int_{b'}^{b''} f'_y(x, y) dx \implies |\Phi'(y)| < \epsilon$

$$\frac{\Phi(y+\Delta) - \Phi(y)}{\Delta} = \Phi'(\eta), \eta \in (y, y + \Delta)$$

$$\left| \int_{b'}^{b''} \frac{f(x, y+\Delta) - f(x, y)}{\Delta} dx \right| < \epsilon \text{ сходится равномерно}$$

Тогда имеем право перейти к пределу $\Delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(y+\Delta) - F(y)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_a^\omega \frac{f(x, y+\Delta) - f(x, y)}{\Delta} dx = \int_a^\omega f'_y(x, y) dx = F'(y)$$

►

Теорема 1.13. пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна на $[a, \omega) \times [c, d]$ и $F(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx$ - сходится равномерно, тогда

$$\int_c^d F(y) dy = \int_a^\omega dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)$$

Доказательство. $\exists b \in (a, \omega)$ тогда $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)$ по теореме о интегрировании собственного интеграла

$$F(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx \xrightarrow{b \rightarrow \omega} F(y)$$

$$\int_c^d F(b, y) dy = \int_c^d F(y) dy \text{ по } b \rightarrow \omega$$

$$\int_c^d F(y) dy = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_c^d dx \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)$$

$$\int_c^d F(y) dy = \int_a^\omega dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right)$$

►

Теорема 1.14 (о несобственном интегрировании несобственного интеграла). $f(x, y)$ - определена и непрерывна на $[a, \omega') \times [b, \omega'')$

Пусть $\int_a^{\omega'} f(x, y) dx$ и $\int_b^{\omega''} f(x, y) dy$ сходится равномерно относительно y и x в любом промежутке

Доказательство. $\exists \exists \int_a^{\omega'} dx \int_c^{\omega''} |f(x, y)| dy$

Для $\forall d \in (c, \omega'')[c, d] F(y)$ интегрируема

$$\int_c^d \int_a^{\omega'} f(x, y) = \int_a^{\omega'} dx \int_c^d f(x, y) dy \text{ (Предыдущая теорема)}$$

$G(d, x) = \int_c^d f(x, y) dy$ - непрерывна и при $d \rightarrow \omega''$ стремится к $\int_c^{\omega''} |f(x, y)| dx$ равномерно относительно x $\left| \int_a^{\omega'} dx \int_c^d |f(x, y)| dy \right|$ сходится $\implies \int_a^{\omega'} dx \int_c^d |f(x, y)| dy$ сходится равномерно по d

$$\int_c^d dy \int_a^{\omega'} dx |f(x, y)| \text{ сходится равномерно по } d$$

Тогда $b \rightarrow \omega'$ и применяем теорему о предельном переходе

$$\int_c^{\omega''} \int_a^{\omega'} |f(x, y)| dx = \int_a^{\omega'} dx \int_c^{\omega''} dy$$

►

Следствие: Если $f(x, y)$ интегрируема и неотрицательна и $\int_a^{\omega'} f(x, y) dx$ и $\int_c^{\omega''} f(x, y) dy$ сходится равномерно (Достаточно непрерывности)

Тогда из \exists одного из интегралов следует существование второго и их равенство

Доказательство. $\int_a^{\omega'} dx \int_c^\omega f(x, y) dy, \int_c^\omega dy \int_a^{\omega'} f(x, y) dx$ следует существование второго и их равенства

$\int_a^{\omega'} f(x, y)$ - непрерывна и $f \geq 0$, то по следствию теоремы о непрерывности интегралов $\int_a^{\omega'} f(x, y) dx$ сходится равномерно

►

1.4 Эйлеровы интегралы

Определение. $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ - бета-функция

$\Gamma(x, y) = \int_0^\infty t^x(x-1)e^{-t}dt$ - гамма-функция

B и Γ определены при $x > 0$ и $y > 0$

Замечание. Если $y = \frac{u}{1+u}$, тогда $B(x, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} = \int_0^\infty (\frac{u}{u+1})^{x-1}(\frac{1}{u+1})^{y-1} \frac{1}{(1+u)^2} du = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$

1. $B(x, y) = B(y, x)$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \left| 1-t=u \right| = \int_0^1 (1-u)^{x-1}u^{y-1}du = B(y, x)$$

2. $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y}B(x, y), B(x, y+1) = \frac{y}{x+y}B(x, y)$

$$B(x+1, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \int t^x d(\frac{(1-t)^y}{y}) = -t^x \frac{(1-t)^y}{y} \Big|_0^1 + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)dt = \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = -\frac{x}{y} \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \frac{x}{y}B(x, y) - \frac{x}{y}B(x+1, y)$$

3. 19.09.22

$$B(x, n) = \frac{1 \dots (n-1)}{x \dots (x+n-1)}$$

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x} \text{ - база индукции}$$

$$\square B(x, n) = \frac{1 \dots (n-1)}{x \dots (x+n-1)}$$

$$B(x, n+1) = \frac{n}{x+n}B(x, n)$$

$$B(m, n+1) = \frac{1 \dots n}{(n+m)!} = \frac{n!(m-1)!}{(n+m)!} = \frac{1}{(n+1)C_{n+m}^{m-1}}$$

4. $\Gamma(x) \in C^\infty((0; +\infty))$

$$x_0 \in (0; +\infty), \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

$f(t) = t^x - 1e^{-t}$ дифференцируема на x

$$f^{(n)}(t) = t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n, n = 0, 1, 2 \dots$$

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt \text{ сходится равномерно на } [\alpha, \beta], x_0 \in [\alpha, \beta]$$

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt - \text{сходится равномерно}$$

$$t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n \leq t^{\beta-1}(\ln t)^n e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}} [t^{\beta-1}(\ln t)^n \leq e^{-\frac{t}{2}}]$$

$$\int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt - \text{сходится}$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{t}{2}} - \text{сходится}$$

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt$$

$$t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n \leq t^{\alpha-1}(\ln t)^n \leq t^{\frac{\alpha-1}{2}-\epsilon}, \quad \epsilon \text{ такой что } (\ln t^n < t^{-\epsilon})$$

$$\alpha - 1 - \epsilon > -1, \quad \int_0^1 t^{\alpha-1-\epsilon} dt \text{ сходится} \implies$$

$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt$ сходится равномерно относительно x на $[\alpha, \beta] \implies$ для всех n имеется право дифференцировать интегралы, и интеграл - непрерывная функция

5. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\Gamma(x+1) \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = - \int_0^\infty t^x d(e^{-t}) = t^x e^{-t} \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

$$6. \Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \text{ база}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

$$7. B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, x > 0, y > 0$$

$$\text{Доказательство. } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \left| t = a\xi \right| = \int_0^\infty (a\xi)^{x-1} e^{-a\xi} d(a\xi) = a^x \int_0^\infty \xi^{x-1} e^{-a\xi} d\xi \implies$$

$$\frac{\Gamma(x)}{a^x} = \int_0^\infty \xi^{x-1} e^{-a\xi} d\xi$$

$$\frac{\Gamma(x+y)}{a^{x+y}} = \int_0^\infty \xi^{x+y-1} e^{-a\xi} d\xi \left| \begin{array}{l} a \rightarrow (1-t) \\ \cdot t^{x-1} \end{array} \right.$$

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+t)^{x+y}} t^{x-1} = \int_0^\infty \xi^{x+y-1} t^{x-y} e^{-\xi} e^{-\xi t} d\xi \quad \left| \int_0^\infty dt \right.$$

$$\Gamma(x+y) \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \int_0^\infty dt (\xi^{x+y-1} e^{-1} e^{-\xi t} d\xi), \quad \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = B(x, y)$$

$$\Gamma(x+y) B(x, y) = \int_0^\infty d\xi e^{-\xi} \xi^{x+y-1} \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-\xi t} dt \right) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-at} dt = \frac{\Gamma(x)}{a^x} = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{x+y-1} \frac{\Gamma(x)}{\xi^x} d\xi =$$

$$\Gamma(x) \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{y-1} d\xi = \Gamma(x) \Gamma(y)$$

$$x, y > 1$$

$$t^{x-1} \xi^{x+y-1} e^{-(1+t)\xi} > 0 \text{ и непрерывна}$$

$$t^{x-1} \int_0^\infty \xi^{x+y-1} e^{-(1+t)\xi} d\xi \text{ непрерывная, монотонная функция}$$

$$\frac{t^{x-1} \Gamma(x+y)}{(1+t)^{x+y}} \text{ по следствию из теоремы об интегрировании несобств. интегралов}$$

$$t^{x-1} \int_0^\infty \xi^{x+y-1} e^{-(1+t)\xi} d\xi - \text{сходится равномерно}$$

$$e^{-\xi} \xi^{x+y-1} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t\xi} dt = \frac{e^{-\xi} \xi^{x+y-1} \Gamma(x)}{\xi^x} \text{ непрерывна и монотонна} \implies \text{интеграл сходится равномерно} \implies \text{перестановка интегралов законна}$$

$$\square, x, y \in (0, 1)$$

$$B(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+2+y)} = \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$$

$$B(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1} B(x, y+1) = \frac{xy}{(x+y+1)(x+y)} B(x, y)$$



2 Интеграл Лебега

2.1 Общие идеи, наводящие соображения

Определение. $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если можно указать конечный набор n -мерных непересекающихся кубов так, что на \forall кубе $f(x) = c$

Определение. Мера (Объем) n -мерного куба Q , обозн. $\mu_n(Q)$

Если ребро куба равно a , то $\mu_n(Q) = a^n$

Определение. Интегралом $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ из пространства R^n н-ся число $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sum_{i=1}^\infty f_i \mu_n(Q_i)$, f_i постоянное значение f на кубе Q_i

Пример. $\sqsubset M \subset \mathbb{R}^n, M \neq \emptyset, f, g : M \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ и $A \subset M$

Определение. Будем говорить, что $f \leq g$ на A , если $\forall x \in A \quad f(x) \leq g(x)$
 $f \leq g \implies f \leq g$ на M

Замечание. $f \leq g$ отношение порядка

Определение. $\{f_n\}$ последовательность неубывает $\Leftrightarrow f_{n+1} \geq f_n$ неубывает

Замечание. Если $|f| = \sup_{x \in M} |f(x)|, \{f_n\} \rightarrow f$

Определение. Если $\{f_n\}$ не убывает и сходится к f , то $f_n \searrow f$ сходится сверху
 $\{f_n\}$ не убывает и сходится к $f \implies f_n \nearrow f$ (снизу)

Определение. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^+ = \max 0, f(x), f^+, f^- \leq 0$$

$$f^- = \max 0, -f(x), f^+, f^- \leq 0$$

$$f = f^+ - f^-$$

$$\sqsubset x \in M, \text{если } f(x) \leq 0$$

$$f^+(x) = f(x), f^-(x) = 0 \implies f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

$$\text{Если } f(x) < 0$$

$$f^+(x) = 0, f^-(x) = -f(x) \implies f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

$$|f|(x) = |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

Определение. $\sqsubset A \subset \mathbb{R}^n$, функция

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Индикатор множества A , характеристическое изложение

Замечание. $X_A(x) \equiv 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$

$$X_A(x) \equiv 1 \Leftrightarrow A = \mathbb{R}^n$$

Лемма 2.1. $A, B \subset M$

$$A \subset B \Leftrightarrow X_A \leq X_B$$

Если $\{A_n\} \subset M$ и $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $X_A \leq \sum_{n=1}^{\infty} X_{A_n}$, если $\{A_n\}$ попарно не пересекаются, то равенство

Доказательство. очевидно ►

23.09.22

Определение. $\alpha = \langle a_i, b_i \rangle \times \langle a_n, b_n \rangle \in \mathbb{R}^n, b_j \geq a_j, l_j = b_j - a_j$ — длина ребра

$$\mu(\alpha) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) \text{ — мера, объем}$$

$$\alpha = [a_1, b_1] \times [a_n, b_n] \text{ — полуоткрытый прямоугольник}$$

Определение. Двоичный полуинтервал — полуинтервал вида $[a, b)$, где $a = \frac{s}{2^r}, b = \frac{s+1}{2^r}, r$ — ранг полуинтервала

$$\mu([a, b)) = \frac{1}{2^r}$$

Определение. Двоичный брус — это произведение двоичных интервалов одного ранга r — ранг бруса

Замечание. Если f - ступенчатая, то существуют числа f_1, \dots, f_n и прямоугольники $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ т.ч.

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k \chi_{\alpha_k}(x)$$

Замечание. Любой полуинтервал - объединение двоичных полуинтервалов

Предложение (Свойства двоичных полуинтервалов)

1. α и β - двоичные полуинтервалы ранга r и s соответственно

Доказательство. $r \leq s$, тогда если они пересекаются $\Rightarrow (\alpha \cap \beta \neq \emptyset)$, то $\beta \subset \alpha$

$$\alpha = [\frac{n}{2^r}, \frac{n+1}{2^r}), \beta = [\frac{m}{2^s}, \frac{m+1}{2^s}))$$

пусть они пересекаются $\Rightarrow x$ общая точка

$$\frac{n}{2^r} \leq x < \frac{n+1}{2^r} \quad \frac{m}{2^s} \leq x < \frac{m+1}{2^s} | 2^s$$

$$n2^{s-r} \leq x2^r < (n+1)2^{s-r} \quad m \leq x2^s < m+1$$

$$n2^{s-r} < m+1 \Rightarrow n2^{s-r} \leq m \Rightarrow \frac{n}{2^r} \leq \frac{m}{2^s}$$

$$(n+1)2^{s-r} > m \Rightarrow (n+1)2^{s-r} \geq n+1 \quad \frac{n+1}{2^r} \leq \frac{m+1}{2^s}$$

►

2. Если α и β двоичные полуинтервалы и их ранги равны, то они либо не пересекаются, либо совпадают

Доказательство.

►

3. Если $n \in \mathbb{N}$ то каждая точка из \mathbb{R} принадлежит ровно одному полуинтервалу ранга r

Доказательство. $\forall x \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} : x2^r \in [m, m+1)$

►

4. Если $[a, b)$ - двоичный полуинтервал ранга r , $c = \frac{a+b}{2}$, то $[a, c)$, $[c, b)$ двоичные полуинтервалы ранга $r+1$

Доказательство.

►

Замечание. Двоичные полуинтервалы фиксированного ранга r образуют разбиение \mathbb{R} на непересекающиеся классы (множества)

Замечание. все свойства двоичных полуинтервалов переносятся на брусы

Замечание. $\square \alpha = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ - некоторый прямоугольник, причем каждые из чисел a_i, b_i имеют вид $\frac{p}{2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, тогда α конечное объединение брусков фиксированного ранга

Доказательство. r - макс q т.ч $a_i b_i = \frac{p}{2^q}$

$$\square[a_i, b_i) \text{прямоуг} = [\frac{p_1}{2^{q_1}}, \frac{p_2}{2^{q_2}}), q_1, q_2 \leq r$$

очевидно можно $[a_i, b_i)$ записать в виде $[\frac{m}{2^r}, \frac{k}{2^r})$

$$[\frac{m}{2^r}, \frac{k}{2^r}) = [\frac{m}{2^r}, \frac{m+1}{2^r}) \cup \dots \cup [\frac{k-1}{2^r}, \frac{k}{2^r})$$

α - конечное произведение конечных объединений (конечное объединение брусков)

►

Лемма 2.2. A - компактное множество в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists$ конечное множество брусков ранга r , покрывающих A

Доказательство. A - ограничено $\Rightarrow M \subset N, A \subset [-M, M]^n$

$[-M, M]$ подходит под условия предыдущей леммы

$$M = \frac{M}{2^0} = \frac{2M}{2^1} \Rightarrow [-M, M]^n \text{ - конечное объединение брусков ранга } r$$

►

Определение. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ступенчатая функция, если f - лин. комбинация конечного числа двоичных брусков

Замечание. f образуют линейное пространство ступенчатых функций $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Замечание. Если $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, то f можно представить в виде линейной комбинации конечного числа брусков одного ранга

Доказательство. очевидно ►

Лемма 2.3. f - ступенчатая функция, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{k=1}^m f_k \chi_{\alpha_k}, \alpha_k - \text{не пересекающиеся кубы, тогда } |f| = \sum_{k=1}^m f_k \chi_{\alpha_k}, \alpha_k$$

Доказательство. $\alpha = \bigcup \alpha_k$

$$\text{Если } x \notin \alpha \implies \forall k, x \in \alpha_k \implies f(x) = 0$$

$$|f|(x) = |f(x)| = 0 = \sum_{k=1}^m |f_k| \chi_{\alpha_k}, \alpha_k$$

$$\text{Если } x \in \alpha \implies \exists! \alpha_j : x \in \alpha_j$$

$$f(x) = f_j, |f|(x) = |f(x)| = |f_j|$$

$$\sum_{j=1}^m |f_j| \chi_{\alpha_j} = |f_j| \implies |f| = \sum |f_j| \chi_{\alpha_j} \quad \blacktriangleright$$

Для всякой $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ можно указать число, которое будем называть интегралом от f по \mathbb{R}^n и обозначать

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

Замечание. $n = 1$ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ все функции отсюда ограничены и имеют лишь конечное число точек разрыва \Rightarrow определен интеграл Римана

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^m f_k \chi_{\alpha_k}(x) dx = \sum_{k=1}^m f_k \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{\alpha_k}(x) dx = \sum_{k=1}^m f_k \int_{a_k}^{b_k} 1 dx = \sum_{k=1}^m f_k \mu(\alpha_k)$$

$$n = 1 \text{ разумно считать, что } \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k=1}^m f_k \mu(\alpha_k)$$

Определение. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и $f = \sum_{k=1}^m f_j \chi_{\alpha_j}$

α_j - попарно не пересекаются, тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sum_{k=1}^n f_k \mu_n(\alpha_k)$$

Замечание. Вообще говоря, нужно доказывать независимость интеграла от представления функции в виде линейных компонент индикатора

Мы не будем доказывать корректность, по-другому определим интеграл, а затем покажем, что новое определение совпадет со старым

Доказательство. 1. $n = 1$, $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k=1}^n f_k \mu_n(\alpha_k)$

2. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\kappa+\mathbb{K}})$

$$x \in \mathbb{R}^{\kappa+\mathbb{K}} = \mathbb{R}^{\kappa} \times \mathbb{R} = (y, z) \text{ и}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^m f_k \chi_{\alpha_k}(x), \alpha_k - \text{куб в } \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\alpha_k = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_{n+1}, b_{n+1}) = \beta_k \times \gamma_k$$

$$\mu_{n+1}(\alpha_k) = \mu_n(\beta_k) \mu_1(\gamma_k)$$

$$y \in \beta \text{ тогда } f_y(z) = f(y, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_y(z) = \sum_{k=1}^m f_k \chi_{\beta_k}(y) \chi_{\gamma_k}(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_y(z) dz = \sum_{k=1}^m f_k \chi_{\beta_k}(y) \mu_1(\gamma_k)$$

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}} f_y(z) dz - \text{ступенчатая из } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \implies \int_{\mathbb{R}} F(y) dy = \sum_{k=1}^n f_k \mu_1(\gamma_k) \mu_n(\beta_k) = \sum_{k=1}^n f_k \mu_{n+1}(\alpha_k)$$

$$\text{положим что } \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy \left(\int_{\mathbb{R}} f_y(z) dz \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y, z) dz \right) dy$$

т.о мы определим интеграл для $\forall n$ ►

26.09.22

Замечание. $\square f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ тогда для любого хорошего отрезка $[a, b]$ верно равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)dx$
 $[a, b]$ - объединение конечных приращений

Теорема 2.1. $\square f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$$

Доказательство. $f = \sum_{i=1}^m f_i \chi_{\alpha_i}, g = \sum_{j=1}^k f_j \chi_{\beta_j}$

$$(\lambda f + \mu g) = \sum_{i=1}^m \mu f_i \chi_{\alpha_i} + \sum_{j=m+1}^{m+k} \mu g_{j-k} \chi_{\beta_{j-k}}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g)(x)dx = \sum_{i=1}^m \mu f_i \mu(\alpha_i) + \sum_{j=m+1}^{m+k} \mu g_{j-k} \mu(\beta_{j-k}) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx + \mu \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$$

►

Теорема 2.2. Если $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и $f(x) > 0$ для $\forall x \in \mathbb{R}^n$, то $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq 0$

Доказательство.

►

Лемма 2.4. $\square f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и $|f(x)| \leq L$ на \mathbb{R}^n , Пусть $P = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ такой, что $\forall x \notin P \implies f(x) = 0$, тогда

$$|\int_{\mathbb{R}^n} f| \leq L \mu_n(P) = L \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

Доказательство. База $n=1$, $|\int_{\mathbb{R}} f(x)dx| = |\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx| \leq L(b_1 - a_1)$

Переход $P_{n+1} = P_n \times P_1$ Проводя те же рассуждения, что и для определения интеграла

$$|\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f| = |\int_{\mathbb{R}} dz \int_{\mathbb{R}^n} f(y, z)dy| \leq |\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z)dy| |b_{n+1} - a_{n+1}| \leq L \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) (b_{n+1} - a_{n+1})$$

►

Теорема 2.3. $\{f_n\}$ убывающая последовательность функций определена на $[a, b] \subset \mathbb{R}$

если каждая $f_n(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f_n(x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ в основном, тогда $\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Доказательство. $\square, \Delta = [\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$F_n(\Delta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx$ функции отрезка

так как $\{f_n\}^\alpha$ убывает и $f_n \rightarrow 0$, $f_n \leq 0$ в основном, тогда $F_n(\Delta) \leq 0$

$$F_{n+1}(\Delta) \leq F_n(\Delta) \quad \forall n \forall \Delta$$

$\{f_n(\Delta)\}$ убывает, ограничена снизу $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\Delta) = F(\Delta) \geq 0$

Если Δ_1, Δ_2 - два отрезка, $\Delta_1 \cap \Delta_2$ состоит не более чем из 1 точки

это верно для F_n

$$F_n(\Delta_1 \cup \Delta_2) = F_n(\Delta_1) + F_n(\Delta_2)$$

$F_n(\Delta)$ непрерывные функции и $0 \leq F(\Delta) \leq F_n(\Delta)$

$F(\Delta)$ тоже непрерывна

M_0 - множество $x \in (a, b)$, что $f_n(x) \not\rightarrow 0$ не более чем счетно

$$\Delta F_n(x) = \lim_{\Delta \rightarrow x} \frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|}$$

ΔF_n в основном равно δ_n , $t \in (0, 1)$

$$\frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx}{\beta - \alpha} = \frac{(\beta - \alpha)f_n(\alpha + t(\beta - \alpha))}{\beta - \alpha} \rightarrow f_n(x)$$

$M_n = \{x \in (a, b) : \lim_{\Delta \rightarrow x} \frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|} \neq f_n(x)\}$ не более чем счетно

$M = M_0 \cup M_1 \cup \dots$ не более чем счетно

$x \in (a, b) \setminus M \quad f_n(x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \forall n > n_0 \implies f_n \leq \frac{\epsilon}{2}$

$x \in M \implies \Delta F_n(x) = f_n(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$ начиная с n_0

найдем $|\frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|} - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ начиная с n_0 $[\delta > 0, |\Delta| < \delta]$

$\frac{F_n(\Delta)}{|\Delta|} \leq f_n(x) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, то $F_n(\Delta) \geq F(\Delta) \implies 0 \leq \frac{F(\Delta)}{|\Delta|} < \epsilon$, если $|\Delta| < \delta \implies \Delta F(x) = 0 \quad \forall x \notin$

M

$$\begin{aligned}
& F(x) \text{ почти везде постоянна} \\
& F(\Delta) = 0 \text{ иначе } \frac{F(\Delta)}{|\Delta|} < \epsilon \text{ не верно} \\
& F(\Delta) = 0 \implies F([a, b]) = 0 \\
& F([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0
\end{aligned}$$

►

Теорема 2.4 (О пределе интегралов убывающей последовательности функций поточечно сходящейся к 0). $\square \{f_m\}$ убывающая последовательность функций из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ поточечно сходится к 0, тогда $\int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$

Доказательство. Индукция по n

База m = 1 => применяем предыдущую теорему

Переход \square это верно для m: $\{f_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m+1}), x = (y, z), x \in \mathbb{R}^{n+1}, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$

при фиксированном y определена ступенчатая функция

$$\begin{aligned}
F_m(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_m(y, z) dz \\
F_m(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_m(y, z) dz \geq \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(y, z) dz = F_{m+1}(y) \\
F_m(y) &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(y, z) dz = 0$$

$\{F_m\}$ к ним применить индукционное предположение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}} f_m(y, z) dz \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

►

2.2 Интеграл Лебега

$\square M$ — некоторое подмножество $\mathbb{R}^n, M \neq \emptyset$

\mathcal{F} — множество функций из M в $\mathbb{R} \quad \text{dom } \mathcal{F} = M$

$I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ функционал, т.е. для $\forall f \in \mathcal{F}$ определено число $I(f)$

Определение. (M, \mathcal{F}, I) система с интегрированием, если

1. R1 \mathcal{F} — лин пространство
2. R2 $f \in \mathcal{F}$, то $|f| \in \mathcal{F}$
3. R3 Функционал I линеен: $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$
4. R4 Если $f \in \mathcal{F}$ и $f \leq 0$ на M, то $I(f) \geq 0$
5. R5 Если $\{f_n\}$ послед. убывает $f_n(x) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty, \forall x \in M$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = 0$

Замечание. (M, \mathcal{F}, I) , система с интегрированием, тогда M — базисное, \mathcal{F} — множество основных или простых функций

$I(f)$ — интеграл от f по M

I интеграл системы

R1 — R5 аксиомы

Пример. $M = \mathbb{R}^n, \mathcal{F}$ — ступенчатая на \mathbb{R}^n

интеграл от f $I = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

Очевидно, что (M, \mathcal{F}, I) — система с интегрированием

Замечание. Если (M, \mathcal{F}, I) — система с интегрированием

$\forall f \in \mathcal{F}, f^+, f^- \in \mathcal{F}$

$$f^+ = \frac{f + |f|}{2} = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

$$f^- = \frac{-f+|f|}{2} \in \mathcal{F}$$

$$\max\{f, g\} = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq g(x) \\ g(x) & g(x) \leq f(x) \end{cases}$$

$$f, g \in \mathcal{F} \implies \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{F}$$

$$\min\{f, g\}(x) = (f - (f - g)^+)(x)$$

$$\max\{f, g\}(x) = (g + (f - g)^+)(x)$$

30.09.22

Лемма 2.5. Если f и g - простые функции и $f \leq g$, тогда $I(f) \leq I(g)$

Доказательство. $h = f - g \leq 0 \implies R4 \implies I(h) \leq 0$

$$I(h) = I(f) - I(g) \leq 0$$

Лемма 2.6. Если $f \in \mathcal{F}$, то $|I(f)| \leq I(|f|)$

Доказательство. $|I(f)| = |I(f^+ - f^-)| = |I(f^+) - I(f^-)| \leq |I(f^+)| + |I(f^-)| = I(f^+) + I(f^-) = I(f^+ + f^-) = I(|f|)$

Лемма 2.7. f и $\{f_n\} \in \mathcal{F}$, f_n возрастает

если для любых x из M $f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, то $I(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$

Доказательство. Т.к f_n возрастает, то $I(f_n)$ тоже возрастает, имеет предел (возможно ∞)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \sup_n I(f_n), V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$\{f - f_n\}$ убывает, $u_n = (f - f_n)^+$, u_n тоже убывает

Если $u_n(x) = 0 \implies (f - f_n)(x) < 0 \implies$

$$\forall m > n (f - f_m)(x) < 0 \implies u_m(x) = 0$$

Если $u_n(x) > 0 \implies (f - f_n)(x) > 0$

$$\forall m > n (f - f_m)(x) \leq (f - f_n)(x) \implies u_m = (f - f_m)^+ \leq u_n$$

$$f - f_n \leq u_n, \quad I(f - f_n) \leq I(u_n)$$

$$I(f) \leq I(f_n) + I(u_n)$$

$$V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq f(x) \implies f - v \leq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f - f_n)^+(x) = (f - v)^+(x) = 0$$

$\{u_n\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ применяем аксиому R5 $\implies \lim I(u_n) = 0$

$$\lim I(f) \leq \lim I(f_n) + \lim I(u_n)$$

$$I(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$$

2.2.1 L1-мера и ее свойства

(M, f, I) —система с интегрированием

$f : M \rightarrow \bar{R}$, положим $0^* \infty = 0$

$\sqsubset f : M \rightarrow \bar{R} \{f_n\}$ последовательность функций из M в R

Будем говорить, что $\{f_n\}$ - мажорирует f если

$$1. f_n \leq 0$$

$$2. \{f_n\} \text{ возрастает}$$

$$3. |f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \forall x \in M$$

Замечание. Если $f_n \in \mathcal{F}$ и $\{f_n\}$ возрастает, то $\{I(f_n)\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) - \exists$

Определение. $f : M \rightarrow \bar{R}, h \in \bar{R}$, будем говорить, что h - верхнее число функции f , если $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{F}$, кот. мажорирует f т.ч $h = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$
 $W(f)$ — множество всех верхних чисел для f

Определение. L_1 нормой f будем называть $\inf W(f)$ и обозначать
 $\|f\|_{L_1(M, F, I)}, \|f\|_{L_1(\Sigma)}, \|f\|_{L_1}$

Замечание. Если $W(f)$ пусто, т.е нет посл. мажорирующих f , то $\|f\|_{L_1} = \infty$

Замечание. $\|f\|_{L_1} \geq 0$

Определение. $L_1^*(\Sigma)$ множество всех функций т.ч $\|f\|_{L_1} \in \mathbb{R}$

Лемма 2.8. Если $f \in \mathcal{F}$, то $\|f\|_{L_1} = I(|f|)$

Доказательство. $\exists \{f_n\}$ произвольная мажорирующая последовательность $f |f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \implies I(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$
 $I(|f|) > \|f\|_{L_1} = \inf(\lim I(f_n))$
 Рассмотрим $f_n = |f|$ и $\forall n$ мажорирует функцию f
 $|f(x)| \leq f_n(x) = |f(x)|$
 $\lim I(f_n) = \lim I(|f|) = I(|f|)$ — верхнее число f
 $\|f\|_{L_1} \leq I(|f|)$ ►

Следствие. Если $f(x) \equiv 0$, то $\|f\|_{L_1} = 0$

Доказательство. $I(f) = I(0 * f) = 0I(f) = 0$ [$f(x) \in \mathcal{F}$]
 $I(f) = I(|f|) = \|f\|_{L_1}$ ►

Лемма 2.9. $\exists f$ — функция $f \in L_1^*(\Sigma), \alpha \in R$, тогда $\|\alpha f\|_{L_1} = |\alpha| \|f\|_{L_1}$

Доказательство. $\alpha \neq 0$
 Норма конечна $\implies \exists \{f_n\}$ который мажорирует f
 $\{|\alpha| f_n\}$ мажорирует αf
 $|\alpha f| \leq |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \implies$
 $\|\alpha f\|_{L_1} \leq |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) \implies \|\alpha f\|_{L_1} \leq |\alpha|$
 $\|f\|_{L_1}, g = \alpha f, \beta = 1/\alpha$
 $\|\beta g\|_{L_1} \leq |\beta| \|g\|_{L_1}$
 $\|f\|_{L_1} \leq \frac{1}{|\alpha|}, \quad \|\alpha f\|_{L_1} \geq |\alpha| \|f\|_{L_1}$
 Если $\alpha = 0$, тогда $\alpha f \equiv 0 \implies \|\alpha f\|_{L_1} = 0$
 $\alpha \|f\|_{L_1} = 0$ ►

Следствие. Для $\forall f$ функции $\|f\|_{L_1} = \| - f \|_{L_1}$

Следствие. $\|v - u\|_{L_1} = \|u - v\|_{L_1}$

Лемма 2.10 (Субаддитивность нормы L_1). $\exists f, \{f_n\}$ — функции $M \rightarrow \bar{R}$ для $\forall x \in M$ верно

$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$
 Тогда $\|f\|_{L_1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L_1}$

Доказательство. Будем считать, что $\|f_n\|_{L_1} < +\infty$
 $\exists \{f_n\}_m$ — последовательность функций из \mathcal{F} мажорирующих f
 $\lim_{x \rightarrow \infty} I(f_{n_m}) < \|f_n\|_{L_1} + \frac{\epsilon}{2^{n_m}}$
 $g_m = \sum_{j=1}^m f_{j_m}$
 $g_{m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} f_{j_{m+1}} \geq \sum_{j=1}^m f_{j_{m+1}} \geq \sum_{j=1}^m f_{j_m} = g_m$
 $f_{j_{m+1}} \geq f_{j_m}$

$$\begin{aligned}
g_m(x) &= \sum_{j=1}^m f_{j_m} \rightarrow \implies \text{верно при } m \leq 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} g_m(x) &\leq \sum_{j=1}^n |f_j(x)| \quad (|f_j| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} f_{j_m}) \\
\text{предел по } n &\rightarrow \infty \\
\lim_{n \rightarrow \infty} (g_m(x)) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| \geq |f(x)| \\
g_m &\text{ мажорирует } f \\
\{g_m\} &\subset \mathcal{F}, \quad \|f\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_m) \\
I(f_{n_m}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_m) < \|f_n\|_{L_1} + \frac{\epsilon}{2^n} \\
I(g_m) &= \sum_{j=1}^n I(f_{j_m}) < \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{L_1} + \epsilon(1 - \frac{1}{2^m}) \\
\lim_m (g_m) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L_1} + \epsilon \\
\|f\|_{L_1} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L_1} + \epsilon \\
\|f\|_{L_1} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L_1}
\end{aligned}$$

Следствие. $f_1, \dots, f_n, f : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ и $|f(x)| \leq \sum_{j=1}^n |f_j(x)|$
 $\forall x \in M$ то $\|f\|_{L_1} \leq \sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L_1}$
Следствие. Если $|f(x)| \leq |g(x)| \forall x \in M$, то $\|f\|_{L_1} \leq \|g\|_{L_1}$
Следствие. Для $\forall f, g$
 $\|f + g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}$ (неравенство для L1 нормы)
 $\|f\|_{L_1} \leq \|f - g\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}$
 $\|g\|_{L_1} \leq \|f - g\|_{L_1} + \|f\|_{L_1}$
Следствие. $\|f\|_{L_1} = \||f|\|_{L_1}$

Доказательство. $f \leq |f| \implies \|f\| \leq \||f|\|_{L_1}$
 $\|f\| \leq |f| \implies \||f|\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1}$

Следствие. $\||f|\|_{L_1} - \||g|\|_{L_1} \leq \|f - g\|_{L_1}$

Доказательство. $\|f - g\|_{L_1} \geq \|f\|_{L_1} - \|g\|_{L_1}$
 $\|f - g\|_{L_1} \geq \|g\|_{L_1} - \|f\|_{L_1}$
 $\|f - g\|_{L_1} \geq |\|f\|_{L_1} - \|g\|_{L_1}|$

03.10.22 $\Sigma = (M, \mathcal{F}, I)$ – система с интегралом

Определение. $\{f_n\}$ последовательность всюду определенных функций на M , $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$
 f_n сходится к f в смысле L1 нормы, Если

1. $\forall n \|f_n = f\|_{L_1} < +\infty$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_1} = 0$

Определение. $f : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ интегрируема, если $\exists \{f_n\} \subset \mathcal{F}$
 $f_n \rightarrow_{L_1} f$

Определение. Множество всех интегрируемых функций: $L_1(\Sigma)$ или L_1

Замечание. f, g, h - функции на M , причем g, h всюду конечна $\implies \forall x |g(x) - h(x)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - h(x)|$

Доказательство. 1. $f(x)$ - конечно, то верно (неравенство треугольника)

2. $f(x) = \infty \implies \|g - h\|_{L_1} \leq \|g - f\|_{L_1} + \|f - h\|_{L_1}$

Лемма 2.11. $f \in L_1(\Sigma) \implies \exists \lim_{g: \|f-g\|_{L_1} \rightarrow 0} I(g) < +\infty$

Доказательство. 1. $g, h \in \mathcal{F} \implies |I(g) - I(h)| = |I(g - h)| \leq I(|g - h|) = \|g - h\|_{L^1} \leq \|g - f\|_{L^1} + \|f - h\|_{L^1}$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta (|g - f| < \delta \implies \|f - g\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}) \implies |I(g) - I(h)| < \epsilon \implies$ по критерию Коши $I(g)$ имеет предел

$$I^*(f) = \lim_{g: \|g-f\|_{L^1} \rightarrow 0} I(g)$$

$$\text{Если } f \in \mathcal{F} \implies |I(g) - I(f)| \leq \|f - g\|_{L^1} \rightarrow 0 \implies \lim_{g: \|g-f\|_{L^1} \rightarrow 0} I^*(f) = I(f) = I^*(f)$$

$$\forall f \in \mathcal{F} (I^*(f) = I(f))$$

Замечание. $\forall f_n \subset \mathcal{F} (\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty))$ и $f \in L^1(\Sigma) \implies I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$

Лемма 2.12. $f_n, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ и $\exists c > 0 : |f_n| \leq c$ и $f_n \rightarrow f [n \rightarrow \infty, L^1], f : M \rightarrow \mathbb{R} \implies$

$$1. \|f\|_{L^1} = +\infty \implies \forall n \|f_n\|_{L^1} = +\infty$$

$$2. \|f\|_{L^1} < +\infty \implies \|f\|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^1}$$

$$3. \forall \alpha \in \mathbb{R} \alpha f_n \xrightarrow{L^1} \alpha f$$

$$4. |f_n| \xrightarrow{L^1} |f|$$

Доказательство. $\|f\|_{L^1} \leq \|f - f_n\|_{L^1} + \|f_n\|_{L^1} \implies \|f_n\|_{L^1} = +\infty$

$$\| \|f\|_{L^1} - \|f_n\|_{L^1} \| \leq \|f - f_n\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f\|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^1}$$

$$\| \alpha f_n - \alpha f \|_{L^1} = |\alpha| \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0 \implies \alpha f_n \xrightarrow{L^1, n \rightarrow \infty} \alpha f$$

$$\| |f_n(x)| - |f(x)| \| \leq \|f_n(x) - f(x)\| \implies \| |f_n| - |f| \| \leq \|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies |f_n| \xrightarrow{L^1} |f|$$

Лемма 2.13. $f_n, f_n \xrightarrow{L^1} f, g_n, g_n \xrightarrow{L^1} g \implies \{f_n + g_n\} : f_n + g_n \xrightarrow{L^1} f + g$

Доказательство. $\forall x \in M |f_n(x)g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \implies \|f_n + g_n - f - g\|_{L^1} \leq \|f_n - f\|_{L^1} + \|g_n - g\|_{L^1}$

Теорема 2.5. 1. $\forall (f \in L^1(\Sigma) \implies \alpha f \in L^1(\Sigma) : I(\alpha f) = \alpha I(f))$

$$2. (f, g \in L^1(\Sigma) \implies f + g \in L^1(\Sigma) : I(f + g) = I(f) + I(g))$$

Доказательство. $f \in \mathcal{F} \implies I^*(f) = I(f)$

применяем лемму

$$\text{Следствие. } (f, g \in L^1(\Sigma) \text{ and } f \geq g) \implies (I(f) \geq I(g))$$

Резюме:

$$\Sigma = (M, \mathcal{F}, I)$$

определена L^1 норма на всех функциях из M

$$f_n \subset \mathcal{F} \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n =^{L^1} f$$

$$I^*(f) = \lim I(f_n) \text{ (если есть пробел)}$$

Замечание. $\Sigma = (M, \mathcal{F}, I)$ —система с интегрированием

Определение. $\phi(x)$ мажорирует $f(x)$, если $\phi(x) \geq |f(x)|$

Определение. $\|f\|_{\mathbb{R}} = \inf_{\phi \in \mathcal{F}, \phi \geq |f|} (I(\phi))$ есть норма Римана

Определение. f интегрируема в смысле Римана, если $\exists f_n \subset \mathcal{F}$ т.ч. $f_n \rightarrow^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}}} f, I^*(f) = \lim I(f_n)$

Замечание. для нормы Римана не выполнено свойство субаддитивности

2.2.2 Свойства, выполненные почти всюду

Определение. $f : M \rightarrow \bar{R}$ называется пренебрежимой, если $\|f\|_{L_1} = 0$

Определение. $E \subset M$ называется пренебрежимым (множеством меры 0), если χ_E суть пренебрежимая функция

Замечание. \emptyset —множество меры 0, так как индикатор тождественно равен нулю, как и мера L_1

Замечание. $(R^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n})$ в любое одноточечное множество пренебрежимо.

Доказательство. $E = \{p\}$

E_r —двоичный куб, содержащий p , ребро - r

$$\|\chi_E\|_{L_1} \leq \|\chi_{E_r}\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_r}(x) dx = \frac{1}{(2r)^n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

►

Теорема 2.6. $\|f\|_{L_1} < +\infty \implies \mu(\{x|f(x) = \infty\}) = 0$

Доказательство. 1. $E = \{x|f(x) = +\infty\}$

$$2. \forall n \in \mathbb{N} (0 \leq n\chi_E(x) \leq |f(x)|) \implies \forall n \|n\chi_E\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \implies \forall n \|\chi_E\|_{L_1} \leq \frac{1}{n} \|f\|_{L_1} < +\infty \implies \|\chi_E\|_{L_1} = 0$$

►

Лемма 2.14. $f : M \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, S(f) = \{x|f(x) \neq 0\}$

f - пренебрежима тогда и только тогда, когда $S(f)$ меры 0

Доказательство. 1. $f_n = |f| \implies |\chi_{S(f)}(x)| = \chi_{S(f)}(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$$x \notin S(f) \implies 0 \leq 0, ok$$

$$x \in S(f) \implies \chi_{S(f)}(x) = 0 \vee \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f| = +\infty \implies \text{по свойству субаддитивности} \|\chi_{S(f)}\| \leq \|f_n\|_{L_1}$$

$$f \text{ - пренебрежима} \implies \|f\|_{L_1} = 0 \implies \| |f| \|_{L_1} = \|f\| = 0 \implies \|\chi_{S(f)}\| = 0, \text{т.е } S(f) \text{ имеет меру } 0$$

2. $S(f)$ имеет меру 0

$$f_n(x) = \chi_{S(f)}(x) \implies \|f(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$\|f\|_{L_1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L_1} = 0 \implies \|f\|_{L_1} = 0$$

►

Замечание. $f, g : M \rightarrow \bar{R} (f = g \text{ почти всюду}) \implies \|f\|_{L_1} = \|g\|_{L_1} \wedge \|f - g\|_{L_1} = 0 \wedge f \in \mathcal{L}_1(\Sigma) \implies g \in \mathcal{L}(\Sigma) : I(f) = I(g)$

Доказательство.

$$h(x) = \begin{cases} 0 & f(x) = g(x) \\ +\infty & f(x) \neq g(x) \end{cases}$$

$$\|h\|_{L_1} = 0$$

$$|f(x)| \leq |g(x) + h(x)| \wedge |g(x)| \leq |f(x) + h(x)|, \quad |f(x)| \leq |g(x)| + |h(x)|$$

$$\implies \|f\|_{L_1} \leq \|g\|_{L_1} + \|h\|_{L_1} = \|g\|_{L_1}, \quad \text{аналогично } \|g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \implies \|f\|_{L_1} = \|g\|_{L_1}$$

$$\{f_n\} \subset \mathcal{F} : f_n \xrightarrow{L_1}_{n \rightarrow \infty} f$$

$$f_n - f \text{ и } f - g \text{ совпадают почти всюду} \implies \|f - f_n\|_{L_1} = \|g - f_n\|_{L_1} \implies f_n \xrightarrow{L_1}_{n \rightarrow \infty} g \implies g \in \mathcal{L}_1 \Sigma \wedge I(f) = I(g)$$

►

07.10.22

Замечание. Если f интегрируемая функция, то при изменении значения функции f на множестве меры 0, то $\|f\|_{L1}$ на $I(f)$ не изменяется

Лемма 2.15. Если A - множество меры 0, и $E \subset A$ то E - множество меры 0
Пусть $E_1 \dots E_n$ - множества меры 0, тогда их объединение - множество меры 0.

Доказательство. $\|\chi_A\|_{L1} = 0, E \subset A \implies |\chi_E| \leq |\chi_A| \implies \|\chi_E\|_{L1} \leq \|\chi_A\|_{L1} = 0$
 $|\chi_E| = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}, \quad \|\chi_E\|_{L1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\chi_{E_n}\|_{L1} = 0$ ►

Замечание. любое не более чем счетное подмножество \mathbb{R} имеет меру \mathbb{R}

Пример. $D(x) = 1, x \in Q; 0, x \notin Q, \|D\|_{L1} = 0$, тк мера Q равна 0

Следствие. Если $\{P_n(X)\}$ - семейство условий, верных почти всюду, тогда почти всюду выполняются все $\{P_n\}$

Доказательство. E_n - множество тех x : $P(x)$ верно.

объединение E_n - множество тех x , что кто-то из P_n не выполнен. Мера E_n равна 0 \implies мера объединения E_n равна 0 ►

Теорема 2.7. Если f почти всюду определена и интегрируема, то f^+, f^- тоже всюду интегрируемы.

Если еще и g почти всюду определена и интегрируема, то $\max f, g$ и $\min f, g$ также интегрируемы

Доказательство.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если } f(x) \text{ определена} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$f = \tilde{f}$ почти всюду $\implies \tilde{f}$ интегрируема и $I(f) = I(\tilde{f})$

$f^+ = \tilde{f}^+$ почти всюду, аналогично с минусом

Но \tilde{f}^+ и $\tilde{f}^- \implies f^+$ и f^- интегрируемы

$\max\{f, g\}(x) = (g + (f - g)^+)(x)$ - интегрируема ►

2.2.3 Пример системы с интегрированием

Пусть $[a, b] \in \bar{R}, \omega : [a, b] \rightarrow R, \omega$ положительна и интегрируема на $(a, b), M = [a, b]$

$f : M \rightarrow \bar{R}$ - финитная, если $\exists [c, d] \subset M$ т.ч. $\forall x \notin [c, d] f(x) = 0$

\mathcal{F} - множество всех непрерывных, финитных функций, это линейное пространство $\implies R1, R2$ верна

Положим, $I(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$

Очевидно, что I - линейный и $I(f) \geq 0$ если $f \geq 0 \implies R3, R4$ верны

Пусть $\{f_n\}$ убывающая последовательность функции

$0 \leq f_n \leq f_1$ все f_n равны 0 все отрезка $[c, d]$, все которых $f_1 = 0$

т.к. $f_n(x) \rightarrow 0$ и $[c, d]$ конечен $\implies f_n \rightrightarrows 0$

$\int_a^b f_n(x)\omega(x)dx = \int_c^d f_n(x)\omega(x)dx \leq \int_c^d \omega(x)dx = \sup_{x \in [c, d]} f_n \rightarrow 0$ т.к. $f_n \rightrightarrows 0 \implies$

$0 \leq \int_a^b f_n(x)\omega(x)dx \leq 0 \implies R5$ верно

(M, \mathcal{F}, I) - система с интегрированием

Интеграл в этой системе называется интегралом Лебега относительно веса ω (Лебега-Стилтьеса)

В частности, можно взять вместо $[a, b] = \bar{R}, \omega = 1$

Замечание. В этой системе функция Дирихле интегрируема и $I(D) = 0$

2.3 Теорема о предельном переходе над знаком интеграла

(M, \mathcal{F}, I) - система с интегрированием

Замечание. Если f совпадает с g почти всюду и существуют их L_1 нормы, то они равны.

Это позволяет определить L_1 -норму для функций, определенных почти всюду.

Лемма 2.16. Пусть $f : M \rightarrow R$ определена почти всюду

$\{f_n\}$ последовательность интегрируемых функций, такая, что $\|f - f_n\|_{L_1} \rightarrow 0$ (сходится в смысле нормы l_1) $n \rightarrow \infty$

Тогда f интегрируема и $I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$

Доказательство. Можно считать, что f и f_n всюду определены и конечны.

Для любого $n \exists g_n \in \mathcal{F} : \|f_n - g_n\|_{L_1} \leq \frac{1}{n}$

$\|f - g_n\|_{L_1} \leq \|f - f_n\|_{L_1} + \|f_n - g_n\|_{L_1} \leq \|f - f_n\|_{L_1} + \frac{1}{n} (\|f - f_n\|_{L_1} \rightarrow 0)$

$\implies g_n$ сходится к $f \implies$

f - интегрируема и $I(f) = \lim I(g_n) = \lim I(f_n)$ ►

Определение. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ - функциональный ряд. Будем говорить, что ряд сходится нормально, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L_1}$

Теорема 2.8. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ - нормально сходящийся ряд определенных почти всюду функций, для почти всех x из M $f_n(x)$ определены для каждого n

Кроме того, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится

Если $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, тогда

$\|F - \sum_{k=1}^n f_k\|_{L_1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{L_1}$

Если все f_n интегрируемы, то F - интегрируема и $I(F) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$

Доказательство. Пусть $E_n = \{x \in M : f_n \text{ не определено}\}$

E_n имеет меру ноль, их объединение имеет меру 0

Тогда для любого x не из E все $f_n(x)$ определены

$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \implies \|\Phi(x)\|_{L_1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L_1} < \infty$

Множество всех x : $\Phi(x) = \infty$ имеет меру 0 $\implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится почти всюду $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится почти всюду

Положим $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ если сходится, 0, иначе.

$R_n(x) = F(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$

$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \implies \|R_n\|_{L_1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{L_1} \rightarrow 0 \implies \|R_n\|_{L_1} \rightarrow 0$

пусть все f_n интегрируемы, $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$, F_n интегрируемы

И по первой части $\|F - F_n\|_{L_1} \rightarrow 0$

F - интегрируема

$I(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n I(f_j) = \sum_{k=1}^{\infty} I(f_k) \quad (\|I(f_k)\| \leq \|f_k\|_{L_1})$ ►

Следствие. Теорема Леви для функциональных рядов

Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функциональный ряд, и все f_n неотрицательные и интегрируемые, тогда если сходится $\sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$, то для почти всех x определена $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и

F - интегрируема, $I(F) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$

Доказательство. т.к f_n неотрицательна, то $f_n = |f_n|$ и $\|f_n\|_{L_1} = \||f_n|\|_{L_1} = I(|f_n|) = I(f_n) \implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится нормально, применяем теорему, все хорошо ►

Следствие. (Теорема Леви для последовательностей)

Пусть $\{f_n\}$ последовательность функций, интегрируемых и определенных почти всюду (за исключением множества E меры 0)

$f_n(x)$ монотонна для всех x , кроме x из E

Тогда если $I(f_n)$ ограничена, то почти для всех x из M определена $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, причем f - интегрируема и $I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$

Доказательство. пусть f_n возрастает, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1}(x) - f_n(x)$ состоит из положительных функций

$$\forall n \sum_{k=1}^n (f_{k+1}(x) - f_k(x)) = f_{n+1}(x) - f_1(x)$$

$$\sum_{k=1}^n I(f_{k+1} - f_k) = I(f_{n+1}) - I(f_1) - \text{ограничена}$$

$$|I(f_n)| < A \implies \sum_{k=1}^n I(f_{k+1} - f_k) - \text{ограничена и возрастает по } n \implies \sum_{k=1}^n I(f_{k+1}) - I(f_1)$$

Применяем теорему Леви для рядов

$$f_{n+1}(x) - f_1(x) - \text{определена почти для всех } x \text{ и}$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1}(x) - f_1(x)$$

$$G(x) = \lim \sum_{k=1}^n (f_{k+1} - f_k(x)) = \lim (f_{n+1}(x) - f_1(x)) = \lim f_n(x) - f_1(x) \implies f(x) = \lim f_n(x) = G(x) + f_1(x)$$

$$I(G) = \lim \sum_{k=1}^n I(f_{k+1} - f_k) = \lim I(f_{n+1}) - I(f_1)$$

$$\lim I(f_n) = I(G) + I(f_1) = I(f) \quad \blacktriangleright$$

Определение. $\{f_n\}$ последовательность функций, определенных почти всюду в M , тогда почти всюду определены функции $g(x) = \inf f_n(x)$, $h(x) = \sup f_n(x)$

$g(x)$ - нижняя огибающая последовательности f_n , а $h(x)$ - верхняя огибающая последовательности

Лемма 2.17. Для любого множества E верны равенства

$$\sup_{x \in E} (-f(x)) = -\inf_{x \in E} (f(x))$$

$$\inf_{x \in E} (-f(x)) = -\sup_{x \in E} (f(x))$$

Доказательство. Докажите сами ▶

не хочу 21.10.22