Рассмотрим $f : X \to Y$, где $X = \mathbb{R}$ с дискретной топологией и $Y = \mathbb{R}$ с естественной на числовой прямой топологией. $f = id$. f – биекция.

61 Решить интегральные уравнения:

$$x(t) = \mu \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + t^2, \quad x(t) = \mu \int_0^1 t^m s^n x(s) ds + t^k$$

Ядра обоих интегральных уравнений вырождены.

(a)

$$e^{t-s} x(s) = (e^t)(e^{-s} x(s))$$

$$x(t) = \mu e^t \int_0^1 e^{-s} x(s) ds + t^2$$

Пусть $C = \int_0^1 e^{-s} x(s) ds$. Тогда:

$$x(t) = C\mu e^t + t^2$$

$$C = \int_0^1 e^{-s}(\mu e^s C + s^2) ds = \mu C + \int_0^1 s^2 e^{-s} ds = \mu C + e - 2$$

$$C = \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - \mu}$$

$$x(t) = \mu \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - \mu} e^t + t^2, \text{при } \mu = 1 \text{уравнение неразрешимо.}$$

(b)

$$x(t) = \mu \int_0^1 t^m s^n x(s) ds + t^k$$

$$C = \int_0^1 s^n x(s) ds$$

$$x(t) = \mu C t^m + t^k$$

$$C = \int_0^1 s^n (\mu C s^m + s^k) ds = \mu C \int_0^1 s^{n+m} ds + \int_0^1 s^{k+n} ds = \frac{\mu C}{n + m + 1} + \frac{1}{k + n + 1}$$

$$C = \frac{n + m + 1}{(k + n + 1)(n + m + 1 - \mu)}$$

$$x(t) = \frac{\mu(n + m + 1) t^m}{(k + n + 1)(n + m + 1 - \mu)} + t^k$$

при $\mu = m + n + 1$ уравнение неразрешимо.

62 Решить интегральные уравнения:

$$x(t) = \mu \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds + 2\sin t, \quad x(t) = \int_0^t e^{t-s}x(s)ds + t + 1$$

(a)

$$x(t) = \mu \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds + 2\sin t$$

$$\cos(t+s) = \frac{e^{-is-it} + e^{is+it}}{2} = \frac{e^{-is}e^{-it} + e^{is}e^{it}}{2}$$

$$x(t) = \frac{\mu}{2}\int_0^\pi e^{-is}e^{-it}x(s)ds + \frac{\mu}{2}\int_0^\pi e^{is}e^{it}x(s)ds + 2\sin t$$

$$C_1 = \int_0^\pi e^{-is}x(s)ds, C_2 = \int_0^\pi e^{is}x(s)ds$$

$$x(t) = \frac{\mu}{2}C_1e^{-it} + \frac{\mu}{2}C_2e^{it} + 2\sin t$$

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^\pi e^{-is}(\frac{\mu}{2}C_1e^{-is} + \frac{\mu}{2}C_2e^{is} + 2\sin s)ds \\ C_2 = \int_0^\pi e^{is}(\frac{\mu}{2}C_1e^{-is} + \frac{\mu}{2}C_2e^{is} + 2\sin s)ds \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^\pi \frac{\mu}{2}C_1e^{-2is} + \frac{\mu}{2}C_2 + 2e^{-is}\sin sds \\ C_2 = \int_0^\pi \frac{\mu}{2}C_1 + \frac{\mu}{2}C_2e^{2is} + 2e^{is}\sin sds \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\mu}{2}C_2\pi + \int_0^\pi \frac{\mu}{2}C_1e^{-2is} + 2e^{-is}\sin sds \\ C_2 = \frac{\mu}{2}C_1\pi + \int_0^\pi \frac{\mu}{2}C_2e^{2is} + 2e^{is}\sin sds \end{cases}$$

$$\sin s = i\frac{e^{-is} - e^{is}}{2}, e^{-is}\sin s = i\frac{e^{-2is} - 1}{2}, e^{is}\sin s = i\frac{1 - e^{-2is}}{2}$$

$$2\int_0^\pi e^{-is}\sin sds = -i\pi, 2\int_0^\pi e^{is}\sin sds = i\pi$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\mu}{2}C_2\pi - i\pi \\ C_2 = \frac{\mu}{2}C_1\pi + i\pi, \end{cases} \quad C_1 = -\frac{2i\pi}{2+\mu\pi}, C_2 = \frac{2i\pi}{2+\mu\pi}$$

$$x(t) = -\frac{\mu i\pi}{2+\mu\pi}e^{-it} + \frac{\mu i\pi}{2+\mu\pi}e^{it} + 2\sin t = \frac{\mu i\pi}{2+\mu\pi}2i\sin t + 2\sin t = \frac{4\sin t}{2+\mu\pi}$$

(b)

$$x(t) = \int_0^t e^{t-s}x(s)ds + t + 1$$

$$x'(t) = \int_0^t e^{t-s}x(s)ds + 1 + x(t)$$

$$x'(t) - x(t) = x(t) - t$$

$$x'(t) - 2x(t) = -t$$
$$x(t) = Ce^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

Значение константы найдем из начального условия $x(0) = 1$:

$$1 = C + \frac{1}{4}$$
$$C = \frac{3}{4}$$
$$x(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

63 Сведением к дифференциальному уравнению решить уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t \cos(t-s)x(s)ds = \sinh t$$
$$\cosh t = \int_0^t \sin(t-s)x(s)ds + \cos(0)x(t)$$
$$\sinh t = -\int_0^t \cos(t-s)x(s)dx + x'(t)$$
$$x'(t) = 2\sinh t$$
$$x(t) = 2\cosh t + c$$

Начальное условие определяем из $\int_0^0 \sin(0-s)x(s)ds + x(0) = \cosh(0) = 1$

$$x(0) = 2\cosh(0) + c = 1$$
$$c = -1$$
$$x(t) = 2\cosh(t) - 1$$