

# Содержание

<b>1</b>	<b>Вероятностное пространство</b>	<b>1</b>
1.1	Свойства $P$ из учебника . . . . .	2
1.2	Некоторые следствия аксиоматики . . . . .	4
1.2.1	Индикатор . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Условные вероятности и независимость</b>	<b>5</b>
2.1	Формулы Байеса . . . . .	5
2.2	Независимость событий . . . . .	6
2.3	Независимость разбиений, алгебр/ $\sigma$ -алгебр . . . . .	6
2.4	Независимые испытания . . . . .	7
2.4.1	Схема Бернулли . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Случайные величины</b>	<b>8</b>
3.1	Примеры законов распределения . . . . .	8
3.2	Свойства мат. ожидания . . . . .	8
3.3	Свойства дисперсии . . . . .	9
3.4	Джентльменский набор . . . . .	9
3.5	Многомерные законы распределения . . . . .	10
3.6	Независимость случайных величин . . . . .	10
3.7	Евклидово пространство случайных величин . . . . .	10
3.8	Условные математические ожидания . . . . .	11
3.9	Неравенство Чебышева. Закон больших чисел . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Случайные величины (общий случай)</b>	<b>13</b>
4.1	Примеры дискретных распределений . . . . .	13
4.2	Свойства . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Математическое ожидание</b>	<b>14</b>
5.1	Свойства мат. ожидания . . . . .	14
5.2	Джентльменский набор абсолютно непрерывных распределений . . . . .	14
5.3	Правила для вычисления . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Производящие функции</b>	<b>15</b>
6.1	Джентльменский набор . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Характеристические функции</b>	<b>16</b>
7.1	Абсолютно непрерывный случай . . . . .	19

## 1 Вероятностное пространство

**Определение (Алгебра).** Семейство  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Omega$  называется алгеброй, если выполнены след. аксиомы:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A} \implies \bar{A} \in \mathcal{A}$
3. (аддитивность)  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$

Т.е алгебра является замкнутой относительно замыкания и объединения

**Определение ( $\sigma$ -алгебра).** Алгебра называется  $\sigma$ -алгеброй, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

**Определение (мера).**  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0; \infty)$  - мера, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j : \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{счетная аддитивность}$$

Мера конечная, если  $\mu(\Omega) < \infty$

Мера вероятностная, если  $\mu(\Omega) = 1$

Короче говоря, вероятностная мера:

1. неотрицательность
2. нормированность
3. счетная аддитивность (иногда счетная аддитивность заменяется на аддитивность и непрерывность)

## 1.1 Свойства P из учебника

1.  $A \subseteq B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \geq 0$

представить B как  $B = A + (B \setminus A)$ ,

2.  $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

3.  $\forall A \in \mathcal{A} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

4.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

5.  $P(\emptyset) = 0$

6. Конечная аддитивность (следует из счетной)

- 7.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

- 8.

$$B_k = A_k \setminus (A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_{k-1}) \implies \bigcup_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n B_k \implies P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\sum_{k=1}^n B_k\right) |P(B_k) \leq P(A_k)|$$

- 9.

$$\forall A, B \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

раздробить объединение через минус + аддитивность + 1 свойство

**Определение (Вероятностное пространство).** Тройка  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , где

1.  $\Omega$  - пространство элементарных событий;
2.  $\mathcal{A}$  -  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$  (события);
3.  $P$  - вероятностная счетно-аддитивная мера на  $\mathcal{A}$  (вероятность); называется вероятностным пространством.

Все элементарные исходы равновозможны

1. Размещение (упорядоченный набор)  $A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$
2. Перестановка (частный случай размещения при  $N = n$ )
3. Сочетание (подмножество)  $C_N^n = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

**Определение (Классическая вероятность).** Модель вероятностного пространства ( $A$  - событие)

2.  $\mathcal{A}$  все подмножества  $\Omega$

$$3. P(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1.  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  - конечное пространство

**Определение** (Геометрическая вероятность).  $V \in \mathbb{R}^n$

1.  $\Omega = V$
2.  $\mathcal{A}$  - борелевская  $\sigma$ -алгебра (минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все компакты) подмножеств  $V$
3.  $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(V)}$

## 1.2 Некоторые следствия аксиоматики

1.

**Аксиома** (Аксиома непрерывности). Если  $A_1 \supset A_2, \dots, \supset A_n \supset \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

*Доказательство.* Пусть  $B_n \downarrow \emptyset$ . Тогда обозначим  $A_n = B_n \setminus B_{n+1}, n = 1, \dots, \dots A_n$  попарно несовместны и

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k,$$

поэтому из счетной аддитивности меры следует сходимость ряда

$$P(B_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

и сумма остатка ряда

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

►

2. (Формула включений и исключений)

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

*Доказательство.* Выводится через обычную формулу включений и исключений для множеств по индукции

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

+

$$\begin{cases} A \cup B = A + (B \setminus AB) \\ \text{Счетная аддитивность} \\ P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) \text{ (также по счетной аддитивности)} \end{cases}$$

►

### 1.2.1 Индикатор

**Определение.** Индикатор события  $A$  - это функция  $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

#### Свойства индикатора

1.  $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
2.  $I_{A_1 \cap A_2} = I_{A_1} I_{A_2}$
3.  $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - I_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n} = 1 - I_{\bar{A}_1} \dots I_{\bar{A}_n} = 1 - (1 - I_{A_1}) \dots (1 - I_{A_n})$

## 2 Условные вероятности и независимость

**Определение** (Условная вероятность). Пусть  $P(B) > 0$ . Условной вероятностью  $P(A|B)$  события А при условии, что произошло событие В (или просто: при условии В), назовем отношение

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Применяется также обозначение  $P_B(A)$

**Теорема 2.1** (Теорема умножения). Пусть события  $A_1, \dots, A_n$  таковы, что  $P(A_1, \dots, A_{n-1}) > 0$ . Тогда

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1, \dots, A_{n-1}}(A_n)$$

*Доказательство.* Из условия теоремы вытекает, что существуют все условные вероятности из формулы.

База индукции  $P(AB) = P(B)P_B(A)$ .

Переход:  $B = A_1, \dots, A_{n-1}, A = A_n$ , применим формулу выше ►

**Определение** (Разбиение). Систему событий  $A_1, \dots, A_n$  будем называть конечным разбиением (в дальнейшем - просто разбиением), если они попарно несовместны ( $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$ ) и

$$A_1 + \dots + A_n = \Omega$$

**Теорема 2.2** (Формула полной вероятности). Если  $A_1, \dots, A_n$  - разбиение и все  $P(A_k) > 0$ , то для любого события В имеет место формула

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

*Доказательство.*

$$B = B\Omega = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$$

сумма попарно несовместных событий. Тогда

$$P(B) = P(B\Omega = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n) = \sum_{k=1}^n P(BA_k)$$

$$P(BA_k) = P(A_k)P_{A_k}(B) = P(A_k)P(B|A_k)$$
►

### 2.1 Формулы Байеса

**Теорема 2.3** (Формулы Байеса). Если  $A_1, \dots, A_n$  - разбиение и все  $P(A_k) > 0$ , то для любого события В ( $P(B) > 0$ ) имеют место формулы:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

*Доказательство.*

$$P(A_k B) = P(A_k)P(B|A_k) = P(B)P(A_k|B) \implies P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)}$$

Применяем к  $P(B)$  формулу полной вероятности. ►

1.  $P(A_k)$  - априорные вероятности (до опыта)
2.  $P(A_k|B)$  - апостериорные вероятности (после опыта)

## 2.2 Независимость событий

**Определение** (независимость 2 событий).  $A$  и  $B$  - независимы, если

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

иначе зависимы

**Определение** (независимость  $n$  событий (в совокупности)).  $A_1, \dots, A_n$  называются независимыми, если для любых  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n, 2 \leq m \leq n$

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_m}),$$

иначе зависимы.

**Теорема 2.4.** Если  $A_1, \dots, A_n$  независимы,  $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$  - индексы все различные, вероятность  $P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) > 0$ , тогда

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} | A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{j_1} \dots A_{j_s})$$

*Доказательство.*  $A_1, \dots, A_n$  независимы, поэтому

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_r})$$

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s}) = P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_s})$$

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_r}) P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_s})$$

поэтому

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} \cap A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) \times P(A_{j_1} \dots A_{j_s})$$

+ формула условной вероятности ►

## 2.3 Независимость разбиений, алгебр/ $\sigma$ -алгебр

**Определение** (Порожденная алгебра).  $\gamma$  - система множеств. Наименьшая алгебра множеств  $\mathcal{A}(\gamma)$ , содержащая  $\gamma$ , называется **алгеброй, порожденной системой**  $\gamma$ .

**Определение** (Порожденная  $\sigma$ -алгебра). Аналогично.

*Замечание.* Алгебра, порожденная разбиением, является конечной, состоит из пустого множества и множеств вида

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \dots A_{i_m}$$

**Теорема 2.5.** Каждая конечная алгебра множеств порождается некоторым разбиением

*Доказательство.*  $\mathcal{B}$  - конечная алгебра событий. Обозначим  $\mathcal{B}_w$  - совокупность событий  $B$  из  $\mathcal{B}$ , для которых  $w \in B$ .

Для каждого  $w \in \Omega$  введем  $B_w = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_w} B$

Покажем, что для двух  $\omega \neq \omega'$

$$\begin{cases} B_w = B_{w'} \\ B_w \cap B_{w'} = \emptyset \end{cases}$$

Для любых  $\omega \in \Omega$  и  $B \in \mathcal{B}$  истинно свойство: если  $\omega \in B$ , то  $B_w \subseteq B$  (т.к.  $B_w$  - пересечение всех таких  $B$  из алгебры, в которых лежит  $\omega$ )

Пусть теперь  $\omega \in B_{w'}$ , тогда  $B_w \subseteq B_{w'}$  (транзитивность  $B_w \subseteq B \subseteq B_{w'}$ )

Далее если  $\omega' \in B_w$ , то  $B_{w'} \subseteq B_w$  и, следовательно,  $B_{w'} = B_w$

Случай  $\omega' \in \overline{B_w}$  невозможен, так как противоречие  $B_{w'} \subseteq \overline{B_w}$  (а уже было доказано, что  $B_w \subseteq B_{w'}$ )

Выберем среди  $B_w$  разные множества  $B_1, \dots, B_r$ . Это разбиение, т.к.  $B_1 + \dots + B_r = \Omega$  и  $B_i B_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

Так как  $\forall B \in \mathcal{B}$  представимо в виде  $B = \bigcup_{\omega \in B} B_w$ , то это разбиение порождает алгебру  $\mathcal{B}$ . ►

**Определение** (Независимые разбиения).  $\alpha_k : A_{k1} + \dots + A_{kr_k} = \Omega, k = 1, \dots, n$  независимые, если для любых  $i_k, 1 \leq i_k \leq r_k, k = 1, \dots, n$

$$P(A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n}) = P(A_{1i_1}) P(A_{2i_2}) \dots P(A_{ni_n})$$

По-русски: есть  $n$  разбиений, они могут быть разной мощности. Берем по любому событию из каждого разбиения. (всего получается  $n$  событий) (то есть вариантов формулы всего  $|\alpha_1| \times \dots \times |\alpha_n|$ )

**Определение** (Независимые алгебры ( $\sigma$ -алгебры)).  $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}$  - независимы, если  $\forall A_i \in \mathcal{A}$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

**Теорема 2.6.** Конечные алгебры  $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}$  независимы тогда и только тогда, когда независимы порождающие их разбиения  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Разбиение есть подсистема порожденной алгебры. Из независимости алгебр следует независимость разбиений.

**Лемма 2.1.** 1. Если события  $A$  и  $B$  независимы, то  $\bar{A}$  и  $B$  также независимы

2. Если  $A_1$  и  $B$  независимы и  $A_2$  и  $B$  независимы, а  $A_1 A_2 = \emptyset$ , то  $A_1 + A_2$  и  $B$  независимы.

*Доказательство.* 1.  $A$  и  $B$  независимы, тогда

$$P(B\bar{A}) = P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$$

2.  $A_i$  и  $B$  независимы:  $P(A_i B) = P(A_i)P(B)$

$$P((A_1 + A_2)B) = P(A_1)P(B) + P(A_2)P(B) = P(B)(P(A_1) + P(A_2)) = P(B)P(A_1 + A_2)$$

►

$\Leftarrow$  Каждое событие из алгебры - сумма попарно несовместных событий из соответствующего разбиения.  
Обратный вывод по лемме.

►

*Замечание.* Каждое событие  $A$  порождает разбиение  $A + \bar{A} = \Omega$ , порождающее алгебру  $\mathcal{A}(A)$ . Из леммы вытекает, что независимость событий  $A_1, \dots, A_n$  и независимость порожденных ими алгебр  $\mathcal{A}(A_1), \dots, \mathcal{A}(A_n)$  эквивалентны.

## 2.4 Независимые испытания

Если имеем  $n$  независимых испытаний, то можно построить одно большое вероятностное пространство, элементы которого являются прямыми произведениями соответствующих  $\Omega_i$  и т.д.

Подалгебры должны быть независимы, тогда такое пространство всегда можно построить

Прямое произведение вероятностей:

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), p(\omega) = p_1(\omega_1) \dots p_n(\omega_n), \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

$$P = P_1 \times \dots \times P_n$$

События являются "прямоугольниками":

$$A = A_1 \times \dots \times A_n$$

состоит из векторов  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i \in A_i \in \mathcal{A}$

Вероятность  $A$ :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in A_1} p_1(\omega_1) \dots \sum_{\omega \in A_n} p_n(\omega_n) = \prod_{k=1}^n P_k(A_k)$$

Пусть  $\mathcal{A}'$  - подалгебра  $\mathcal{A}$ , где все  $A_i = \Omega_i$  для всех компонент прямоугольника ( $i \neq k$ )

События из этой алгебры ( $A'_i$ ) изоморфны событиям из  $A_i$ .

$$P(A'_i) = P_i(A_i)$$

Событие  $A$  является пересечением событий  $A'_k, k = 1, \dots, n$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A'_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A'_k)$$

Поэтому алгебры  $A'_j$  независимы.

### 2.4.1 Схема Бернулли

n испытаний, в котором либо успех, либо неудача (неуспех) (в каждом испытании вероятность успеха и неудачи равны), тогда вероятность элементарного события (вектора из событий каждого испытания, он булев, так как каждое  $\omega_i$  либо 0, либо 1)

$$p(\omega) = \prod_{i=1}^n p^{\omega_i} q^{1-\omega_i}$$

Обозначим  $B_k = \{\omega : \omega_1 + \dots + \omega_n = k\}$

Для  $\omega \in B_k$   $p(\omega) = p^k q^{n-k}$

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 1, \dots, n - \text{Биномиальное распределение}$$

Еще есть полиномиальная схема. там не по 2 исхода, а по r.

## 3 Случайные величины

**Определение** (Случайная величина). Случайной величиной (СВ)  $X(\omega)$  называется функция элементарного события  $\omega$  с областью определения  $\Omega$  и областью значений  $\mathbb{R}$  такая, что событие  $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$  принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$  при любом действительном  $x \in \mathbb{R}$ . Значения x функции  $X(\omega)$  называются реализациями СВ  $X(\omega)$ .

**Определение** (Алгебра, порожденная случайной величиной). Пусть  $x_1 < \dots < x_k$  - значения, принимаемые случайной величиной  $\xi$ . Каждая такая величина определяет разбиение из событий  $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ . Т.к  $x_i \neq x_j$ , то  $A_i A_j = \emptyset$ . Сумма - достоверное событие  $\Omega$ .

Разбиение порождает алгебру событий

$$\{\xi \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$$

, B - числовое множество.

**Определение** (Закон распределения). Любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных со случайной величиной.

### 3.1 Примеры законов распределения

1. Биномиальный закон
2. Гипергеометрическое распределение: распределение числа белых шаров  $\xi$  в выборке без возвращения объема n из урны, содержащей M белых и N-M черных шаров

$$P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, m = 0, 1, \dots, \min(n, M)$$

3. Равномерное распределение

**Определение** (Математическое ожидание). Математическое ожидание случайной величины  $\xi = xi(\omega)$  обозначается  $M\xi$  и определяется как сумма

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) p(\omega)$$

среднее значение  $\xi$

### 3.2 Свойства мат. ожидания

1.  $MI_A = P(A)$

*Доказательство.*

$$MI_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = P(A)$$

►

2. Аддитивность:  $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$



Доказательство. ►

Из этого также следует конечная аддитивность.

3. Для любой константы  $C$

$$M(C\xi) = cM\xi, \quad MC = C$$

4. Если  $\xi \geq \eta$ , то  $M\xi \geq M\eta$ .  $\xi \geq 0 \& M\xi = 0 \implies P\{\xi = 0\} = 1$

5. Математическое ожидание  $\xi$  выражается через закон распределения случайной величины  $\xi$  формулой

$$M\xi = \sum_{i=1}^k x_i P\{\xi = x_i\}$$

Подставляя в числовую функцию случайную величину, мы также получаем случайную величину. Например, если  $\eta = g(\xi)$ , то

$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^k g(x_i) P\{\xi = x_i\}$$

При этом

$$g(x_i) = \sum_{i=1}^k g(x_i) I_{\xi=x_i}$$

**Определение** ( $n$ -ый момент случайной величины). Математическое ожидание  $M\xi^n$  называется  $n$ -ым моментом (или моментом  $n$ -ого порядка) случайной величины  $\xi$  (или ее закона распределения).

**Определение** (Абсолютный  $n$ -ый момент). Математическое ожидание  $M|\xi|^n$ .

**Определение** (Центральный момент  $n$ -ого порядка).  $M(\xi - M\xi)^n$

**Определение** (Абсолютный центральный момент  $n$ -ого порядка).  $M|\xi - M\xi|^n$

**Определение** (Дисперсия).  $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$

**Определение** (Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение)).  $\sqrt{D\xi}$

### 3.3 Свойства дисперсии

1.  $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

2.  $D\xi \leq 0$  и  $D\xi = 0$  тогда и только тогда, когда существует такая константа  $c$ , что  $P\{\xi = c\} = 1$

3. Для любой константы  $c$   $D(c\xi) = c^2 D\xi$ ,  $D(\xi + c) = D\xi$

**Теорема 3.1** (Неравенство Иенсена). Если числовая функция  $g(x)$ , то для любой случайной величины  $\xi$

$$Mg(\xi) \leq g(M\xi)$$

**Теорема 3.2** (Неравенство Ляпунова). Для любых положительных  $\alpha \leq \beta$

$$(M|\xi|^\alpha)^{1/\alpha} \leq (M|\xi|^\beta)^{1/\beta}$$

**Теорема 3.3** (Неравенство Коши-Буняковского).

### 3.4 Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p)$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda$$

### 3.5 Многомерные законы распределения

### 3.6 Независимость случайных величин

**Определение** (Независимость случайных величин).  $\xi_1, \dots, \xi_n$  называются независимыми, если порожденные ими алгебры

$$\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}$$

независимы.

**Определение** (Независимость случайных величин).  $\xi_1, \dots, \xi_n$  называются независимыми, если для любых  $x_{1_{j_1}} \dots, x_{x_{j_n}}$

$$P\{\xi_1 = x_{1_{j_1}}, \xi_n = x_{1_{j_n}}\} = \prod_{i=1}^n P\{\xi_i = x_{1_{j_i}}\}$$

**Теорема 3.4.** Если случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы, а  $g_i(x)$  - числовые функции, то случайные величины  $\eta_1 = g_1(\xi_1), \dots, \eta_n = g_n(\xi_n)$  также независимы.

**Теорема 3.5** (Мультипликативное свойство математических ожиданий). Если случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы, то

$$M\xi_1, \dots, \xi_n = \prod_{i=1}^n M\xi_i$$

**Теорема 3.6** (Аддитивное свойство дисперсии). Если случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы, то

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$$

### 3.7 Евклидово пространство случайных величин

1. зададим евклидово пространство случайных величин - векторов  $(\xi(\omega_1), \dots, \xi(\omega_n))$  с

(а) скалярное произведение

$$(\xi, \eta) = \sum_{\omega} \xi(\omega)\eta(\omega)p(\omega) = M\xi\eta$$

(b) норма

$$\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$$

(c) расстояние

$$d(\xi, \eta) = \sqrt{M(\xi - \eta)^2} = \|\xi - \eta\|$$

Рассмотрим прямую констант  $l_0 = \{\xi | \xi(\omega_1) = \dots = \xi(\omega_n)\}$  и найдем проекцию  $m_\xi$  случайной величины на прямую

$$d(\xi, m_\xi) = \min_{c \in l} d(\xi, c)$$

При любой константе

$$M(\xi - c)^2 = M(\xi - M\xi)^2 + (M\xi - c)^2 \geq D\xi$$

Значит  $\sqrt{D\xi} = \min_{c \in l} d(\xi, c) = d(\xi, m_\xi)$  и  $m_\xi = M\xi$ .

Проекция случайной величины - ее матожидание,  $\xi - M\xi$  ортогональна прямой констант.

$$(1, \xi - M\xi) = 0$$

2. Рассмотрим две случайных величины  $\xi, \eta$ .

$$\begin{cases} \xi = M\xi + \xi_1 \\ \eta = M\eta + \eta_1 \end{cases}$$

**Определение** (Коэффициент корреляции).

$$\rho(\xi, \eta) = \cos \phi_{\xi_1, \eta_1} = \frac{(\xi_1, \eta_1)}{\|\xi_1\| \|\eta_1\|} = \frac{(\xi - M\xi, \eta - M\eta)}{\|\xi - M\xi\| \|\eta - M\eta\|} = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

- коэффициент корреляции между  $\xi$  и  $\eta$

**Определение** (Ковариация).

$$Cov(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$$

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{Cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

- По неравенству Коши-Буняковского  $(M\xi_1\eta_1)^2 \leq M\xi_1^2 M\eta_1^2 \implies |\rho(\xi, \eta)| \leq 1$
- Если  $\xi, \eta$  независимы, то  $Cov(\xi, \eta) = 0, \rho(\xi, \eta) = 0$

*Доказательство.*  $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi - M\xi)M(\eta - M\eta) = 0$  ►

**Определение** (некоррелированные случайные величины). Если  $\rho(\xi, \eta) = 0$ , то  $\xi_1 \perp \eta_1$  и случайные величины  $\xi, \eta$  некоррелированные

При  $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$

$$\rho(\alpha_1 \xi + \beta_1, \alpha_2 \eta + \beta_2) = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} \rho(\xi, \eta)$$

Спроектируем вектор  $\eta$  на плоскость, в которой лежат прямая констант  $l_0$  и  $\xi$ . Проекция  $\eta = \alpha\xi + \beta$  определяется константами  $\alpha, \beta$ , при которых

$$\begin{cases} \eta - \alpha\xi - \beta \perp 1 \\ \eta - \alpha\xi - \beta \perp \xi \end{cases}$$

(вектор-высота)

$$\begin{cases} M(\eta - \alpha\xi - \beta) \cdot 1 = 0 \\ M(\eta - \alpha\xi - \beta) \cdot \xi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha M\xi + \beta = M\eta \\ \alpha M\xi^2 + \beta M\xi = M\xi\eta \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} \alpha = \rho \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \\ \beta = M\eta - \rho \frac{M\xi}{\sigma_\xi} \sigma_\eta \end{cases}$$

$$\sigma_\xi^2 = D\xi, \sigma_\eta^2 = D\eta, \rho = \rho(\xi, \eta)$$

Если случайные величины зависимы, то

**Теорема 3.7.**

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} Cov(\xi_k, \xi_l)$$

*Доказательство.*

$$D(\xi + \eta) = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = D\xi + D\eta + 2Cov(\xi, \eta)$$
 ►

Условное мат. ожидание  $M(\xi|\eta)$ - ортогональная проекция  $\xi$  на линейное подпространство  $\eta$

### 3.8 Условные математические ожидания

**Определение** (Условная вероятность). Условная вероятность  $P(B|\mathcal{A}(\alpha))$  относительно  $\mathcal{A}(\alpha)$  как случайную величину, которая принимает значение  $P(B|A_k)$  при  $\omega \in A_k$ .

**Определение** (Условный закон распределения). Условный закон распределения  $\eta$  при заданном значении  $\xi = x_k$  назовем набор условных вероятностей

$$P\{\eta = y_t | \xi = x_k\} = \frac{P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}, \quad t = 1, \dots, m$$

**Определение** (Условное мат.ожидание). Условное мат.ожидание  $\eta$  при заданном значении  $\xi = x_k$

$$M\{\eta|\xi = x_k\} = \sum_{t=1}^m P\{\eta = y_t|\xi = x_k\} = \frac{\sum_{t=1}^m y_t P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}$$

Условное мат.ожидание является функцией от  $\eta$ . Случайная величина  $M(\eta|\xi)$  - условное мат.ожидание при заданном  $\xi$

**Определение.**

$$M[M(\eta|\xi)] = \sum_{k=1}^n P\{\xi = x_k\} M\{\eta|\xi = x_k\}$$

**Теорема 3.8.**

$$M[M(\eta|\xi)] = M\eta$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} M[M(\eta|\xi)] &= \sum_{k=1}^n P\{\xi = x_k\} M\{\eta|\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^n P\{\xi = x_k\} \sum_{t=1}^m P\{\eta = y_t|\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^n P\{\xi = x_k\} \frac{\sum_{t=1}^m y_t P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^m y_t P(\eta = y_t, \xi = x_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^m y_t P(\eta = y_t, \xi = x_k) = \sum_{l=1}^m y_l P\{\eta = y_l\} = M\eta \end{aligned}$$

►

### 3.9 Неравенство Чебышева. Закон больших чисел

**Теорема 3.9** (Неравенство Чебышева). Для любого  $x > 0$  имеют место неравенства:

$$P\{|\xi| \geq x\} \leq \frac{M|\xi|}{x} \quad (1)$$

$$P\{|\xi - M\xi| \geq x\} \leq \frac{D\xi}{x^2} \quad (2)$$

*Доказательство.* (1)

$$\begin{aligned} |\xi| &= |\xi|I_{|\xi| \geq x} + |\xi|I_{|\xi| < x} \geq |\xi|I_{|\xi| \geq x} \geq xI_{|\xi| \geq x} \\ M|\xi| &\geq xMI_{|\xi| \geq x} = xP\{|\xi| \geq x\} \end{aligned}$$

(2)

$$\eta = (\xi - M\xi)^2$$

$$M\eta = D\xi$$

►

### Закон больших чисел

**Теорема 3.10** (Теорема Чебышева). Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы и существует такая константа  $c > 0$ , что  $D\xi_n \leq c, n = 1, \dots$ , то при любом  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{M\xi_1 + \dots + M\xi_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} = 1$$

*Следствие.* Если  $\xi_1, \dots$  независимы и одинаково распределены,

$$M\xi_n = a, D\xi_n = \sigma^2 < \infty$$

то при любом  $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - a\right| < x\right\} = 1$$

Закон больших чисел утверждает, что с вероятностью, приближающейся при  $n \rightarrow \infty$  к 1, среднее арифметическое сумм независимых слагаемых при определенных условиях становится близким к константе.

## Закон больших чисел в схеме Бернулли

**Теорема 3.11** (Теорема Бернулли).

## 4 Случайные величины (общий случай)

**Определение.** Числовая функция  $\xi = \xi(\omega)$  от элементарного события  $\omega \in \Omega$  называется случайной величиной, если для любого числа  $x$

$$\{\xi \leq x\} = \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

**Определение** (Функция распределения случайной величины  $\xi$ ).

$$F(x) = F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}$$

, определенная при всех  $x \in R$

При помощи этой функции можно выразить вероятность попадания  $\xi$  в интервалы.

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\{\xi < x\} : \sum_{n=1}^{\infty} \left\{x - \frac{1}{n-1} < \xi \leq x - \frac{1}{n}\right\}$$

$$P(\xi = x) = F(x) - F(x-0)$$

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1 - 0)$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0)$$

**Теорема 4.1** (Свойства функции распределения). *Функция распределения  $F(x)$  обладает следующими свойствами:*

1.  $F(x)$  не убывает
2.  $F(x)$  непрерывна справа
3.  $F(+\infty) = 1$
4.  $F(-\infty) = 0$

**Определение** (Борелевская  $\sigma$ -алгебра).  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}$  числовых множеств, порожденная всевозможными интервалами вида  $x_1 < x \leq x_2$ , называется борелевской; множества  $A$ , входящие в  $\mathcal{A}$ , называются борелевскими.

**Определение** ( $\sigma$ -алгебра, порожденная случайной величиной  $\xi$ ). Совокупность  $\xi^{-1}(B)$  для всех борелевских множеств борелевской алгебры.

### 4.1 Примеры дискретных распределений

1. Биномиальное
2. Пуассоновское
3. Геометрическое

**Теорема 4.2.** Если  $\xi$  - случайная величина, а  $g(x)$  - борелевская функция, то  $\eta = g(\xi)$  есть случайная величина

**Определение** (Распределение вероятностей).  $P_{\xi}(B)$ , определенная для всех  $B \in \mathcal{B}$ , называется распределением вероятностей случайной величины  $\xi$

**Определение** (величина с дискретным распределением). величина имеет дискретное распределение, если в точках разрыва функции распределения вероятности таковы, что их сумма  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

**Определение** (Плотность распределения).  $p(x) = p_{\xi}(x)$  - плотность распределения случайной величины  $\xi$ , если для любых  $x_1 < x_2$

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_{\xi}(x) dx$$

## 4.2 Свойства

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

## 5 Математическое ожидание

**Определение** (Простая случайная величина). Случайная величина простая, если она представима в виде

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{j=1}^m x_j I_{A_j}(\omega)$$

где события  $A_1, \dots, A_m$  составляют разбиение, т.е.  $A_i A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $\sum_{j=1}^m A_j = \Omega$

**Определение** (Мат. ожидание простой случайной величины).

$$M\xi = \sum_{j=1}^m x_j P(A_j)$$

**Определение** (Мат. ожидание неотрицательной случайной величины).

$$M\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi^n$$

**Определение** (Мат. ожидание в общем случае).

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,$$

где  $\xi^+ = \xi I_{\{\xi \geq 0\}}$ ,  $\xi^- = |\xi| I_{\{\xi < 0\}}$

### 5.1 Свойства мат. ожидания

1. Свойство линейности
2. Свойство положительности
3. Свойство конечности

### 5.2 Джентльменский набор абсолютно непрерывных распределений

1. Нормальное (гауссово) распределение

**Определение** (гауссово распределение). Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $(a, \sigma)$ ,  $-\infty < a < \infty, \sigma > 0$ , если она имеет плотность

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение с параметрами  $(0, 1)$  называется стандартным.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Для плотности истинно условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| t = \frac{x}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = |\text{гауссов интеграл}| = 1$$

2. Равномерное распределение

**Определение** (равномерное распределение). Случайная величина  $\xi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[a, b]$  если ее плотность имеет вид:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} C & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b \end{cases}$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = C \int_a^b dx = C(b-a) = 1,$$

то  $C = b - a$ .

### 3. Гамма-распределение

**Определение** (гамма распределение).

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} & x \geq 0, \end{cases}$$

где  $\alpha > 0, \lambda > 0$  - параметры

При  $\alpha = 1$  имеем показательное распределение

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = | -\lambda x = t, dt = -\lambda dx | = - \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{-\lambda} dt = e^t \Big|_{-\infty}^0 = 1 - 0 = 1$$

$p_{\xi}(x)$	$F_{\xi}(x)$	$M(\xi)$	$D(\xi)$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}})]$	$a$	$\sigma^2$
$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\begin{cases} x^{\alpha-1} \frac{e^{-x\lambda}}{\lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\dots$	$\alpha \lambda^{-1}$	$\alpha \lambda^{-2}$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

### 5.3 Правила для вычисления

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx$$

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\xi}(x) dx$$

## 6 Производящие функции

**Определение** (Целочисленная случайная величина). Дискретная случайная величина  $\xi$ , принимающая только целые неотрицательные значения.

Закон распределения:

$$p_n = P\{\xi = n\}, n = 0, 1, \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

**Определение** (Производящая функция).

$$\phi_\xi(s) = Ms^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

Ряд абсолютно сходится при  $|s| \leq 1$

## 6.1 Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} = -\ln(1-s), \quad f_\xi(t) = -\ln(1-e^{it})$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p), \quad \phi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (ps + 1-p)^n, \\ f_\xi(t) = (pe^{it} + 1-p)^n$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p^k (1-p)s^n = \frac{p}{1-(1-p)s}, \quad f_\xi(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda, \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n s^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}, \quad f_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

## 7 Характеристические функции

129-137

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$$

$$|M\xi| \leq M|\xi|$$

**Определение** (характеристическая функция). Функция  $f_\xi(t)$  называется характеристической функцией случайной величины  $\xi$ , если она имеет вид

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi}$$

Если  $\xi$  - целочисленная случайная величина, то  $\phi_\xi(z) = Mz^\xi$

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = M(e^{it})^\xi = \phi_\xi(e^{it})$$

(Свойства х.ф.)

1.  $|f_\xi(t)| \leq 1, f_\xi(0) = 1$
2.  $f_\xi$  - равномерно непрерывна по t
3.  $f_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi)} e^{itb} = e^{itb} M e^{i\xi(at)} = e^{itb} f_\xi(at)$
4.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  - независимы, тогда

$$f_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(t)$$

$$Me^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} = M \prod_{i=1}^n e^{it\xi_i} = \prod_{j=1}^n M e^{it\xi_j} = \prod_{j=1}^n f_{\xi_j}(t)$$



5.  $f_{\xi}(-t) = \overline{f_{\xi}(t)}$

$$Me^{-it\xi} = \overline{Me^{it\xi}} = \overline{Me^{it\xi}}$$

6.  $\exists m_1, \dots, m_n = M\xi^n$  (существуют первые  $n$  моментов), тогда

$$f_{\xi}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} m_k + R_n(t),$$

где  $R_n(t) = o(t^n)$  при  $t \rightarrow 0$

7.

$$\zeta \begin{cases} \xi, p \\ \eta, 1-p, \end{cases} \quad p \in (0, 1)$$

$$f_{\zeta}(t) = pf_{\xi}(t) + (1-p)f_{\eta}(t)$$

*Пример.* 1.  $\cos(t)$

мы не знаем косинус...

$$\xi = \begin{cases} -1 & p = 1/2 \\ 1 & p = 1/2 \end{cases} \quad \text{Бернуллиевская случайная величина}$$

$$Me^{it\xi} = \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} = \cos t$$

2.  $\cos^3(t)$

свойство про независимость

3.  $\frac{\cos(t) + \cos(2t)}{2}$

свойство про независимость, свойство про выпуклую комбинацию (3)

4.  $e^{-t^4}$

шестое свойство, по формуле Тейлора

$$e^{-t^4} = 1 - t^4 + o(t^4)$$

функция обращения - слишком тяжело, проверяем по свойствам а потом мучаемся (Фурье, Лаплас?)

$\xi = C$  с вероятностью 1

$$Me^{i\xi t} = e^{iCt}$$

*Замечание.* В силу 6 свойства, можно обобщить - если моменты до второго равны 0, то уже не характеристическая функция. (сравниваем с х.ф. тождественного нуля, а  $t^4$  высоко)

1. Стандартное распределение

$$f_{\xi}(t) = e^{-t^2/2}$$

**Мучаемся**

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx$$

дифференцируем.

$$f'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx - x^2/2} dx =$$

$$\begin{aligned} u = e^{itx}, du = ite^{itx} dx, dv = \frac{xdx}{e^{x^2/2}} = \frac{d(x^2/2)}{e^{x^2/2}} = -d(-x^2/2)e^{-x^2/2} = -d(e^{-x^2/2}), v = -e^{-x^2/2} \implies \\ = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (uv - \int_{-\infty}^{\infty} v du) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (-e^{itx} e^{-x^2/2} |_{-\infty}^{\infty} + it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx) = \frac{i^2 t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx = -tf(t) \\ f'(t) + tf(t) = 0, \end{aligned}$$

уравнение с разделяющимися перем. с начальным условием  $f(0) = 1$  (по свойству хар. функции)

$$f(t) = e^{-t^2/2}$$

можно получить нормальное при помощи 3 свойства.

$$f(t) = e^{ita} f_{\xi}(\sigma t) = e^{ita - (\sigma t)^2/2}$$

2. равномерное на  $[a, b]$ :

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx$$

$$f_\xi = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

3. Гамма распределение с параметром  $\alpha$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)e^{-x}}$$

$$f_\xi(t) = (1-it)^{-\alpha}$$

Рассмотрим плотности гамма распределений с параметрами альфа и бета, плотность гамма распределения с параметром (альфа + бета) вычисляется через свертку:

$$p_{\alpha+\beta}(x) = \int_0^x p_\beta(x-y)p_\alpha(y)dy = \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}dy =$$

$$= \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}x^{\beta-1}} x^{\alpha-1}x^{\beta-1}dy = |z = y/x, dz = dy/x, dy = xdz|$$

$$= \frac{e^{-x}x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-x}, x \geq 0$$

определили независимость

По 4 свойству

$$f_{\alpha+\beta}(t) = f_\alpha(t)f_\beta(t)$$

$$f_1(x) = \int_0^\infty e^{itx} p_1(x)dx = \int_0^\infty e^{itx-x} dx = |du = e^{-x}dx, u = -e^{-x}, v = e^{itx}, dv = ite^{itx}|$$

$$= -e^{itx-x}|_0^\infty + it \int_0^\infty e^{itx-x} dx = 1 + itf_1(t)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{1-it}$$

$$f_n(t) = \frac{1}{(1-it)^n}$$

$$f_{1/n} = (1-it)^{-1/n}$$

$$f_{m/n} = (1-it)^{-m/n}$$

Формула работает для рациональных чисел. Но можно сделать предельный переход и формула будет работать для всех положительных альфа. многозначная функция - нужно выделять ветвь  $f_\alpha(0) = 1$

*Замечание* (Вырожденное распределение).

$$P\{\xi = C\} = 1, \quad f_\xi(t) = e^{itC}$$

**Определение** (свертка). Свертка двух функций на прямой (обозначается  $f * g$ ) - это функция

$$f * g : y \mapsto \int f(x)g(y-x)dx.$$

## 7.1 Абсолютно непрерывный случай

**Определение** (L1-пространство). Пространством  $L_1$  называется нормированное пространство, элементами которого служат классы эквивалентных между собой суммируемых функций; сложение элементов в  $L_1$  и умножение их на числа определяются как обычное сложение и умножение функций, а норма задается формулой

$$\|f\| = \int |f(x)| d\mu$$

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x) dx \quad f_\xi(t) \text{ преобразование Фурье функции } p_\xi(x)$$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_\xi(t) dt \quad \text{Обратное преобразование Фурье}$$

имеют смысл для функций из  $L_1(-\infty, \infty)$ , т.е. с конечным интегралом  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$

**Теорема 7.1.** Пусть  $f(t)$  - характеристическая функция и  $F(x)$  - соответствующая функция распределения. Тогда, если  $x-l$  и  $x+l$  являются точками непрерывности функции  $F(x)$ , то

$$F(x+l) - F(x-l) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) \frac{\sin tl}{t} e^{-\sigma^2 t^2 / 2} dt$$

**Теорема 7.2.** Каждой хар. функции соответствует только одна функция распределения.