

# Содержание

1	Определение графа. Примеры графов. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях	1
2	Маршруты, цепи, циклы. Лемма о выделении простой цепи. Лемма об объединении простых цепей	4
3	Эйлеровы графы. Критерий существования эйлерова цикла (теорема Эйлера)	4
4	Гамильтоновы графы. Достаточные условия существования гамильтонова цикла (теоремы Оре и Дирака)	4
5	Изоморфизм графов. Помеченные и непомеченные графы. Теорема о числе помеченных $n$ -вершинных графов	4
6	Проблема изоморфизма. Инварианты графа. Примеры инвариантов. Пример полного инварианта	4
7	Связные и несвязные графы. Лемма об удалении ребра. Оценки числа ребер связного графа	4
8	Плоские и планарные графы. Графы Куратовского. Формула Эйлера для плоских графов	4
9	Деревья. Теорема о деревьях (критерии)	4
10	Перечисление деревьев. Теорема Кэли о числе помеченных $n$ -вершинных деревьев	4
11	Центр дерева. Центральные и бицентральные деревья. Теорема Жордана	4
12	Изоморфизм деревьев. Процедура кортежирования. Теорема Эдмондса	4
13	Вершинная и реберная связность графа. Основное неравенство связности	4
14	Отделимость и соединимость. Теорема Менгера	4
15	Реберный вариант теоремы Менгера	4
16	Критерии вершинной и реберной $k$ -связности графа (без доказательства)	4
17	Ориентированные графы. Основные понятия. Ормаршруты и полумаршруты. Ориентированные аналоги теоремы Менгера	4
18	Ориентированные графы. Достижимость и связность. Три типа связности. Критерии сильной, односторонней и слабой связности орграфа	4
19	Основные структуры данных для представления графов в памяти компьютера. Их достоинства и недостатки	4
20	Влияние структур данных на трудоемкость алгоритмов (на примере алгоритма отыскания эйлерова цикла)	4
21	Задача о минимальном остовном дереве. Алгоритм Прима	4
22	Задача о кратчайших путях. Случай неотрицательных весов дуг. Алгоритм Дейкстры	4
23	Потоки в сетях. Увеличивающие пути. Лемма об увеличении потока	4
24	Алгоритм Эдмондса-Карпа построения максимального потока	4
25	Разрезы. Лемма о потоках и разрезах. Следствие	4
26	Теорема Форда-Фалкерсона	4
27	Два критерия максимальности потока.	4

28	Приложения теории потоков в сетях. Задачи анализа структурно-надежных коммуникационных сетей	4
29	Задачи комбинаторной оптимизации. Массовая и индивидуальная задачи. Трудоемкость алгоритма. Полиномиальные и экспоненциальные алгоритмы	4
30	Задачи распознавания свойств. Детерминированные и недетерминированные алгоритмы. Классы P и NP. Проблема "P vs NP"	4
31	Полиномиальная сводимость задач распознавания. Свойства полиномиальной сводимости	4
32	NP-полные задачи распознавания. Теорема о сложности NP-полных задач. Примеры NP-полных задач	4

## 1 Определение графа. Примеры графов. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях

**Определение.** Граф (неориентированный) состоит из непустого конечно множества  $V$  и конечного множества  $E$  неупорядоченных пар элементов из  $V$  (записывается  $G = (V, E)$ ).

Элементы множества  $V = V_G$  называются **вершинами**, а элементы множества  $E = E_G$  - **ребрами** графа  $G$ . Те и другие называются **элементами** графа.

**Определение.** Если  $\{u, v\} \in E$ , то будем записывать  $e = uv$  и говорить, что вершины  $u$  и  $v$  смежны, а вершина  $u$  и ребро  $e$  инцидентны (так же, как вершина  $v$  и ребро  $e$ ). Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

**Определение.** Степенью вершины  $v$  в графе  $G$  называется число ребер, инцидентных вершине  $v$  (обозначается  $d_G(v) = d(v)$ ).

Вершина степени 0 - изолированная, вершина степени 1 - висячая. Минимальная и максимальная степени вершин графа  $G$  обозначаются  $\delta(G), \Delta(G)$ .

Последовательность степеней вершин графа  $G$ , выписанных в порядке неубывания называется степенной последовательностью или вектором степеней графа  $G$ .

**Определение.** Кратные ребра - два и более ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин.

**Определение.** Петли - ребра, соединяющие вершины сами с собой.

**Определение.** Мультиграф - граф с кратными ребрами

**Определение.** Обыкновенный граф - граф без петель и кратных ребер.

Примеры графов:

1. Граф  $G = (V, E)$  с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами называется  $(n, m)$ -графом,  $(1, 0)$ -граф называется тривиальным.
2. Пустой граф -  $O_n$
3. Полный граф  $K_n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$
4. Двудольный граф  $G = (V_1, V_2; E)$
5. Полный двудольный граф -  $K_{p,q}$
6. Звезда - полный двудольный граф  $K_{1,q}$
7. Простой цикл  $C_n$
8. Регулярный (однородный) граф - граф, все вершины которого имеют одну и ту же степень. Кубические графы - 3-регулярные
9. Графы многогранников

**Лемма 1.1** (О рукопожатиях). Сумма степеней всех вершин произвольного графа  $G = (V, E)$  - четное число, равное удвоенному числу его ребер:  $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$

*Доказательство.* Индукция по числу ребер.

База: если в графе  $G$  нет ребер, то  $\sum_{v \in V} d_G(v) = 0$ . Предположим, что формула верна для любого графа, число ребер в котором не превосходит  $m \leq 0$ .

Пусть  $|E| = m + 1$ . Рассмотрим произвольное ребро  $e = uv \in E$  и удалим его из графа  $G$ . Получим граф  $G' = (V, E')$ ,  $|E'| = m$ . По предположению индукции  $\sum_{v \in V} d_{G'}(v) = 2|E'| = 2m$

Тогда  $\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} d_{G'}(v) + 2 = 2m + 2 = 2|E|$ . ►

Теорема имеет место быть и для мультиграфов.

*Следствие.* В любом графе число вершин нечетной степени четно.



- 2 Маршруты, цепи, циклы. Лемма о выделении простой цепи. Лемма об объединении простых цепей
- 3 Эйлеровы графы. Критерий существования эйлера цикла (теорема Эйлера)
- 4 Гамильтоновы графы. Достаточные условия существования гамильтонова цикла (теоремы Оре и Дирака)
- 5 Изоморфизм графов. Помеченные и непомеченные графы. Теорема о числе помеченных  $n$ -вершинных графов
- 6 Проблема изоморфизма. Инварианты графа. Примеры инвариантов. Пример полного инварианта
- 7 Связные и несвязные графы. Лемма об удалении ребра. Оценки числа ребер связного графа
- 8 Плоские и планарные графы. Графы Куратовского. Формула Эйлера для плоских графов
- 9 Деревья. Теорема о деревьях (критерии)
- 10 Перечисление деревьев. Теорема Кэли о числе помеченных  $n$ -вершинных деревьев
- 11 Центр дерева. Центральные и бицентральные деревья. Теорема Жордана
- 12 Изоморфизм деревьев. Процедура кортежирования. Теорема Эдмондса
- 13 Вершинная и реберная связность графа. Основное неравенство связности
- 14 Отделимость и соединимость. Теорема Менгера
- 15 Реберный вариант теоремы Менгера
- 16 Критерии вершинной и реберной  $k$ -связности графа (без доказательства)
- 17 Ориентированные графы. Основные понятия. Ормаршруты и полумаршруты. Ориентированные аналоги теоремы Менгера
- 18 Ориентированные графы. Достижимость и связность. Три типа связности. Критерии сильной, односторонней и слабой связности орграфа
- 19 Основные структуры данных для представления графов в памяти компьютера. Их достоинства и недостатки