3-раскраска графа

Вход: неориентированный граф без кратных ребер и петель $G = (V, E)$ с n вершинами.

Выход: $\begin{cases} 1, \text{если существует правильная 3-раскраска графа,} \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$

Генерический алгоритм

1. Сравнить $|E|$ и $\frac{3}{2}|V| = \frac{3}{2}n$.

   Если $|E| \geq \frac{3}{2}n$, то правильной 3-раскраски не существует.

   Иначе ответ - "не знаю".

Доказательство.

$$S = \{G = (V, E) \mid |E| < \frac{3}{2}n\} = \{M \mid \text{число единиц} < \frac{3n}{2}\}$$

Мы рассматриваем верхнетреугольные матрицы (т.е неориентированный граф). Тем самым,

$$|I_n| = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$|S \cap I_n| = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{3n}{2} - 1 \rceil} C^i_{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$\rho(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{|S \cap I_n|}{|I_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{\lceil \frac{3n}{2} - 1 \rceil} C^i_{\frac{(n-1)n}{2}}}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\lceil \frac{3n}{2} - 1 \rceil} \frac{(\frac{(n-1)n}{2})!}{2^{\frac{(n-1)n}{2}} (\frac{(n-1)n}{2} - i)!(i)!}$$

Воспользуемся формулой Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\rho(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\lceil \frac{3n}{2} - 1 \rceil} \frac{\sqrt{2\pi \frac{(n-1)n}{2}} (\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{e})^{\frac{(n-1)n}{2}}}{2^{\frac{(n-1)n}{2}} \sqrt{2\pi(\frac{(n-1)n}{2} - i)} (\frac{\frac{(n-1)n}{2} - i}{e})^{\frac{(n-1)n}{2} - i} \sqrt{2\pi i} (\frac{i}{e})^i} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\lceil \frac{3n}{2} - 1 \rceil} \frac{\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}} (\frac{(n-1)n}{2})^{\frac{(n-1)n}{2}}}{2^{\frac{(n-1)n}{2}} \sqrt{2\pi(\frac{(n-1)n}{2} - i)} (\frac{(n-1)n}{2} - i)^{\frac{(n-1)n}{2} - i} \sqrt{i} (i)^i} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\lceil \frac{3n}{2} - 1 \rceil} \frac{\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}} (\frac{(n-1)n}{2})^{\frac{(n-1)n}{2}} (\frac{(n-1)n}{2} - i)^i}{2^{\frac{(n-1)n}{2}} \sqrt{2\pi(\frac{(n-1)n}{2} - i)} (\frac{(n-1)n}{2} - i)^{\frac{(n-1)n}{2}} \sqrt{i} (i)^i} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\lceil \frac{3n}{2} - 1 \rceil} \frac{((\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{i}) - 1)^i}{2^{\frac{(n-1)n}{2}} \sqrt{2\pi(1 - (\frac{i}{\frac{(n-1)n}{2}}))} (1 - (\frac{i}{\frac{(n-1)n}{2}}))^{\frac{(n-1)n}{2}} \sqrt{i}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\lceil \frac{3n}{2} - 1 \rceil} \frac{e^i ((\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{i}) - 1)^i}{2^{\frac{(n-1)n}{2}} \sqrt{2\pi} \sqrt{i}} = 0$$

(т.к $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$,$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n^n}{2^{n^2}} = 0$) ▶