3-раскраска графа

Вход: неориентированный граф без кратных ребер и петель $G = (V, E)$ с n вершинами.

Выход: $\begin{cases} 1, \text{если существует правильная 3-раскраска графа}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$

Генерический алгоритм

1. Сравнить $|E|$ и $\frac{3}{2}|V| = \frac{3}{2}n$.

   Если $|E| \geq \frac{3}{2}n$, то правильной 3-раскраски не существует.

   Иначе ответ - "не знаю"

Доказательство. $|I_n \setminus (I_n \cap S)|$ - множество графов такое, что $\forall v \in V \deg(v) \geq 3$, т.е для них не существует правильной 3-раскраски (каждой вершине инцидентно не менее трех других вершин, а у нас лишь 3 цвета для раскраски, следовательно, по принципу Дирихле, как минимум у 2 вершин совпадают цвета).

Для множества S: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) < 3n$.

$$S = \{G = (V, E) \mid |E| < \frac{3}{2}|V|\} = \{M \mid \text{число единиц в матрице} < 3|V|\}$$

$$S_1 = \{G = (V, E) \mid \text{множество матриц (смежности) такое, что в каждой строчке}$$
$$\text{единиц правее главной диагонали меньше или равно } 2\}$$

Заметим, что $S_1 \supseteq S$, т.к. для матриц из S_1 верно следующее - если правее главной диагонали в каждой строке единиц меньше или равно 2, то в каждой строке единиц меньше или равно 4, т.е всего единиц в матрице $\leq 4|V| = 4n$.

Мы рассматриваем симметричные матрицы смежности (т.к неориентированный граф). Тем самым:

$$|I_n| = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$|I_n \cap S_1| = 2 \prod_{i=1}^{n-2} ((n-i)(n-i-1) + n - i + 1)$$

$$\rho(S_1) = \lim_{n \to \infty} \frac{2 \prod_{i=1}^{n-2} ((n-i)(n-i-1) + n - i + 1)}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}}$$

Заметим, что сверху полином $n^{2(n-2)}$ степени, поэтому предел равен 0.
(т.к $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$)

Подмножество пренебрежимого множества пренебрежимо, тем самым S также пренебрежимо. Алгоритм является генерическим. ▶