# Содержание



# 1 Введение

**Определение** (Методы оптимизации)**.** Раздел прикладной математики, содержание которого составляет теория и методы решения оптимизационных задач

**Определение** (Оптимизационная задача)**.** Задача выбора наилучшего варианта (в некотором смысле) из имеющихся

**Определение** (Задача оптимизации)**.** $\begin{cases} f(x) \to \min(\max) \\ x \in D \end{cases}$

D - множество допустимых решений, $f : D \to \mathbb{R}$

**Определение** (Задача МП)**.** $\begin{cases} (1) f(x) \to \min(\max)[extr](opt) \\ (2) g_i(x)\#0, i = 1, \dots, m - \text{ограничения} \\ (3) x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ $x = (x_1, ..., x_n)$ $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

**Определение** (Допустимое решение)**.** $x \in \mathbb{R}^n$, удовл (2), называется допустимым решением задачи.

**Определение** (Оптимальное решение)**.** Допустимое решение $x^* \in D$ задачи 1 - 3 называется оптимальным решением, если $f(x) \leq f(x^*) \, \forall x \in D$ в случае задачи максимизации и $f(x) \geq f(x^*) \, \forall x \in D$ в случае задачи минимизации

Глобальный оптимум - $x^*$

**Определение** (Локальный оптимум)**.** Допустимое решение $\widetilde{x} \in D$ задачи 1 - 3 называется локальным оптимумом, если $f(x) \leq f(\widetilde{x})$ для всех x из некоторой окрестности $\widetilde{x}$ в случае задачи максимизации и $f(x) \geq f(\widetilde{x})$ для всех x из некоторой окрестности $\widetilde{x}$ в случае задачи минимизации

**Определение** (Разрешимая/неразрешимая)**.** Задача 1 - 3, которая обладает оптимальным решением, называется разрешимой, иначе неразрешимой

## 2 Линейное программирование

### 2.1 Постановка задачи (ЛП), теоремы эквивалентности

**Определение** (Общая задача ЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \# b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ - вектор переменных

Матричная запись:

$$\begin{cases} f(x) = (c, x) \to \max(\min) \\ Ax \# b \\ x_j \geq 0, j \in J \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Определение** (Стандартная (симметрическая) форма). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$

**Определение** (КЗЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases}$

**Определение** (Основная задача ЛП). $\begin{cases} f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \dots, m \end{cases}$

**Определение** (Эквивалентные ЗЛП (ЗМП)). Две задачи ЛП $P_1, P_2$ называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению задачи $P_1$ соответствует некоторое допустимое решение задачи $P_2$ и наоборот, причем оптимальному решению одной задачи соответствует оптимальное решение другой задачи.

**Теорема 2.1** (Первая теорема эквивалентности). *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей каноническая ЗЛП.*

**Теорема 2.2** (Вторая теорема эквивалентности). *Для любой ЗЛП существует эквивалентная ей симметрическая ЗЛП.*

### 2.2 Каноническая задача ЗЛП. Базисные решения

**Определение** (Базисное решение). Пусть $\overline{x}$ - решение $Ax = B$. Тогда вектор $\overline{x}$ называется базисным решением СЛАУ, если система вектор-столбцов матрицы А, соответствующая ненулевым компонентам вектора $\overline{x}$, ЛНЗ

*Замечание.* Если система однородная, то x = $\overline{0}$ - базисное решение

**Определение.** Неотрицательное базисное решение СЛУ называется базисным решением канонической задачи ЛП

**Определение** (Вырожденное БР). $\overline{x}$ - БР КЗЛП называется вырожденным, если число ненулевых компонент меньше ранга матрицы А, иначе невырожденное

**Лемма 2.1.** *Если x и x' - Б.Р. КЗЛП, $x \neq x'$, то*

$$J(x) \neq J(x'), J(x) \subset J(x'), J(x) \supset J(x'),$$

*где $J(x) = \{j | x_j \neq 0, j = 1 \dots n\}$*

**Теорема 2.3** (О конечности множества базисных решений). *Число базисных решений КЗЛП конечно*

**Теорема 2.4** (О существовании оптимальных БР). *Если КЗЛП разрешима, то существует ее оптимальное БР*

### 2.3 Симплекс-метод

Рассмотрим КЗЛП.

### 2.3.1 Симплекс-метод для приведенной ЗЛП

**Определение** (Система с базисом). СЛАУ - СЛАУ с базисом, если в каждом уравнении имеется переменная с коэффициентом $+1$, отсутствующая в других уравнениях. Такие переменные будем называть базисными, остальные не базисными

**Определение** (ПЗЛП). КЗЛП называется приведенной, если

1. СЛАУ $Ax = B$ является системой с базисом
2. Целевая функция выражена через небазисные переменные

**Определение** (Прямо допустимая симплексная таблица). СТ называется прямо допустимой, если $a_{i0} \geq 0, i = 1, \ldots, m$ (bшки)

**Определение** (Двойственно допустимая симплексная таблица). СТ называется двойственно допустимой, если $a_{0j} \geq 0, i = 1, \ldots, n+m$ (сшки)

**Теорема 2.5.** *Если симплекс-таблица является прямо допустимой и $a_{0j} \geq 0, j = 1 \ldots, n+m$, то соответствующее базисное решение является оптимальным*

**Теорема 2.6.** *Если в симплекс-таблице существует $a_{0q} < 0, a_{iq} \leq 0, \forall i = 1 \ldots, m$, то задача неразрешима, потому что f неограничена на множестве допустимых решений*

**Теорема 2.7.** *Если ведущая строка выбирается из условия минимума ключевого отношения, то следующаяя симплексная таблица будет прямо допустимой*

**Теорема 2.8** (Об улучшении базисного решения). *Если $\exists a_{0j} < 0, j = 1 \ldots n+m$, то возможен переход к новой прямо допустимой симплекс таблице, причем $f(x) \leq f(x')$, где x - БР старой таблицы, x'- БР новой таблицы, f(x) $= a_{00}$ старой таблицы, f(x') $= a_{00} - \frac{a_{p0}a_{0q}}{apq}, a_{p0} = 0$ - вырожденное решение*

## 2.4 Каноническая ЗЛП

**Метод искусственного базиса**

**Определение** (искусственные). $t_i \geq 0$ - искусственные переменные

*Замечание* (Свойства ВЗЛП).

1. ВЗЛП почти приведенная (нужно выразить $t_i$)
2. $h(x,t) \leq 0 \quad \forall (x,t) \in \widetilde{D}$
3. $\widetilde{D} \neq 0$ (например, есть $(0, \ldots, n, b_1, \ldots, b_m)$, n нулей)
4. ВЗЛП всегда разрешима

**Теорема 2.9** (О существовании допустимого решения исходной КЗЛП).

$$D \neq 0 \Leftrightarrow h^*(x,t) = 0$$

**Теорема 2.10** (О преобразовании КЗЛП в эквивалентную ей приведенную). *Если множество допустимых решений исходной КЗЛП непусто, то ПЗЛП, эквивалентная исходной КЗЛП, может быть получена из последней симплекс таблицы - таблицы ВЗЛП*

## 2.5 Двойственность в ЛП

**Определение.** Будем говорить, что знаки линейных ограничений ЗЛП согласованы с целевой функцией, если в задаче на max ограничения неравенства имеют вид "$\leq$ а в задаче на min ограничения на неравенство имеют вид "$\geq$"

**Определение** (Двойственная задача). Для ЗЛП I двойственной задачей II является ЗЛП вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \leftrightarrow g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, l \leftrightarrow y_i \geq 0, i = 1...l,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = l+1, \dots m \leftrightarrow y_i \in \mathbb{R}, i = l+1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, i = 1, \dots p \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j, j = 1, \dots, p$$

$$x_j \in \mathbb{R}, j = p+1, \dots n \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j, j = p+1, \dots, n$$

Задачу I называют прямой, а II - двойственной. Стрелки соответствуют сопряженным ограничениям

**Теорема 2.11** (Основное неравенство двойственности).

$$\forall x \in D_I, \forall y \in D_{II}, f(x) \leq g(y)$$

## 2.6 Теоремы двойственности

**Лемма 2.2** (основная лемма). *Пусть* $\forall x \in D_I \neq \varnothing, f(x) \leq M < +\infty \implies \exists y \in D_{II}\, g(y) \leq M$

**Теорема 2.12** (Первая теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач разрешима, то разрешима и другая, причем оптимальное значение целевых функций совпадает, т.е* $f(x^*) = g(y^*)$, *где* $x^*, y^*$ *- оптимальные решения задач I, II соответственно*

**Теорема 2.13.** *Вектор* $x^* \in D_I$ *является оптимальным решением задачи I* $\Leftrightarrow \exists y^* \in D_{II}$ *т.ч* $g(y^*) = f(x^*)$

**Определение** (Условия дополняющей нежесткости). Будем говорить, что $x \in D_I, y \in D_{II}$ удовлетворяют УДН, если при подстановке в любую пару сопряженных неравенств хотя бы одно из них обращается в равенство. Это означает, что следующие характеристические произведения обращаются в 0:

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i)y_i = 0, i = 1, \dots m$$

$$x_i(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j) = 0, j = 1, \dots n$$

**Теорема 2.14** (Вторая теорема двойственности). $x^* \in D_I, y^* \in D_{II}$. *оптимальны в задачах I, II тогда и только тогда, когда они удовлетворяют УДН.*

**Теорема 2.15** (Второй критерий оптимальности (следствие)). $x^* \in D_I$ *является оптимальным решением I* $\Leftrightarrow \exists y^* \in D_{II}$ *т.ч.* $x^*$ *и* $y^*$ *удовлетворяют УДН*

## 2.7 Критерий разрешимости ЛП

**Определение** (Точная верхняя грань функции). $M^*$ называется точной верхней гранью функции f(x) на множестве D, если

1. $\forall x \in D \quad f(x) \leq M^*$
2. $\forall M < M^* \quad \exists x \in D \quad f(x) > M$

**Лемма 2.3** (О точной верхней грани функции g(y) на $D_{II}$). $M^* < +\infty$ *- точная верхняя грань* $f(x)$ *на* $D_I$, *тогда* $\forall y \in D_{II} \quad g(y) \geq M^*$

**Теорема 2.16** (Критерий разрешимости). *Целевая функция задачи ЛП ограничена сверху (снизу) на непустом множестве допустимых решений тогда и только тогда, когда задача максимизации (минимизации) разрешима*

## 2.8 Классификация пар двойственных задач

**Теорема 2.17** (Малая теорема двойственности). *Если* $D_I \neq \varnothing, D_{II} \neq \varnothing \implies$ *обе задачи точно разрешимы*

**Теорема 2.18** (О причинах неразрешимости ЗЛП). $D_I \neq \varnothing$, *целевая функция неограничена сверху на* $D_I$ *тогда и только тогда, когда II неразрешима, так как* $D_{II} = \varnothing$

**Классификация**

1. $D_I \neq \varnothing, D_{II} \neq \varnothing$ обе задачи разрешимы, т.к $f(x^*) = g(y^*)$

2. $D_I \neq \varnothing, D_{II} = \varnothing$ обе неразрешимы, т.к $f(x)$ неограничена, $D_{II} = \varnothing$

3. $D_I = \varnothing, D_{II} \neq \varnothing$ обе неразрешимы, т.к $D_I = \varnothing, g \to +\infty$ на $D_{II}$

4. $D_I = \varnothing, D_{II} = \varnothing$ обе неразрешимы

## 2.9 Экономическая интерпретация двойственной задачи и теорема двойственности

**Экономический смысл двойственной переменной и задачи** Линейные ограничения двойственной задачи связывают задачи всех ресурсов, идущих на производство 1 ед. продукции, с прибылью от продажи этой единицы продукции $\implies y_i$ измеряются в ед. стоимости

Т.к $y_i$ соответствует ресурсам, то $y_i$ - некая цена ресурса. Будем называть ее условной ценой (двойственной оценкой на ресурсы).

Для интерпретации двойственной задачи посмотрим на предприятие как **на продавца ресурсов.**

Задача (II) определяет справедливые цены на ресурсы, в которой требуется определить набор оценок всех ресурсов, при котором для каждого вида продукции ресурсов затрачено на производство 1 ед. продукции **не меньше** дохода от ее реализации, при этом суммарная оценка ресурсов будет минимальна

**Теорема 2.19** (1)**.** *Суммарная прибыль от продажи произведенной продукции = суммарной оценке всех ресурсов*

$y_i^*$ - ценность i-того ресурса для производителя - доход, который может быть получен от 1 единицы использованного i-того ресурса

**Теорема 2.20** (2)**.**
- *ресурс 1 и 2 расходуется полностью - их называют дефицитными - они соответствуют* $y_i^* \geq 0$
- $x_1^* > 0, x_2^* > 0$*, т.е продукция произвед.* $\implies$ *расходы ресурсов равны стоимости продажи этих продуктов*
  *если стоимость ресурсов, требуемых для производства 1 ед. прод > прибыль*

## 2.10 Анализ на чувствительность модели ЛП

**Определение** (Анализ чувствительности модели ЛП)**.** Анализ чувствительности модели ЛП - исследование влияния изменения входных данных на оптимальное решение

Рассмотрим частную задачу - анализ изменения оптимального решения при изменении запаса только одного ресурса.

$y_i^*$ рассмотрим как потенциальную возможность получить доп. доход.

Рассмотрим три задачи:

$$\begin{cases} (I) f = (c, x) \to \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ b = (b_1, \dots, b_m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I') f = (c, x) \to \max \\ Ax \leq b' \\ x \geq 0 \\ b' = (b_1 + \Delta b_1, \dots, b_m), D_I \subset I' \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\overline{I}) f = (c, x) \to \max \\ Ax \leq \overline{b} \\ x \geq 0 \\ \overline{b} = \alpha b + (1-\alpha) b', \alpha \in (0, 1) \end{cases}$$

**Определение** (решения, имеющие одинаковую структуру)**.** Будем говорить, что решения $x \in D_I$ и $x' \in D_{I'}$ имеют одинаковую структуру, если

1. совпадают по ассортименту, т.е. $x_j = 0 \Leftrightarrow x_j{}' = 0 j = 1, \dots, n$

2. имеют одни и те же дефицитные ресурсы, т.е i-тое ограничение I выполняется на равенство тогда и только тогда, когда i-тое ограничение I' задачи выполняется на равенство

**Лемма 2.4** (О планах одинаковой структуры)**.** *Пусть $x^*$ - опт решение I и $x' \in D_I'$ - решение той же структуры, тогда*

1. *x' - опт решение задачи I';*

2. *для любого $\alpha \in (0,1)$ существует оптимальное решение $\overline{I}$ имеющее эту же структуру*

*Замечание.* Изменять запас ресурса $P_1$ можно до тех пор, пока в задаче I' будет существовать оптимальный план той же структуры, что и в I

**Определение** (Малое (допустимое) изменение)**.** Малое (допустимое) изменение ресурса P1 - такое изменение $\Delta b_1 = b_1' - b_1$ для кот в задаче I' существует оптимальное решение той же структуры, что и оптимальное решение исходной задачи I

В силу леммы, если $\Delta b_1$ - допустимое изменение ресурса, то и все меньшие изменения также допустимы. Пусть $F(b_1, \ldots, b_m)$ - max доход, который можно получить при запасах ресурсов $b_i$

**Определение** (3-я теорема двойственности)**.** При допустимом изменении i-того ресурса приращение целевой функции прямо пропорционально изменению ресурса с коэффициентом пропорциональности, равным $y_i^*$

$$\Delta_i F = \Delta b_i y_i^*, \Delta_i F = F(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i + \Delta b_i, \ldots, b_m) - F(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, \ldots, b_m)$$

## 2.11 О конечности симплекс-метода

**Определение** (вырожденная КЗЛП)**.** КЗЛП является вырожденной, если среди ее БР имеются вырожденные.

1. Если КЗЛП не является вырожденной - в процессе работы симплекс-метода $f(x_1) < \cdots < f(x^*)$ (с-метод конечен)

2. $a_{p0} = 0 \implies f(x) = f(x')$ БР сохраняется, но меняется набор базисных переменных

после некоторого числа итераций возможен возврат к уже встречавшимся ранее наборам базисных переменных - с-м может зациклиться

### Уточняющие правила

1. Правило Данцига - выбирается столбец
$$a_{0q} = \min_{j: a_{0j} < 0} a_{0j}$$

2. правило наибольшего приращения: выбираем такое q, при котором приращение наибольшее
$$a_{00}' = a_{00} - \frac{a_{0q} a_{p0}}{a_{pq}}$$

3. Правило Бленда

   Строка и столбец выбираются в соответствии с обычными правилами выбора, причем каждый раз из возможных выбирается переменная с наименьшим номером

4. Лексикографическое правило выбора ведущей строки
$$\frac{\overrightarrow{a_p}}{a_{pq}} = \min_{a_{iq} > 0} \frac{\overrightarrow{a_i}}{a_{iq}}$$

## 2.12 Двойственный симплекс-метод

мне по. чисто по.

# 3 Целочисленное линейное программирование

## 3.1 Задачи ЦЛП

**Определение** (Задача ЦЛП).

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \# b_i, i = 1, \dots, m \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \tag{3}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n \tag{4}$$

$c_j, b_i, a_{ij} \in \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$

**Определение** (Релаксационная задача). (1-3) - задача ЛП, которая называется соответствующей непрерывной или релаксационной задачей.

$D$ - область допустимых решений (1 - 3), а $D_Z$ - множество всех целочисленных точек области D.

## 3.2 Метод отсечения

шаг 1 Решается задача ЛП (1-3). Если она не имеет решения, то и задача ЦЛП не имеет решения. **СТОП**

шаг 2 Пусть $x^0 \in D$ - оптимальное решение задачи ЛП. Если оно из $D_Z$ - то оно оптимальное решение задачи ЦЛП. **СТОП**

шаг 3 Строится дополнительно линейное ограничение (отсечение)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \geq \beta$$

Отсечение добавляется к задаче ЛП. После этого осуществляется возврат на шаг 1, на котором решается задача ЛП.

**Определение** (Правильное отсечение). Доп. ограничение - правильное, если

1. оно отсекает часть области D, содержащее нецелочисленное оптимальное решение $x^0$ текущей задачи ЛП.
2. В отсекаемой части области не должно быть ни одного допустимого решения задачи ЦЛП (ограничение сохраняет все допустимые целочисленные решения)

1. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^0 < \beta$
2. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \geq \beta \quad \forall x \in D_Z$

**Отсечение Гомори** Имеем оптимальную с-таблицу $a_{ij, i=0,\dots,m, j=0,\dots,n}$
Рассмотрим $a_{l0} \notin \mathbb{Z}$. l выбираем с наибольшей дробной частью по правилу "первая сверху"($l \in \{0, \dots, n\}$)
Дробная часть: $\{\frac{5}{4}\} = \frac{1}{4}$, $\{-\frac{5}{4}\} = \frac{3}{4}$
Дополнительное ограничение:

$$\sum_{j \in Nb} \{a_{lj}\} x_j \leq \{a_{l0}\}$$

Приводится к канон. виду и добавляется в ограничение

**Теорема 3.1.** *Отсечение Гомори является правильным.*

**Первый алгоритм Гомори**

1. Все ЗЛП решаются ЛДСМ (кроме, быть может, самой первой)
2. Специальное правило выбора производящей строки - "первая сверху"
3. Отсечение Гомори добавляется снизу к симплекс-таблице, причем таблица имеет размерность $(n+m+2) \times (n-1)$

   Применяем ЛДСМ, выбирая ведущей строку отсечения s1, после выполнения итерации строка s1 становится тривиальной - можно удалить => размер таблицы не растет

**Теорема 3.2.** *$D_Z \neq \varnothing$ или f ограничена снизу на D, то первый алгоритм Гомори конечен.*

## 3.3 Метод ветвей и границ (МВ и Г)

МВ и Г используется для решения различных классов оптимизационных задач, в основном для задач дискретной оптимизации (в которых D конечно или счетно).

Алгоритмы ветвей и границ основаны на последовательном разбиении допустимого множества решений на подмножества (ветвление) и вычислении оценок значений целевой функции на них (вычислении границ), позволяющий отбрасывать подмножества не содержащие оптимального решения, что может существенно сократить перебор.

$$\begin{cases} f(x) \to \max \\ x \in D \end{cases}$$

**Определение** (Стандартная задача ЦЛП)**.**

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, m \tag{6}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \tag{7}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

**Определение** (Верхняя оценка целевой функции)**.** Пусть $\bar{D} \subset D \implies \phi(\bar{D})$ - верхняя оценка целевой функции f(x) на $\bar{D}$, если

$$f(x) \leq \varphi(\bar{D}) \quad \forall x \in \bar{D}$$

$\bar{D} : \varphi(\bar{D}) \leq Record \implies \bar{D}$ отбрасываем как неперспективное
$\lhd$ алгоритм Лэнд и Дойг для ЗЦЛП
$\lhd$ задачу (1)-(4)
Случай D - множество дополнительных решений (1)-(4) является ограниченным:

**Алгоритм Лэнд и Дойг**

шаг 0 Положим $Record = -\infty$

Список задач-кандидатов на ветвление = $\varnothing$.

Решим релаксационную задачу (1)-(3) [5-7], $\bar{x}$ - ее оптимальное решение, если $\bar{x} \in Z^n$, то оптимальное решение найдено, $x^* = \bar{x}$ **СТОП.**

Иначе обозначим текущую задачу через $\bar{P}$ и объявим ее задачей для ветвления $\varphi(\bar{P}) = f(\bar{x})$, переходим на шаг 1

шаг 1 Ветвление

Определим номер k: $\bar{x_k} \in Z$

Сформируем 2 задачи

$$\begin{cases} P_1 = \bar{P}\&(x_k \leq [\bar{x_k}]) \\ P_2 = \bar{P}\&(x_k \geq [\bar{x_k}] + 1) \end{cases}$$

шаг 2 Решить $P_1$, аналогично $P_2$, например, с-методом.

Возможны следующие ситуации:

(a) $P_1(P_2)$ неразрешима - $P_1(P_2)$ исключаем из рассмотрения
если $P_1 \& P_2$ обе неразрешимы - переходим на шаг 4

(b) Пусть $x^1(x^2)$ - оптимальное решение $P_1(P_2)$. Если $x^1 \in Z^n$, тогда $P_1$ включается в список кандидатов для ветвления $\varphi(P_1) = f(x^1)$, с $x^2$ аналогично. Переход на шаг 4

(c) Если $x_1 \in Z^n$ и $f(x^1) > Record \implies Record$ полагаем равным $f(x^1)$, задача $P_1$ исключается из рассмотрения (аналогично $P_2$)
Если $Record$ был изменен в П3, то на *шаг 3*, иначе на *шаг 4*

шаг 3 Исключение неперспективных множеств.

Из списка кандидатов на ветвление исключаются задачи $\bar{P}$ по правилу $\varphi(\bar{P}) \leq Record$

шаг 4 Если список кандидатов на ветвление пуст, то задача пуста. Лучшее найденное решение является оптимальным $f^* = Record$. **СТОП.**

Иначе - выбираем из списка кандидатов на ветвление задачу $\bar{P} : \varphi(\bar{P}) = \max_{p' \text{ из списка}} \varphi(p')$

$\bar{P}$ удаляется из списка кандидатов на ветвление, переход на шаг 3 с задачей $\bar{P}$

# 4 Выпуклое программирование

## 4.1 Выпуклое множество и выпуклая функция

**Определение** (Выпуклое множество)**.** Множество называется выпуклым, если вместе с двумя его точками оно содержит отрезок, их соединяющий, или

$$\forall x^1, x^2 \in D \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad x^* = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in D$$

**Определение** (Выпуклая функция)**.** Функция $f : D \to R$ (D - выпкуло) называется выпуклой, если

$$\forall x^1, x^2 \in D, \forall \lambda \in (0,1) \quad f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2)$$

Функция строго выпуклая - строгое $<$ Если неравенство $\geq$ - ф-я вогнута $>$ строго

**Утверждение.** 1. Пересечение выпуклых множеств выпукло.

2. Коническая комбинация выпуклых функций выпуклая.

**Теорема 4.1.** *Локальный минимум выпуклой функции на выпуклом множестве совпадает с глобальным минимумом*

*Доказательство.* Пусть $f(x)$ выпукла на $D$ $x^*$ - локальный минимум $f(x)$, то есть существует такая окрестность $O_{x^*} \subseteq D$ такая, что $\forall x \in O_{x^*} \quad f(x) \geq f(x^*)$. Докажем, что $x^*$ - точка глобального минимума функции $f(x)$ на D, т.е $\forall x \in D \quad f(x^*) \leq f(x)$

$_{\text{от противного}}$ пусть $\exists x' \in D : f(x') < f(x^*)$. Рассмотрим отрезок $x^* x'$

$$\forall \lambda \in (0,1) \quad f((1-\lambda)x^* + x') \leq^{\text{выпуклость}} (1-\lambda)f(x^*) + \lambda f(x') < (1-\lambda)f(x^*) + \lambda f(x^*) = f(x^*)$$

но существует такое $\lambda$, что

$$x^\lambda = (1-\lambda)x^* + \lambda x' \in O_{x^*} \implies f(x^\lambda) \geq f(x^*) \implies_{\text{противоречие}}$$

►

## 4.2 Задача выпуклого программирования (ВП)

**Определение** (Задача ВП)**.** :

$$f(x) \to \min$$
$$\phi_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m$$
$$x \in G$$

Здесь $\phi_i, f$ - выпуклые в G функции, G - выпуклое замкнутое множество $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+)$

Рассмотрим задачу ВП. Будем предполагать выполненным условие Слейтера **(УС)**

$$\exists \overline{x} \in G, \phi_i(\overline{x}) < 0.$$

$D = \{x \in G | \phi_i \le 0, i = 1, \dots, m\}$ – **множество допустимых решений задачи ВП.**

УС гарантирует существование внутренних точек множества D.

**Лемма 4.1** (Утверждение)**.** *Множество доп. решений ЗВП является выпуклым*

*Доказательство.*

$$D_i = \{x \in G | \phi_i(x) \le 0\} \implies D = \cap_{i=1}^m D_i$$

Докажем, что $D_i$ выпукло $i = 1, \dots, m$

$$x^1, x^2 \in D_i \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in D_i$$

$$\phi_i((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \le^{\text{вып для}}_{\phi_i} (1-\lambda)\phi_i(x^1) + \lambda\phi_i(x^2) \le 0 \implies$$

$D_i$ - выпукло для всех i, поэтому D также выпукло (по свойствам выпуклых множеств) ►

**Пример** (Задача размещения магазина)**.** m точек - пункты размещения магазинов.
$\{P_1, \dots, P_m\}$ - множество точек.
$P_i(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, m$
требуется найти точку P, суммарное расстояние которой до заданных точек минимально

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \to \min \\ (x,y) \in R^2 \end{cases}$$

**Основные подходы к решению задач ВП**

1. Модификация численных методов для задач безусловной оптимизации

   Градиентный метод
2. Обобщение метода множителей Лагранжа
3. Метод штрафных функций
4. Методы линеаризации

## 4.3 Свойства градиента. Идея градиентных методов

**Определение.** Функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности $O_{x^0}$ называется дифференцируемой в точке $x^0$, если $\exists \; \nabla f(x^0)$

$$f(x) = f(x^0) + (\nabla f(x^0), x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$\nabla f(x^0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)) - \textbf{градиент}$$

**Определение.** Рассмотрим функцию $f(x)$ и $z \in \mathbb{R}^n$

Производной функции $f(x)$ в точке $x_0$ по направлению z называется

$$\lim_{\lambda \to 0+0} \frac{f(x^0 + \lambda z) - f(x^0)}{\lambda},$$

если он существует.

**Теорема 4.2** (О градиенте и производной по направлению). *Если $f(x)$ дифференцируема в точке $x^0$, то предел*

$$\lim_{\lambda \to 0+0} \frac{f(x^0 + \lambda z) - f(x^0)}{\lambda},$$

*существует и равен*

$$f'_z(x^0) = (\nabla f(x^0), z)$$

Из определения градиента следует:

1. Если $(\nabla f(x^0), z) > 0$, то при достаточно малом шаге вдоль этого направления z $f(x)$ увеличивается

2. Если $(\nabla f(x^0), z)0 <$, то $f(x)$ уменьшается

**Идея градиентных методов** $x^0 \in D$ начинаем с допустимой точки Выбираем направление z, составляющее тупой угол с $\nabla f(x^0)$ и вдоль этого направления делаем достаточно малый шаг h:

1. $x^1 = x^0 + hz \in D$

2. $f(x^1) < f(x^0)$

далее действия совершаются с $x^1$ и так далее.

## 4.4 Возможные и прогрессивные направления

Задача ВП:

$$f(x) \to \min \tag{9}$$

$$\phi_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \tag{10}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \tag{11}$$

$\phi_i, f$- выпуклые и непрерывные дифференцируемые функции в $R^n$, выполнено УС.

На границе возникают проблемы...

Пусть задана точка $x_0 \in D$. $I_0 = \{i \mid \phi_i(x^0) = 0\}$ - множество индексов *активных* ограничений

**Определение.** Направление z называется возможным (допустимым) в $x^0$, если $(\nabla \phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0$

*Замечание.* Если z - возможное направление в $x^0$, то сделав достаточно малый шаг в направлении z, мы останемся в области.

Если $I_0 = \varnothing$, но любое направление является возможным.

**Определение.** Направление z называется прогрессивным в точке $x^0$, если

$$\begin{cases} (\nabla \phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0 \\ (\nabla f(x^0), z) < 0 \end{cases}$$

*Замечание.* Если направление z прогрессивно, то сделав достаточно малый шаг h из $x^0$ вдоль z, получаем: $x^1 = x^0 + hz$,

1. $x^1 \in D$

2. $f(x^1) < f(x^0)$

## 4.5 Критерий оптимальности

**Теорема 4.3** (Критерий оптимальности). *$x^* \in D$ - оптимальное решение задачи ВП $\Leftrightarrow$ в точке $x^*$ нет прогрессивного направления, т.е не существует $z \in R^n$:*

$$\begin{cases} (\nabla \phi_i(x^0), z) < 0 \quad \forall i \in I_0 \\ (\nabla f(x^0), z) < 0 \end{cases}$$