Содержание

1 Интегралы, зависящие от параметра

1.1 Интегралы, зависящие от параметра. Принцип равномерной сходимости

$\exists f(x,y) : [a,b] \times Y$

Для $\forall y \in Y f_y(x) = f(x,y) - \exists$ она $\in R([a,b])$ (интегрируема)

$\implies \forall \alpha$ и $\beta \in [a,b]$ определена функция $F(y,\alpha,\beta) = \int_a^b f_y(x)dx = \int_a^b f(x,y)dx$

$F(y,\alpha,\beta)$ - функция, заданная интегралом, зависящим от параметра

$[F(y,a,b)$ - частный случай функции]

Определение. $X \times Y \subset \mathbb{R}^2, f(x,y)$ определена на $X \times Y$, пусть y_0 - предельная точка Y

1. пусть $\forall x \in X \quad \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) := \phi(x)$
2. пусть $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon)$ такая что $|y - y_0| < \delta |f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon$ для $\forall x \implies$ тогда говорят, что $f(x,y)$ равномерно сходится к $\phi(x)$

Теорема 1.1 (Свойства равномерной сходимости). *$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}, y_0$ - предельная точка Y*

1. *$f(x,y)$ равномерно на X сходится к $\phi(x)$ тогда и только тогда, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) : \forall x \in X \forall y', y'' \in Y$ $|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ [Критерий Коши]*
2. *$f(x,y)$ равномерно по X стремится к $\phi(x)$ тогда и только тогда, если для $\forall \{y_n\}$ так что $y_n \longrightarrow y_0$ - последовательность $\{f(x,y_n)\}$ равномерно сходится к $\phi(x)$ [сходимость по Гейне]*
3. *Если при $\forall y$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x (интегрируема) и $f(x,y)$ равномерно сходится к $\phi(x)$, то $\phi(x)$ - непрерывна и интегрируема*
4. *$\exists x_0, y_0$ предельные точки X и Y, $f(x,y)$ равномерно по x сходится к $\phi(x)$,
$\exists \forall y \in Y \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) =: \psi(y)$, тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) [= \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)]$*

Доказательство.

1. $\triangleleft \Rightarrow \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) =: \phi(y)$

   $|f(x,y') - f(x,y'')| = |f(x,y') - \phi(x) - f(x,y'') + \phi(x)| \le |f(x,y') - \phi(x)| + |f(x,y'') - \phi(x)|$

   $\Leftarrow x \in X |f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ при $\begin{array}{l} |y_0 - y'| < \delta \\ |y_0 - y''| < \delta \end{array} \Leftarrow$ при $\forall x \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) =: \phi(x)$

   $|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$, $y'' \to y_0$

   $|f(x,y') - \phi(x)| \le \epsilon$,$f(x,y) \rightrightarrows \phi(x)$

2. Необходимость очевидна

   Достаточность: $\{y_n\} \to y_0$

   $\{f(x,y_n)\} \to \phi(x)$, пусть $|y_0 - y_n| < \delta = \frac{1}{n} \implies y_n \to y_0$

   и $|f(x,y_n) - \phi(x)| > \epsilon$; $f(x,y_n) \nrightarrow \phi(x)$ противоречие

3. $\exists \{y_n\} \to y_0, f_n(x) = f(x,y_n)$

   $f_n(x)$ равномерно сходится к $\phi(x)$ по 2

   Далее $\phi(x)$ равномерный предел хороших функкий $\implies \phi(x)$ хорошая

   Попа дробнее... (для последовательности функций от одной переменной)

   $|s(x_0 + h) - s(x_0)| = |s(x_0 + h) + s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) - s_n(x_0 + h) + s_n(x_0) - s(x_0)|$

   $\le |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|$

   Каждое из этих слагаемых меньше $\epsilon/3$(среднее по причине непрерывности $s_n(x)$, остальные по причине равномерной сходимости)

4. $f(x,y) \rightrightarrows \phi(x), \exists\epsilon > 0$, выберем $\delta > 0$ такое что:
   $|y_0 - y'| < \delta$ и $|y_0 - y''| < \delta \implies$
   $|f(x,y') - f(x,y'')| < \epsilon$ по к. Коши
   $x \to x_0 : |\psi(y') - \psi(y'')| \leq \epsilon \implies$
   для $\psi(y)$ верен критерий Коши $\implies$
   $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \psi(y) = A = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$
   $|f(x,y) - \phi(x)| < \epsilon, |\psi(y) - A| < \epsilon$ если $|y - y_0| < \delta$
   $|\phi(x) - A| \leq |\phi(x) - f(x,y)|_{\leq\epsilon} + |f(x,y) - \psi(y)|_{<\epsilon,\text{т.к дельты}} + |\psi(y) - A|_{\leq\epsilon} \leq 3\epsilon$
   при $x \to x_0 \implies \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = A$

▶

1.2 Теорема о коммутировании двух предельных переходов. Предельный переход под знаком интеграла

$f(x,y) : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}, y_0$ - предельная точка Y и $f_y(x) = f(x,y)$ - интегрируема на $[a,b]$
$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Теорема 1.2 (О предельном переходе)**.** *Если кроме того, что $f(x,y)$ равномерно на $[a,b]$ стремится к $\phi(x)$ при $y \to y_0$, то $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx$*

Доказательство. $\lhd\phi(x)$ - равномерный предел, непрерывен
$f_y(x) \implies \phi(x)$ - интегрируема, $\exists\epsilon > 0 \quad \delta(\epsilon) > 0$ выбрано из определения равномерной сходимости
$|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \phi(x)dx| = |\int_a^b (f(x,y) - \phi(x))dx| \leq \int_a^b |f(x,y) - \phi(x)|dx \leq \epsilon(b-a)$ если $|y - y_0| < \epsilon$
$\lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \phi(x)dx$ ▶

1.3 Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра

Теорема 1.3 (Непрерывность)**.** *$f(x,y)-$непрерывна, $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R} \implies$
$f(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на $[c,d]$*

Доказательство. $\lhd[a,b] \times [c,d]$ компакт $\implies f(x,y)$ равномерно непрерывна на компакте
$\forall\epsilon > 0 : \begin{matrix} |x - x'| < \delta \\ |y - y'| < \delta \end{matrix} \implies |f(x,y) - f(x',y')| < \epsilon$
$x' = x, y' = y_0$
$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \epsilon$ при $|y - y_0| < \delta(\epsilon)$
$f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0) = \phi(x)$ равномерный предел не зависит от x
по теореме о предельном переходе:
$\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \phi(x)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx = F(y_0) \implies F$ непрерывна в $y_0 \in [c,d] \implies F$ непрерывна на $[c,d]$ ▶

1.4 Дифференцирование под знаком интеграла. Правило Лейбница

1.5 Интегрирование под знаком интеграла

1.6 Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменными пределами интегрирования

1.7 Равномерная сходимость интегралов. Достаточные признаки равномерной сходимости

1.8 Предельный переход в несобственном интеграле, зависящем от параметра

1.9 Дифференцирование по параметру несобственного интеграла

1.10 Интегрирование по параметру несобственного интеграла

2 Кратные интегралы

2.1 Двоичные разбиения. Двоичные интервалы, полуинтревалы, кубы. Свойства двоичных инервалов, кубов

2.2 Ступенчатые функции. Интеграл от ступенчатой функции (естественное и индуктивное определения). Теорема о совпадении определений

2.3 Свойства интеграла от ступенчатой функции (линейность интеграла, положительность, оценка интеграла)

2.4 Теорема о пределе интегралов убывающей последовательности функций, поточечно сходящейся к нулю

2.5 Теорема о пределе интегралов убывающей последовательности ступенчатых функций, поточечно сходящейся к нулю

2.6 Системы с интегрированием. Основной пример. Свойства систем с интегрирование

2.7 L1 норма. Множество L1*(Σ). L1-норма как интеграл от модуля функции

2.8 Свойства L1 нормы ("линейность норма функции равной нулю почти всюду и т.д.)

2.9 Субаддитивность L1-нормы

2.10 Сходимость в смысле L1

2.11 Определение понятие интеграла и интегрируемой функции

2.12 Свойства интеграла и интегрируемых функций

2.13 Множества меры ноль. Свойства функций совпадающих почти всюду

2.14 Нормально сходящиеся ряды. Теорема о нормально сходящихся рядах

2.15 Теоремы Леви для функциональных рядов и последовательностей

2.16 Огибающие для последовательности интегрируемых функций. Нижний и верхний предел последовательности

2.17 Теорема Фату о предельном переходе. Следствие из теоермы Фату

2.18 Теорема Лебега о предельном переходе

2.19 Лемма о приближении стпенчатой функции с помощью непрерывных финитных

2.20 Теорема о приближении интегрируемой функции с помощью непрерывных финитных

2.21 Измеримые функции. Свойства пространства измеримых функций. Измеримые множества