

Общее понятие топологического векторного пространства и несколько более специальное понятие локально выпуклого пространства были введены А.Н. Колмогоровым, А.Н. Тихоновым и Дж. фон Нейманом в 1934-1935 гг., к этому же времени относятся первые результаты о свойствах таких пространств. Наиболее интенсивное развитие теории топологических векторных пространств началось в конце 1940 - начале 1950 годов и во многом было связано с созданием Л. Шварцем теории распределений (обобщенных функций), в рамках которой был выделен широкий спектр важных для приложений функциональных пространств, являющихся общими топологическими векторными пространствами.

Излагаемый здесь материал призван помочь студентам-математикам в изучении элементов теории топологических векторных пространств - одного из важнейших разделов функционального анализа и состоит из заданий, упражнений и методических указаний по их исполнению. Задания и упражнения приводятся в порядке, позволяющем без особых затруднений выполнять последующие на основе предыдущих. Настоящее издание является продолжением методических указаний автора "Элементы общей топологии" и "Векторные пространства", поэтому желательно знакомство читателя с их содержанием. Если при выполнении заданий и упражнений возникнут трудности, то следует обратиться к литературе, список которой указан на с.41. Для удобства ссылок этот список открывают вышеупомянутые методические указания.

## 1 Топологические векторные пространства

Пусть  $X$  - векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$  вещественных или комплексных чисел. В дальнейшем предполагается, что  $\mathbb{K}$  наделено естественной топологией. Топология  $\tau$  на  $X$  согласована с линейной (векторной) структурой  $X$ , если непрерывны линейные операции, т.е. операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры:

$$(+): X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X,$$

$$(\cdot): \mathbb{K} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X.$$

Согласованная с линейной структурой топология на  $X$  называется линейной топологией. Векторное пространство  $X$  с заданной на нем линейной топологией называется топологическим векторным пространством (ТВП). Наравне с этим термином бытует также термин "линейное топологическое пространство" (ЛТП).

Через  $\mathcal{O}_x^X$ ,  $\mathcal{O}_x^\tau$  или  $\mathcal{O}_x$  обозначаем множество всех окрестностей точки  $x$  в топологическом (векторном) пространстве  $(X, \tau)$ . Если  $x = 0$ , то пишем просто  $\mathcal{O}^X$ ,  $\mathcal{O}^\tau$  или  $\mathcal{O}$ . Через  $\text{int } A$  и  $\text{cl } A$  обозначаем соответственно внутренность и замыкание множества  $A \subset X$ .

В дальнейшем неоднократно будет использоваться понятие (пред) фильтра, поэтому напомним его. Непустое множество  $\mathcal{U}$  подмножеств  $X$  называется предфильтром в  $X$ , если  $\emptyset \in \mathcal{U}$  и для любых  $A, B \in \mathcal{U}$  существует такое  $C \in \mathcal{U}$ , что  $C \subset A \cap B$ . Предфильтр  $\mathcal{F}$  называется фильтром, если  $B \in \mathcal{F}$ , как только  $B \supset A \in \mathcal{F}$ . Предфильтр  $\mathcal{U}$  является базой (базисом) фильтра  $\mathcal{F}$ , если  $\mathcal{F}$ , если  $U \subset \mathcal{F}$  и  $\forall B \exists A \in \mathcal{U} : A \subset B$ . Каждый предфильтр  $\mathcal{U}$  является базой порожденного им фильтра  $\bar{\mathcal{U}} = \{B \subset X \mid \exists A \in \mathcal{U} : A \subset B\}$ . Наиболее распространенным примером фильтра является фильтр  $\mathcal{O}_x^X$  окрестностей точки  $x$  в топологическом пространстве  $X$ .

**Упражнение 1.1.** Сформулировать условия линейности топологии на векторном пространстве в терминах окрестностей.

**Упражнение 1.2.** Исследовать на линейность дискретную и антидискретную топологии на векторном пространстве.

**Упражнение 1.3.** Доказать, что векторное пространство  $\mathbb{K}^n$  с естественной топологией, т.е. топологией, определяемой окрестностями

$$V_r(x) = \{y \in \mathbb{K}^n : (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 < r^2\}, \quad r > 0, \quad x \in \mathbb{K}^n,$$

является топологическим векторным пространством. В дальнейшем  $\mathbb{K}^n$  всегда предполагается наделенным этой топологией.

**Упражнение 1.4.** В векторном пространстве  $C(\mathbb{R})$  каждой функции  $x \in C(\mathbb{R})$  сопоставим семейство ее окрестностей:

$$V_r(x) = \{y \in C(\mathbb{R}) : \sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t) - x(t)| < r\}, \quad r > 0.$$

Доказать, что базы окрестностей  $\{V_r(x) \mid r > 0\}$  ( $x \in C(\mathbb{R})$ ) определяют на  $C(\mathbb{R})$  топологию (см. I.I.13[I]), при которой операция сложения непрерывна, а операция умножения на скаляры разрывна в каждой точке  $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times C(\mathbb{R})$ , где  $x$  - неограниченная функция. Таким образом, указанная топология не является линейной на  $C(\mathbb{R})$ .

**Упражнение 1.5.** Привести пример линейной топологии на  $C(\mathbb{R})$ .

**Упражнение 1.6.** На пространстве  $C[a, b]$  топологию введем с помощью окрестностей

$$V_r(x) = \{y \in C[a, b] : \sup_{a \leq t \leq b} |y(t) - x(t)| < r\}, \quad r > 0.$$

Доказать, что эта топология - линейная.

**Упражнение 1.7.** На пространстве  $l^p$  ( $0 < p < \infty$ ) топологию зададим посредством окрестностей

$$V_r(x) = \{y = \{y_n\} \in l^p : \sum_{n=1}^{\infty} |y_n - x_n|^p < r\}, \quad r > 0.$$

Доказать, что эта топология - линейная.

**Упражнение 1.8.** Топология на  $\mathcal{L}^p(0, 1)$  ( $0 < p < \infty$ ) определяется окрестностями

$$V_r(x) = \{y \in \mathcal{L}^p : \int_0^1 |y(t) - x(t)|^p dt < r\}, \quad r > 0.$$

Доказать, что эта топология - линейная.

**Упражнение 1.9.** На пространстве  $C(\mathbb{R})$  топологию определим с помощью окрестностей

$$V_{K,r}(x) = \{y \in C(\mathbb{R}) : \sup_{t \in K} |y(t) - x(t)| < r\},$$

где  $r > 0$ .  $K$  - компакт в  $\mathbb{R}$ . Доказать, что эта топология - линейная.

*Замечание.* Всюду, где не оговорено, пространства  $C[a, b]$ ,  $l^p$ ,  $\mathcal{L}^p$  ( $0 < p < \infty$ ),  $C(\mathbb{R})$  предполагаются наделенными указанными выше линейными топологиями.

**Упражнение 1.10.** Пусть  $X$  - ТВП. Тогда:

1. для любых  $x \in X, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  отображение  $y \mapsto \lambda y + x$  является гомеоморфизмом  $X$  на себя;

2.  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} (V \in \mathcal{O} \implies \lambda V \in \mathcal{O})$ ;
3.  $\forall x \in X \mathcal{O}_x = \{x + V \mid V \in \mathcal{O}\}, \quad \mathcal{O} = \{x - V \mid V \in \mathcal{O}_x\}$ .

**Упражнение 1.11.** Пусть  $X$  - ТВП. Тогда:

1.  $\forall V \in \mathcal{O} \exists U \in \mathcal{O} : U + U \subset V$ ;
2.  $\forall V \in \mathcal{O} \forall n \in \mathbb{N} \exists U \in \mathcal{O} : \underbrace{U + \dots + U}_n \subset V$ ;
3.  $\mathcal{O}$  состоит из поглощающих множеств, в частности,

$$\forall V \in \mathcal{O} \forall \{r_n\} \subset (0, +\infty) : \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty \quad X = \bigcup_{n \geq 1} r_n V;$$

4. в каждой окрестности нуля содержится уравновешенная окрестность нуля.

Указание. Для доказательства в) (соответственно г)) воспользуйтесь непрерывностью произведения на скаляры в точках  $(0, x) \in \mathbb{K} \times X$  (соотв. в точке  $(0, 0)$ ).

Говорят, что топология на векторном пространстве  $X$  инвариантна относительно сдвигов, если все сдвиги на  $X$  суть гомеоморфизмы.

**Упражнение 1.12.** Для линейности топологии  $\tau$  на  $X$  необходимо и достаточно, чтобы она была инвариантна относительно сдвигов и имела базис окрестностей нуля  $\mathcal{U}$ , удовлетворяющий условиям:

1.  $\forall V \in \mathcal{U} \exists U \in \mathcal{U} : U + U \subset V$ ;
2.  $\mathcal{U}$  состоит из поглощающих уравновешенных множеств.

Указание. При доказательстве непрерывности произведения на скаляры удобно воспользоваться представлением

$$\lambda x = \lambda_0 x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda(x - x_0).$$

**Упражнение 1.13.** Если предфильтр  $\mathcal{U}$  на векторном пространстве  $X$  удовлетворяет условиям:

1.  $\forall V \in \mathcal{U} \exists U \in \mathcal{U} : U + U \subset V$ ;
2.  $\mathcal{U}$  состоит из поглощающих уравновешенных множеств,

то на  $X$  существует единственная линейная топология  $\tau$ , для которой  $\mathcal{U}$  - база окрестностей нуля.

Указание. Положите  $\tau = \{V \subset X \mid \forall x \in V \exists U \in \mathcal{U} : x + U \subset V\}$ .

Докажите, что  $\forall W \in \mathcal{U} W_0 := \{x \in W \mid \exists V \in \mathcal{U} : x + V \subset W\} \in \tau$ , для чего проверьте, что если  $x \in W_0$ ,  $x \in V \subset W$ ,  $U + U \subset V$  ( $U, V \in \mathcal{U}$ ), то  $x + U \subset W_0$ . Покажите, что  $\mathcal{U}$  - база  $\mathcal{O}^\tau$  и топология  $\tau$  инвариантна относительно сдвигов.

**Упражнение 1.14.** Каждая окрестность нуля в ТВН содержит некоторую замкнутую уравновешенную окрестность нуля. В частности, каждое ТВП является  $T_3$ -пространством (см. I.3.3[I]).

Указание. Воспользуйтесь свойствами а), б) из I.12 и тем, что  $(x - U) \cap U \neq \emptyset$  при  $U \in \mathcal{U}, x \in \text{cl } U$ .

**Упражнение 1.15.** Пусть  $X$  - ТВП.  $A, B \subset X$ . Тогда:

1. если  $A$  открыто, то  $\lambda A + B$  открыто для любого  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ;

2.  $\text{cl } A = \bigcap \{A + V \mid V \in \mathcal{U}\}$  для любой базы  $\mathcal{U}$  фильтра  $\mathcal{O}$ ;
3.  $\text{cl } A + \text{cl } B \subset \text{cl}(A + B)$ ;
4.  $\text{int } A + \text{int } B \subset \text{int}(A + B)$ ;
5. если  $A$  уравновешено (соотв., является подпространством  $X$ ), то  $\text{cl } A$ , а если  $0 \in \text{int } A$ , то и  $\text{int } A$  уравновешено (соотв., является подпространством  $X$ );
6. если  $A$  выпукло, то  $\text{cl } A$  и  $\text{int } A$  выпуклы;
7. если  $A$  выпукло и  $\text{int } A \neq \emptyset$ , то:

$$\text{cl}(\text{int } A) = \text{cl } A, \quad \text{int}(\text{cl } A) = \text{int } A;$$

8. если  $A$  - подпространство  $X$  и  $\text{int } A \neq \emptyset$ , то  $A = X$ .

Указание. а) вытекает из 1.10; доказательства остальных утверждений основаны на том, что замыкание  $\text{cl } A$  множества  $A$  есть наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$ , а его внутренность  $\text{int } A$  - наибольшее открытое подмножество  $A$ .

Пример. Множество  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\}$  уравновешено в ТВП  $\mathbb{R}^2$ , то его внутренность не является уравновешенным множеством.

Вопрос: справедливы ли утверждения д)-ж) для произвольного  $\Gamma$ -множества  $A$  (см. [2, с.26]) ?

Топологическое векторное пространство называется локально (полу)выпуклым, если в нем каждая окрестность нуля содержит (полу)выпуклую окрестность нуля или, что то же самое, существует база окрестностей нуля, состоящая из полу(выпуклых) множеств. Его топология называется локально (полу)выпуклой. Напомним, что множество  $V$  полувыпукло, если  $V + V \subset \lambda V$  для некоторого  $\lambda > 0$ . Локально выпуклое топологическое векторное пространство обычно называют просто локально выпуклым пространством (ЛВП).

**Упражнение 1.16.** Какие пространства из упражнений 1.3, 1.6 - 1.9 являются локально выпуклыми?

**Пример 1.** При  $0 < p < 1$  в пространстве  $\mathcal{L}^p(0, 1)$  нет выпуклых открытых множеств, отличных от  $\emptyset$  и  $\mathcal{L}^p(0, 1)$ . В частности,  $\mathcal{L}^p(0, 1)$  ( $0 < p < 1$ ) не является локально выпуклым пространством.

Действительно, пусть  $V$  - непустое выпуклое открытое множество в  $\mathcal{L}^p$ . Можно считать, что  $0 \in V$ . Тогда  $V \supset V_r(0)$  для некоторого  $r > 0$ . Взяв  $x \in \mathcal{L}^p$ , найдем  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $n^{p-1}N(x) < r$ , где  $N(x) = \int_0^1 |x(t)|dt$ . Положим  $x_i(t) = nx(t)$  при  $t_{i-1} < t \leq t_i$  и  $x_i(t) = 0$  в противном случае, где точки  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  таковы, что

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |x(t)|^p dt = n^{-1}N(x) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Так как  $N(x_i) < r$ , то  $x_i \in V$  ( $1 \leq i \leq n$ ) и  $x = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \in V$ . Таким образом,  $V = \mathcal{L}^p$

**Упражнение 1.17.** Если множество  $V$  в ТВП  $X$  открыто или замкнуто, то для его выпуклости достаточно выполнения равенства  $V + V = 2V$ .

Указание. Согласно условию, множество  $V$  вместе с каждым двумя своими точками содержит середину соединяющего их отрезка. В случае, тогда  $V$  открыто, удобно воспользоваться 1.20.

**Упражнение 1.18.** Пусть  $A$  и  $B$  - подмножества ТВП. Тогда:

1. Если  $A$  и  $B$  бикомпактны, то  $\lambda A + \mu B$  бикомпактно для  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ;

**Упражнение 1.19.**

**Упражнение 1.20.**

**Упражнение 1.21.**

**Упражнение 1.22.**