Содержание

1 Теория булевых функций **1**
1.1 Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от n переменных. Таблица истинности БФ . . 1
1.2 Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия) 1
1.3 Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами 1
1.4 Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций 2
1.5 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые БФ 2
1.6 ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения 2
1.7 СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения 2
1.8 Минимизация нормальных форм (карты Карно) 2
1.9 Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения 2
1.10 Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций 2
1.11 Полные системы булевых функций, базисы 2
1.12 Классы T_0, T_1 (функции, сохраняющие 0 и 1) 2
1.13 Класс S самодвойственных функций, определение двойственной БФ 2
1.14 Класс монотонных функций 2
1.15 Класс линейных функций 2
1.16 Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях 2
1.17 Теорема Поста о полноте системы булевых функций 2
1.18 Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи) 2

2 Логика высказываний **2**
2.1 Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела 2
2.2 Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований. 2
2.3 Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем 2
2.4 Понятия необходимых и достаточных условий 2
2.5 Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов 2
2.6 Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов 2
2.7 Теорема о дедукции для ИВ 2
2.8 Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ 2
2.9 ИВ Генцена, его полнота 2
2.10 Метод резолюций для логики высказываний (без обоснования корректности) 2

3 Логика предикатов **2**
3.1 Понятие предиката и операции, их представления, примеры 2
3.2 Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы 3
3.3 Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов 3
3.4 Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы 3
3.5 Истинность формул на алгебраической системе 4
3.6 Изоморфизм систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм 4
3.7 Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности 4
3.8 Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем 4
3.9 Эквивалентность формул логики предикатов 4
3.10 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые формулы 4
3.11 Пренексный вид формулы 4
3.12 Основные эквивалентности логики предикатов 4
3.13 Классы формул $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$. Соотношения между классами 4
3.14 Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах) 4
3.15 Проверка существования вывода методом резолюций (алгоритм) 4
3.16 Логическое следование в логике предикатов 4
3.17 Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов 4
3.18 Теория. Модель теории 4
3.19 Непротиворечивая теория. Полная теория. Свойства непротиворечивых и полных теорий 4

3.20 Теорема о существовании модели (без доказательства) 4
3.21 Теорема о связи выводимости и противоречивости 4
3.22 Теоремы о корректности и полноте ИП 4
3.23 Теорема компактности 4
3.24 Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы. Конечно аксиоматизируемые теории . . 4
3.25 Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы) 4
3.26 Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности) 4

1 Теория булевых функций

1.1 Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от n переменных. Таблица истинности БФ

Определение. Булева функция от n переменных - это отображение $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

Замечание. Количество БФ от n переменных - 2^{2^n}

Доказательство. Каждая булева функция определяется своим столбцом значений. Столбец является булевым вектором длины $m = 2n$, где n – число аргументов функции. Число различных векторов длины m (а значит и число булевых функций, зависящих от n переменных) равно $2^m = 2^{2^n}$ ▶

1.2 Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия)

Булевы функции одной переменной:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_1 - тождественный 0, f_2 - тождественная функция, f_3 - отрицание ($\neg$), f_4 - тождественная 1

Булевы функции двух переменных

x	y	0	$\wedge$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\vert$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

1. $\wedge$ - конъюнкция
2. $\leftarrow$ - антиимпликация
3. $\to$ - импликация
4. $\vee$ - дизъюнкция
5. $|$ - штрих Шеффера
6. $\downarrow$ - стрелка Пирса
7. $+$ - взаимоисключающее или, сложение по модулю 2 (XOR)

1.3 Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами

Определение. Формула логики высказываний - слово алфавита логики высказываний, построенное по следующим правилам:

1. символ переменной - формула
2. символы 0 и 1 - формулы
3. если Φ_1 и Φ_2 - формулы, то слова $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, $(\Phi_1 | \Phi_2)$, $\ldots$, Φ_1' тоже формулы

1.4 Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций

1.5 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые БФ

1.6 ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения

1.7 СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения

1.8 Минимизация нормальных форм (карты Карно)

1.9 Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения

1.10 Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций

1.11 Полные системы булевых функций, базисы

1.12 Классы T_0, T_1 (функции, сохраняющие 0 и 1)

1.13 Класс S самодвойственных функций, определение двойственной БФ

1.14 Класс монотонных функций

1.15 Класс линейных функций

1.16 Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях

1.17 Теорема Поста о полноте системы булевых функций

1.18 Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи)

2 Логика высказываний

2.1 Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела

2.2 Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований.

2.3 Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем

2.4 Понятия необходимых и достаточных условий

2.5 Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов

2.6 Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов

2.7 Теорема о дедукции для ИВ

2.8 Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ

2.9 ИВ Генцена, его полнота

2.10 Метод резолюций для логики высказываний (без обоснования корректности)

3 Логика предикатов

3.1 Понятие предиката и операции, их представления, примеры

Определение. n-местный предикат на множестве A - это отображение вида $P : A^n \to \{0, 1\}$

Определение. n-местная операция на множестве A - это отображение вида $f : A^n \to A$

Предикат можно задать как множество тех аргументов, на которых он является истинным

Пример. $P = \{1, 3\} : P = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Пример. $Q = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

Способы задания:

1. описательный
2. множество (отношения)
3. таблица (истинности)
4. графы
   для предиката $P(x, y)$ ребро (x, y) обозначает $P(x, y) = 1$
   для операции $f(x)$ дуга (x, y) обозначает $y = f(x)$

3.2 Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы

Определение. Сигнатура - набор предикатных, функциональных и константных символов с указанием местностей

Пример. $\sigma = \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, c\}$

Определение. Две сигнатуры считаем *равными*, если в них одинаковое кол-во символов каждого сорта и местности соответствующих символов равны

Определение. Интерпретация сигнатуры σ на множестве A - это отображение, которое

1. каждому n-местному предикатному символу $P^{(n)} \in \sigma$ сопоставляет n-местный предикат на A
2. каждому n-местному функциональному символу $f^{(n)} \in \sigma$ сопоставляет n-местную операцию на A
3. каждому константному символу сопоставляет элемент множества A

Определение. Алгебраическая система - набор, состоящий из множества A, сигнатуры σ и интерпретации σ на A. Множество A называют основным множеством системы ($\mathfrak{a} =< A, \sigma >$)

3.3 Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов

Зафиксируем сигнатуру σ. Алфавит логики предикатов сигнатуры σ — это множество
$\sigma_{АЛП} = \sigma \cup \{x_1, x_2 \ldots, \&, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists, (,), =, \mathbf{,}\}$

Определение. Терм - слово алфавита логики предикатов, построенное по правилам:

1. символ переменной - терм
2. константный символ - терм
3. если $t_1, \ldots t_n$ - термы, $f^{(n)} \in \sigma$, то и $f(t_1, \ldots, t_n)$ - терм

Определение. Атомарная формула сигнатуры σ - это слово одного из двух видов:

1. $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 - термы
2. предикат $P(t_1, \ldots, t_n), P^{(n)} \in \sigma, t_1, \ldots t_n$ - термы

Определение. Формула ЛП сигнатуры σ - слово, построенное по правилам:

1. атомарная формула - формула
2. если ϕ_1 и ϕ_2 - формулы, то слова $(\phi_1 \& \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), (\phi_1 \to \phi_2), \neg\phi_1$ тоже формулы
3. если ϕ - формула, то слова $(\forall x \phi)$ и $(\exists x \phi)$ тоже формулы

3.4 Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы

Определение. Вхождение переменной x в формулу ϕ **связанное**, если x попадает в область действия квантора $\exists x / \forall x$, в противном случае вхождение x **свободное**

Определение. Переменная x **свободна** в формуле ϕ, если есть хотя бы одно свободное вхождение x в ϕ, в противном случае она **связанная**

Определение. Формула замкнутая, если она не содержит свободных переменных

3.5 **Истинность формул на алгебраической системе**

3.6 **Изоморфизм систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм**

3.7 **Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности**

3.8 **Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем**

3.9 **Эквивалентность формул логики предикатов**

3.10 **Тождественно истинные (ложные) и выполнимые формулы**

3.11 **Пренексный вид формулы**

3.12 **Основные эквивалентности логики предикатов**

3.13 **Классы формул $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$. Соотношения между классами**

3.14 **Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах)**

3.15 **Проверка существования вывода методом резолюций (алгоритм)**

3.16 **Логическое следование в логике предикатов**

3.17 **Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов**

3.18 **Теория. Модель теории**

3.19 **Непротиворечивая теория. Полная теория. Свойства непротиворечивых и полных теорий**

3.20 **Теорема о существовании модели (без доказательства)**

3.21 **Теорема о связи выводимости и противоречивости**

3.22 **Теоремы о корректности и полноте ИП**

3.23 **Теорема компактности**

3.24 **Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы. Конечно аксиоматизируемые теории**

3.25 **Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы)**

3.26 **Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности)**