Содержание

1 Вероятностное пространство

Определение (Алгебра)**.** Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется алгеброй, если выполнены след. аксиомы:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathbb{A}$
3. (аддитивность) $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathbb{A}$

Т.е алгебра является замкнутой относительно замыкания и объединения

Определение (σ-алгебра)**.** Алгебра называется σ-алгеброй, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

Определение (мера)**.** $\mu : \mathcal{A} \to [0; \infty)$ - мера, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j : \quad \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{счетная аддитивность}$$

Мера конечная, если $\mu(\Omega) < \infty$
Мера вероятностная, если $\mu(\Omega) = 1$

Короче говоря, вероятностная мера:

1. неотрицательность
2. нормированность
3. счетная аддитивность (иногда счетная аддитивность заменяется на аддитивность и непрерывность)

1.1 Свойства P из учебника

1. $A \subseteq B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \geq 0$

   $$\text{представить B как } B = A + (B \setminus A),$$

2. $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
3. $\forall A \in \mathscr{A} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(\varnothing) = 0$
6. Конечная аддитивность (следует из счетной)
7. $$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
8. $$B_k = A_k \setminus (A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_{k-1}) \implies \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} B_k \implies P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = P(\sum_{k=1}^{n} B_k)|P(B_k) \leq P(A_k)|$$
9. $$\forall A, B \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

   раздробить объединение через минус + аддитивность + 1 свойство

Определение (Вероятностное пространство)**.** Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где

1. Ω - пространство элементарных событий;
2. $\mathcal{A}$ - $\sigma-$алгебра подмножеств Ω (события);
3. P - вероятностная счетно-аддитивная мера на $\mathcal{A}$ (вероятность); называется вероятностным пространством.

Все элементарные исходы равновозможны

1. Размещение (упорядоченный набор) $A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$
2. Перестановка (частный случай размещения при N = n)
3. Сочетание (подмножество) $C_N^n = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

Определение (Классическая вероятность)**.** Модель вероятностного пространства (A - событие)

1. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ - конечное пространство
2. $\mathcal{A}$ все подмножества Ω
3. $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p_\omega = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Определение (Геометрическая вероятность)**.** $V \in \mathbb{R}^n$

1. $\Omega = V$
2. $\mathcal{A}$ - борелевская $\sigma-$алгебра (минимальная $\sigma-$алгебра, содержащая все компакты) подмножеств V
3. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(V)}$

1.2 Некоторые следствия аксиоматики

1.

Аксиома (Аксиома непрерывности). *Если* $A_1 \supset A_2, \dots, \supset A_n \supset \mathcal{A}, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

Доказательство. Пусть $B_n \downarrow \varnothing$. Тогда обозначим $A_n = B_n \setminus B_{n+1}, n = 1, \dots, ..$ A_n попарно несовместны и

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k,$$

поэтому из счетной аддитивности меры следует сходимость ряда

$$P(B_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

и сумма остатка ряда

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

►

2. (Формула включений и исключений)

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Доказательство. Выводится через обычную формулу включений и исключений для множеств по индукции

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

+

$$\begin{cases} A \cup B = A + (B \setminus AB) \\ \text{Счетная аддитивность} \\ P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) (\text{также по счетной аддитивности}) \end{cases}$$

►

1.2.1 Индикатор

Определение. Индикатор события A - это функция $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Свойства индикатора

1. $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
2. $I_{A_1 \cap A_2} = I_{A_1} I_{A_2}$
3. $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - I_{\bar{A_1} \cap \dots \cap \bar{A_n}} = 1 - I_{\bar{A_1}} \dots I_{\bar{A_n}} = 1 - (1 - I_{A_1}) \dots (1 - I_{A_n})$

2 Условные вероятности и независимость

Определение (Условная вероятность)**.** Пусть $P(B) > 0$. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при условии, что произошло событие B (или просто: при условии B), назовем отношение

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Применяется также обозначение $P_B(A)$

Теорема 2.1 (Теорема умножения)**.** *Пусть события $A_1, \dots, A_n$ таковы, что $P(A_1, \dots, A_{n-1)} > 0$. Тогда*

$$P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1,\dots,A_{n-1}}(A_n)$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что существуют все условные вероятности из формулы.
База индукции $P(AB) = P(B)P_B(A)$.
Переход: $B = A_1, \dots, A_{n-1}, A = A_n$, применим формулу выше ▶

Определение (Разбиение)**.** Систему событий $A_1, \dots, A_n$ будем называть конечным разбиением (в дальнейшем - просто разбиением), если они попарно несовместны ($A_iA_j = \varnothing, i \neq j$) и

$$A_1 + \dots A_n = \Omega$$

Теорема 2.2 (Формула полной вероятности)**.** *Если $A_1, \dots, A_n$ - разбиение и все $P(A_k) > 0$, то для любого события B имеет место формула*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

Доказательство.

$$B = B\Omega = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$$

сумма попарно несовместных событий. Тогда

$$P(B) = P(B\Omega = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n) = \sum_{k=1}^{n} P(BA_k)$$

$$P(BA_k) = P(A_k)P_{A_k}(B) = P(A_k)P(B|A_k)$$

▶

2.1 Формулы Байеса

Теорема 2.3 (Формулы Байеса)**.** *Если $A_1, \dots, A_n$ - разбиение и все $P(A_k) > 0$, то для любого события B ($P(B) > 0$) имеют место формулы:*

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Доказательство.

$$P(A_kB) = P(A_k)P(B|A_k) = P(B)P(A_k|B) \implies P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)}$$

Применяем к $P(B)$ формулу полной вероятности. ▶

1. $P(A_k)$ - априорные вероятности (до опыта)

2. $P(A_k|B)$ - апостериорные вероятности (после опыта)

2.2 Независимость событий

Определение (независимость 2 событий). A и B - независимы, если

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

иначе зависимы

Определение (независимость n событий (в совокупности)). $A_1, \dots, A_n$ называются независимыми, если для любых $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n, 2 \le m \le n$

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_m}),$$

иначе зависимы.

Теорема 2.4. *Если $A_1, \dots, A_n$ независимы, $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$ - индексы все различны, вероятность $P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) > 0$, тогда*

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} | A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{j_1} \dots A_{j_s})$$

Доказательство. $A_1, \dots, A_n$ независимы, поэтому

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_r})$$

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s}) = P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_s})$$

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_r}) P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_s})$$

поэтому

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_s} \cap A_{i_1} \dots A_{i_r}) = P(A_{i_1} \dots A_{i_r}) \times P(A_{j_1} \dots A_{j_s})$$

+ формула условной вероятности ▶

2.3 Независимость разбиений, алгебр/σ-алгебр

Определение (Порожденная алгебра). γ - система множеств. Наименьшая алгебра множеств $\mathscr{A}(\gamma)$, содержащая γ, называется **алгеброй, порожденной системой** γ.

Определение (Порожденная σ-алгебра). Аналогично.

Замечание. Алгебра, порожденная разбиением, является конечной, состоит из пустого множества и множеств вида

$$A_{i_1} + A_{i_2} + \dots A_{i_m}$$

Теорема 2.5. *Каждая конечная алгебра множеств порождается некоторым разбиением*

Доказательство. $\mathscr{B}$ - конечная алгебра событий. Обозначим $\mathscr{B}_w$ - совокупность событий B из $\mathscr{B}$, для которых w из B.

Для каждого $w \in \Omega$ введем $B_w = \bigcap_{B \in \mathscr{B}_w} B$

Покажем, что для двух $\omega \neq \omega'$

$$\left[\begin{array}{l} B_\omega = B_{\omega'} \\ B_\omega \cap B_{\omega'} = \varnothing \end{array}\right.$$

Для любых $\omega \in \Omega$ и $B \in \mathscr{B}$ истинно свойство: если $\omega \in B$, то $B_\omega \subseteq B$ (т.к B_ω - пересечение всех таких B из алгебры, в которых лежит ω)

Пусть теперь $\omega \in B_{\omega'}$, тогда $B_\omega \subseteq B_{\omega'}$ (транзитивность $B_\omega \subseteq B \subseteq B_{\omega'}$)

Далее если $\omega' \in B_\omega$, то $B_{\omega'} \subseteq B_\omega$ и, следовательно, $B_{\omega'} = B_\omega$

Случай $\omega' \in \overline{B_\omega}$ невозможен, так как противоречие $B_{\omega'} \subseteq \overline{B_\omega}$ (а уже было доказано, что $B_\omega \subseteq B_{\omega'}$)

Выберем среди B_ω разные множества $B_1, \dots, B_r$. Это разбиение, т.к $B_1 + \dots + B_r = \Omega$ и $B_i B_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Так как $\forall B \in \mathscr{B}$ представимо в виде $B = \bigcup_{\omega \in B} B_\omega$, то это разбиение порождает алгебру $\mathscr{B}$.

▶

Определение (Независимые разбиения). $\alpha_k : A_{k1} + \dots + A_{kr_k} = \Omega, k = 1, \dots, n$ независимые, если для любых $i_k, 1 \le i_k \le r_k, k = 1, \dots, n$

$$P(A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n}) = P(A_{1i_1}) P(A_{2i_2}) \dots P(A_{ni_n})$$

По-русски: есть n разбиений, они могут быть разной мощности. Берем по любому событию из каждого разбиения. (всего получается n событий) (то есть вариантов формулы всего $|\alpha_1| \times \cdots \times |\alpha_n|$)

Определение (Независимые алгебры (σ-алгебры))**.** $\mathscr{A}, \dots, \mathscr{A}$ - независимы, если $\forall A_i \in \mathscr{A}$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$$

Теорема 2.6. *Конечные алгебры $\mathscr{A}, \dots, \mathscr{A}$ независимы тогда и только тогда, когда независимы порождающие их разбиения $\alpha_1, \dots, \alpha_n$*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Разбиение есть подсистема порожденной алгебры. Из независимости алгебр следует независимость разбиений.

Лемма 2.1. *1. Если события A и B независимы, то $\bar{A}$ и B также независимы*

2. Если A_1 и B независимы и A_2 и B независимы, а $A_1 A_2 = \varnothing$, то $A_1 + A_2$ и B независимы.

Доказательство. 1. A и B независимы, тогда

$$P(B\bar{A}) = P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$$

2. A_i и B независимы: $P(A_i B) = P(A_i)P(B)$

$$P((A_1 + A_2)B) = P(A_1)P(B) + P(A_2)P(B) = P(B)(P(A_1) + P(A_2)) = P(B)P(A_1 + A_2)$$

▸

$\Longleftarrow$ Каждое событие из алгебры - сумма попарно несовместных событий из соответствующего разбиения. Обратный вывод по лемме. ▸

Замечание. Каждое событие A порождает разбиение $A + \bar{A} = \Omega$, порождающее алгебру $\mathscr{A}(A)$. Из леммы вытекает, что независимость событий $A_1, \dots, A_n$ и независимость порожденных ими алгебр $\mathscr{A}(A_1), \dots, \mathscr{A}(A_n)$ эквивалентны.

2.4 Независимые испытания

Если имеем n независимых испытаний, то можно построить одно большое вероятностное пространство, элементы которого являются прямыми произведениями соответствующих Ω_i и тд.

Подалгебры должны быть независимы, тогда такое пространство всегда можно построить

Прямое произведение вероятностей:

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), p(\omega) = p_1(\omega_1) \dots p_n(\omega_n), \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n$$

События являются "прямоугольниками":

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n$$

состоит из векторов $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i \in A_i \in \mathscr{A}$

Вероятность A:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in A_1} p_1(\omega_1) \cdots \sum_{\omega \in A_n} p_n(\omega_n) = \prod_{k=1}^{n} P_k(A_k)$$

Пусть $\mathscr{A}'$ - подалгебра $\mathscr{A}$, где все $A_i = \Omega_i$ для всех компонент прямоугольника $(i \neq k)$

События из этой алгебры (A_i') изоморфны событиям из A_i.

$$P(A_i') = P_i(A_i)$$

Событие A является пересечением событий $A_k', k = 1, \dots, n$

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k') = \prod_{k=1}^{n} P(A_k')$$

Поэтому алгебры A_j' независимы.

2.4.1 Схема Бернулли

n испытаний, в котором либо успех, либо неудача (неуспех) (в каждом испытании вероятность успеха и неудачи равны), тогда вероятность элементарного события (вектора из событий каждого испытания, он булев, так как каждое ω_i либо 0, либо 1)

$$p(\omega) = \prod_{i=1}^{n} p^{\omega_i} q^{1-\omega_i}$$

Обозначим $B_k = \{\omega : \omega_1 + \dots + \omega_n = k\}$

Для $\omega \in B_k$ $p(\omega) = p^k q^{n-k}$

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 1, \dots n - \textbf{Биномиальное распределение}$$

Еще есть полиномиальноая схема. там не по 2 исхода, а по r.

3 Случайные величины

Определение (Случайная величина)**.** Случайной величиной (СВ) $X(\omega)$ называется функция элементарного события ω с областью определения Ω и областью значений $\mathbb{R}$ такая, что событие $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ принадлежит σ -алгебре $\mathcal{F}$ при любом действительном $x \in \mathbb{R}$. Значения x функции $X(\omega)$ называются реализациями СВ $X(\omega)$.

Определение (Алгебра, порожденная случайной величиной)**.** Пусть $x_1 < \dots < x_k$ - значения, принимаемые случайной величиной ξ. Каждая такая величина определяет разбиение из событий $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$. Т.к $x_i \neq x_j$, то $A_i A_j = \varnothing$. Сумма - достоверное событие Ω.

Разбиение порождает алгебру событий

$$\{\xi \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$$

, B - числовое множество.

Определение (Закон распределения)**.** Любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных со случайной величиной.

3.1 Примеры законов распределения

1. Биномиальный закон

2. Гипергеометрическое распределение: распределение числа белых шаров ξ в выборке без возвращения объема n из урны, содержащей M белых и N-M черных шаров

$$P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_M^n}, m = 0, 1, \dots \min(n, M)$$

3. Равномерное распределение

Определение (Математическое ожидание)**.** Математическое ожидание случайной величины $\xi = xi(\omega)$ обозначается $M\xi$ и определяется как сумма

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) p(\omega)$$

среднее значение ξ

3.2 Свойства мат. ожидания

1. $MI_A = P(A)$

Доказательство.

$$MI_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = P(A)$$

▶

2. Аддитивность: $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

Доказательство. ▶

Из этого также следует конечная аддитивность.

3. Для любой константы C
$$M(C\xi) = cM\xi, \quad MC = C$$
4. Если $\xi \geq \eta$, то $M\xi \geq M\eta$. $\xi \geq 0 \& M\xi = 0 \implies P\{\xi = 0\} = 1$
5. Математическое ожидание ξ выражается через закон распределения случайной величины ξ формулой
$$M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_k P\{\xi = x_i\}$$

Подставляя в числовую функцию случайную величину, мы также получаем случайную величину. Например, если $\eta = g(\xi)$, то
$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i) P\{\xi = x_i\}$$
При этом
$$g(x_i) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i) I_{\xi = x_i}$$

Определение (n-ый момент случайной величины)**.** Математическое ожидание $M\xi^n$ называется n-ым моментом (или моментом n-ого порядка) случайной величины ξ (или ее закона распределения).

Определение (Абсолютный n-ый момент)**.** Математическое ожидание $M|\xi|^n$.

Определение (Центральный момент n-ого порядка)**.** $M(\xi - M\xi)^n$

Определение (Абсолютный центральный момент n-ого порядка)**.** $M|\xi - M\xi|^n$

Определение (Дисперсия)**.** $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$

Определение (Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение))**.** $\sqrt(D\xi)$

3.3 Свойства дисперсии

1. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$
2. $D\xi \leq 0$ и $D\xi = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая константа c, что $P\{\xi = c\} = 1$
3. Для любой константы c $D(c\xi) = c^2 D\xi, \quad D(\xi + c) = D\xi$

Теорема 3.1 (Неравенство Иенсена)**.** *Если числовая функция $g(x)$, то для любой случайной величины ξ*
$$Mg(\xi) \leq g(M\xi)$$

Теорема 3.2 (Неравенство Ляпунова)**.** *Для любых положительных $\alpha \leq \beta$*
$$(M|\xi|^\alpha)^{1/\alpha} \leq (M|\xi|^\beta)^{1/\beta}$$

Теорема 3.3 (Неравенство Коши-Буняковского)**.**

3.4 Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение
$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2 - 1}{12}$$
2. Биномиальное (распределение Бернулли)
$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p)$$
3. Геометрическое распределение
$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}$$
4. Распределение Пуассона
$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda$$

3.5 Многомерные законы распределения

3.6 Независимость случайных величин

Определение (Независимость случайных величин). $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если порожденные ими алгебры

$$\mathcal{A}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{A}_{\xi_n}$$

независимы.

Определение (Независимость случайных величин). $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если для любых $x_{1_{j_1}} \ldots, x_{x_{j_n}}$

$$P\{\xi_1 = x_{1_{j_1}}, \xi_n = x_{1_{j_n}}\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i = x_{1_{j_i}}\}$$

Теорема 3.4. *Если случайные величины $\xi_1, \ldots \xi_n$ независимы, а $g_i(x)$ - числовые функции, то случайные величины $\eta_1 = g_1(\xi_1), \ldots \eta_n = g_n(\xi_n)$ также независимы.*

Теорема 3.5 (Мультипликативное свойство математических ожиданий). *Если случайные величины $\xi_1, \ldots \xi_n$ независимы, то*

$$M\xi_1, \ldots, \xi_n = \prod_{i=1}^{n} M\xi_i$$

Теорема 3.6 (Аддитивное свойство дисперсии). *Если случайные величины $\xi_1, \ldots \xi_n$ независимы, то*

$$D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_n$$

3.7 Евклидово пространство случайных величин

Условное мат. ожидание $M(\xi|\eta)$- ортогональная проекция ξ на линейное подпространство η

3.8 Условные математические ожидания

Определение (Условная вероятность). Условная вероятность $P(B|\mathscr{A}(\alpha))$ относительно $\mathscr{A}(\alpha)$ как случайную величину, которая принимает значение $P(B|A_k)$ при $\omega \in A_k$.

Определение (Условный закон распределения). Условный закон распределения η при заданном значении $\xi = x_k$ назовем набор условных вероятностей

$$P\{\eta = y_t|\xi = x_k\} = \frac{P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}, \quad t = 1, \ldots, m$$

Определение (Условное мат.ожидание). Условное мат.ожидание η при заданном значении $\xi = x_k$

$$M\{\eta|\xi = x_k\} = \sum_{t=1}^{m} P\{\eta = y_t|\xi = x_k\} = \frac{\sum_{t=1}^{m} y_t P(\eta = y_t, \xi = x_k)}{P(\xi = x_k)}$$

Условное мат.ожидание является функцией от η. Случайная величина $M(\eta|\xi)$ - условное мат.ожидание при заданном ξ

Определение.

$$M[M(\eta|\xi)] = \sum_{k=1}^{n} P\{\xi = x_k\} M\{\eta|\xi = x_k\}$$

Теорема 3.7.

$$M[M(\eta|\xi)] = M\eta$$

Теорема 3.8 (Неравенство Чебышева). *Для любого $x > 0$ имеют место неравенства:*

$$P\{|\xi| \geq x\} \leq \frac{M|\xi|}{x}$$

$$P\{|\xi - M\xi| \geq x\} \leq \frac{D\xi}{x^2}$$

4 Случайные величины (общий случай)

Определение. Числовая функция $\xi = \xi(\omega)$ от элементарного события $\omega \in \Omega$ называется случайной величиной, если для любого числа x

$$\{\xi \leq x\} = \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}$$

Определение (Функция распределения случайной величины ξ)**.**

$$F(x) = F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$$

, определенная при всех $x \in R$

При помощи этой функции можно выразить вероятность попадания ξ в интервалы.

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\{\xi < x\} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \{x - \frac{1}{n-1} < \xi \leq x - \frac{1}{n}\}$$

$$P(\xi = x) = F(x) - F(x - 0)$$

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1 - 0)$$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0)$$

Теорема 4.1 (Свойства функции распределения)**.** *Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:*

1. *F(x) не убывает*
2. *F(x) непрерывна справа*
3. $F(+\infty) = 1$
4. $F(-\infty) = 0$

Определение (Борелевская σ-алгебра)**.** σ-алгебра $\mathcal{A}$ числовых множеств, порожденная всевозможными интервалами вида $x_1 < x \leq x_2$, называется борелевской; множества A, входящие в $\mathcal{A}$, называются борелевскими.

Определение ($\sigma-$алгебра, порожденная случайной величиной ξ)**.** Совокупность $\xi^{-1}(B)$ для всех борелевских множеств борелевской алгебры.

4.1 Примеры дискретных распределений

1. Биномиальное
2. Пуассоновское
3. Геометрическое

Теорема 4.2. *Если ξ - случайная величина, а $g(x)$ - борелевская функция, то $\eta = g(\xi)$ есть случайная величина*

Определение (Распределение вероятностей)**.** $P_\xi(B)$, определенная для всех $B \in \mathscr{B}$, называется распределением вероятностей случайной величины ξ

Определение (величина с дискретным распределением)**.** величина имеет дискретное распределение, если в точках разрыва функции распределения вероятности таковы, что их сумма $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Определение (Плотность распределения)**.** $p(x) = p_\xi(x)$ - плотность распределения случайной величины ξ, если для любых $x_1 < x_2$

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x) dx$$

4.2 Свойства

$$p(x) \leq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

5 Математическое ожидание

Определение (Простая случайная величина)**.** Случайная величина простая, если она представима в виде

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{j=1}^{m} x_j I_{A_j}(\omega)$$

где события $A_1, \ldots, A_m$ составляют разбиение, т.е $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\sum_{j=1}^{m} A_i = \Omega$

Определение (Мат. ожидание простой случайной величины)**.**

$$M\xi = \sum_{j=1}^{m} x_j P(A_j)$$

Определение (Мат. ожидание неотрицательной случайной величины)**.**

$$M\xi = \lim_{n\to\infty} M\xi^n$$

Определение (Мат. ожидание в общем случае)**.**

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,$$

где $\xi^+ = \xi I_{\{\xi \geq 0\}}$, $\xi^+ = |\xi| I_{\{\xi < 0\}}$

5.1 Свойства мат. ожидания

1. Свойство линейности
2. Свойство положительности
3. Свойство конечности

5.2 Джентльменский набор абсолютно непрерывных распределений

1. Нормальное (гауссово распределение)

   Определение (гауссово распределение)**.** Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ), $-\infty < a < \infty, \sigma > 0$, если она имеет плотность

   $$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

   Нормальное распределение с параметрами (0, 1) называется стандартным.

   $$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   Для плотности истинно условие

   $$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = |t = \frac{x}{\sqrt{2}}| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = |\text{гауссов интеграл}| = 1$$

2. Равномерное распределение

   Определение (равномерное распределение)**.** Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [a, b] если ее плотность имеет вид:

   $$p_\xi(x) = \begin{cases} C & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b \end{cases}$$

   Так как

   $$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = C\int_a^b dx = C(b-a) = 1,$$

   то $C = b - a$.

3. Гамма-распределение

   Определение (гамма распределение)**.**

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} & x \geq 0, \end{cases}$$

   где $\alpha > 0, \lambda > 0$ - параметры

   При $\alpha = 1$ имеем показательное распределение

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = | -\lambda x = t, dt = -\lambda dx| = -\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{-\lambda} dt = e^t|_{-\infty}^0 = 1 - 0 = 1$$

$p_\xi(x)$	$F_\xi(x)$	$M(\xi)$	$D(\xi)$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{2}[1 + erf(\frac{x-a}{\sqrt{2\sigma^2}})]$	a	σ^2
$\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}.$	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}.$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\begin{cases} x^{\alpha-1} \frac{e^{-x\lambda}}{\lambda^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	$\dots$	$\alpha\lambda^{-1}$	$\alpha\lambda^{-2}$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

5.3 Правила для вычисления

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx$$

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_\xi(x) dx$$

6 Производящие функции

Определение (Целочисленная случайная величина)**.** Дискретная случайная величина ξ, принимающая только целые неотрицательные значения.

Закон распределения:

$$p_n = P\{\xi = n\}, n = 0, 1 \dots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Определение (Производящая функция)**.**

$$\phi_\xi(s) = Ms^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

Ряд абсолютно сходится при $|s| \leq 1$

6.1 Джентльменский набор

1. Равномерное дискретное распределение

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad M\xi = \frac{1+N}{2}, \quad D\xi = \frac{N^2-1}{12}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} = -\ln(1-s), \quad f_\xi(t) = -\ln(1-e^{it})$$

2. Биномиальное (распределение Бернулли)

$$P\{n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad M\xi = np, \quad D\xi = np(1-p), \quad \phi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (ps+1-p)^n,$$

$$f_\xi(t) = (pe^{it}+1-p)^n$$

3. Геометрическое распределение

$$P\{n = k\} = (1-p)p^k, \quad M\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}, \quad \phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p^k(1-p)s^n = \frac{p}{1-(1-p)s}, \quad f_\xi(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$$

4. Распределение Пуассона

$$P\{n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda, \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n s^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}, \quad f_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

7 Характеристические функции

129-137

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$$
$$|M\xi| \le M|\xi|$$

Определение (характеристическая функция)**.** Функция $f_\xi(t)$ называется характеристической функцией случайной величины ξ, если она имеет вид

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi}$$

Если ξ - целочисленная случайная величина, то $\phi_\xi(z) = Mz^\xi$

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = M(e^{it})^\xi = \phi_\xi(e^{it})$$

(Свойства х.ф.)

1. $|f_\xi(t)| \le 1, f_\xi(0) = 1$
2. f_ξ - равномерно непрерывна по t
3. $f_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi)}e^{itb} = e^{itb}Me^{i\xi(at)} = e^{itb}f_\xi(at)$
4. $\xi_1, \dots, \xi_n$ - независимы, тогда

$$f_{\xi_1+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(t)$$

$$Me^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} = M\prod_{i=1}^{n} e^{it\xi_i} = \prod_{j=1}^{n} Me^{it\xi_j} = \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j}(t)$$

5. $f_\xi(-t) = \overline{f_\xi(t)}$

$$Me^{-it\xi} = M\overline{e^{it\xi}} = \overline{Me^{it\xi}}$$

6. $\exists m_1, \dots, m_n = M\xi^n$ (существуют первые n моментов), тогда

$$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} m_k + R_n(t),$$

где $R_n(t) = o(t^n)$ при $t \to 0$

7.

$$\zeta \begin{cases} \xi, p \\ \eta, 1-p, \end{cases} \quad p \in (0,1)$$

$$f_\zeta(t) = pf_\xi(t) + (1-p)f_\eta(t)$$

Пример. 1. $\cos(t)$

мы не знаем косинус...

$$\xi = \begin{cases} -1 & p = 1/2 \\ 1 & p = 1/2 \end{cases} \quad \text{Бернуллиевская случайная величина}$$

$Me^{it\xi} = \frac{1}{2}e^{-it} = \frac{1}{2}e^{-it} = \cos t$

2. $\cos^3(t)$

   свойство про независимость

3. $\frac{\cos(t)+\cos(2t)}{2}$

   свойство про независимость, свойство про выпуклую комбинацию (3)

4. e^{-t^4}

   шестое свойство, по формуле Тейлора

$$e^{-t^4} = 1 - t^4 + o(t^4)$$

функция обращения - слишком тяжко, проверяем по свойствам а потом мучаемся (Фурье, Лаплас?)

$\xi = C$ с вероятностью 1

$$Me^{i\xi t} = e^{iCt}$$

Замечание. В силу 6 свойства, можно обобщить - если моменты до второго равны 0, то уже не характеристическая функция. (сравниваем с х.ф тождественного нуля, а t^4 высоко)

1. Стандартное распределение

$$f_\xi(t) = e^{-t^2/2}$$

   Мучаемся

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx$$

   дифференцируем.

$$f'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx-x^2/2} dx =$$

$$u = e^{itx}, du = ite^{itx}dx, dv = \frac{xdx}{e^{x^2/2}} = \frac{d(x^2/2)}{e^{x^2/2}} = -d(-x^2/2)e^{-x^2/2} = -d(e^{-x^2/2}), v = -e^{-x^2/2} \implies$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}(uv - \int_{-\infty}^{\infty} vdu) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}(-e^{itx}e^{-x^2/2}|_{-\infty}^{\infty} + it\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^2/2}dx) = \frac{i^2t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-x^2/2}dx = -tf(t)$$

$$f'(t) + tf(t) = 0,$$

уравнение с разделяющимися перем. с начальным условием$f(0) = 1$(по свойству хар.функции)

$$f(t) = e^{-t^2/2}$$

   можно получить нормальное при помощи 3 свойства.

$$f(t) = e^{ita}f_\xi(\sigma t) = e^{ita-(\sigma t)^2/2}$$

2. равномерное на [a, b]:

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx$$

$$f_\xi = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

3. Гамма распределение с параметром α

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)e^{-x}}$$

$$f_\xi(t) = (1 - it)^{-\alpha}$$

многозначная функция - нужно выделять ветвь

Замечание (Вырожденное распределение).

$$P\{\xi = C\} = 1, \quad f_\xi(t) = e^{itC}$$

Определение (свертка)**.** Свертка двух функций на прямой (обозначается $f * g$) - это функция

$$f * g : y \mapsto \int f(x)g(y - x)dx.$$

7.1 Абсолютно непрерывный случай

Определение (L1-пространство)**.** Пространством L_1 называется нормированное пространство, элементами которого служат классы эквивалентных между собой суммируемых функций; сложение элементов в L_1 и умножение их на числа определяются как обычное сложение и умножение функций, а норма задается формулой

$$\|f\| = \int |f(x)|d\mu$$

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx \quad f_\xi(t) \text{ преобразование Фурье функции } p_\xi(x)$$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_\xi(t)dt \quad \text{Обратное преобразование Фурье}$$

имеют смысл для функций из $L_1(-\infty, -\infty)$, т.е. с конечным интегралом $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$

Теорема 7.1. *Пусть $f(t)$ - характеристическая функция и $F(x)$ - соответствующая функция распределения. Тогда, если x-l и x+l являются точками непрерывности функции $F(x)$, то*

$$F(x + l) - F(x - l) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) \frac{\sin tl}{t} e^{-\sigma^2 t^2/2} dt$$

Теорема 7.2. *Каждой хар.функции соответствует только одна функция распределения.*