Содержание

1 Вероятностное пространство

Определение (Алгебра)**.** Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется алгеброй, если выполнены след. аксиомы:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathbb{A}$
3. (аддитивность) $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathbb{A}$

Определение (σ-алгебра)**.** Алгебра называется σ-алгеброй, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

Определение (мера)**.** $\mu : \mathcal{A} \to [0; \infty)$ - мера, если

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j : \quad \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{счетная аддитивность}$$

Мера конечная, если $\mu(\Omega) < \infty$
Мера вероятностная, если $\mu(\Omega) = 1$

Определение (Вероятностное пространство)**.** Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где

1. Ω - пространство элементарных событий;
2. $\mathcal{A}$ - $\sigma-$алгебра подмножеств Ω (события);
3. P - вероятностная счетно-аддитивная мера на $\mathcal{A}$ (вероятность); называется вероятностным пространством.

Все элементарные исходы равновозможны

Определение (Классическая вероятность)**.** Модель вероятностного пространства (A - событие)

1. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ - конечное пространство
2. $\mathcal{A}$ все подмножества Ω
3. $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p_\omega = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Определение (Геометрическая вероятность)**.** $V \in \mathbb{R}^n$

1. $\Omega = V$
2. $\mathcal{A}$ - борелевская $\sigma-$алгебра (минимальная $\sigma-$алгебра, содержащая все компакты) подмножеств V
3. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(V)}$

1.1 Некоторые следствия аксиоматики

1.

Аксиома (Аксиома непрерывности). *Если* $A_1 \supset A_2, \ldots, \supset A_n \supset \mathcal{A}, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

Доказательство. Пусть $B_n \downarrow \varnothing$. Тогда обозначим $A_n = B_n \setminus B_{n+1}, n = 1, \ldots, ..$ A_n попарно несовместны и

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k,$$

поэтому из счетной аддитивности меры следует сходимость ряда

$$P(B_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

и сумма остатка ряда

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

►

2. (Формула включений и исключений)

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

Доказательство. Выводится через обычную формулу включений и исключений для множеств по индукции

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

\+

$$\begin{cases} A \cup B = A + (B \setminus AB) \\ \text{Счетная аддитивность} \\ P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) (\text{также по счетной аддитивности}) \end{cases}$$

►

1.1.1 Индикатор

Определение. Индикатор события A - это функция $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Свойства индикатора

1. $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
2. $I_{A_1 \cap A_2} = I_{A_1} I_{A_2}$
3. $I_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = 1 - I_{\bar{A_1} \cap \cdots \cap \bar{A_n}} = 1 - I_{\bar{A_1}} \ldots I_{\bar{A_n}} = 1 - (1 - I_{A_1}) \ldots (1 - I_{A_n})$

2 Условные вероятности и независимость

Определение (Условная вероятность)**.** Пусть $P(B) > 0$. Условной вероятностью $P(A|B)$ события A при условии, что произошло событие B (или просто: при условии B), назовем отношение

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Применяется также обозначение $P_B(A)$

Теорема 2.1 (Теорема умножения)**.** *Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ таковы, что $P(A_1, \ldots, A_{n-1)} > 0$. Тогда*

$$P(A_1, \ldots, A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1,\ldots,A_{n-1}}(A_n)$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что существуют все условные вероятности из формулы.
База индукции $P(AB) = P(B)P_B(A)$.
Переход: $B = A_1, \ldots, A_{n-1}, A = A_n$, применим формулу выше ▶

Определение (Разбиение)**.** Систему событий $A_1, \ldots, A_n$ будем называть конечным разбиением (в дальнейшем - просто разбиением), если они попарно несовместны и

$$A_1 + \ldots A_n = \Omega$$

Теорема 2.2 (Формула полной вероятности)**.** *Если $A_1, \ldots, A_n$ - разбиение и все $P(A_k) > 0$, то для любого события B имеет место формула*

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

3 Случайные величины

Определение (Случайная величина)**.** Случайной величиной (СВ) $X(\omega)$ называется функция элементарного события ω с областью определения Ω и областью значений $\mathbb{R}$ такая, что событие $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ принадлежит σ -алгебре $\mathcal{F}$ при любом действительном $x \in \mathbb{R}$. Значения x функции $X(\omega)$ называются реализациями СВ $X(\omega)$.

Определение (Закон распределения)**.** Любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных со случайной величиной.

Примеры законов распределения

1. Биномиальный закон
2. Гипергеометрическое распределение
3. Равномерное распределение

Определение (Математическое ожидание)**.** Математическое ожидание случайной величины $\xi = xi(\omega)$ обозначается $M\xi$ и определяется как сумма

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)p(\omega)$$

Свойства мат. ожидания

1. $MI_A = P(A)$

   Доказательство.

   $$MI_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = P(A)$$

   ▶

2. Аддитивность: $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

   Доказательство. ▶

Из этого также следует конечная аддитивность.

3. Для любой константы C
$$M(C\xi) = cM\xi, \quad MC = C$$

4. Математическое ожидание ξ выражается через закон распределения случайной величины ξ формулой
$$M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_k P\{\xi = x_i\}$$

Подставляя в числовую функцию случайную величину, мы также получаем случайную величину. Например, если $\eta = g(\xi)$, то
$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)P\{\xi = x_i\}$$

При этом
$$g(x_i) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)I_{\xi=x_i}$$

Определение (n-ый момент случайной величины). Математическое ожидание $M\xi^n$ называется n-ым моментом (или моментом n-ого порядка) случайной величины ξ (или ее закона распределения).

Определение (Абсолютный n-ый момент). Математическое ожидание $M|\xi|^n$.

Определение (Центральный момент n-ого порядка). $M(\xi - M\xi)^n$

Определение (Абсолютный центральный момент n-ого порядка). $M|\xi - M\xi|^n$

Определение (Дисперсия). $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$

Определение (Среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение)). $\sqrt(D\xi)$

Свойства дисперсии

1. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$
2. $D\xi \leq 0$ и $D\xi = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая константа c, что $P\{\xi = c\} = 1$
3. Для любой константы c $D(c\xi) = c^2 D\xi, \quad D(\xi + c) = D\xi$

Теорема 3.1 (Неравенство Иенсена). *Если числовая функция $g(x)$, то для любой случайной величины ξ*
$$Mg(\xi) \leq g(M\xi)$$

Теорема 3.2 (Неравенство Ляпунова). *Для любых положительных $\alpha \leq \beta$*
$$(M|\xi|^\alpha)^{1/\alpha} \leq (M|\xi|^\beta)^{1/\beta}$$

Теорема 3.3 (Неравенство Коши-Буняковского).

3.1 Многомерные законы распределения

3.2 Независимость случайных величин

Определение (Независимость случайных величин). $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются независимыми, если порожденные ими алгебры
$$\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}$$
независимы.

Теорема 3.4 (Неравенство Чебышева). *Для любого $x > 0$ имеют место неравенства:*
$$P\{|\xi| \geq x\} \leq \frac{M|\xi|}{x}$$
$$P\{|\xi - M\xi| \geq x\} \leq \frac{D\xi}{x^2}$$

3.3 Случайные величины (общий случай)

Определение. Числовая функция $\xi = \xi(\omega)$ от элементарного события $\omega \in \Omega$ называется случайной величиной, если для любого числа x

Определение (Функция распределения случайной величины ξ).

Теорема 3.5 (Свойства функции распределения). *Функция распределения $F(x)$*

Определение (Борелевская σ-алгебра). σ-алгебра $\mathcal{A}$ числовых множеств, порожденная всевозможными интервалами вида $x_1 < x \leq x_2$, называется борелевской; множества A, входящие в $\mathcal{A}$, называются борелевскими.

Примеры дискретных распределений

1. Биномиальное
2. Пуассоновское
3. Геометрическое

Теорема 3.6. *Если ξ - случайная величина, а $g(x)$ - борелевская функция, то $\eta = g(\xi)$ есть случайная величина*