

61 Решить интегральные уравнения:

$$x(t) = \mu \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + t^2, \quad x(t) = \mu \int_0^1 t^m s^n x(s) ds + t^k$$

Ядра обоих интегральных уравнений вырождены.

(a)

$$e^{t-s} x(s) = (e^t)(e^{-s} x(s))$$

$$x(t) = \mu e^t \int_0^1 e^{-s} x(s) ds + t^2$$

Пусть  $C = \int_0^1 e^{-s} x(s) ds$ . Тогда:

$$x(t) = C \mu e^t + t^2$$

$$C = \int_0^1 e^{-s} (\mu e^s C + s^2) ds = \mu C + \int_0^1 s^2 e^{-s} ds = \mu C + e - 2$$

$$C = \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - \mu}$$

$$x(t) = \mu \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - \mu} e^t + t^2, \text{ при } \mu = 1 \text{ уравнение неразрешимо.}$$

(b)

$$x(t) = \mu \int_0^1 t^m s^n x(s) ds + t^k$$

$$C = \int_0^1 s^n x(s) ds$$

$$x(t) = \mu C t^m + t^k$$

$$C = \int_0^1 s^n (\mu C s^m + s^k) ds = \mu C \int_0^1 s^{n+m} ds + \int_0^1 s^{k+n} ds = \frac{\mu C}{n+m+1} + \frac{1}{k+n+1}$$

$$C = \frac{n+m+1}{(k+n+1)(n+m+1-\mu)}$$

$$x(t) = \frac{\mu(n+m+1)t^m}{(k+n+1)(n+m+1-\mu)} + t^k$$

при  $\mu = m+n+1$  уравнение неразрешимо.

62 Решить интегральные уравнения:

$$x(t) = \mu \int_0^\pi \cos(t+s) x(s) ds + 2 \sin t, \quad x(t) = \int_0^t e^{t-s} x(s) ds + t + 1$$

(a)

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mu \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds + 2 \sin t \\
\cos(t+s) &= \frac{e^{-is-it} + e^{is+it}}{2} = \frac{e^{-is}e^{-it} + e^{is}e^{it}}{2} \\
x(t) &= \frac{\mu}{2} \int_0^\pi e^{-is}e^{-it}x(s)ds + \frac{\mu}{2} \int_0^\pi e^{is}e^{it}x(s)ds + 2 \sin t \\
C_1 &= \int_0^\pi e^{-is}x(s)ds, C_2 = \int_0^\pi e^{is}x(s)ds \\
x(t) &= \frac{\mu}{2}C_1e^{-it} + \frac{\mu}{2}C_2e^{it} + 2 \sin t \\
\begin{cases} C_1 = \int_0^\pi e^{-is}(\frac{\mu}{2}C_1e^{-is} + \frac{\mu}{2}C_2e^{is} + 2 \sin s)ds \\ C_2 = \int_0^\pi e^{is}(\frac{\mu}{2}C_1e^{-is} + \frac{\mu}{2}C_2e^{is} + 2 \sin s)ds \end{cases} \\
\begin{cases} C_1 = \int_0^\pi \frac{\mu}{2}C_1e^{-2is} + \frac{\mu}{2}C_2 + 2e^{-is} \sin s ds \\ C_2 = \int_0^\pi \frac{\mu}{2}C_1 + \frac{\mu}{2}C_2e^{2is} + 2e^{is} \sin s ds \end{cases} \\
\begin{cases} C_1 = \frac{\mu}{2}C_2\pi + \int_0^\pi \frac{\mu}{2}C_1e^{-2is} + 2e^{-is} \sin s ds \\ C_2 = \frac{\mu}{2}C_1\pi + \int_0^\pi \frac{\mu}{2}C_2e^{2is} + 2e^{is} \sin s ds \end{cases} \\
\sin s = i \frac{e^{-is} - e^{is}}{2}, e^{-is} \sin s = i \frac{e^{-2is} - 1}{2}, e^{is} \sin s = i \frac{1 - e^{-2is}}{2} \\
2 \int_0^\pi e^{-is} \sin s ds = -i\pi, 2 \int_0^\pi e^{is} \sin s ds = i\pi \\
\begin{cases} C_1 = \frac{\mu}{2}C_2\pi - i\pi \\ C_2 = \frac{\mu}{2}C_1\pi + i\pi, \end{cases} C_1 = -\frac{2i\pi}{2 + \mu\pi}, C_2 = \frac{2i\pi}{2 + \mu\pi} \\
x(t) = -\frac{\mu i\pi}{2 + \mu\pi}e^{-it} + \frac{\mu i\pi}{2 + \mu\pi}e^{it} + 2 \sin t = \frac{\mu i\pi}{2 + \mu\pi}2i \sin t + 2 \sin t = \frac{4 \sin t}{2 + \mu\pi}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t e^{t-s}x(s)ds + t + 1 \\
x'(t) &= \int_0^t e^{t-s}x(s)ds + 1 + x(t) \\
x'(t) - x(t) &= x(t) - t \\
x'(t) - 2x(t) &= -t \\
x(t) &= Ce^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Значение константы найдем из начального условия  $x(0) = 1$ :

$$1 = C + \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{3}{4}$$

$$x(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

63 Сведением к дифференциальному уравнению решить уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t \cos(t-s)x(s)ds = \sinh t$$

$$\cosh t = \int_0^t \sin(t-s)x(s)ds + \cos(0)x(t)$$

$$\sinh t = - \int_0^t \cos(t-s)x(s)dx + x'(t)$$

$$x'(t) = 2 \sinh t$$

$$x(t) = 2 \cosh t + c$$

Начальное условие определяем из  $\int_0^0 \sin(0-s)x(s)ds + x(0) = \cosh(0) = 1$

$$x(0) = 2 \cosh(0) + c = 1$$

$$c = -1$$

$$x(t) = 2 \cosh(t) - 1$$