# Содержание



# 1 Вероятностное пространство

**Определение** (Алгебра)**.** Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества $\Omega$ называется алгеброй, если выполнены след. аксиомы:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathbb{A}$
3. (аддитивность) $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A} \implies A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathbb{A}$

**Определение** ($\sigma$-алгебра)**.** Алгебра называется $\sigma$-алгеброй, если

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

**Определение** (мера)**.** $\mu : \mathcal{A} \to [0; \infty)$ - мера, если

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j : \quad \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{счетная аддитивность}$$

Мера конечная, если $\mu(\Omega) < \infty$
Мера вероятностная, если $\mu(\Omega) = 1$

**Определение** (Вероятностное пространство)**.** Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где

1. $\Omega$ - пространство элементарных событий;
2. $\mathcal{A}$ - $\sigma-$алгебра подмножеств $\Omega$ (события);
3. P - вероятностная счетно-аддитивная мера на $\mathcal{A}$ (вероятность); называется вероятностным пространством.

Все элементарные исходы равновозможны

**Определение** (Классическая вероятность)**.** Модель вероятностного пространства (A - событие)

1. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ - конечное пространство
2. $\mathcal{A}$ все подмножества $\Omega$
3. $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p_\omega = \frac{|A|}{|\Omega|}$

**Определение** (Геометрическая вероятность)**.** $V \in \mathbb{R}^n$

1. $\Omega = V$
2. $\mathcal{A}$ - борелевская $\sigma-$алгебра (минимальная $\sigma-$алгебра, содержащая все компакты) подмножеств $V$
3. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(V)}$

## 1.1 Некоторые следствия аксиоматики

1.

**Аксиома** (Аксиома непрерывности). *Если* $A_1 \supset A_2, \dots, \supset A_n \supset \mathcal{A}, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

*Доказательство.* Пусть $B_n \downarrow \varnothing$. Тогда обозначим $A_n = B_n \setminus B_{n+1}, n = 1, \dots, .$. $A_n$ попарно несовместны и

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k,$$

поэтому из счетной аддитивности меры следует сходимость ряда

$$P(B_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

и сумма остатка ряда

$$P(B_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

▶

2. (Формула включений и исключений)

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

*Доказательство.* Выводится через обычную формулу включений и исключений для множеств по индукции

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

+

$$\begin{cases} A \cup B = A + (B \setminus AB) \\ \text{Счетная аддитивность} \\ P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) (\text{также по счетной аддитивности}) \end{cases}$$

▶

### 1.1.1 Индикатор

**Определение.** Индикатор события А - это функция $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

**Свойства индикатора**

1. $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
2. $I_{A_1 \cap A_2} = I_{A_1} I_{A_2}$
3. $I_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - I_{\bar{A_1} \cap \dots \cap \bar{A_n}} = 1 - I_{\bar{A_1}} \dots I_{\bar{A_n}} = 1 - (1 - I_{A_1}) \dots (1 - I_{A_n})$

# 2 Условные вероятности и независимость

# 3 Случайные величины

**Определение** (Случайная величина). Случайной величиной (СВ) $X(\omega)$ называется функция элементарного события $\omega$ с областью определения $\Omega$ и областью значений $\mathbb{R}$ такая, что событие $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ принадлежит $\sigma$ -алгебре $\mathcal{F}$ при любом действительном $x \in \mathbb{R}$ . Значения x функции $X(\omega)$ называются реализациями СВ $X(\omega)$.

**Определение** (Закон распределения). Любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных со случайной величиной.

**Примеры законов распределения**

**Определение** (Математическое ожидание)**.** Математическое ожидание случайной величины $\xi = xi(\omega)$ обозначается $M\xi$ и определяется как сумма

$$M\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)p(\omega)$$

**Свойства мат. ожидания**

1. $MI_A = P(A)$

   *Доказательство.*

   $$MI_A = \sum_{\omega\in\Omega} I_A(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) = P(A)$$

   ▶

2. Аддитивность: $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta$

   *Доказательство.* ▶

   Из этого также следует конечная аддитивность.

3. Для любой константы C

   $$M(C\xi) = cM\xi, \quad MC = C$$

4. Математическое ожидание $\xi$ выражается через закон распределения случайной величины $\xi$ формулой

   $$M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_k P\{\xi = x_i\}$$

Подставляя в числовую функцию случайную величину, мы также получаем случайную величину. Например, если $\eta = g(\xi)$, то

$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)P\{\xi = x_i\}$$

При этом

$$g(x_i) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)I_{\xi=x_i}$$