Содержание

1 Определение графа. Примеры графов. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях

Определение. Граф (неориентированный) состоит из непустого конечно множества V и конечного множества E неупорядоченных пар элементов из V (записывается G = (V, E)).

Элементы множества $V = V_G$ называются **вершинами**, а элементы множества $E = E_G$ - **ребрами** графа G. Те и другие называются **элементами** графа.

Определение. Если $\{u, v\} \in E$, то будем записывать $e = uv$ и говорить, что вершины u и v смежны, а вершина u и ребро e инцидентны (так же, как вершина v и ребро e). Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

Определение. Степенью вершины v в графе G называется число ребер, инцидентных вершине v (обозначается $d_G(v) = d(v)$).

Вершина степени 0 - изолированная, вершина степени 1 - висячая. Минимальная и максимальная степени вершин графа G обозначаются $\delta(G), \Delta(G)$.

Последовательность степеней вершин графа G, выписанных в порядке неубывания называется степенной последовательностью или вектором степеней графа G.

Определение. Кратные ребра - два и более ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин.

Определение. Петли - ребра, соединяющие вершины сами с собой.

Определение. Мультиграф - граф с кратными ребрами

Определение. Обыкновенный граф - граф без петель и кратных ребер.

Примеры графов:

1. Граф G = (V, E) с n вершинами и m ребрами называется (n, m)-графом, (1, 0)-граф называется тривиальным.
2. Пустой граф - O_n
3. Полный граф $K_n, C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$
4. Двудольный граф $G = (V_1, V_2; E)$
5. Полный двудольный граф - $K_{p,q}$
6. Звезда - полный двудольный граф $K_{1,q}$
7. Простой цикл C_n
8. Регулярный (однородный) граф - граф, все вершины которого имеют одну и ту же степень. Кубические графы - 3-регулярные
9. Графы многогранников

Лемма 1.1 (О рукопожатиях). *Сумма степеней всех вершин произвольного графа $G = (V, E)$ - четное число, равное удвоенному числу его ребер:* $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$

Доказательство. Индукция по числу ребер.
База: если в графе G нет ребер, то $\sum_{v \in V} d_G(v) = 0$. Предположим, что формула верна для любого графа, число ребер в котором не превосходит $m \leq 0$.
Пусть $|E| = m + 1$. Рассмотри произвольное ребро $e = uv \in E$ и удалим его из графа G. Получим граф $G' = (V, E'), |E'| = m$. По предположению индукции $\sum_{v \in V} d_{G'}(v) = 2|E'| = 2m$
Тогда $\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} d_G(v) + 2 = 2m + 2 = 2|E|$. ▶

Теорема имеет место быть и для мультиграфов.

Следствие. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

2 Маршруты, цепи, циклы. Лемма о выделении простой цепи. Лемма об объединении простых цепей

3 Эйлеровы графы. Критерий существования эйлерова цикла (теорема Эйлера)

4 Гамильтоновы графы. Достаточные условия существования гамильтонова цикла (теоремы Оре и Дирака)

5 Изоморфизм графов. Помеченные и непомеченные графы. Теорема о числе помеченных n-вершинных графов

6 Проблема изоморфизма. Инварианты графа. Примеры инвариантов. Пример полного инварианта

7 Связные и несвязные графы. Лемма об удалении ребра. Оценки числа ребер связного графа

8 Плоские и планарные графы. Графы Куратовского. Формула Эйлера для плоских графов

9 Деревья. Теорема о деревьях (критерии)

10 Перечисление деревьев. Теорема Кэли о числе помеченных n-вершинных деревьев

11 Центр дерева. Центральные и бицентральные деревья. Теорема Жордана

12 Изоморфизм деревьев. Процедура кортежирования. Теорема Эдмондса

13 Вершинная и реберная связность графа. Основное неравенство связности

14 Отделимость и соединимость. Теорема Менгера

15 Реберный вариант теоремы Менгера

16 Критерии вершинной и реберной k-связности графа (без доказательства)

17 Ориентированные графы. Основные понятия. Ормаршруты и полумаршруты. Ориентированые аналоги теоремы Менгера

18 Ориентированные графы. Достижимость и связность. Три типа связности. Критерии сильной, односторонней и слабой связности орграфа

19 Основные структуры данных для представления графов в памяти компьютера. Их достоинства и недостатки