61 Решить интегральные уравнения:

$$x(t) = \mu \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + t^2, \quad x(t) = \mu \int_0^1 t^m s^n x(s) ds + t^k$$

Ядра обоих интегральных уравнений вырождены.

(a)

$$e^{t-s} x(s) = (e^t)(e^{-s} x(s))$$

$$x(t) = \mu e^t \int_0^1 e^{-s} x(s) ds + t^2$$

Пусть $C = \int_0^1 e^{-s} x(s) ds$. Тогда:

$$x(t) = C\mu e^t + t^2$$

$$C = \int_0^1 e^{-s}(\mu e^s C + s^2) ds = \mu C + \int_0^1 s^2 e^{-s} ds = \mu C + e - 2$$

$$C = \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - \mu}$$

$$x(t) = \mu \frac{2 - 5e^{-1}}{1 - \mu} e^t + t^2, \text{при } \mu = 1 \text{уравнение неразрешимо.}$$

(b)

$$x(t) = \mu \int_0^1 t^m s^n x(s) ds + t^k$$

$$C = \int_0^1 s^n x(s) ds$$

$$x(t) = \mu C t^m + t^k$$

$$C = \int_0^1 s^n(\mu C s^m + s^k) ds = \mu C \int_0^1 s^{n+m} ds + \int_0^1 s^{k+n} ds = \frac{\mu C}{n+m+1} + \frac{1}{k+n+1}$$

$$C = \frac{n+m+1}{(k+n+1)(n+m+1-\mu)}$$

$$x(t) = \frac{\mu(n+m+1)t^m}{(k+n+1)(n+m+1-\mu)} + t^k$$

при $\mu = m + n + 1$ уравнение неразрешимо.

63 Сведением к дифференциальному уравнению решить уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t \cos(t-s) x(s) ds = \sinh t$$

$$\cosh t = \int_0^t \sin(t-s)x(s)ds + \cos(0)x(t)$$

$$\sinh t = -\int_0^t \cos(t-s)x(s)dx + x'(t)$$

$$x'(t) = 2\sinh t$$

$$x(t) = 2\cosh t + c$$

Начальное условие определяем из $\int_0^0 \sin(0-s)x(s)ds + x(0) = \cosh(0) = 1$

$$x(0) = 2\cosh(0) + c = 1$$

$$c = -1$$

$$x(t) = 2\cosh(t) - 1$$