Содержание

1 Теория булевых функций

1.1 Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от n переменных. Таблица истинности БФ

Определение. Булева функция от n переменных - это отображение $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$

Замечание. Количество БФ от n переменных - 2^{2^n}

Доказательство. Каждая булева функция определяется своим столбцом значений. Столбец является булевым вектором длины $m = 2n$, где n – число аргументов функции. Число различных векторов длины m (а значит и число булевых функций, зависящих от n переменных) равно $2^m = 2^{2^n}$ ▶

1.2 Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия)

Булевы функции одной переменной:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_1 - тождественный 0, f_2 - тождественная функция, f_3 - отрицание ($\neg$), f_4 - тождественная 1

Булевы функции двух переменных

x	y	0	$\wedge$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

1. $\wedge$ - конъюнкция
2. $\leftarrow$ - антиимпликация
3. $\to$ - импликация
4. $\vee$ - дизъюнкция
5. $|$ - штрих Шеффера
6. $\downarrow$ - стрелка Пирса
7. $+$ - взаимоисключающее или, сложение по модулю 2 (XOR)

1.3 Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами

Определение. Формула логики высказываний - слово алфавита логики высказываний, построенное по следующим правилам:

1. символ переменной - формула
2. символы 0 и 1 - формулы
3. если Φ_1 и Φ_2 - формулы, то слова $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, $(\Phi_1 | \Phi_2)$, $\ldots$, Φ_1' тоже формулы

1.4 Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций

Определение. Формулы логики высказываний $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ эквивалетные, если для всех наборов значений $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$ $\Phi(a_1, ..., a_n) = 1 \Leftrightarrow \Psi(a_1, ..., a_n) = 1$

Теорема 1.1. *Справедливы следующие эквивалетности*

1. $a \vee b \equiv b \vee a$ ***симметричность***
2. $a \wedge b \equiv b \wedge a$
3. $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$ ***ассоциативность***
4. $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$
5. $a \wedge (b \vee c) \equiv a \wedge b \vee a \wedge c$ ***транзитивность***
6. $a \vee b \wedge c \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
7. $a \vee a \equiv a$ ***идемпотентность***
8. $a \wedge a \equiv a$
9. $\overline{(a \vee b)} \equiv \overline{a} \wedge \overline{b}$ ***законы де Моргана***
10. $\overline{(a \wedge b)} \equiv \overline{a} \vee \overline{b}$
11. $\overline{\overline{a}} \equiv a$ ***двойное отрицание***
12. $a \vee a \wedge b \equiv a$ ***поглощение***
13. $a \wedge (a \vee b) \equiv a$
14. $a \vee \overline{a} \wedge b \equiv a \vee b$ ***слабое поглощение***
15. $a \wedge (\overline{a} \vee b) \equiv ab$
16. $a \vee 0 \equiv a$
17. $a \wedge 0 \equiv 0$
18. $a \vee 1 \equiv 1$
19. $a \wedge 1 \equiv a$
20. $a \vee \overline{a} \equiv 1$
21. $a\overline{a} \equiv 0$
22. $a \to b \equiv \overline{a} \vee b$
23. $a \leftrightarrow b \equiv \overline{a} \wedge \overline{b} \vee a \wedge b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$
24. $a + b \equiv \overline{a \leftrightarrow b} \equiv \overline{a} \wedge b \vee a \wedge \overline{b}$
25. $a|b \equiv \overline{a \wedge b}$
26. $a \downarrow b \equiv \overline{a \vee b}$

Доказательство. Доказательство сводится к построению таблиц истинности для левой и правой частей каждой эквивалентности ►

1.5 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые БФ

1.6 ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения

1.7 СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения

1.8 Минимизация нормальных форм (карты Карно)

1.9 Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения

1.10 Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций

1.11 Полные системы булевых функций, базисы

1.12 Классы T_0, T_1 (функции, сохраняющие 0 и 1)

Определение. Класс $T_0 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$

Определение. Класс $T_1 = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
x	+	+	-	+	+
$\neg x$	-	-	+	-	+
xy	+	+	-	+	-
$x \vee y$	+	+	-	+	-
$x \oplus y$	+	-	-	-	+
$x \leftrightarrow y$	-	+	-	-	+
$x \rightarrow$	-	+	-	-	-
$x\|y$	-	-	-	-	-
$x \downarrow y$	-	-	-	-	-

Замечание. Классы T_0, T_1 являются замкнутыми.

Доказательство. Докажем для T_0. Достаточно взять булевы функции $g, g_1, \dots, g_n \in T_0$ и доказать, что их суперпозиция из класса T_0.

$g(g_1(0, \dots, 0), \dots, g_n(0, \dots, 0)) = g(0, \dots, 0) = 0$ ▶

1.13 Класс S самодвойственных функций, определение двойственной БФ

Определение. Булева функция $g(x_1, \dots, x_n)$ называется двойственной к БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ (обозначается g = f*), если $g(x_1, \dots, x_n) = f'(x_1', \dots, x_n')$.

Из закона двойного отрицания следует, что $(f^*)^* = f$

Определение. Булева функция f называется самодвойственной, если $f = f^*$.

Определение. Класс самодвойственных функций = $\{f \mid f = f^*\}$

Замечание. Класс S является замкнутым.

Доказательство. Возьмем БФ $g, g_1, \dots g_k \in S$ и докажем, что их суперпозиция будет также из класса S.
Если $F(x_1, \dots, x_n) = g(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$,
то $F^*(x_1, \dots, x_n) = \neg F(\neg x_1, \dots, \neg x_n) = \neg g(g_1(\neg x_1, \dots, \neg x_n), \dots, g_k(\neg x_1, \dots, \neg x_n))$.

Так как $g_i \in S$, то $g_i(x_1, \dots, x_n) = \neg g_i(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$, что эквивалентно $\neg g_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$. Следовательно, $F^*(x_1, \dots, x_n) = \neg g(\neg g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \neg g_k(x_1, \dots, x_n))$.
Так как $g \in S$, то $\neg g(\neg g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \neg g_k(x_1, \dots, x_n)) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)) \implies f^*(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$ ▶

1.14 Класс монотонных функций

Определение. Назовем два набора из 0 и 1 $a = (a_1, \dots a_n), b = (b_1, \dots b_n)$ **соседними**, если все их координаты (кроме одной) совпадают.

Определение. Пусть k - номер единственной координаты, по которой отличаются соседние наборы a, b. Если $a_k = 0$, $b_k = 1$, то мы будем говорить, что набор a **меньше** набора b ($a \prec b$)

Определение (Монотонная функция)**.** БФ $f(x_1, \dots x_n)$ называется монотонной, если $\forall$ соседних наборов a, b таких, что $a \prec b \implies f(a) \leq f(b)$

Замечание. Класс M является замкнутым.

Доказательство. $g, g_1, \dots g_k \in M, F(x_1, \dots, x_n) = g(g_1, \dots g_k)$ и рассмотрим два произвольных набора $a \prec b$. Пусть $c_1 = g_1(a), d_1 = g_1(b), \dots\ c_k = g_k(a), \dots d_k = g_k(b)$

$g_i \in M \implies c_i \leq d_i$

Если наборы $c = (c_1, \dots, c_k)$ и $d = (d_1, \dots, d_k)$ - соседние, то и $F(c) \leq F(d)$

В противном случае легко показать, что $\exists$ цепочка

$$c \prec e_1 \prec \dots \prec e_l \prec d$$

(то есть наши наборы сравнимы по определению Ашаева)

и $g(c) \leq g(d) \implies F(c) \leq F(d) \implies F \in M$ ▶

1.15 Класс линейных функций

1.16 Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях

Лемма 1.1 (о несамодвойственной функции)**.** *Если БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ несамодвойственна, то замыкание класса $[f, \neg x]$ содержит тождественно ложную БФ 0 и тождественно истинную БФ 1.*

Доказательство. Так как f несамодвойственна, то существует набор $a_1, \dots, a_n$ значений аргументов такой, что $f(a_1, \dots, a_n) \neq \neg f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$

Так как БФ принимают только значения 0 и 1, то $f(a_1, \dots, a_n) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$

Составим функцию $g(x) = f(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$, где

$$x^a = \begin{cases} x & \text{если } a = 1 \\ \neg x & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $g \in [f, \neg x]$, так как является их суперпозицией.

$g(0) = f(0^{a_1}, \dots, 0^{a_n}) = f(\neg a_1, \dots, \neg a_n)$, $g(1) = f(1^{a_1}, \dots, 1^{a_n}) = f(a_1, \dots, a_n)$,

$g(0) = g(1)$ - g - константа, g и $\neg g$ принимают значения 0 и 1 чтд. ▶

Лемма 1.2 (О немонотонной функции)**.** *Если $f(x_1, \dots, x_n)$ немонотонна, то $x' \in [f, 0, 1]$*

Доказательство. Из немонотонности f следует существование двух соседних наборов $a = (a_1, \dots, a_n) \prec (b_1, \dots, b_n) = b$ такие, что $f(a) > f(b)$. Б.О.О считаем, что они отличаются только в первой координате

$$a_1 = 0$$
$$b_1 = 1$$
$$a_i = b_i$$

$\lhd g(x, a_2, \dots, a_n) \in [f, 0, 1]$

$g(0) = f(a) = 1 \quad, g(1) = f(b) = 0 \implies g \equiv x'$ ▶

Лемма 1.3 (О нелинейной функции)**.** $f(x_1, \dots, x_n) \notin L \implies xy \in [f, 0, 1, x']$

Доказательство. $f(x_1, \dots, x_n) \notin L \implies$ полином Жегалкина функции f содержит конъюнкцию двух переменных x_1 и x_2

$\implies f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 h_{12}(x_3, \dots x_n) + x_1 h_1(x_3, \dots x_n) + h_0(x_3, \dots x_n)$

$f \notin L \implies h_{12} \neq 0 \implies \exists (a_3, \dots a_n) h_{12}(a_3, \dots a_n) = 1$

Подставим этот набор в ПЖ f:

$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, a_3 \dots a_n) = x_1 x_2 h_{12}(a_3, \dots a_n) + x_1 h_1(a_3, \dots a_n) + h_0(a_3, \dots a_n)$

$h_i \in \{0, 1\} \implies \exists 8$ вариантов того, как выглядит полином Жегалкина

1. Система функций $[g, \neg, 0, 1]$ полна и содержит конъюнкцию
2. g - конъюнкция
3. $xy = g(x, y') \vee xy = g(x', y) \implies xy \in$замыкание

Т.к g выражается через $f(x_1, \dots x_n), 0, 1$, то конъюнкция также лежит в замыкании $[f, \neg, 0, 1]$

►

1.17 Теорема Поста о полноте системы булевых функций

1.18 Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи)

2 Логика высказываний

2.1 Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела

2.2 Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований.

2.3 Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем

2.4 Понятия необходимых и достаточных условий

2.5 Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов

2.6 Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов

2.7 Теорема о дедукции для ИВ

2.8 Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ

2.9 ИВ Генцена, его полнота

2.10 Метод резолюций для логики высказываний (без обоснования корректности)

3 Логика предикатов

3.1 Понятие предиката и операции, их представления, примеры

Определение. n-местный предикат на множестве A - это отображение вида $P : A^n \to \{0, 1\}$

Определение. n-местная операция на множестве A - это отображение вида $f : A^n \to A$

Предикат можно задать как множество тех аргументов, на которых он является истинным

Пример. $P = \{1, 3\} : P = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

Пример. $Q = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

Способы задания:

1. описательный
2. множество (отношения)
3. таблица (истинности)
4. графы
   для предиката $P(x, y)$ ребро (x, y) обозначает $P(x, y) = 1$
   для операции $f(x)$ дуга (x, y) обозначает $y = f(x)$

3.2 Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы

Определение. Сигнатура - набор предикатных, функциональных и константных символов с указанием местностей

Пример. $\sigma = \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, c\}$

Определение. Две сигнатуры считаем *равными*, если в них одинаковое кол-во символов каждого сорта и местности соответствующих символов равны

Определение. Интерпретация сигнатуры σ на множестве А - это отображение, которое

1. каждому n-местному предикатному символу $P^{(n)} \in \sigma$ сопоставляет n-местный предикат на А
2. каждому n-местному функциональному символу $f^{(n)} \in \sigma$ сопоставляет n-местную операцию на А
3. каждому константному символу сопоставляет элемент множества А

Определение. Алгебраическая система - набор, состоящий из множества А, сигнатуры σ и интерпретации σ на А. Множество А называют основным множеством системы ($\mathfrak{a} =< A, \sigma >$)

3.3 Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов

Зафиксируем сигнатуру σ. Алфавит логики предикатов сигнатуры σ — это множество
$\sigma_{АЛП} = \sigma \cup \{x_1, x_2 \ldots, \&, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists, (,), =, ,\}$

Определение. Терм - слово алфавита логики предикатов, построенное по правилам:

1. символ переменной - терм
2. константный символ - терм
3. если $t_1, \ldots t_n$ - термы, $f^{(n)} \in \sigma$, то и $f(t_1, \ldots, t_n)$ - терм

Определение. Атомарная формула сигнатуры σ - это слово одного из двух видов:

1. $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 - термы
2. предикат $P(t_1, \ldots, t_n), P^{(n)} \in \sigma, t_1, \ldots t_n$ - термы

Определение. Формула ЛП сигнатуры σ - слово, построенное по правилам:

1. атомарная формула - формула
2. если ϕ_1 и ϕ_2 - формулы, то слова $(\phi_1 \& \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), (\phi_1 \to \phi_2), \neg\phi_1$ тоже формулы
3. если ϕ - формула, то слова $(\forall x \phi)$ и $(\exists x \phi)$ тоже формулы

3.4 Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы

Определение. Вхождение переменной x в формулу ϕ **связанное**, если x попадает в область действия квантора $\exists x / \forall x$, в противном случае вхождение x **свободное**

Определение. Переменная x **свободна** в формуле ϕ, если есть хотя бы одно свободное вхождение x в ϕ, в противном случае она **связанная**

Определение. Формула замкнутая, если она не содержит свободных переменных.

3.5 Истинность формул на алгебраической системе

Каждый терм $t(x_1, \ldots, x_n)$ определяет в системе $\mathfrak{a}$ функцию $t_{\mathfrak{a}} : A^n \to A$ следующим образом: в терме все функциональные и константные символы заменяются на их интерпретации в системе А, после чего вычисляется полученная суперпозиция от входных аргументов.

Пусть также $\phi(x_1 \ldots, x_n)$ — формула со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Определим понятие истинности формулы ϕ на наборе элементов $a_1, \ldots a_n \in \mathfrak{a}$ в алгебраической системе $\mathfrak{a}$ (обозначение: $\mathfrak{a} \models \phi(a_1, \ldots a_n)$) следующим образом.

Определение. 1. Пусть ϕ имеет вид $t_1 = t_2$. Тогда $A \models \phi(a_1, \ldots a_n) \Leftrightarrow t_{1A}(a_1, \ldots a_n) = t_{2A}(a_1, \ldots a_n)$ (здесь t_{iA} — функция, определяемая термом t_i в системе А).

2. Пусть ϕ имеет вид $P(t_1, \dots, t_k)$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots a_n) \Leftrightarrow P_A(t_{1A}(a_1, \dots a_n), \dots, t_{kA}(a_1, \dots a_n)) = 1$, где P_A — интерпретация предикатного символа P в системе A.

3. Пусть ϕ имеет вид $(\phi_1 \& \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \to \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), \neg\phi_1$. Тогда истинность формулы ϕ определяется по значениям $\phi_1(a_1, \dots a_n)$ и $\phi_2(a_1, \dots a_n)$ по таблицам истинности логических связок.

4. Пусть $\phi(x_1 \dots, x_n)$ имеет вид $(\forall x \phi(x, x_1, \dots x_n))$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots a_n) \Leftrightarrow$ для всех элементов $b \in A$ выполнено $A \models \phi(b, a_1, \dots a_n)$.

5. Пусть $\phi(x_1 \dots, x_n)$ имеет вид $(\exists x \phi(x, x_1, \dots x_n))$. Тогда $A \models \phi(a_1, \dots a_n) \Leftrightarrow$ для некоторого элемента $b \in A$ выполнено $A \models \phi(b, a_1, \dots a_n)$.

Определение. Формула $\phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ тождественно истинная (ложна) в алгебраической системе $A =< A, \sigma >$, если для всех наборов элементов $a_1 \dots a_n \in A$ выполнено $A \models \phi(a_1 \dots a_n)(A \not\models \phi(a_1 \dots a_n))$.

Определение. Формула $\phi(x_1, \dots, x_n)$ выполнима в алгебраической системе $A =< A, \sigma >$, если для хотя бы одного набора элементов $a_1 \dots a_n \in A$ выполнено $A \models \phi(a_1 \dots a_n)$.

Определение. Формула ϕ сигнатуры σ тождественно истинная (ложна), если ϕ тождественно истинна (ложна) во всех алгебраических системах сигнатуры σ.

Определение. Формула ϕ сигнатуры σ выполнима, если ϕ выполнима хотя бы в одной алгебраической системе сигнатуры σ.

3.6 Изоморфизм систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм

3.7 Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности

3.8 Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем

3.9 Эквивалентность формул логики предикатов

3.10 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые формулы

3.11 Пренексный вид формулы

3.12 Основные эквивалентности логики предикатов

3.13 Классы формул $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$. Соотношения между классами

3.14 Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах)

3.15 Проверка существования вывода методом резолюций (алгоритм)

3.16 Логическое следование в логике предикатов

3.17 Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов

3.18 Теория. Модель теории

3.19 Непротиворечивая теория. Полная теория. Свойства непротиворечивых и полных теорий

3.20 Теорема о существовании модели (без доказательства)

3.21 Теорема о связи выводимости и противоречивости

3.22 Теоремы о корректности и полноте ИП

3.23 Теорема компактности

3.24 Аксиоматизируемые и конечно аксиоматизируемые классы. Конечно аксиоматизируемые теории

3.25 Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы)

3.26 Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности)