9 Привести пример $A \subset \mathbb{R}$, т.ч следующие множества попарно различны:

$$A, \operatorname{cl} A, \operatorname{int} A, \operatorname{cl}(\operatorname{int} A), \operatorname{int}(\operatorname{cl} A), \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} A)), \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} A))$$

$$A = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \cup \{2\} \cup ([3, 4] \cap \mathbb{Q})$$
$$\operatorname{int} A = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$$
$$\operatorname{cl} A = [0, 1] \cup \{2\} \cup [3, 4]$$
$$\operatorname{int}(\operatorname{cl} A) = (0, 1) \cup (3, 4)$$
$$\operatorname{cl}(\operatorname{int} A) = [0, 1]$$
$$\operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} A)) = [0, 1] \cup [3, 4]$$
$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} A)) = (0, 1)$$

10 Какое наибольшее число попарно различных множеств можно получить из подмножества топологического пространства, последовательно применяя к нему операции замыкания и внутренности?

7, т.к из 9 номера мы получили 7 различных множеств и известно, что

$$\operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} A))) = \operatorname{cl}(\operatorname{int} A) \tag{1}$$

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} A))) = \operatorname{int}(\operatorname{cl} A) \tag{2}$$

Доказательство. 1 $\operatorname{int} A \subset A \implies \operatorname{cl}(\operatorname{int} A) \subset \operatorname{cl} A \implies \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} A)) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A \implies \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} A))) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int} A)$

$\operatorname{int} A \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int} A) \implies \operatorname{int} A \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} A)) \implies \operatorname{cl}(\operatorname{int} A) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} A)))$

2 $\operatorname{int} A \subset A \implies \operatorname{int}(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} A \implies \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} A)) \subset \operatorname{cl} A$ $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} A))) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl} A)$

$A \subset \operatorname{cl} A \implies \operatorname{int}(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} A)) \implies \operatorname{int}(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} A)))$

▶

43 Доказать, что если шар радиуса 7 содержится в шаре радиуса 3, то они совпадают.

Доказательство. $B_7(x_0) \subset B_3(y_0) \implies \forall x : d(x, x_0) < 7 \quad d(x, y_0) < 3$

Сразу получаем, что $d(x_0, y_0) < 3$.

Пусть $B_3(y_0) \not\subset B_7(x_0)$, тогда существует такое $y \in B_3(y_0)$, что $d(y, x_0) \geq 7$

Применим свойство полуметрики, учитывая, что $d(y_0, y) < 3$:

$$d(x_0, y_0) \geq |d(x_0, y) - d(y_0, y)| > 4$$

Получили противоречие, значит, имеет место включение и шары совпадают. ▶

.. Задача с лекции 03.10.23. Найти μ, при которых уравнение разрешимо и найти решение

$$x(t) - \mu \int_0^1 tsx(s)ds = t$$

Пусть C $= \int_0^1 sx(s)ds$

$$x(t) = (\mu C + 1)t$$
$$tx(t) = (\mu C + 1)t^2$$
$$C = \int_0^1 (\mu C + 1)y^2 dy$$
$$C = \frac{(\mu C + 1)}{3}$$
$$C = \frac{1}{3 - \mu}$$
$$x(t) = \frac{3t}{3 - \mu}, \quad \mu \neq 3$$

47 Пусть d - полуметрика на множестве X. Доказать, что функции

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad d_2(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}, \quad d_3(x, y) = \ln(1 + d(x, y))$$

являются полуметриками на X, причем они все эквивалентны и являются метриками или нет, одновременно с исходной.

(a) i.

$$d_1(x, x) = \frac{d(x, x)}{1 + d(x, x)} = 0$$

ii.

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d_1(y, x)$$

iii.

$$d_1(x, y) + d_1(y, z) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)}$$