§ 8. Формула замены переменной в кратном интеграле

В данном параграфе устанавливается формула замены переменной в кратном интеграле. Здесь рассматривается случай, когда дано открытое множество U в пространстве $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм φ множества U в пространство $\mathbb{R}^n$, который взаимно однозначно отображает U на другое открытое множество V пространства $\mathbb{R}^n$.

Устанавливается, что интеграл произвольной функции f по множеству V равен интегралу по множеству U от функции $f \circ \varphi$, взятой с некоторым множителем, зависящим только от данного диффеоморфизма φ. Указанный множитель равен модулю якобиана отображения φ, т. е. $|J(x, \varphi)|$.

Доказательство общей формулы замены переменной состоит в последовательном сведении общего случая к тем случаям, когда функция f достаточно просто устроена, а отображение φ есть диффеоморфизм некоторого специального вида.

8.1. Интегрируемые функции на открытых множествах пространства $\mathbb{R}^n$

Зададим произвольно открытое множество U пространства $\mathbb{R}^n$. Функция $f\colon U \to \overline{\mathbb{R}}$ согласно определению, данному в п. 5.4, является интегрируемой (измеримой) на множестве U, если ее нулевое продолжение на пространство $\mathbb{R}^n$, т. е. функция $\hat{f}(x)$, определенная условием $\hat{f}(x) = f(x)$ при $x \in U$ и $\hat{f}(x) = 0$ при $x \notin U$, является интегрируемой (соответственно измеримой) в $\mathbb{R}^n$. Здесь мы установим некоторые предложения о приближении функций, определенных и интегрируемых на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$ ступенчатыми функциями, удовлетворяющими дополнительному условию — *условию финитности относительно* U.

Функция $f\colon U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *финитной относительно открытого множества* U, если существует компактное множество $A \subset U$ такое, что $f(x) = 0$ при $x \notin A$.

Пусть A есть подмножество $\mathbb{R}^n$. Для функции $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ полагаем

$$I_A(f) = \int_A f(x)\,dx.$$

(Предполагается, что множество A и функция f таковы, что выписанный здесь интеграл имеет смысл.) В случае $A = \mathbb{R}^n$ вместо $I_{\mathbb{R}^n}(f)$

будем писать просто $I(f)$. Под L_1-нормой функции $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ здесь понимается L_1-норма ее нулевого продолжения на $\mathbb{R}^n$.

Понятия L_1-нормы и интегрируемой функции в $\mathbb{R}^n$ определяются путем приближения функции ступенчатыми функциями. В случае, когда функция f определена и интегрируема на открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$, как будет показано, можно брать ступенчатые функции, финитные относительно U. Этот факт существенно используется в доказательстве формулы замены переменной интегрирования в кратном интеграле.

Предварительно опишем некоторую конструкцию, которая понадобится нам в дальнейшем.

Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда согласно лемме о кубическом подразделении открытого множества (лемма 6.1) найдется последовательность попарно непересекающихся двоичных кубов $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ такая, что при каждом ν замыкание $\bar{\alpha}_\nu$ куба α_ν содержится в U и имеют место равенства

$$U = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bar{\alpha}_\nu. \tag{8.1}$$

Положим

$$U_\nu = \bigcup_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu, \quad \overline{U}_\nu = \bigcup_{\mu=1}^{\nu} \bar{\alpha}_\mu.$$

Пусть χ_ν есть индикатор множества U_ν. Множество $\overline{U}_\nu$ при каждом ν компактно и содержится в множестве U. Функция χ_ν обращается в нуль вне множества $\overline{U}_\nu$, и, следовательно, она финитна относительно U. При каждом ν имеем $U_\nu \subset U_{\nu+1}$, откуда вытекает, что последовательность $(\chi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ является возрастающей. Для всякого $x \in U$ найдется номер ν_0 такой, что $x \in \alpha_{\nu_0}$. При $\nu \geq \nu_0$ имеем $\chi_\nu(x) = 1$. Отсюда следует, что для всякого $x \in U$ справедливо соотношение

$$\lim_{\nu\to\infty} \chi_\nu(x) = 1.$$

■ **Лемма 8.1.** *Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для функции $F\colon U \to \overline{\mathbb{R}}$ ее L_1-норма конечна. Тогда по всякому $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ступенчатых функций, финитных относительно U, которая мажорирует функцию F и такова, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} I_U(f_\nu) < \|F\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть функция $F\colon U \to \overline{\mathbb{R}}$ такова, что ее L_1-норма конечна. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно определению L_1-нормы найдется последовательность ступенчатых функций $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, мажорирующая функцию F и такая, что

$$\lim_{\nu\to\infty} I(f_\nu) < \|F\|_{L_1} + \varepsilon.$$

Функции f_ν все неотрицательны, последовательность $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ возрастающая, и для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$F(x) \leq \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x).$$

Может оказаться, что некоторые из функций f_ν не являются финитными относительно U. Положим $f_\nu^*(x) = f_\nu(x)\chi_\nu(x)$. Функция f_ν^* является ступенчатой. Она неотрицательна и обращается в нуль вне компактного множества $\overline{U}_\nu$, содержащегося в множестве U, и, стало быть, f_ν^* финитна относительно U. Последовательность $\left(f_\nu^*\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ возрастающая. При всяком $x \in U$ имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu^*(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) \geq |F(x)|.$$

При $x \notin U$ неравенство $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu^*(x) \geq |F(x)|$ выполняется в силу того, что для таких x выполняется $F(x) = 0$.

Последовательность $\left(f_\nu^*\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$, таким образом, мажорирует функцию F. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеем $0 \leq f_\nu^* \leq f_\nu$, и, значит,

$$\lim_{\nu\to\infty} I\left(f_\nu^*\right) \leq \lim_{\nu\to\infty} I(f_\nu) < \|F\|_{L_1} + \varepsilon.$$

Заметим еще, что каждая из функций f_ν^* финитна относительно U. Лемма доказана. ■

■ ***Лемма 8.2.*** *Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и f есть функция, интегрируемая по U. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция φ, финитная относительно U и такая, что $\|f - \varphi\|_{L_1(U)} < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть функция $f\colon U \to \overline{\mathbb{R}}$ является интегрируемой по множеству U. Согласно определению это означает, что нулевое продолжение функции f на $\mathbb{R}^n$ есть интегрируемая функция. Простоты ради мы будем считать, что функция f определена в $\mathbb{R}^n$ всюду, причем $f(x) = 0$ при $x \notin U$.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда согласно определению интегрируемой функции найдется ступенчатая функция ψ такая, что $\|f - \psi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Так как функции f и ψ интегрируемы, то интегрируема также и функция $f - \psi$ и, значит, $\|f - \psi\|_{L_1} = I(|f - \psi|)$.

В силу свойства аддитивности интеграла как функции множества имеем

$$I(|f - \psi|) = I_{\complement U}(|f - \psi|) + I_U(|f - \psi|).$$

Оба слагаемых справа неотрицательны, и, следовательно, мы получаем, что $I_U(|f-\psi|) < \varepsilon$. Положим $\psi_\nu = \psi\chi_\nu$, где χ_ν есть индикатор множества U_ν, определенного равенством (8.1).

Функция ψ_ν ступенчатая, и при $\nu \to \infty$ имеем $\psi_\nu(x) \to \psi(x)$ для всех $x \in U$. При каждом $x \in U$ выполняется неравенство

$$|f(x) - \psi_\nu(x)| \leq |f(x)| + |\psi_\nu(x)| \leq |f(x)| + |\psi(x)|.$$

Применяя *теорему Лебега о предельном переходе* (следствие 2 теоремы 4.3), все условия которой здесь выполняются, получим $I_U(|f-\psi_\nu|) \to I_U(|f-\psi|)$. Так как $I_U(|f-\psi|) < \varepsilon$, то найдется номер ν_0 такой, что

$$I_U(|f - \psi_{\nu_0}|) < \varepsilon.$$

Функция $\varphi = \psi_{\nu_0}$, очевидно, и есть искомая. Лемма доказана. ■

8.2. Формулировка результата

Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r, $r \geq 1$. Тогда в каждой точке $x \in U$ определено линейное отображение df_x — дифференциал отображения f в точке x. Матрица этого отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

где значения частных производных берутся в точке x. Данная матрица называется *матрицей Якоби* отображения f в точке x. Она имеет

n строк и n столбцов. Ее определитель называется *якобианом отображения* f в точке x и обозначается символом $J(x, f)$.

Пусть U есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемым гомеоморфизмом класса* C^r или, короче, *диффеоморфизмом класса* C^r, если f взаимно однозначно и принадлежит классу C^r, причем в каждой точке $x \in U$ якобиан отображения f отличен от нуля.

Пусть U и V есть открытые множества пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ и $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ есть диффеоморфизмы класса C^r, причем $f(U) \subset V$. Тогда суперпозиция $h = g \circ f$ также является диффеоморфизмом класса C^r.

Действительно, если отображения f и g удовлетворяют этим условиям, то каждое из них взаимно однозначно и принадлежит классу C^r, откуда вытекает, что отображение h также взаимно однозначно и принадлежит классу C^r. В каждой точке $x \in U$ имеем $dh_x = dg_y \circ df_x$, где $y = f(x)$. Отсюда следует, что $J(x; h) = J(x; f)J(y; g) \neq 0$, так как согласно условию $J(x; f) \neq 0$ для любого $x \in U$ и $J(y; g) \neq 0$ для всех $y \in V$.

Отображение h, таким образом, удовлетворяет всем условиям определения диффеоморфизма класса C^r.

Если $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ есть диффеоморфизм класса C^r, то согласно теореме 2.2 главы 10 множество $V = f(U)$ открытое и обратное отображение $g = f^{-1}$ принадлежит классу C^r. При этом, как очевидно, отображение $g = f^{-1}$ взаимно однозначно.

Суперпозиция $f \circ g$ есть тождественное отображение, и, значит, для всякого $y = f(x) \in V$ имеет место равенство $J(y; g)J(x; f) = 1$. Отсюда следует, что в каждой точке $y \in V$ якобиан отображения $g = f^{-1}$ отличен от нуля. Мы получаем, таким образом, что f^{-1} также есть диффеоморфизм класса C^r.

Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r, $r \geq 1$. Если в точке $p \in U$ якобиан отображения f отличен от нуля, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B(p, \varepsilon) \subset U$ и ограничение f на шаре $B(p, \varepsilon)$ есть диффеоморфизм класса C^r.

Основной результат данного параграфа заключается в следующей теореме.

■ **Теорема 8.1** (общая теорема о замене переменной в кратном интеграле). *Пусть U есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — произвольный диффеоморфизм и $V = \varphi(U)$. Тогда для всякой функции $f\colon V \to \overline{\mathbb{R}}$, определенной и интегрируемой на множестве V, функция $x \mapsto f[\varphi(x)]|J(x, \varphi)|$ интегрируема, причем имеет место равенство*

$$\int\limits_U f[\varphi(x)]|J(x, \varphi)|\, dx = \int\limits_V f(y)\, dy. \tag{8.2}$$

Доказательство этой теоремы распадается на несколько этапов. Сначала мы покажем, что теорема верна для суперпозиции диффеоморфизмов, если она верна для каждого из них в отдельности. Затем будет установлено, что в общем случае теорема вытекает из того ее частного случая, когда функция f есть индикатор двоичного куба, замыкание которого содержится в множестве U (см. п. 8.3). Далее будет показано, что произвольный диффеоморфизм по крайней мере локально может быть представлен как суперпозиция диффеоморфизмов некоторого простейшего вида (лемма 8.3). Завершение доказательства теоремы дается в п. 8.5.

8.3. Леммы о редукции

Приведенные здесь леммы составляют первую часть доказательства теоремы 8.1, сформулированной выше. Из леммы 8.3 вытекает, что эта теорема будет доказана, если мы сумеем представить произвольный диффеоморфизм как суперпозицию диффеоморфизмов, для каждого из которых теорема верна. Лемма 8.4 позволяет свести случай произвольной функции f к некоторому простейшему случаю.

Введем следующие обозначения. Предположим, что даны открытое множество U в пространстве $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$. Для произвольной функции f, определенной на множестве V, полагаем $\widehat{\varphi}f(x) = f[\varphi(x)]|J(x,\varphi)|$.

Произвольный диффеоморфизм может быть представлен как суперпозиция диффеоморфизмов некоторого простейшего вида. При этом используется следующее утверждение.

■ **Лемма 8.3.** *Пусть даны открытые множества U, V и W в пространстве $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизмы $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ и $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$, причем $\varphi(U) = V$ и $\varphi(V) = W$. Тогда если заключение теоремы* 8.1 *верно для множеств U, V и диффеоморфизма φ, а также для множеств V, W и диффеоморфизма ψ, то оно верно также и для множеств U, W и диффеоморфизма $\theta = \psi \circ \varphi$.*

Доказательство. В силу сделанного предположения для диффеоморфизма ψ и множеств V и $W = \psi(V)$ заключение теоремы верно. Это означает, что если f есть интегрируемая функция, то функция $g = \widehat{\psi}f$ является интегрируемой на множестве V, причем имеет место равенство

$$\int\limits_V g(y)\,dy = \int\limits_V \widehat{\psi}f(y)\,dy = \int\limits_W f(z)\,dz.$$

Поскольку утверждение теоремы 8.1, по условию, верно для для диффеоморфизма φ, то мы получаем, что так как функция $g\colon V \to \overline{\mathbb{R}}$ интегрируема, то функция $\widehat{\varphi}g$ также является интегрируемой, неотрицательной и измеримой, причем имеет место равенство

$$\int\limits_U \widehat{\varphi}g(x)\,dx = \int\limits_V g(y)\,dy = \int\limits_W f(z)\,dz.$$

Согласно определению

$$g(y) = f[\psi(y)]|J(y,\psi)|$$

и

$$\widehat{\varphi}g(x) = f[\psi(\varphi(x))]|J(\varphi(x),\psi)||J(x,\varphi)|. \tag{8.3}$$

Пусть $x \in U$, $y = \varphi(x)$. Отображение θ дифференцируемо в точке x. При этом

$$d\theta_x = d\psi_y \circ d\varphi_x.$$

Определитель суперпозиции двух линейных отображений пространства $\mathbb{R}^n$ в себя равен произведению определителей этих отображений. Отсюда вытекает, что $J(x,\theta) = J(\varphi(x),\psi)J(x,\varphi)$. В силу (8.3) получаем, что

$$\widehat{\varphi}(\widehat{\psi}f)(x) = f[\theta(x)]|J(x,\theta)| = \widehat{\theta}f(x).$$

Лемма доказана. ■

Пусть A есть произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$. Для произвольной функции $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ полагаем $I_A(f) = \int\limits_A f(x)\,dx$. (Предполагается, что множество A и функция f таковы, что выписанный здесь интеграл имеет смысл.) В случае $A = \mathbb{R}^n$ вместо $I_{\mathbb{R}^n}(f)$ будем писать просто $I(f)$. Пусть $\sigma = [a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \times \cdots \times [a_n,b_n)$ есть двоичный куб в $\mathbb{R}^n$. Символ $\bar{\sigma}$ обозначает замкнутый куб $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$.

■ ***Лемма 8.4.*** *Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, $V = \varphi(U)$. Тогда если $f\colon V \to \mathbb{R}$ есть индикатор двоичного куба $\sigma \subset U$, то функция $f\circ\varphi$ измерима. При этом $f \circ \varphi$ есть индикатор множества $\varphi^{-1}(\sigma)$.*

Предположим, что для всякого двоичного куба σ такого, что замкнутый куб $\bar{\sigma} \subset V$, функция $\widehat{\varphi}\chi_\sigma$ интегрируема и значение интеграла этой функции по U равно мере куба σ. Тогда заключение теоремы 8.1 *верно для любой функции $f \in L_1(U)$.*

Доказательство. Пусть σ есть двоичный куб, содержащийся в множестве V, $\sigma = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$. Условие $\varphi(x) \in \sigma$ означает, что компоненты функции φ удовлетворяют неравенствам $a_i \leq \varphi_i(x) < b_i$. Множество $A_i = \{x \in U \mid a_i \leq \varphi_i(x)\}$ замкнуто относительно U, множество $B_i = \{x \in U \mid b_i > \varphi_i(x)\}$ является открытым. Отсюда, как доказано в § 6, вытекает, что множества A_i и B_i измеримы. Значит, также и пересечение всех множеств A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, измеримо. Мы получаем, таким образом, что множество $\varphi^{-1}(\sigma)$ является измеримым. Если $x \notin \varphi^{-1}(\sigma)$, то $\varphi(x) \notin \sigma$ и, следовательно, $\chi_\sigma[\varphi(x)] = 0$. Если же $x \in \varphi^{-1}(\sigma)$, то $\varphi(x) \in \sigma$ и, значит, в этом случае также и $\chi_\sigma[\varphi(x)] = 1$.

Для любого конечного набора функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$, определенных на множестве V, и чисел λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, как нетрудно видеть, имеет место равенство

$$\widehat{\varphi}\left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\right\} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \widehat{\varphi} u_i.$$

Отсюда вытекает, что если теорема 8.1 верна для случая, когда функция f есть индикатор двоичного куба, замыкание которого содержится в V, то теорема верна для всякой ступенчатой функции, финитной относительно V.

Предположим, что теорема 8.1 верна для случая, когда f есть ступенчатая функция, финитная относительно V.

Пусть дана функция $u \colon V \to \overline{\mathbb{R}}$. Определим по ней функцию $\widehat{\varphi} u \colon U \to \overline{\mathbb{R}}$. Функции u и $\widehat{\varphi} u$ продолжим на все $\mathbb{R}^n$, полагая $u(y) = 0$ при $y \notin V$ и $\widehat{\varphi} u(x) = 0$ при $x \notin U$. Докажем, что

$$\|\widehat{\varphi} u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \tag{8.4}$$

Если $\|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \infty$, то неравенство (8.4), очевидно, выполняется.

Будем считать, что $\|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Пусть $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть произвольная последовательность ступенчатых функций, финитных относительно V, которая мажорирует функцию u и такова, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} \|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon$. Существование такой последовательности вытекает из леммы 8.1.

Последовательность $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ является возрастающей. При всяком $y \in V$ имеем

$$\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(y) \geq |u(y)|.$$

Положим $g_\nu = \widehat{\varphi} f_\nu$. Из условий леммы следует, что функции g_ν неотрицательны и интегрируемы по U. При этом $I_U(g_\nu) = I_V(f_\nu)$, последовательность $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ возрастающая, причем для всех $x \in U$ имеет место неравенство

$$\widehat{\varphi}u(x) \leq \lim_{\nu \to \infty} g_\nu(x).$$

Будем считать, что $g_\nu(x) = 0$ при $x \notin U$. Положим $\lim\limits_{\nu \to \infty} g_\nu(x) = g(x)$. Функция g интегрируема, причем $I(g) = \lim\limits_{\nu \to \infty} I(g_\nu) = \lim\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu) < \|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon$. В силу неотрицательности функции g имеем $\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = I(g)$. Так как $|\widehat{\varphi}u(x)| \leq g(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $\|\widehat{\varphi}u\|_{L_1} \leq \|g\|_{L_1} < \|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon$. Следовательно, мы получаем

$$\|\widehat{\varphi}u\|_{L_1} \leq \lim_{\nu \to \infty} I_V(f_\nu) < \|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, отсюда следует, что неравенство 8.4 верно также и в случае, когда $\|u\|_{L_1} < \infty$.

Согласно лемме 8.2 для всякой функции f, определенной и интегрируемой на множестве V, найдется последовательность $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ступенчатых функций, финитных относительно V, такая, что $\|f - f_\nu\| \to 0$ при $\nu \to \infty$. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеем $\widehat{\varphi}(f - f_\nu) = \widehat{\varphi}f - \widehat{\varphi}f_\nu$ и, значит, $\|\widehat{\varphi}f - \widehat{\varphi}f_\nu\|_{L_1} = \|\widehat{\varphi}(f - f_\nu)\|_{L_1} \leq \|f - f_\nu\|_{L_1}$. Выражение справа стремится к нулю при $\nu \to \infty$, и мы, следовательно, получаем, что $\|\widehat{\varphi}f - \widehat{\varphi}f_\nu\|_{L_1}$ стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Отсюда вытекает, что функция $\widehat{\varphi}f$ интегрируема. При этом $I_U(\widehat{\varphi}f) = \lim\limits_{\nu \to \infty} I_U(\widehat{\varphi}f_\nu)$. Так как из условий леммы следует, что для ступенчатых функций, финитных относительно U, теорема верна, то $I_U(\widehat{\varphi}f_\nu) = I_V(f_\nu)$. При $\nu \to \infty$ величина $I_V(f_\nu)$ стремится к пределу, равному $I_U(f)$, и окончательно получаем, что $I_U(\widehat{\varphi}f) = I_V(f)$. Лемма доказана. ■

8.4. Лемма о представлении диффеоморфизма как суперпозиции диффеоморфизмов специального вида

На этом этапе доказательства теоремы 8.1 будет показано, что произвольный диффеоморфизм открытого множества в $\mathbb{R}^n$ локально может быть представлен как суперпозиция диффеоморфизмов некоторого специального вида.

Диффеоморфизм $\varphi\colon x \in U \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ назовем простым $\varphi_i(x) \equiv x_i$ при каждом $i < n$.

Пусть $\mathbb{I}_n$ — отрезок $\{1, 2, \ldots, n\}$ множества всех натуральных чисел $\mathbb{N}$. Всякое взаимно однозначное отображение множества $\mathbb{I}_n$ на себя называется *перестановкой порядка n*.

Если $\lambda\colon \mathbb{I}_n \to \mathbb{I}_n$ — перестановка порядка n, то значение λ на элементе $i \in \mathbb{I}_n$ обозначается символом λ_i. Перестановку порядка n можно рассматривать как конечную последовательность

$$(\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Если λ есть перестановка порядка n, то обратное отображение $\lambda^{-1} = \mu$ также есть перестановка порядка n. Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем $\lambda_{\mu_i} = i$ и $\mu_{\lambda_i} = i$.

Отображение $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ будем называть *перестановкой независимых переменных*, если существует перестановка λ порядка n такая, что для всякой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\varphi(x) = (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}).$$

В этом случае φ является отображением пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, φ взаимно однозначно и принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$. Обратное отображение также есть перестановка независимых переменных, а именно: если $\mu = \lambda^{-1}$ есть перестановка, обратная к λ, то, как легко проверяется,

$$\varphi^{-1}(x) = (x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \ldots, x_{\mu_n})$$

для любого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Отсюда следует, что φ есть диффеоморфизм.

■ **Лемма 8.5.** *Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда для всякой точки $x_0 \in U$ найдется $r > 0$ такое, что шар $B(x_0, r) \subset U$ и отображение φ допускает на шаре $B(x_0, r)$ представление*

$$\varphi = \xi \circ \theta \circ \psi, \tag{8.5}$$

где ξ — перестановка независимых переменных, θ есть диффеоморфизм такой, что $\theta_n(x) \equiv x_n$, а ψ есть простой диффеоморфизм.

Доказательство. Пусть $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ есть произвольный диффеоморфизм множества U. Возьмем произвольно точку $x_0 \in U$. Рассмотрим якобиан этого отображения в точке x_0. Он представляет собой определитель, последний столбец которого образован производными $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как φ, по условию, есть диффеоморфизм, то $J(x_0, \varphi) \neq 0$ и, следовательно, хотя бы одна из производных $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, отлична от нуля.

Предположим, что $\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. Пусть ξ — перестановка независимых переменных такая, что для произвольной точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ координата $\xi_i(x)$ точки $\xi(x)$ равна x_i, если $i \neq k$ и в то же время $i \neq n$.

Далее, пусть $\xi_k(x) = x_n$ и $\xi_n(x) = x_k$. Положим $\omega = \xi \circ \varphi$. Координата $\omega_n(x)$ точки $\omega(x)$ равна $\xi_n[\varphi(x)] = \varphi_k(x)$. Отсюда следует, что $\dfrac{\partial\omega_n}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$.

Теперь определим отображение $\psi\colon U \to \mathbb{R}^n$, полагая $\psi(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \omega_n(x))$. Якобиан отображения ψ в точке $x \in U$, как нетрудно видеть, равен $\dfrac{\partial\omega_n}{\partial x_n}(x)$. Из определения функции ω_n следует, что $J(x_0, \psi) \neq 0$. По лемме о локальном диффеоморфизме (лемма 2.1 главы 10) найдется $\delta > 0$ такое, что шар $B(x_0, \delta) \subset U$ и ограничение отображения ψ на шаре $B(x_0, \delta)$ есть диффеоморфизм.

Пусть $G_1 = \psi\bigl[B(x_0, \delta)\bigr]$. Положим $\theta = \omega \circ \psi^{-1}$. Отображение θ является диффеоморфизмом.

Покажем, что для всякой точки $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in G_1$ n-я координата точки $\theta(y)$ равна y_n. Возьмем произвольно $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in G_1$. Пусть $y = \psi(x)$. Тогда $x = \psi^{-1}(y)$ и

$$\theta_n(y) = \omega_n[\psi^{-1}(y)] = \omega_n(x).$$

Для точки $y = \psi(x)$ ее n-я координата y_n равна $\omega_n(x)$. Следовательно, мы получим, что $\theta_n(y) = y_n$.

Диффеоморфизм θ выражается через φ следующим образом:

$$\theta = \omega \circ \psi^{-1} = \xi \circ \varphi \circ \psi^{-1}.$$

Отсюда $\varphi = \xi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. Очевидно, $\xi^{-1} = \xi$. Полученное представление отображения φ и есть искомое. Лемма доказана. ■

8.5. Доказательство теоремы 8.1

Используя результаты, полученные в пп. 8.1–8.4, мы можем доказать теорему 8.1.

Пусть U есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм множества U, $V = \varphi(U)$. Требуется доказать, что для всякой интегрируемой функции $f\colon V \to \overline{\mathbb{R}}$ функция $\widehat{\varphi} f(x) = f[\varphi(x)]|J(x, \varphi)|$ интегрируема, причем

$$\int\limits_U \widehat{\varphi} f(x)\,dx = \int\limits_V f(y)\,dy. \tag{8.6}$$

Согласно лемме 8.4 достаточно установить, что теорема верна в том случае, когда функция f есть индикатор двоичного куба, замыкание которого содержится в множестве V.

Пусть U есть произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}$ и $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ есть функция класса $\mathscr{C}^1$ такая, что $\varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in U$ и φ отображает U в $\mathbb{R}$ взаимно однозначно. Положим $V = \varphi(U)$. Для $n = 1$ аналогом величины $J(x, \varphi)$ является производная $\varphi'(x)$.

Пусть $V = \varphi(U)$ и полуинтервал $\sigma = [\alpha, \beta)$ таков, что сегмент $[\alpha, \beta]$ содержится в интервале (c, d). Положим $\psi = \varphi^{-1}$ и $[p, q] = \psi([\alpha, \beta])$. Функция ψ на промежутке $[\alpha, \beta]$ монотонна, а φ монотонна на промежутке $[p, q]$ в том же смысле, что и ψ. Функция $\chi_\sigma[\varphi(x)]|\varphi'(x)|$ обращается в нуль вне промежутка $[p, q]$ и равна $|\varphi'(x)|$ для x из этого промежутка. Отсюда следует, что

$$\int\limits_U \chi_\sigma[\varphi(x)]|\varphi'(x)|\, dx = \int\limits_p^q |\varphi'(x)|\, dx = \beta - \alpha = \mu_1(\sigma).$$

В силу леммы 8.4, таким образом, установлено, что для $n = 1$ теорема 8.1 верна.

Рассмотрим случаи, когда диффеоморфизм φ имеет некоторое специальное строение. Общий случай сводится к этому, как будет установлено в конце доказательства.

Случай 1. Диффеоморфизм φ является перестановкой независимых переменных. Будем считать, что $U = \mathbb{R}^n$. Случай произвольного открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ очевидным образом сводится к этому рассмотрением нулевого продолжения функции f.

В силу леммы 8.4 достаточно установить, что для данного φ теорема 8.1 верна в том случае, когда f есть индикатор произвольного двоичного куба. Пусть $\sigma = ([a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n))$ есть двоичный куб в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $\varphi(x) = (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n})$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — перестановка порядка n.

Функция $\chi_\sigma \circ \varphi$ является индикатором множества $\varphi^{-1}(\sigma)$. Действительно, функция $\chi_\sigma \circ \varphi$ принимает только два значения: 0 и 1.

Если $\chi_\sigma \circ \varphi(x) = 1$, то $\varphi(x)$ принадлежит σ и, значит, $x \in \varphi^{-1}(\sigma)$.

Если $\chi_\sigma \circ \varphi(x) = 0$, то $\varphi(x) \notin \sigma$ и потому $x \notin \varphi^{-1}(\sigma)$.

Таким образом, $\chi_\sigma \circ \varphi(x) = 1$, если $x \in \varphi^{-1}(\sigma)$, и $\chi_\sigma \circ \varphi(x) = 0$, если $x \notin \varphi^{-1}(\sigma)$. Это и означает, что функция $\chi_\sigma \circ \varphi$ есть индикатор множества $\varphi^{-1}(\sigma)$.

Якобиан отображения φ в рассматриваемом случае равен ± 1. Множество $\varphi^{-1}(\sigma)$, как нетрудно видеть, является двоичным кубом того же ранга r, что и куб σ. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_\sigma \circ \varphi(x)|J(x,\varphi)|\,dx = \mu_n[\varphi^{-1}(\sigma)] = \mu_n(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_\sigma(y)\,dy.$$

Отсюда мы получаем, что в случае, когда $U = V = \mathbb{R}^n$, диффеоморфизм φ есть перестановка независимых переменных, а функция f есть индикатор двоичного куба. Теорема 8.1 верна. В силу леммы 8.4 отсюда следует, что она верна для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Случай 2. Отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ есть простой диффеоморфизм. В силу леммы 8.4 достаточно рассмотреть случай, когда функция f есть индикатор двоичного куба, замыкание которого содержится в множестве V.

Для точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеем $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi_n(x))$. Пусть $\sigma = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}) \times [a_n, b_n)$ есть двоичный куб такой, что замкнутый куб $\bar{\sigma} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$ содержится в множестве $V = \varphi(U)$. Пусть $\theta = \varphi^{-1}$. Тогда θ, очевидно, также есть простой диффеоморфизм.

Для всякого $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$ имеем равенство $\theta(y) = (y_1, \ldots$ $\ldots, y_{n-1}, \theta_n(y))$. Якобиан отображения θ будет $\dfrac{\partial \theta_n}{\partial y_n}(y) \neq 0$.

Множество $\bar{\sigma}$ линейно связно, и, значит, функция $\dfrac{\partial \theta_n}{\partial y_n}$ имеет один и тот же знак во всех точках y куба $\bar{\sigma}$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ будем рассматривать как прямое произведение $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Точку $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ при этом будем рассматривать как пару (z, t), где $t = y_n$, а $z = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Обозначим символом τ $(n-1)$-мерный брус $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1})$.

Для всякого $z \in \tau$ функция $u \mapsto \theta_n(z, t)$ дифференцируема на замкнутом отрезке $[a_n, b_n]$.

Если для всех $x \in \sigma$ якобиан отображения θ положителен, т. е. $J(y, \theta) > 0$, то $\theta_n(z, t)$ является возрастающей функцией переменной t при любом $z \in \tau$.

Если якобиан отображения θ отрицателен, $J(y, \theta) < 0$ для всех $y \in \sigma$, то $\theta_n(z, t)$ есть убывающая функция переменной t.

Положим

$$p(z) = \min\{\theta_n(z, a_n), \theta_n(z, b_n)\} \quad \text{и} \quad q(z) = \max\{\theta_n(z, a_n), \theta_n(z, b_n)\}.$$

Тогда $\varphi^{-1}(\sigma) = \theta(\sigma)$ есть совокупность всех точек $x = (z,t)$, для которых $z \in \tau$, а t лежит между $p(z)$ и $q(z)$. Точнее, в случае, когда $J(x,\varphi) > 0$, t удовлетворяет неравенствам $p(z) \le t < q(z)$, а если $J(x,\varphi) < 0$, то $p(z) < t \le q(z)$.

Величина $f = \chi_\sigma(y)$ равна единице при $y \in \sigma$ и равна нулю, если $y \notin \sigma$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае $\widehat{\varphi}f(x) = \left|\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x)\right|$, если $x \in \theta(\sigma)$, и $\widehat{\varphi}f(x) = 0$ в противном случае. Применяя теорему Фубини (теорема 7.1), получим, что

$$\int\limits_U \widehat{\varphi}f(x)\,dx = \int\limits_\tau \left(\int\limits_{p(z)}^{q(z)} \left|\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(z,t)\right| dt \right) dz. \tag{8.7}$$

Так как $J(x,\varphi)J[\varphi(x),\theta] = 1$, то якобианы $J(x,\varphi)$ и $J(y,\theta)$, где $y = \varphi(x)$, имеют один и тот же знак.

Пусть $z \in \tau$. Предположим, что $J(y,\theta) = \dfrac{\partial\theta_n}{\partial t}(z,t) > 0$. В этом случае $p(z) = \theta_n(z,a_n)$, а $q(z) = \theta_n(z,b_n)$. Тогда имеем $\varphi(z,p(z)) = (z,a_n)$, а $\varphi(z,q(z)) = (z,b_n)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\varphi_n(z,p(z)) = a_n \quad \text{и} \quad \varphi_n(z,q(z)) = b_n.$$

Мы получаем, что в случае, когда $J(y,\theta) > 0$ для всех $y \in \sigma$, то имеем

$$\int\limits_{p(z)}^{q(z)} \left|\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(z,t)\right| dt = \varphi_n[q(z)] - \varphi_n[p(z)] = b_n - a_n.$$

В случае, когда $J(y,\theta) < 0$ для всех $y \in \sigma$, то $p(z) = \theta_n(z,b_n)$ и $q(z) = \theta_n(z,a_n)$. Тогда $\varphi(z,p(z)) = (z,b_n)$ и $\varphi(z,q(z)) = (z,a_n)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\varphi_n(z,p(z)) = b_n \quad \text{и} \quad \varphi_n(z,q(z)) = a_n.$$

Мы получаем, что если $J(y,\theta) > 0$ для всех $y \in \sigma$, то имеет место равенство

$$\int\limits_{p(z)}^{q(z)} \left|\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(z,t)\right| dt = -\int\limits_{p(z)}^{q(z)} \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(z,t)\,dt = -[\varphi_n[q(z)] - \varphi_n[p(z)]] = b_n - a_n.$$

Мы видим, что в обоих случаях внутренний интеграл в правой части равенства (8.7) равен $b_n - a_n$ и, следовательно, для данной функции f справедливо равенство

$$\int\limits_U \widehat{\varphi} f(x)\, dx = (b_n - a_n)\mu_{n-1}(\tau) = \mu_n(\sigma) = \int\limits_V f(y)\, dy.$$

Таким образом, в данном случае теорема 8.1 верна.

Случай 3. Диффеоморфизм φ сохраняет последнюю компоненту вектора x. Пусть отображение φ есть диффеоморфизм такой, что для всякой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ n-я координата точки $\varphi(x)$ равна x_n.

Если $n > 1$, то согласно предположению индукции для функций в $\mathbb{R}^{n-1}$ теорема 8.1 верна.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как произведение $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, отождествляя точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с парой (z, t), где $z = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, а $t = x_n$. Согласно лемме 8.4 достаточно доказать, что теорема верна для данного диффеоморфизма φ в случае, когда f есть индикатор двоичного куба σ, замыкание которого $\bar{\sigma}$ содержится в множестве $V = \varphi(U)$. Пусть $\sigma = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}) \times [a_n, b_n)$. Тогда $\bar{\sigma} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$. Множество $H = \varphi^{-1}(\sigma)$ согласно лемме 8.5 измеримо и, значит, функция $\chi_\sigma[\varphi(x)] \equiv \chi_H(x)$ измерима.

Положим $f(y) = \chi_\sigma(y)$. Тогда функция $\widehat{\varphi} f(x) \equiv \chi_\xi[\varphi(x)] J(x, \varphi)$ является измеримой как произведение двух измеримых функций.

Пусть τ есть $(n-1)$-мерный куб $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1})$ и $\bar{\tau}$ — замкнутый куб $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$. Возьмем произвольно $t \in \mathbb{R}$. Обозначим символом U_t множество всех $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ таких, что точка $(z, t) \in U$, и, аналогично, пусть $V_t = \{z \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (z, t) \in V\}$. Множества U_t и V_t являются открытыми в $\mathbb{R}^{n-1}$. Для всякого $t \in [a_n, b_n]$ куб $\bar{\tau}$ содержится в множестве V_t.

Применяя *теорему Тонелли для вычисления интеграла функции* $\widehat{\varphi} f(x)$ (теорема 7.2), получим

$$\int\limits_U \widehat{\varphi} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{U_t} \widehat{\varphi} f(z, t)\, dz \right\} dt. \tag{8.8}$$

Пусть φ_t есть отображение $z \in U_t \mapsto (\varphi_1(z, t), \ldots, \varphi_{n-1}(z, t))$. По условию, $\varphi_n(x) \equiv x_n$. Это означает, что для всякого $x \in U$ координаты с номером n точек x и $y = \varphi(x)$ совпадают. Отсюда следует, что при всяком t функция φ_t взаимно однозначно отображает множество U_t на V_t.

Матрица Якоби отображения φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где значения всех производных берутся в точке $x = (z, t) \in U$. Определитель этой матрицы, т. е. якобиан отображения φ, равен тому ее минору, который образован элементами первых $n-1$ строк и первых $n-1$ столбцов. Указанный минор совпадает с якобианом отображения φ_t, т. е. $J(z, t; \varphi(z,t)) = J(z, \varphi_t)$.

Принимая это во внимание, внутренний интеграл в равенстве (8.8) можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{U_t} \widehat{\varphi} f(z,t)\,dz = \int\limits_{U_t} \chi_\sigma(\varphi_t(z), t)|J(z, \varphi_t)|\,dz.$$

В силу предположения индукции последний интеграл равен

$$\int\limits_{V_t} \chi_\sigma(z,t)\,dz.$$

Заметим, что если $t \notin [a_n, b_n)$, то $\chi_\sigma(z,t) = 0$. Если $t \in [a_n, b_n)$, то $\chi_\sigma(z,t) = 0$ при $z \notin \tau$ и $\chi_\sigma(z,t) = 1$ при $z \in \tau$.

Таким образом, при $t \in [a_n, b_n)$ функция $z \mapsto \chi_\sigma(z,t)$ является индикатором $(n-1)$-мерного двоичного бруса τ. При $t \notin [a_n, b_n)$ эта функция тождественно равна нулю. Следовательно, мы получаем

$$\int\limits_{U} \widehat{\varphi} f(x)\,dx = \int\limits_{a_n}^{b_n} \left\{ \int\limits_{V_t} \chi_\tau(z)\,dz \right\} dt = (b_n - a_n)\mu_{n-1}(\tau) = \mu_n(\sigma).$$

Завершение доказательства. Пусть U есть произвольное открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ есть диффеоморфизм. Требуется доказать, что для всякой функции f, определенной на множестве $V = \varphi(U)$, функция $\widehat{\varphi} f \equiv f[\varphi(x)]|J(x,\varphi)|$ интегрируема по множеству U, причем имеет место равенство (8.2).

Пусть x_0 есть произвольная точка множества U. По лемме 8.5 найдется $\delta > 0$ такое, что в окрестности $W_0 = B(x_0, \delta) \subset U$ точки x_0 отображение φ допускает представление $\varphi = \xi \circ \theta \circ \psi$, где ψ есть простой диффеоморфизм, θ — диффеоморфизм, для которого $\theta_n(x) \equiv x_n$, а ξ есть перестановка независимых переменных. Пусть $W_1 = \psi[B(x_0, \delta)]$, $W_2 = \theta(W_1)$ и, наконец, $W_3 = \xi(W_2)$. В силу доказанного выше теорема 8.1 верна для каждого из диффеоморфизмов $\psi\colon W_0 \to W_1$, $\theta\colon W_1 \to W_2$ и $\xi\colon W_2 \to W_3$. Для диффеоморфизма ξ это следует из рассмотрений, касающихся первого случая (см. выше). Для диффеоморфизма ψ справедливость теоремы 8.1 вытекает из рассуждений, относящихся ко второму случаю. Третий случай позволяет заключить, что теорема 8.1 верна для диффеоморфизма θ.

В силу леммы 8.3 из сказанного следует, что теорема 8.1 верна также и для ограничения диффеоморфизма φ на множестве W_0.

Заметим, что $\varphi(W_0) = W_3$. Пусть $y_0 = \varphi(x_0)$. Положим $W_3 = W(y_0)$. Множество $W(y_0)$ открытое.

Пусть σ есть произвольный двоичный куб такой, что его замыкание $\bar{\sigma}$ содержится в множестве V. По доказанному, для всякой точки $y \in \bar{\sigma}$ найдется открытое множество $W(y)$ такое, что теорема 8.1 верна для всякой интегрируемой функции, равной нулю вне множества $W(y)$.

Множества $W(y)$, где $y \in \bar{\sigma}$, образуют открытое покрытие замкнутого куба $\bar{\sigma}$. По теореме Лебега об открытом покрытии (теорема 2.3 главы 9) найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всякой точки $y \in \bar{\sigma}$ шар $\overline{B}(y, \varepsilon)$ содержится в множестве $W(y')$ для некоторой точки $y' \in \bar{\sigma}$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$ таково, что выполняется неравенство $\sqrt{n}\,2^{-r} < \varepsilon$. Будем считать также, что ранг куба σ меньше r. Тогда куб σ разбивается на конечное число двоичных кубов ранга r. Каждый из этих кубов содержится в одном из множеств $W(y)$. Отсюда вытекает, что теорема 8.1 верна для случая, когда функция f является индикатором любого из этих кубов. Сумма индикаторов двоичных кубов, на которые разбивается куб σ, есть χ_σ. Это позволяет заключить, что теорема верна для функции χ_σ. Так как σ есть произвольный двоичный куб, замыкание которого содержится в множестве V, то в силу леммы 8.4 из доказанного следует справедливость теоремы 8.1 в общем случае. Теорема 8.1 полностью доказана. ■