§ 1. Полилинейные функции и поливекторы

В этом параграфе вводится понятие полилинейной функции. Полилинейная функция есть функция k аргументов — векторов пространства $\mathbb{R}^n$, линейная по каждому аргументу. Устанавливается формула, которая выражает значение полилинейной функции через координаты ее аргументов.

Рассматривается также понятие кососимметрической полилинейной функции.

Определяется понятие k-мерного поливектора. Геометрически k-мерный поливектор есть ориентированное k-мерное подпространство, которому сопоставлено некоторое число — мера поливектора. Поливектор определяется заданием упорядоченной системы из k линейно независимых векторов. Мера поливектора при этом равна объему k-мерного параллелепипеда, построенного на данных векторах.

1.1. Понятие полилинейной функции

Далее $\mathbb{X}$ означает конечномерное векторное пространство, n — размерность $\mathbb{X}$.

Предположим, что для всякой системы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ из k векторов пространства $\mathbb{X}$ определено число $F(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in \mathbb{R}$, т. е. задано отображение

$$F\colon (X_1, X_2, \ldots, X_k) \in \underbrace{\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \cdots \times \mathbb{X}}_{k \text{ множителей}} \mapsto F(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in \mathbb{R}.$$

Будем говорить, что F есть *полилинейная функция степени k*, если при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ функция F линейна относительно X_i при фиксированных значениях векторов X_j с $j \neq i$. Иначе говоря, для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$, для любых векторов

$$X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i', X_i'', X_{i+1}, \ldots X_k$$

и любых чисел α и β выполняется равенство

$$F(X_1, \ldots, \alpha X_i' + \beta X_i'', \ldots, X_k) = \\ = \alpha F(X_1, \ldots, X_i', \ldots, X_k) + \beta F(X_1, \ldots, X_i'', \ldots, X_k).$$

Полилинейная функция степени k называется также *k-линейной функцией* или иначе *k-линейной формой*. В случае $k = 2$ полилинейная функция степени k называется *билинейной функцией* или *билинейной формой.*

Данное определение не исключает случай $k = 1$. Для $k = 1$ понятие k-линейной функции совпадает с понятием линейной функции.

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Скалярное произведение $\langle X, Y\rangle = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \dots + X_nY_n$ является билинейной формой в $\mathbb{R}^n$.

Пример 2. Пусть $n = 1$. Для $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}$ положим $P(X_1, X_2, \dots, X_k) = X_1X_2 \dots X_k$. В силу известных свойств операции умножения чисел функция P, очевидно, является полилинейной формой в векторном пространстве $\mathbb{R}$.

Пример 3. Пусть $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ есть базис пространства $\mathbb{X}$. Предположим, что даны векторы $X_1, X_2, \dots, X_k$ пространства $\mathbb{X}$, причем при каждом $i = 1, 2, \dots, k$ вектор X_i относительно данного базиса имеет координаты $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$. Зададим произвольно номера $j_1, j_2, \dots, j_k$ и положим

$$\mathbf{u}^{j_1, j_2, \dots, j_k}(X_1, X_2, \dots, X_k) = \begin{vmatrix} X_{1j_1} & X_{1j_2} & \dots & X_{1j_k} \\ X_{2j_1} & X_{2j_2} & \dots & X_{2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{kj_1} & X_{kj_2} & \dots & X_{kj_k} \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

В силу известных свойств определителей функция $\mathbf{u}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ есть k-линейная функция в пространстве $\mathbb{X}$.

Найдем выражение для значений полилинейной функции F через координаты векторов $X_1, X_2, \dots, X_k$. Результат содержится в следующем предложении.

■ ***Лемма 1.1.*** *Пусть F есть произвольная k-линейная функция в пространстве $\mathbb{X}$ и $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ — базис пространства $\mathbb{X}$. Для произвольного набора индексов $j_1, j_2, \dots, j_k$ положим*

$$F_{j_1 j_2 \dots j_k} = F(\mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}, \dots, \mathbf{u}_{j_k}).$$

Пусть $X_i = X_{i1}\mathbf{u}_1 + X_{i2}\mathbf{u}_2 + \dots + X_{in}\mathbf{u}_n$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда имеет место равенство

$$F(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sum_{j_k=1}^{n} \dots \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} F_{j_1 j_2 \dots j_k} X_{1j_1} X_{2j_2} \dots X_{kj_k}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по k. Для $k = 1$ лемма верна в силу известных свойств линейных функций. Предположим, что для некоторого k лемма доказана, и пусть F есть полилинейная функция степени $k+1$. Положим $F_{j_{k+1}}(X_1, X_2, \ldots, X_k) = F(X_1, X_2, \ldots, X_k, \mathbf{u}_{j_{k+1}})$. Очевидно, $F_{j_{k+1}}$ есть k-линейная функция в $\mathbb{X}$. Для произвольного набора индексов $j_1, j_2, \ldots, j_k$ положим

$$F_{j_1 j_2 \ldots j_k, j_{k+1}} = F_{j_{k+1}}(\mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}, \ldots, \mathbf{u}_{j_k}). \tag{1.3}$$

В силу предположения индукции получаем

$$F_{j_{k+1}}(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \sum_{j_k=1}^{n} \cdots \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} F_{j_1 j_2 \ldots j_k j_{k+1}} X_{1 j_1} X_{2 j_2} \ldots X_{k j_k}.$$

Имеем

$$X_{k+1} = \sum_{j_1}^{n} X_{k+1, j_{k+1}} \mathbf{u}_{k+1, j_{k+1}}.$$

Подставляя это выражение в $F(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1})$, ввиду линейности F относительно X_{k+1} выводим

$$\begin{aligned} &F(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}) = \\ &\quad = F\left(X_1, X_2, \ldots, X_k, \sum_{j_{k+1}}^{n} X_{k+1, j_{k+1}} \mathbf{u}_{k+1, j_{k+1}}\right) = \\ &\quad = \sum_{j_{k+1}}^{n} F_{j_{k+1}}(X_1, X_2, \ldots, X_k,) X_{k+1, j_{k+1}}. \end{aligned}$$

Подставляя в это равенство выражение для $F_{j_{k+1}}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, которое дается формулой (1.3), после очевидных преобразований получим, что равенство (1.2) остается верным, если k заменить на $k+1$. Лемма доказана. ■

Числа $F_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ в представлении (1.2) полилинейной функции f называются ее *коэффициентами относительно базиса* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *пространства* $\mathbb{X}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ и $k = 2$. Согласно лемме 1.1 для всякой билинейной функции F (т. е. полилинейной функции степени 2) в пространстве $\mathbb{R}^n$ величина $F(X, Y)$ выражается через координаты векторов X и Y равенством, которое может быть записано в виде

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_iY_j.$$

Представим это выражение в другой форме. Пусть A есть матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будем называть ее *матрицей коэффициентов билинейной функции* F. Имеет место равенство

$$F(X,Y) = \langle X, AY\rangle. \tag{1.4}$$

Матрица A равенством (1.4) определяется однозначно. Действительно, для всякого $j = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$A\mathbf{u}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}).$$

Отсюда получаем, что $\langle \mathbf{u}_i, A\mathbf{u}_j\rangle = a_{ij}$, так что матрица A в представлении билинейной формы определена однозначно.

Билинейная функция $F(X,Y)$ называется *симметрической*, если

$$F(X,Y) = F(Y,X)$$

для любых векторов $X, Y \in \mathbb{X}$. Функция $F(X,Y)$ называется *кососимметрической*, если

$$F(Y,X) = -F(X,Y)$$

для любых $X, Y \in \mathbb{X}$.

Для случая $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ выясним, какова должна быть матрица билинейной функции F для того, чтобы она была симметрической или кососимметрической.

Функция $\widehat{F}(X,Y) \equiv F(Y,X)$ билинейна. Имеем

$$\widehat{F}(X,Y) = \langle Y, AX\rangle.$$

В силу известных свойств скалярного произведения

$$\langle Y, AX\rangle = \langle A^*Y, X\rangle = \langle X, A^*Y\rangle,$$

где A^* означает *транспонированную матрицу* A.

Мы видим, что A^* есть матрица билинейной формы $\widehat{F}$. Матрица билинейной формы $-F$ есть, очевидно, матрица $-A$. Следовательно, мы получаем, что если форма F симметрична, т. е. $F = \widehat{F}$, то $A = A^*$. Это означает, что в этом случае матрица A является симметрической.

Нетрудно видеть, что и обратно: симметричность матрицы A влечет симметричность билинейной формы F.

Аналогично получаем, что форма F является *кососимметрической* в том и только в том случае, если $A^* = -A$, т. е. матрица A кососимметрическая.

1.2. Понятие кососимметрической полилинейной функции

Полилинейная функция $F(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ называется *кососимметрической*, когда она меняет знак, если поменять местами два ее произвольных аргумента.

Кососимметрические полилинейные функции в дальнейшем будут одним из основных объектов изучения. Поэтому рассмотрим детально некоторые их свойства.

Пусть F есть k-линейная кососимметрическая форма. Тогда если среди векторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$ есть два одинаковых, например $X_i = X_j$, где $i \neq j$, то $F(X_1, X_2, \ldots, X_k) = 0$. Действительно, если поменять в выражении $y = F(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ векторы X_i и X_j местами, то в силу кососимметричности величина y умножится на -1. С другой стороны, при такой перестановке последовательность $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ не изменится и, значит, имеет место равенство $-y = y$. Следовательно, $y = 0$, что и требовалось доказать.

Напомним некоторые сведения из алгебры. *Перестановкой порядка* r называется всякое биективное отображение $\alpha\colon \mathbb{I}_r \to \mathbb{I}_r$, где $\mathbb{I}_r$ есть отрезок $\{1, 2, \ldots, r\}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Множество всех перестановок порядка r далее обозначается символом P_r. Пусть α — перестановка порядка r. Полагаем $\alpha(i) = \alpha_i$. Мы получаем набор индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ и далее будем говорить, что *задана перестановка* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *порядка* r.

Пусть даны перестановка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ порядка r и набор индексов $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$. Тогда определен набор индексов $J = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$, где $j_k = i_{\alpha_k}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, r$. Будем говорить, что «J получается из I посредством перестановки α», и писать $J = I \circ \alpha$.

Перестановка $\alpha \in \mathrm{P}_r$ называется *транспозицией*, если можно указать числа $k, l \in \mathbb{I}_r$ такие, что $k \neq l$, $\alpha_k = l$, $\alpha_l = k$ и $\alpha_i = i$, если $i \neq k$, $i \neq l$. В этом случае будем также говорить, что α есть *транспозиция элементов* k, l множества $\mathbb{I}_r$.

Всякая перестановка $\alpha \in \mathrm{P}_r$ может быть представлена как суперпозиция конечного числа транспозиций.

Как известно из алгебры, всякой перестановке $\alpha \in \mathrm{P}_r$ может быть сопоставлено некоторое число $\sigma(\alpha) = \pm 1$ такое, что выполняются следующие условия:

1) для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{P}_r$ выполняется равенство $\sigma(\alpha \circ \beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta)$;

2) если α есть транспозиция, то $\sigma(\alpha) = -1$;

3) если перестановка α может быть представлена как суперпозиция m транспозиций, то, как следует из данных условий, $\sigma(\alpha) = (-1)^m$.

Число $\sigma(\alpha)$ называется *сигнатурой перестановки* α.

Перестановка α называется *четной*, если $\sigma(\alpha) = 1$, и *нечетной*, если $\sigma(\alpha) = -1$.

■ **Лемма 1.2.** *Предположим, что F есть кососимметрическая полилинейная функция степени $k \geq 2$. Тогда для всякой перестановки α порядка k имеет место равенство*

$$F(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_k}) = \sigma(\alpha) F(X_1, X_2, \dots, X_k). \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $\alpha\colon i \in \mathbb{I}_k \mapsto \alpha_i \in \mathbb{I}_k$ есть произвольная перестановка порядка k. Предположим, что α есть суперпозиция N транспозиций. Применение транспозиции к какой-либо последовательности векторов $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ сводится к тому, что два члена последовательности меняются местами, а остальные остаются неизменными. Отсюда вытекает, что последовательность $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ может быть преобразована в последовательность $(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_k})$ в N шагов, на каждом из которых два члена последовательности меняются местами. При каждом таком преобразовании последовательности аргументов функции F значение функции умножается на -1, и в результате мы получаем

$$F(X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_k}) = \\ = (-1)^N F(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sigma(\alpha) F(X_1, X_2, \dots, X_k).$$

Лемма доказана. ■

■ **Теорема 1.1.** *Пусть векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ образуют базис пространства $\mathbb{X}$. Для произвольного набора индексов $j_1, j_2, \dots, j_k$ пусть $\mathbf{u}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ есть полилинейная кососимметрическая функция, определенная равенством*

$$\mathbf{u}^{j_1 j_2 \dots j_k}(X_1, X_2, \dots, X_k) = \begin{vmatrix} X_{1j_1} & X_{1j_2} & \dots & X_{1j_k} \\ X_{2j_1} & X_{2j_2} & \dots & X_{2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{kj_1} & X_{kj_2} & \dots & X_{kj_k} \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

Тогда для всякой кососимметрической полилинейной функции F степени k имеет место равенство

$$F = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} F_{j_1 j_2 \dots j_k} \mathbf{u}^{j_1, j_2, \dots, j_k}, \tag{1.7}$$

где

$$F_{j_1 j_2 \dots j_k} = F(\mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}, \dots, \mathbf{u}_{j_k}). \tag{1.8}$$

З а м е ч а н и е. Равенство (1.7) называется *каноническим представлением кососимметрической полилинейной функции F относительно базиса $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ пространства $\mathbb{X}$.*

Доказательство. Пусть F есть кососимметрическая полилинейная функция в векторном пространстве $\mathbb{X}$ и $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ — произвольный базис пространства $\mathbb{X}$.

Рассмотрим представление (1.2) полилинейной функции F. Согласно (1.2) для любых векторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$ пространства $\mathbb{X}$ выполняется равенство

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \sum_{j_k=1}^{n} \cdots \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} F_{j_1 j_2 \ldots j_k} X_{1j_1} X_{2j_2} \ldots X_{kj_k}, \tag{1.9}$$

где

$$F_{j_1 j_2 \ldots j_k} = F(\mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}, \ldots, \mathbf{u}_{j_k}).$$

Преобразуем равенство (1.9), используя тот факт, что рассматриваемая полилинейная функция F является кососимметрической.

Прежде всего заметим, что те слагаемые в правой части равенства (1.9), для которых среди индексов $j_1, j_2, \ldots, j_k$ есть одинаковые, равны нулю. Зададим произвольно набор индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ такой, что $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, и рассмотрим сумму тех слагаемых в сумме (1.9), для которых набор индексов $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ есть перестановка последовательности индексов $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, т. е. $j_1 = i_{\alpha_1}$, $j_2 = i_{\alpha_2}, \ldots, j_k = i_{\alpha_k}$, где $i \mapsto \alpha_i$ есть перестановка порядка k. Согласно лемме 1.2 имеем

$$F_{j_1 j_2 \ldots j_k} = F(\mathbf{u}_{i_{\alpha_1}}, \mathbf{u}_{i_{\alpha_2}}, \ldots, \mathbf{u}_{i_{\alpha_k}}) = \\ = \sigma(\alpha) F(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \ldots, \mathbf{u}_{i_k}) = \sigma(\alpha) F_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Отсюда заключаем, что сумма тех слагаемых в правой части равенства (1.9), для которых набор индексов $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ является перестановкой набора $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, равна выражению

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_k} \sum_{\alpha} \sigma(\alpha) X_{1i_{\alpha_1}} X_{2i_{\alpha_2}} \ldots X_{ki_{\alpha_k}}.$$

Сумма справа есть определитель

$$\begin{vmatrix} X_{1i_1} & X_{1i_2} & \ldots & X_{1i_k} \\ X_{2i_1} & X_{2i_2} & \ldots & X_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{ki_1} & X_{ki_2} & \ldots & X_{ki_k} \end{vmatrix} = \mathbf{u}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}(X_1, X_2, \ldots, X_k),$$

где $\mathbf{u}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ есть кососимметрическая функция, определенная равенством (1.1). В результате получаем

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \\ = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} F_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mathbf{u}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(X_1, X_2, \ldots, X_k), \quad (1.10)$$

где суммирование выполняется по множеству всех наборов индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$, удовлетворяющих условию $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Векторы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ взяты произвольно, и мы, следовательно, получаем, что всякая кососимметрическая функция F степени k может быть представлена в виде

$$F = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} F_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mathbf{u}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}.$$

Теорема доказана. ∎

∎ ***Лемма 1.3.*** *Пусть F есть кососимметрическая полилинейная функция степени k. Тогда если векторы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ линейно зависимы, то имеет место равенство $F(X_1, X_2, \ldots, X_k) = 0$.*

Доказательство. Пусть F есть полилинейная кососимметрическая функция степени k. Предположим, что векторы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ линейно зависимы. Тогда один из них может быть представлен как линейная комбинация остальных. Для определенности предположим, что вектор X_1 является линейной комбинацией векторов $X_2, \ldots, X_k$, $X_1 = \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k$. В силу линейности функции F по первому аргументу отсюда вытекает, что $F(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \lambda_2 F(X_2, X_2, \ldots, X_k) + \cdots + \lambda_k F(X_k, X_2, \ldots, X_k)$. Правая часть этого равенства равна нулю, так как каждое слагаемое справа содержит под знаком F два одинаковых аргумента. Следовательно, $F(X_1, X_2, \ldots, X_k) = 0$ для данных векторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Лемма доказана. ∎

∎ ***Лемма 1.4.*** *Пусть F есть кососимметрическая полилинейная функция степени k. Предположим, что системы векторов*

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$$

таковы, что при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняется равенство

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} X_j,$$

и пусть A есть $k \times k$-матрица $(a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,k}$. Тогда имеет место равенство

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = (\det A) F(X_1, X_2, \dots, X_k). \tag{1.11}$$

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Если векторы $X_1, X_2, \dots, X_k$ линейно зависимы, то они принадлежат некоторому $(k-1)$-мерному подпространству Q пространства $\mathbb{X}$. Очевидно, тогда и векторы $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ принадлежат тому же подпространству и, следовательно, они линейно зависимы. Обе части равенства (1.11) в силу леммы 1.3 в этом случае обращаются в нуль и, стало быть, в этом случае равенство (1.11) верно.

Предположим, что векторы $X_1, X_2, \dots, X_k$ линейно независимы. В этом случае в $\mathbb{X}$ существует базис $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, такой, что $X_i = \mathbf{u}_i$ для $i = 1, 2, \dots, k$. Координаты каждого вектора Y_i относительно этого базиса равны a_{ij} при $j = 1, 2, \dots, k$ и равны нулю при $j > k$. Отсюда вытекает, что выражение

$$\mathbf{u}^{j_1 j_2 \dots j_k}(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \tag{1.12}$$

обращается в нуль, если хотя бы один из индексов $j_1, j_2, \dots, j_k$ больше k, ибо в этом случае в определителе, которому равна величина (1.12), все элементы, стоящие в одном из его столбцов, будут равны нулю. Из доказанного вытекает, что для данных векторов $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ величина $\mathbf{u}^{j_1 j_2 \dots j_k}(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ может быть отлична от нуля в единственном случае, а именно, только когда $j_1 = 1$, $j_2 = 2, \dots, j_k = k$. Мы получаем, следовательно,

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = F_{1,2,\dots,k}\mathbf{u}^{1,2,\dots,k}(Y_1, Y_2, \dots, Y_k).$$

Осталось заметить, что $\mathbf{u}^{1,2,\dots,k}(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = \det A$, а $F_{1,2,\dots,k} = F(X_1, X_2, \dots, X_k)$. Лемма доказана. ■

1.3. Понятие поливектора. Интегрирование по k-мерной плоскости

Приведем некоторые построения геометрического характера.

Далее k означает целое число такое, что $1 \le k \le n$.

Будем называть *k-репером в пространстве* $\mathbb{R}^n$ всякую упорядоченную систему $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ векторов пространства $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что k-репер является *вырожденным*, если векторы $X_1, X_2, \dots, X_k$ линейно зависимы. Если векторы $X_1, X_2, \dots, X_k$ линейно независимы, то k-репер называется *невырожденным*.

Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ есть произвольный невырожденный k-репер в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество всех векторов X, которые являются линейными комбинациями векторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$, представляет собой некоторое k-мерное подпространство P пространства $\mathbb{R}^n$.

Будем называть P *плоскостью данного k-репера.* Будем говорить, что k-репер

$$\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$$

подобен k-реперу

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\},$$

если существует квадратная матрица

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,k}$$

порядка k, определитель которой отличен от нуля, и такая, что для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняется равенство

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} X_j. \tag{1.13}$$

Если k-реперы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ таковы, что выполняются равенства (1.2), то мы будем писать $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$.

Обозначим символом E_k *единичную матрицу порядка* k. Очевидно, $\det E_k = 1$, и для всякого k-репера $\mathbf{X}$ имеем $\mathbf{X} = E_k\mathbf{X}$. Если $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$, то, в свою очередь, $\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{Y}$. Если $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$, а $\mathbf{Z} = B\mathbf{Y}$, то имеет место равенство $\mathbf{Z} = (BA)\mathbf{X}$.

Из сказанного следует, что отношения подобия для k-реперов, введенное описанным здесь способом, *рефлексивно, симметрично* и *транзитивно.*

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — два невырожденных k-репера. Будем говорить, что k-репер $\mathbf{Y}$ *эквивалентен* k-реперу $\mathbf{X}$, и писать $\mathbf{Y} \sim \mathbf{X}$, если $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$, где $k \times k$ — матрица A такова, что ее определитель $\det A = 1$. Условия *рефлексивности, симметричности* и *транзитивности*, очевидно, здесь выполняются, так что применение термина «эквивалентность» для определенного отношения между k-реперами законно.

Множество всех невырожденных k-реперов распадается на классы эквивалентных k-реперов. Каждый такой класс мы будем называть *k-вектором в пространстве* $\mathbb{R}^n$. Если $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ есть невырожденный k-репер в пространстве $\mathbb{R}^n$, то $\mathbf{X}$ определяет k-вектор, который мы будем обозначать одним из символов $[\mathbf{X}]$ или $[X_1, X_2, \ldots, X_k]$.

Всякий k-вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$ мы будем называть также *k-мерным поливектором.*

Пусть $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ есть невырожденный k-репер в k-мерной плоскости P. Говорят, что $\mathbf{u}$ есть *ортогональный k-репер*, если векторы u_i взаимно ортогональны, т. е. если $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ для любых $i, j = 1, 2, \ldots, k$ таких, что $i \neq j$.

Ортогональный k-репер называется *ортонормальным*, если длины составляющих его векторов равны единице. Во всяком k-мерном подпространстве P пространства $\mathbb{R}^n$ существует ортонормальный репер. Он может быть получен из произвольного k-репера $\mathbf{u}$ применением так называемого *процесса ортогонализации Грама — Шмидта*, описание которого читатель найдет в любом руководстве по линейной алгебре.

Пусть P есть k-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ и

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

— невырожденный k-репер, лежащий в плоскости P.

Всякий вектор $X \in P$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде

$$X = t_1u_1 + t_2u_2 + \cdots + t_ku_k.$$

Положим $K_u(X) = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Очевидно, $X \mapsto K_u(X) \in \mathbb{R}^k$ есть биективное отображение плоскости P в $\mathbb{R}^k$. Это отображение называется *линейной системой координат в плоскости P, определенной k-репером* $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Вектор $t = K_u(X) \in \mathbb{R}^k$ будем называть *координатным вектором точки* X в данной линейной системе координат.

Символом I_u будем обозначать *обратное отображение* K_u^{-1}. Для $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ имеем

$$I_u(t) = t_1u_1 + t_2u_2 + \cdots + t_ku_k.$$

Предположим, что задана функция $f\colon P \to \mathbb{R}$. Тогда в $\mathbb{R}^k$ определена функция $g(t) = f[I_u(t)]$. Будем говорить, что g есть представление функции f в линейной системе координат, определенной k-репером $\mathbf{u}$.

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — произвольные невырожденные k-реперы в k-мерной плоскости P пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$, где $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,k}$, матрица A невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$.

На плоскости P мы получаем две линейные системы координат. Одна определяется k-репером $\mathbf{u}$, другая — k-репером $\mathbf{v}$.

Выясним, как координаты произвольной точки в одной из этих систем координат выражаются через ее координаты в другой системе координат. Пусть $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ и $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Имеем равенства

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Пусть $X \in P$. Имеем

$$X = \sum_{i=1}^{k} z_i v_i, \quad X = \sum_{i=1}^{k} t_i u_i.$$

Пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k = K_u(X)$ и $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k = K_v(X)$. Подставляя выражения для векторов v_i через векторы u_j, получим

$$X = \sum_{i=1}^{k} z_i \left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j \right).$$

Меняя в этом равенстве порядок суммирования, найдем, что

$$X = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij} z_i \right) u_j.$$

Отсюда получаем

$$t_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} z_i$$

и, значит, $t = A^* z$, где, как обычно, A^* есть транспонированная матрица A. Заметим, что $t = K_u(X)$ и $z = K_v(X)$, и, таким образом, равенство $t = A^* z$ может быть представлено в виде

$$K_u(X) = A^* K_v(X). \tag{1.14}$$

Линейная система координат в k-мерной плоскости P называется *ортонормальной*, если она порождается некоторым ортонормальным k-репером $\mathbf{u}$. Пусть $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ есть *ортонормальный репер* в плоскости P. Покажем, что в этом случае скалярное произведение векторов выражается через координаты векторов в системе координат, определенной данным репером, по тем же формулам, что и в случае векторов в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Действительно, пусть

$$X = \sum_{i=1}^{k} t_i u_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{k} z_j u_j.$$

Отсюда в силу билинейности скалярного произведения получаем, что

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} t_i z_j \langle u_i, u_j \rangle.$$

В силу ортонормальности k-репера $\mathbf{u}$ имеем

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{k} t_i z_i.$$

Иначе говоря, мы получаем, что если $t = K_u(X)$ и $z = K_u(Y)$, то $\langle X, Y \rangle = \langle t, z \rangle = \langle K_u(X), K_u(Y) \rangle$.

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ суть произвольные ортонормальные реперы в плоскости P. Имеем $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$. Покажем, что матрица A является ортогональной. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,k}$ и $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, а $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Имеем

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.15}$$

Пусть вектор $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ есть i-я строка матрицы A. Вектор $a_i \in \mathbb{R}^k$, как следует из равенства (1.15), есть координатный вектор вектора v_i. Так как $\mathbf{u}$ есть ортонормальный репер в плоскости P, то для любых $i, j = 1, 2, \ldots, k$ имеет место равенство $\langle a_i, a_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$. Отсюда следует, что векторы a_i взаимно ортогональны и длина каждого из них равна единице, и, значит, матрица A ортогональная.

Будем говорить, что k-вектор является *единичным*, если он порождается некоторым ортонормальным k-репером.

Пусть $\mathbf{X}$ есть произвольный невырожденный k-репер в пространстве $\mathbb{R}^n$, P — плоскость этого k-репера. В плоскости P построим ортонормальный k-репер $\mathbf{u}$. Имеем $\mathbf{X} = A\mathbf{u}$. Величину $|\det A|$ будем называть *абсолютной величиной k-вектора* $[X_1, X_2, \ldots, X_k]$ и обозначать одним из символов $|[X_1, X_2, \ldots, X_k]|$ или $|[\mathbf{X}]|$.

Найдем явное представление для абсолютной величины поливектора. Пусть P есть k-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ — невырожденный k-репер в плоскости P. Пусть $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ есть ортонормальный репер в плоскости P. Тогда имеем $\mathbf{X} = A\mathbf{u}$ и согласно данному выше определению $|[\mathbf{X}]| = |\det A|$. Определим некоторую функцию $2k$ аргументов $\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$, полагая

$$\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = \begin{vmatrix} \langle X_1, Y_1\rangle & \langle X_1, Y_2\rangle & \ldots & \langle X_1, Y_k\rangle \\ \langle X_2, Y_1\rangle & \langle X_2, Y_2\rangle & \ldots & \langle X_2, Y_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X_k, Y_1\rangle & \langle X_k, Y_2\rangle & \ldots & \langle X_k, Y_k\rangle \end{vmatrix}.$$

В силу известных свойств определителей функция Δ является кососимметрической относительно $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$.

Пусть $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\} = \mathbf{Y} = B\mathbf{u}$. Тогда в силу леммы 1.4 имеем

$$\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = \det B\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_k, u_1, u_2, \ldots, u_k).$$

Функция

$$\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_k, u_1, u_2, \ldots, u_k)$$

переменных $X_1, X_2, \ldots, X_k$ является кососимметрической полилинейной функцией. В силу леммы 1.4 из соотношения

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_k\} = \mathbf{X} = A\mathbf{u}$$

поэтому следует равенство

$$\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_k, u_1, u_2, \ldots, u_k) = \det A\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1, u_2, \ldots, u_k).$$

В силу ортонормальности системы векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$ величина $\Delta(u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1, u_2, \ldots, u_k) = 1$, и мы получаем, таким образом, что если $\mathbf{X} = A\mathbf{u}$ и $\mathbf{Y} = B\mathbf{u}$, где $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$, то имеет место равенство

$$\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = \det A \det B.$$

В частности, получаем отсюда

$$|[\mathbf{X}]|^2 = (\det A)^2 = \Delta(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_1, X_2, \ldots, X_k).$$

Выписывая явно выражение для последней величины, получим

$$|[\mathbf{X}]|^2 = \begin{vmatrix} \langle X_1, X_1\rangle & \langle X_1, X_2\rangle & \dots & \langle X_1, X_k\rangle \\ \langle X_2, X_1\rangle & \langle X_2, X_2\rangle & \dots & \langle X_2, X_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X_k, X_1\rangle & \langle X_k, X_2\rangle & \dots & \langle X_k, X_k\rangle \end{vmatrix}.$$

Понятия интеграла интегрируемой функции и меры множества, изучаемые в главе 13, могут быть определены также и для функций, определенных на k-мерных подпространствах пространства $\mathbb{R}^n$. При этом нет необходимости повторять все построения, выполненные в главе 13 для этого случая. Теория интеграла для функций, определенных на подпространствах $\mathbb{R}^n$, может быть получена формальным переносом теории интеграла в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Пусть P есть произвольное k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — невырожденные k-реперы в плоскости P. Эти реперы определяют в P линейные системы координат. Пусть $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$, где A есть невырожденная $k \times k$-матрица.

Определены биективные отображения $I_u\colon \mathbb{R}^k \to P$ и $I_v\colon \mathbb{R}^k \to P$. Для произвольной функции $f\colon P \to \mathbb{R}$ положим $I_u^* f = f \circ I_u$ и $I_v^* f = f \circ I_v$. Будем говорить, что функции $I_u^* f$ и $I_v^* f$ есть представления функции в линейных системах координат, определяемых k-реперами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ соответственно. Предположим, что точки $t, z \in \mathbb{R}^k$ таковы, что $I_u(t) = I_v(z) = X$. В этом случае t есть координатный вектор точки X в системе координат с базисом $\mathbf{u}$, а z — координатный вектор X в системе, определенной посредством k-репера $\mathbf{v}$. Как показано выше, имеет место равенство $t = A^* z$.

Имеем $I_u^* f(t) = f(X)$ и $I_v^* f(z) = f(X)$, и, стало быть, имеет место равенство $I_u^* f(t) = I_v^* f(z)$. Принимая во внимание представление вектора t через вектор z, получаем равенство

$$I_v^* f(z) = I_u^* f(A^* z). \tag{1.16}$$

Будем говорить, что функция $f\colon P \to \mathbb{R}$ *измерима*, если для некоторого невырожденного k-репера $\mathbf{u}$ в плоскости P функция $I_u^* f$ измерима в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Будем говорить, что функция f *интегрируема по плоскости* P, если функция $I_u^* f$ интегрируема в пространстве $\mathbb{R}^k$.

В силу равенства (1.16) свойство функции $f\colon P \to \mathbb{R}$, очевидно, не зависит от выбора k-репера $\mathbf{u}$, определяющего линейную систему координат в плоскости P.

Множество $E \subset P$ будем называть *измеримым*, если множество $K_u(E) = I_u^{-1}(E)$ для некоторого k-репера $\mathbf{u}$ является измеримым. Нетрудно видеть, что это равносильно следующему условию: *индикатор множества E на плоскости P есть измеримая функция.*

Чтобы определить интеграл функции f по плоскости P, зададим в P линейную ортогональную систему координат, определяемую ортонормальным k-репером $\mathbf{u}$. Пусть $f\colon P \to \mathbb{R}$ есть интегрируемая функция. Величина

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} I_u^* f(t)\, dt \tag{1.17}$$

называется *интегралом от функции f по плоскости P* и обозначается символом

$$\int\limits_P f(X)\, d\mu_k(X).$$

Данное определение корректно в силу того, что интеграл (1.17) не зависит от выбора ортонормального k-репера $\mathbf{u}$. Действительно, пусть $\mathbf{v}$ — произвольный другой ортонормальный k-репер в плоскости P. Тогда будем иметь $I_v^* f(z) = I_u^* f(A^* z)$. Применяя *формулу замены переменных в кратном интеграле* (см. главу 13), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} I_u(t)\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}^k} I_u(A^* z)|\det A|\, dz = |\det A| \int\limits_{\mathbb{R}^k} I_v^* f(z)\, dz.$$

Матрица A ортогональная, и, значит, модуль ее определителя равен единице. Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} I_u(t)\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}^k} I_v^* f(z)\, dz.$$

Этим, очевидно, доказана независимость величины интеграла функции f по плоскости P от выбора ортонормального репера $\mathbf{u}$.

Установим некоторую характеристику кососимметрических полилинейных функций.

Полилинейная функция $F(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ степени k называется *внешней формой степени k*, если она удовлетворяет следующему условию: если k-реперы $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ эквивалентны, то имеет место равенство

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_k) = F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k).$$

Справедливо следующее утверждение.

■ **Теорема 1.2.** *Для того чтобы полилинейная функция F степени k была внешней формой, необходимо и достаточно, чтобы она была кососимметрична.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Зададим произвольно векторы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ пространства $\mathbb{X}$. Выберем произвольно номера i и j такие, что $i \neq j$, и пусть $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ есть k-репер, определенный следующим образом. Если $s \neq i$ и $s \neq j$, то $Y_s = X_s$. Далее, $Y_i = -X_j$, а $Y_j = X_i$. Данный k-репер получен из k-репера X перестановкой векторов X_i и X_j и умножением вектора X_j на -1. Имеем $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$, где матрица A получается из *единичной матрицы* E_k порядка k перестановкой ее столбцов с номерами i и j и последующим умножением элементов одного столбца на -1. Определитель матрицы A в данном случае, очевидно, равен единице. Отсюда следует, что данные k-реперы эквивалентны.

Выпишем значения функции F для систем векторов

$$X_1, X_2, \ldots, X_k \quad \text{и} \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_k.$$

Приравнивая полученные значения, будем иметь равенство

$$F(\ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots) = F(\ldots, -X_j, \ldots, X_i, \ldots).$$

(Простоты ради предполагается, что $i < j$, и совпадающие члены в выражениях под знаком F справа и слева не выписываются.)

В силу линейности F по каждому аргументу мы получаем отсюда, что $F(\ldots, -X_j, \ldots, X_i, \ldots) = -F(\ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots)$. Тем самым установлено, что полилинейная функция F кососимметрична. Необходимость условия теоремы, таким образом, доказана.

Достаточность условия теоремы является простым следствием леммы 1.3. Предположим, что k-реперы

$$\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\} \quad \text{и} \quad \mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$$

эквивалентны. Тогда $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$, где матрица A такова, что ее определитель равен единице. В силу леммы 1.3 имеем

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = \det A F(X_1, X_2, \ldots, X_k) = F(X_1, X_2, \ldots, X_k).$$

Таким образом, мы получаем, что если k-реперы $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ и $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ эквивалентны, то

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = F(X_1, X_2, \ldots, X_k).$$

Теорема доказана полностью. ■

§ 2. Исчисление внешних дифференциальных форм

Понятие дифференцируемого многообразия было определено в главе 10. В этом параграфе изучается вторая основная составляющая рассматриваемой теории — понятие внешней дифференциальной формы (кратко, внешней формы). Внешние дифференциальные формы играют роль подынтегральных выражений в излагаемой здесь теории интегрирования. Исчисление внешних форм является разделом области математики, называемой тензорным анализом.

Здесь приводятся основные сведения о внешних дифференциальных формах, применяемые в дальнейшем изложении. Определяются некоторые операции над внешними формами, в частности операция умножения внешних форм, операция перенесения внешней формы гладким отображением и, наконец, операция дифференцирования внешней формы.

Теория внешних форм играет важную роль в современной дифференциальной геометрии и в топологии. С ее помощью строится аналитическая версия раздела топологии, называемого теорией когомологий.

2.1. Определение понятия внешней дифференциальной формы

Пусть U есть произвольное открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для всякой точки $x \in U$ определена кососимметрическая полилинейная функция

$$\omega(x)\colon (u_1, u_2, \dots, u_r) \mapsto \omega(x)(u_1, u_2, \dots, u_r)$$

векторов $u_1, u_2, \dots, u_r$ пространства $\mathbb{R}^n$. В этом случае мы будем говорить, что на множестве U определена внешняя дифференциальная форма $\omega(x)$ степени r. Согласно теореме 1.1 справедливо равенство

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_r}(x) \mathbf{e}^{i_1, i_2, \dots, i_r},$$

где $\mathbf{e}^{i_1, i_2, \dots, i_r}$ есть кососимметрическая функция, значение которой для системы векторов $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$, $i = 1, 2, \dots, r$, задается равенством

$$\mathbf{e}^{i_1, i_2, \dots, i_r}(u_1, u_2, \dots, u_r) = \begin{vmatrix} u_{1i_1} & u_{1i_2} & \dots & u_{1i_r} \\ u_{2i_1} & u_{2i_2} & \dots & u_{2i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{ri_1} & u_{ri_2} & \dots & u_{ri_r} \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

Далее используются следующие обозначения. Полилинейная функция $\mathbf{e}^{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ обозначается одним из следующих двух выражений: $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ или $dx^{i_1}dx^{i_2}\ldots dx^{i_r}$. Целесообразность такого обозначения будет видна из дальнейшего.

Предварительно опишем формальные правила, посредством которых определяются некоторые алгебраические операции с внешними дифференциальными формами.

Пусть n — произвольное натуральное число. Тогда символом $\mathbb{I}_n$, как обычно, обозначается отрезок множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, состоящий из всех чисел $k \in \mathbb{N}$ таких, что $1 \leq k \leq n$. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Множество всех конечных последовательностей $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$, где $i_1, i_2, \ldots, i_r$ — элементы множества $\mathbb{I}_n$, будем обозначать символом $\mathbb{I}_n^r$. Множество $\mathbb{I}_n^r$ есть прямое произведение

$$\underbrace{\mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_n \times \cdots \times \mathbb{I}_n}_{r \text{ множителей}}.$$

Можно рассматривать $\mathbb{I}_n^r$ также как множество всех отображений отрезка $\mathbb{I}_r$ в множество $\mathbb{I}_n$. Элементы множества $\mathbb{I}_n^r$ будем (имея в виду дальнейшие приложения) называть *наборами индексов.*

Пусть даны наборы индексов $I \in \mathbb{I}_n^r$ и $J \in \mathbb{I}_n^s$. Тогда символом (I, J) обозначим набор индексов $K \in \mathbb{I}_n^{r+s}$, который получается, если к I приписать справа индексы, составляющие J в таком порядке, в каком они входят в J. Первые r компонент набора индексов K совпадают с соответствующими компонентами набора индексов I, а следующие s компонент совпадают с соответствующими компонентами J. (Формально $K = (k_1, k_2, \ldots, k_{r+s})$, где $k_t = i_t$ при $t = 1, 2, \ldots, r$, и $k_{r+t} = j_t$ при $t = 1, 2, \ldots, s$.)

Аналогично, если мы имеем произвольное конечное число наборов индексов I_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, то выражение $K = (I_1, I_2, \ldots, I_m)$ означает набор индексов, получаемый, если выписать сначала индексы, составляющие I_1, в порядке их нумерации, затем написать компоненты набора индексов I_2, расположив их в порядке нумерации, и т. д., и, наконец, последние r_m компонент набора индексов K, взятые в порядке следования, образуют набор индексов I_m.

Совокупность всех наборов индексов $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathbb{I}_n^r$ таких, что $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, будем обозначать символом S_n^r. Множество S_n^r, очевидно, определено только при $r \leq n$.

Видим, что S_n^n состоит из единственного элемента — набора индексов $(1, 2, \ldots, n)$.

Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что на множестве U задана *внешняя дифференциальная форма* ω степени r, где $1 \leq r \leq n$,

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots i_r} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_r}(x) dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_r}. \tag{2.2}$$

Всякому набору индексов $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in S_n^r$ отвечает вещественная функция $\omega_{i_1 i_2 \ldots i_r} \equiv \omega_I$, определенная на множестве U.

Введем также следующее обозначение. Для $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in S_n^r$ полагаем $dx^I = dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_r}$.

В соответствии с этим равенство (2.2) сокращенно может быть записано следующим образом:

$$\omega(x) = \sum_{I \in S_n^r} \omega_I dx^I.$$

Данное равенство так же, как и развернутую его форму, которая дается равенством (2.2), будем называть *каноническим представлением внешней дифференциальной формы* $\omega(x)$.

Пусть $\omega(x)$ и $\theta(x)$ есть внешние дифференциальные формы степени r, определенные на открытом множестве U пространства $\mathbb{R}^n$. Для всякой точки $x \in U$ определены кососимметрические полилинейные функции $\omega(x)$ и $\theta(x)$ степени r. Их сумма $\omega(x) + \theta(x)$, очевидно, также представляет собой некоторую кососимметрическую функцию. Коэффициенты функции $\tau = \omega + \theta$ выражаются равенствами $\tau_I = \omega_I + \theta_I$.

Будем говорить, что внешняя дифференциальная форма ω *принадлежит классу* $\mathscr{C}^r$, если все ее коэффициенты есть функции класса $\mathscr{C}^r$.

Под *внешней дифференциальной формой степени* 0 *в области* U понимается просто вещественная функция, определенная на множестве U. Степень внешней дифференциальной формы ω обозначается символом $\deg \omega$.

Внешняя дифференциальная форма ω называется *мономом*, если она может быть представлена в виде $\omega = v dx^I$, т. е. если все ее коэффициенты, кроме, может быть, одного, обращаются в нуль.

Всякая внешняя дифференциальная форма является суммой конечного числа мономов. Установление различных свойств внешних дифференциальных форм поэтому часто может быть сведено к случаю, когда внешняя дифференциальная форма есть моном.

Отметим, что полилинейная функция r векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ в случае $r > n$ тождественно равна нулю, как следует из леммы 1.3, ибо при $r > n$ любые r векторов пространства $\mathbb{R}^n$ линейно зависимы.

Пусть дан произвольный набор индексов $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathbb{I}_n^r$. Выражению $dx^I = dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_r}$ согласно определению, данному выше, соответствует полилинейная функция $\mathbf{e}^{i_1, i_2, \ldots, i_r}$. Эта форма кососимметрическая.

Заметим, что в определении внешней формы $\mathbf{e}^{i_1, i_2, \ldots, i_r}$ нет необходимости требовать, чтобы индексы $i_1, i_2, \ldots, i_r$ образовывали возрастающую последовательность. Будем считать, что $dx^I = dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_r}$

означает полилинейную функцию $e^{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ также и в случае, когда I не принадлежит S_n^r.

Пусть дана перестановка $\alpha\colon \mathbb{I}_r \to \mathbb{I}_r$. Предположим, что набор индексов $J = (i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_r})$ является перестановкой набора индексов I. Так как определитель является кососимметрической полилинейной функцией своих столбцов, то, как следует из леммы 1.2, имеет место равенство

$$dx^J = \sigma(\alpha)dx^I. \tag{2.3}$$

Если среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_r$ есть одинаковые, то определитель (2.1), посредством которого задается величина $e^{i_1,i_2,\ldots,i_r}(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, имеет два одинаковых столбца и, следовательно, в этом случае $dx^I \equiv 0$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Базисные внешние формы первой степени суть $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$. В соответствии с этим *каноническое представление всякой внешней дифференциальной формы* ω степени 1 имеет вид

$$\omega(x) = \sum_{i-1}^{n} \omega_i(x)dx^i.$$

Множество S_n^n, как было отмечено выше, состоит из единственного элемента — набора индексов $I = (1, 2, \ldots, n)$. Поэтому имеется только одна базисная внешняя форма степени n, а именно, форма $dx^1dx^2\ldots dx^n$. Для произвольной системы из n векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ величина $dx^1dx^2\ldots dx^n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ есть определитель, у которого i-я строка при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$ совпадает с вектором u_i.

Каноническое представление всякой внешней дифференциальной формы ω степени n имеет вид

$$\omega(x) = \Omega(x)dx^1dx^2\ldots dx^n.$$

Рассмотрим внешние дифференциальные формы степени $n-1$. Имеется в точности n наборов индексов, принадлежащих S_n^{n-1}. Каждый из них получается из последовательности $(1, 2, \ldots, n)$ вычеркиванием какого-либо одного ее члена. Обозначим символом ε_i набор индексов, получаемый вычеркиванием числа i из последовательности $(1, 2, \ldots, n)$.

Каноническое представление внешней дифференциальной формы ω *степени* $n-1$ имеет вид

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{\varepsilon_i}(x)dx^{\varepsilon_i}.$$

Далее используются следующие обозначения. Для произвольной формы ω степени $n-1$ полагаем $\omega_i(x) = (-1)^{i-1}\omega_{\varepsilon_i}$. Тогда *каноническое представление внешней дифференциальной формы* $\omega(x)$ принимает вид

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\omega_i(x)dx^{\varepsilon_i}.$$

(Целесообразность таких обозначений будет видна из дальнейшего.)

2.2. Умножение внешних дифференциальных форм

Пусть ω и θ — произвольные внешние дифференциальные формы степеней r и s соответственно,

$$\omega(x) = \sum_{I \in S_n^r} \omega_I(x) dx^I, \quad \theta(x) = \sum_{J \in S_n^s} \theta_J(x) dx^J$$

— их канонические представления.

Внешним произведением дифференциальных форм ω и θ называется внешняя дифференциальная форма ψ степени $r+s$, определенная равенством

$$\psi(x) = \sum_{I \in S_n^r} \sum_{J \in S_n^s} \theta_J(x) \omega_I(x) dx^{(I,J)}.$$

Внешнее произведение дифференциальных форм ω и θ обозначается символом $\omega \wedge \theta$.

Формально внешнее произведение форм ω и θ получается, если их канонические представления перемножить как обычные многочлены, полагая произведение dx^I и dx^J равным $dx^{(I,J)}$ для любых I, J.

Напомним, что для $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ и $J = (j_1, j_2, \ldots, j_s)$ символ $dx^{(I,J)}$ означает внешнюю дифференциальную форму

$$dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_r} dx^{j_1} dx^{j_2} \ldots dx^{j_s}.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть даны внешние формы первой степени $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i dx^i$ и $\theta = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i dx^i$. Тогда, по определению,

$$\omega \wedge \theta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \theta_j dx^i \wedge dx^j.$$

При $i = j$ имеем $dx^i \wedge dx^j = 0$ и, следовательно,

$$\omega \wedge \theta = \sum_{1 \le i < j \le n} (\omega_i \theta_j dx^i \wedge dx^j + \omega_j \theta_i dx^j \wedge dx^i),$$

где суммирование ведется по множеству всех пар (i, j) таких, что $i < j$. При $i < j$ имеем $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$ и окончательно получаем

$$\omega \wedge \theta = \sum_{1 \le i < j \le n} (\omega_i \theta_j - \omega_j \theta_i) dx^i \wedge dx^j.$$

Пример 2. Пусть $\theta = \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j dx^j$ есть внешняя дифференциальная форма первой степени, ω — внешняя дифференциальная форма степени $n-1$. Запишем каноническое представление формы ω в виде

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega_i(x) dx^{\varepsilon_i},$$

где $\varepsilon_i \in S_n^{n-1}$ означает набор индексов, получаемый вычеркиванием числа i из последовательности $(1, 2, \ldots, n)$.

Найдем внешнее произведение $\theta \wedge \omega$. Если $i \neq j$, то $dx^j \wedge dx^{\varepsilon_i} = 0$, так как в этом случае набор индексов (j, ε_i) содержит два одинаковых члена. Поэтому произведение $\theta_j dx^j$ на i-е слагаемое в выражении для внешней дифференциальной формы ω при $i \neq j$ обращается в нуль. Следовательно, мы получаем

$$\theta \wedge \omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega_i(x) \theta_i dx^i \wedge dx^{\varepsilon_i}.$$

Имеем

$$dx^i \wedge dx^{\varepsilon_i} = (-1)^{i-1} dx^1 dx^2 \ldots x_n.$$

В результате получаем

$$\theta \wedge \omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \theta_i \right) dx^1 dx^2 \ldots dx^n.$$

Отметим некоторые свойства операции внешнего умножения, непосредственно вытекающие из определения.

♦ **Предложение 2.1.** *Для любых внешних дифференциальных форм ω_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, степени r и любой внешней дифференциальной формы θ степени s выполняется равенство*

$$(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_m) \wedge \theta = \omega_1 \wedge \theta + \omega_2 \wedge \theta + \cdots + \omega_m \wedge \theta.$$

Аналогично, для всякой внешней формы ω степени r и любых внешних дифференциальных форм θ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, степени s выполняется равенство

$$\omega \wedge (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m) = \omega \wedge \theta_1 + \omega \wedge \theta_2 + \cdots + \omega \wedge \theta_m.$$

Данное предложение непосредственно вытекает из определения операции умножения внешних дифференциальных форм. ♦

♦ **Предложение 2.2.** *Пусть даны вещественная функция α и внешние дифференциальные формы ω и θ. Тогда имеют место равенства*

$$(\alpha\omega) \wedge \theta = \omega \wedge (\alpha\theta) = \alpha(\omega \wedge \theta).$$

Доказательство непосредственно следует из определения умножения внешних дифференциальных форм. ♦

♦ **Предложение 2.3.** *Пусть даны внешние дифференциальные формы ω и θ, $\deg(\omega) = k$, $\deg(\theta) = l$. Тогда имеет место равенство*

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{kl}\theta \wedge \omega. \tag{2.4}$$

Действительно, согласно определению имеем

$$\omega \wedge \theta = \sum_{I\in S_n^k} \sum_{J\in S_n^l} \omega_I\theta_J dx^{(I,J)}, \quad \theta \wedge \omega = \sum_{I\in S_n^k} \sum_{J\in S_n^l} \omega_I\theta_J dx^{(J,I)}.$$

Доказательство сводится к установлению того, что для любых $I \in S_n^k$ и $J \in S_n^l$ выполняется равенство $dx^{(I,J)} = (-1)^{kl}dx^{(J,I)}$. Последовательно меняя в $(I,J) = (i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l)$ индекс j_1 местами с индексом, стоящим от него слева, после k транспозиций получим набор индексов $(j_1, i_1, i_2, \ldots, i_k, j_2, \ldots, j_l)$, который отличается от (I,J) тем, что j_1 занимает в нем первое место, весь блок индексов I сдвинут на одно место вправо, а остальные индексы остаются на своих местах.

Проделав ту же процедуру с индексом j_2, после k транспозиций получим набор индексов, в котором два первых места занимают j_1 и j_2, блок индексов I сдвинут вправо на два места, а остальные индексы остаются на своих прежних местах.

Проделав то же построение l раз, в итоге получим, очевидно, набор индексов (J,I). При этом всего будет выполнено kl транспозиций.

Таким образом, набор индексов (I,J) превращается в (J,I) за kl транспозиций. Отсюда следует, что $dx^{(I,J)} = (-1)^{kl}dx^{(J,I)}$, и тем самым справедливость равенства (2.4) установлена. Предложение доказано. ♦

♦ **Предложение 2.4.** *Операция умножения внешних дифференциальных форм ассоциативна, т. е. для любых трех внешних дифференциальных форм ω, θ и ψ имеет место равенство*

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \omega \wedge (\theta \wedge \psi). \tag{2.5}$$

Действительно, пусть

$$\omega = \sum_{I \in S_n^k} \omega_I dx^I, \quad \theta = \sum_{J \in S_n^l} \theta_J dx^J, \quad \psi = \sum_{K \in S_n^m} \psi_K dx^K$$

суть канонические представления данных внешних форм. Согласно определению внешнего произведения дифференциальных форм имеем

$$\omega \wedge \theta = \sum_{I \in S_n^k} \sum_{J \in S_n^l} \omega_I \theta_J dx^{(I,J)},$$

$$\theta \wedge \psi = \sum_{J \in S_n^l} \sum_{K \in S_n^m} \theta_J \psi_K dx^{(J,K)}.$$

В силу предложений 2.1 и 2.2 отсюда следует, что

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \sum_{I \in S_n^k} \sum_{J \in S_n^l} \sum_{K \in S_n^m} \omega_I \theta_J \psi_K dx^{(I,J)} \wedge dx^K.$$

Вычисляя аналогичным образом произведение $\omega \wedge (\theta \wedge \psi)$, получим

$$\omega \wedge (\theta \wedge \psi) = \sum_{I \in S_n^k} \sum_{J \in S_n^l} \sum_{K \in S_n^m} \omega_I \theta_J \psi_K dx^I \wedge dx^{(J,K)}.$$

Доказываемое свойство *внешнего умножения* будет установлено, если мы покажем, что $dx^{(I,J)} \wedge dx^K = dx^I \wedge dx^{(J,K)}$ для любых I, J, K.

В связи с этим заметим следующее. Пусть P и Q — произвольные наборы индексов, принадлежащие $\mathbb{I}_n^r$ и $\mathbb{I}_n^s$ соответственно. Тогда определены внешние дифференциальные формы dx^P и dx^Q.

Покажем, что произведение этих внешних форм можно вычислять по тому же правилу, что и в случае, когда $P \in S_n^r$, а $Q \in S_n^s$, т. е.

$$dx^P \wedge dx^Q = dx^{(P,Q)}. \tag{2.6}$$

Действительно, если среди индексов, входящих в P, есть одинаковые, то $dx^P = 0$. В этом случае, как очевидно, также и $dx^{(P,Q)} = 0$. В то же время $dx^P \wedge dx^Q = 0$. Таким образом, для данных P и Q равенство (2.6) верно.

Точно так же убеждаемся в справедливости равенства (2.6) в случае, если среди индексов, составляющих Q, есть одинаковые. Предположим, что $P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$, $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$, где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$ и точно так же $q_k \neq q_l$ при $k \neq l$. Пусть наборы индексов $P' \in S_n^r$

и $Q' \in S_n^s$ являются *перестановками* P и Q. Предположим, что P' получается из P посредством m_1 транспозиций, а Q' получено из Q m_2 транспозициями. Тогда $dx^P = (-1)^{m_1} dx^{P'}$, $dx^Q = (-1)^{m_2} dx^{Q'}$.

Согласно определению внешнего произведения имеем

$$dx^P \wedge dx^Q = (-1)^{m_1+m_2} dx^{(P',Q')}.$$

Заметим, что набор индексов (P,Q) получается из (P',Q') $m_1 + m_2$ транспозициями и, значит,

$$dx^{(P,Q)} = (-1)^{m_1+m_2} dx^{(P',Q')} = dx^P \wedge dx^Q,$$

что и требовалось доказать.

В силу сказанного получаем, что для любых I, J и K имеет место равенство

$$dx^{(I,J)} \wedge dx^K = dx^I \wedge dx^{(J,K)} = dx^{(I,J,K)}.$$

Предложение доказано. ♦

♦ **Предложение 2.5.** *Пусть даны внешние дифференциальные формы первой степени* λ_i, $i = 1, 2, \dots, r$, *где* $1 \leq r \leq n$,

$$\lambda_i(x) = \sum_{k_i=1}^{n} \lambda_{i,k_i}(x) dx^{k_i}$$

при каждом $i = 1, 2, \dots, r$, *и пусть* $\lambda(x) = \lambda_1(x) \wedge \lambda_2(x) \wedge \dots \wedge \lambda_r(x)$. *Тогда для любых векторов* $X_1, X_2, \dots, X_r$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *выполняется равенство*

$$\lambda(X_1, X_2, \dots, X_r) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1) & \lambda_1(X_2) & \cdots & \lambda_1(X_r) \\ \lambda_2(X_1) & \lambda_2(X_2) & \cdots & \lambda_2(X_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_r(X_1) & \lambda_r(X_2) & \cdots & \lambda_r(X_r) \end{vmatrix}. \qquad (2.7)$$

Обозначим правую часть равенства (2.7) символом

$$\tilde{\lambda}(x)(X_1, X_2, \dots, X_r).$$

Требуется доказать, что

$$\tilde{\lambda}(x)(X_1, X_2, \dots, X_r) = \lambda(x)(X_1, X_2, \dots, X_r) \qquad (2.8)$$

для любых векторов $X_1, X_2, \ldots, X_r$. В силу известных свойств определителя

$$\tilde{\lambda}(x)(X_1, X_2, \ldots, X_r)$$

есть кососимметрическая полилинейная функция степени r переменных $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Пусть $\Lambda(x)$ есть матрица, образованная коэффициентами внешних форм λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$,

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}(x) & \lambda_{12}(x) & \cdots & \lambda_{1n}(x) \\ \lambda_{21}(x) & \lambda_{22}(x) & \cdots & \lambda_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{r1}(x) & \lambda_{r2}(x) & \cdots & \lambda_{rn}(x) \end{pmatrix}.$$

Из свойств произведения внешних форм, установленных выше, следует, что

$$\lambda = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_r=1}^{n} \lambda_{1,k_1}(x)\lambda_{2,k_2}(x)\ldots\lambda_{r,k_r}(x)dx^{k_1}dx^{k_2}\ldots dx^{k_r}. \quad (2.9)$$

Слагаемые в сумме справа, в которых по крайней мере два индекса k_i совпадают, обращаются в нуль.

Пусть $\sum\limits_{I \in S_n^r} \lambda_I(x)dx^I$ есть каноническое представление формы $\lambda(x)$. Для всякого $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$, где $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$, имеем

$$\lambda_I(x) = \lambda(x)(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_r}).$$

Зададим произвольно $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in S_n^r$. Тогда слагаемое $\lambda_I(x)dx^I$ *канонического представления* внешней формы λ равно, как очевидно, с у м м е всех тех выражений в правой части (2.9), для которых набор индексов $K = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$ является перестановкой набора I, т. е. $k_1 = i_{\alpha_1}$, $k_2 = i_{\alpha_2}, \ldots, k_r = i_{\alpha_r}$, где $\alpha \in \mathrm{P}_r$.

Для всякой перестановки $\alpha \in \mathrm{P}_r$ имеем

$$dx^{i_{\alpha_1}}dx^{i_{\alpha_2}}\ldots dx^{i_{\alpha_r}} = \sigma(\alpha)dx^{i_1}dx^{i_2}\ldots dx^{i_r} = \sigma(\alpha)dx^I.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_I(x)dx^I = \left(\sum_{\alpha \in \mathrm{P}_r} \sigma(\alpha)\lambda_{1,i_{\alpha_1}}(x)\lambda_{2,i_{\alpha_2}}(x)\ldots\lambda_{r,i_{\alpha_r}}(x)\right)dx^I,$$

где суммирование ведется по множеству всех перестановок $\alpha \in \mathrm{P}_r$. Сумма справа есть определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1i_1}(x) & \lambda_{1i_2}(x) & \cdots & \lambda_{1i_r}(x) \\ \lambda_{2i_1}(x) & \lambda_{2i_2}(x) & \cdots & \lambda_{2i_r}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{ri_1}(x) & \lambda_{ri_2}(x) & \cdots & \lambda_{ri_r}(x) \end{vmatrix}. \tag{2.10}$$

При каждом $j = 1, 2, \ldots, r$ имеем $\lambda_{ki_j}(x) = \lambda_k(x)(\mathbf{e}_{i_j})$. Отсюда ясно, что величина $\tilde{\lambda}(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_r})$ равна тому же определителю (2.10). Мы получаем, таким образом, что канонические представления внешних форм λ и $\tilde{\lambda}$ совпадают, т. е. эти формы равны между собой. Предложение 2.5 доказано. ♦

Отметим один частный случай результата предложения 2.5. Если $r = n$, то матрица $\Lambda(x)$, составленная из коэффициентов внешних форм λ_i, является *квадратной*. В этом случае

$$\omega(x) \equiv \lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge \cdots \wedge \lambda_n = \det \Lambda(x) dx^1 dx^2 \ldots dx^n.$$

♦ **Предложение 2.6.** *Пусть λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, $r \leq n$, есть внешние дифференциальные формы первой степени. Для всякой перестановки $\alpha \in \mathrm{P}_r$ имеет место равенство*

$$\lambda_{\alpha_1} \wedge \lambda_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \lambda_{\alpha_r} = \sigma(\alpha) \lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge \cdots \wedge \lambda_r. \tag{2.11}$$

Справедливость данного утверждения непосредственно следует из предложения 2.5 в силу известных свойств определителей. ♦

2.3. Операция дифференцирования внешней дифференциальной формы

Зададим произвольно открытое множество U пространства $\mathbb{R}^n$. Всякой внешней форме ω степени $r \geq 0$, принадлежащей классу $\mathscr{C}^m$, $m \geq 1$, которая определена на множестве U, может быть сопоставлено некоторая форма степени $r + 1$, называемая *дифференциалом формы* ω и обозначаемая символом $d\omega$.

Если $\deg(\omega) = 0$, то форма ω есть вещественная функция, определенная на множестве U. В этом случае дифференциалом ω называется внешняя дифференциальная форма первой степени, которая выражается равенством

$$d\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx^i. \tag{2.12}$$

Предположим, что ω есть внешняя форма степени $r \geq 1$. Тогда она имеет каноническое представление

$$\omega(x) = \sum_{I \in S_n^r} \omega_I(x)\, dx^I.$$

Предположим, что ω принадлежит классу $\mathscr{C}^m$ для некоторого $m \geq 1$. Согласно определению это означает, что каждая из функций $\omega_I(x)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^m$ и, значит, при каждом $I \in S_n^r$ определена внешняя дифференциальная форма первой степени $d\omega_I$ — дифференциал коэффициента ω_I формы ω. Полагаем

$$d\omega(x) = \sum_{I \in S_n^r} d\omega_I(x) \wedge dx^I. \tag{2.13}$$

Из определения видно, что $d\omega$ есть форма степени $r+1$, принадлежащая классу $\mathscr{C}^{m-1}$.

Установим некоторые свойства понятия дифференциала внешней формы. Все рассматриваемые далее внешние дифференциальные формы предполагаются определенными на некотором открытом множестве U пространства $\mathbb{R}^n$ и принадлежащими классу $\mathscr{C}^m$, где $m \geq 1$.

♦ **Предложение 2.7.** *Пусть даны внешние формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ степени $r \geq 0$. Тогда имеет место равенство*

$$d(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_k) = d\omega_1 + d\omega_2 + \cdots + d\omega_k. \tag{2.14}$$

Равенство (2.14) непосредственно следует из определения дифференциала. ♦

♦ **Предложение 2.8.** *Для всякой функции $\alpha\colon U \to \mathbb{R}$ класса $\mathscr{C}^m$ и любой внешней дифференциальной формы ω степени $r \geq 1$ имеет место равенство*

$$d(\alpha\omega) = d\alpha \wedge \omega + \alpha d\omega. \tag{2.15}$$

Действительно, в силу предложения 2.7 достаточно установить, что равенство (2.15) верно для случая, когда форма ω есть *моном*. Пусть $\omega = \beta dx^I$. Согласно определению дифференциала имеем

$$d(\alpha\omega) = d(\alpha\beta) \wedge dx^I = [(d\alpha)\beta + \alpha d\beta] \wedge dx^I =$$
$$= (d\alpha) \wedge \beta dx^I + \alpha d\beta \wedge dx^I = d\alpha \wedge \omega + \alpha d\omega.$$

Предложение доказано. ♦

♦ **Предложение 2.9.** *Пусть даны внешние дифференциальные формы ω и θ, причем* $\deg(\omega) = r \geq 1$ *и* $\deg(\theta) = s \geq 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (d\theta). \tag{2.16}$$

Действительно, в силу предложения 2.7 достаточно доказать данное предложение для случая, когда каждая из форм ω и θ является мономом. Пусть $\omega(x) = u(x)dx^I$ и $\theta(x) = v(x)dx^J$. Тогда $\omega(x) \wedge \theta(x) = u(x)v(x)dx^I \wedge dx^J$.

Заметим, что если коэффициенты внешней формы постоянны в U, то дифференциал формы, как следует из определения, тождественно равен нулю. Применяя предложение 2.8, получим

$$d\{\omega(x) \wedge \theta(x)\} = d\{u(x)v(x)dx^I \wedge dx^J\} = \\ = d[u(x)v(x)] \wedge dx^I \wedge dx^J + u(x)v(x)d[dx^I \wedge dx^J].$$

Так как $dx^{(I,J)}$ есть внешняя форма с постоянными коэффициентами, то второе слагаемое справа равно нулю, и мы получаем

$$d\{\omega(x) \wedge \theta(x)\} = d[u(x)v(x)] \wedge dx^I \wedge dx^J = \\ = v(x)du(x) \wedge dx^I \wedge dx^J + u(x)dv(x) \wedge dx^I \wedge dx^J = \\ = (du(x) \wedge dx^I) \wedge (v(x)dx^J) + u(x)dv(x) \wedge dx^I \wedge dx^J.$$

Применяя *правило перестановки множителей во внешнем произведении* (предложение 2.3 из п. 2.2), получим $dv(x) \wedge dx^I = (-1)^r dx^I \wedge \wedge dv(x)$, так как, по условию, $\deg(dv(x)) = 1$, а $\deg(dx^I) = r$. Имеем

$$du(x) \wedge dx^I) \wedge (v(x)dx^J) = (d\omega) \wedge \theta,$$
$$u(x)dv(x) \wedge dx^I \wedge dx^J = (-1)^r u(x)dx^I \wedge (dv(x) \wedge dx^J) = (-1)^r \omega \wedge (d\theta).$$

Окончательно получаем

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (d\theta),$$

что и требовалось доказать. ♦

■ **Теорема 2.1** (первая теорема Пуанкаре). *Пусть U есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякой внешней формы ω, определенной в U и принадлежащей классу $\mathscr{C}^m$, где $m \geq 2$, выполняется равенство $d(d\omega) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\deg(\omega) = 0$, т. е. ω есть просто вещественная функция, определенная на множестве U. Тогда имеем

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx^i.$$

Отсюда получаем

$$d(d\omega) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} dx^i \wedge dx^j. \tag{2.17}$$

Теперь заметим, что $dx^i \wedge dx^i = 0$, $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$. Отсюда получаем

$$d(d\omega) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx^i \wedge dx^j.$$

Последнее выражение равно нулю в силу свойства симметричности вторых производных. Таким образом, мы получаем, что в данном случае равенство $d(d\omega) = 0$ верно.

Пусть $\deg(\omega) \geq 1$. Тогда

$$\omega = \sum_{I \in S_n^r} \omega_I dx^I, \quad d\omega = \sum_{I \in S_n^r} d\omega_I \wedge dx^I.$$

Отсюда

$$d(d\omega) = \sum_{I \in S_n^r} d(d\omega_I) \wedge dx^I - \sum_{I \in S_n^r} d\omega_I \wedge d(dx^I).$$

По доказанному, $d(d\omega_I) = 0$, а $d(dx^I) = 0$, так как dx^I есть форма с постоянными коэффициентами. Окончательно получаем $d(d\omega) = 0$, что и требовалось доказать. ■

Далее нам понадобится следующее простое предложение.

■ ***Лемма 2.1.*** *Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_r$, $r \leq n$, — вещественные функции класса $\mathscr{C}^2$, определенные на открытом множестве U пространства $\mathbb{R}^n$. Положим $\omega = du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_r$. Тогда имеет место равенство $d\omega = 0$.*

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по r. При $r = 1$ результат вытекает из *первой теоремы Пуанкаре* (теорема 2.1) Предположим, что для некоторого $r < n$ лемма доказана и даны функции $(u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1})$ класса $\mathscr{C}^2$. Если $r + 1 = n$, то доказывать нечего.

Пусть $r + 1 < n$. Положим $\theta = u_1 du_2 \wedge \cdots \wedge du_r \wedge du_{r+1} = u_1 \omega_1$, где $\omega_1 = du_2 \wedge \cdots \wedge du_r \wedge du_{r+1}$. Применяя предложение 2.9, получим

$$d\theta = du_1 \wedge \omega_1 + u_1 d\omega_1.$$

В силу индукционного предположения $d\omega_1 = 0$. Таким образом, мы получаем, что имеет место равенство $d\theta = du_1 \wedge \omega_1 = \omega$. Согласно *теореме Пуанкаре* отсюда вытекает, что $d\omega = 0$. В силу принципа математической индукции лемма доказана. ■

2.4. Операция переноса внешней дифференциальной формы гладким отображением

Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, V — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $f\colon U \to V$ — отображение класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$. Предположим, что на множестве V определена внешняя дифференциальная форма ω степени $k \geq 0$. С помощью отображения f мы построим по ω некоторую внешнюю форму той же степени уже на множестве U. Эту последнюю форму мы будем обозначать символом $f^*\omega$ и говорить, что $f^*\omega$ получена перенесением формы ω в множество U посредством отображения f.

Пусть $\deg(\omega) = 0$. Тогда ω есть просто вещественная функция, определенная на множестве V. Мы полагаем в этом случае $f^*\omega = \omega \circ f$. Рассмотрим случай, когда $\deg(\omega) = k \geq 1$, и пусть

$$\omega(y) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(y) dy^{i_1} dy^{i_2} \dots dy^{i_k}$$

есть *каноническое представление формы ω в пространстве* $\mathbb{R}^m$.

Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$. Полагаем

$$f^*\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}[f(x)] df_{i_1}(x) \wedge df_{i_2}(x) \wedge \dots \wedge df_{i_k}(x).$$

Форма $f^*\omega$, как видно из этого равенства, получена следующим построением. В каждом из коэффициентов ω_I исходной формы ω величина y заменяется на $f(x)$, и сам коэффициент тем самым заменяется суперпозицией $\omega_I \circ f$.

Базисная форма $dy^{i_1} dy^{i_2} \dots dy^{i_k}$ представляет собой произведение $dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$. В этом выражении каждая из величин dy^i заменяется дифференциалом компоненты с номером i отображения f. Можно сказать, что $f^*\omega(x)$ получается из $\omega(x)$, если всюду заменить y^i на $f_i(x)$.

Установим некоторые свойства определенной здесь операции над внешними формами.

Далее мы предполагаем фиксированными открытое множество U в пространстве $\mathbb{R}^n$, открытое множество V в пространстве $\mathbb{R}^m$ и отображение $f\colon U \to V$ класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$.

♦ **Предложение 2.10.** *Предположим, что $\omega(y)$ есть внешняя форма степени $k \geq 1$ в пространстве $\mathbb{R}^m$. Тогда для всякой точки $x \in U$ и любых векторов $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство*

$$f^*\omega(x; X_1, X_2, \dots, X_k) = \omega[f(x), df_x(X_1), df_x(X_2), \dots, df_x(X_k)]. \quad (2.18)$$

Доказательство. Предположим сначала, что форма ω есть моном, $\omega(y) = u(y)dy^{i_1}dy^{i_2}\dots dy^{i_r}$. Положим $df(x; X_j) = Y_j$. Пусть $x \in U$ и $y = f(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\omega(y; Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = u(y)\begin{vmatrix} Y_{1i_1} & Y_{2i_1} & \dots & Y_{ri_1} \\ Y_{1i_2} & Y_{2i_2} & \dots & Y_{ri_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{ri_r} & Y_{ri_r} & \dots & Y_{ri_r} \end{vmatrix}.$$

Далее имеем $f^*\omega(x) = u[f(x)]df_{i_1}\wedge df_{i_2}\wedge\dots\wedge df_{i_r}$, и, значит, согласно предложению 2.5 имеет место равенство

$$f^*\omega(x; X_1, X_2, \dots, X_r) = u[f(x)]\begin{vmatrix} df_{i_1}(X_1) & df_{i_1}(X_2) & \dots & df_{i_1}(X_r) \\ df_{i_2}(X_1) & df_{i_2}(X_2) & \dots & df_{i_2}(X_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ df_{i_r}(X_1) & df_{i_r}(X_2) & \dots & df_{i_r}(X_r) \end{vmatrix}.$$

Осталось заметить, что $u[f(x)] = u(y)$, а $df_{i_j}(X_k)$ есть координата с номером i_j вектора $Y_k = d(x, K_k)$, т. е. $df_{i_j}(X_k) = Y_{ki_j}$. Следовательно, $\omega(y; Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = f^*\omega(x; X_1, X_2, \dots, X_r)$, каковы бы ни были векторы $X_1, X_2, \dots, X_r$.

Для случая, когда внешняя форма ω есть моном, справедливость доказываемого утверждения установлена. Общий случай очевидным образом сводится к этому. Предложение доказано. ♦

♦ ***Предложение 2.11.*** а) *Для любых внешних форм степени* $k \geq 0$

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N,$$

определенных на множестве V, *выполняется равенство*

$$f^*(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_N) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2 + \dots + f^*\omega_N.$$

б) *Для всякой формы* ω *и любой функции* α, *определенных на множестве* V, *имеет место равенство* $f^*(\alpha\omega) = f^*\alpha f^*\omega$.

Справедливость утверждения а) непосредственно следует из определения операции f^*.

Докажем утверждение б). Если степень ω равна нулю, то ω есть вещественная функция и, значит,

$$f^*(\alpha\omega)(x) = \alpha[f(x)]\omega[f(x)] = (f^*\alpha)(x)(f^*\omega)(x),$$

так что в этом случае требуемое равенство выполняется.

Предположим, что $\deg(\omega) \geq 1$, и пусть

$$\omega(y) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq m} \omega_{i_1 i_2\dots i_k}(y)dy^{i_1}dy^{i_2}\dots dy^{i_k}$$

есть каноническое представление ω. Тогда каноническое представление произведения $\alpha\omega$ имеет вид

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq m} \alpha(y)\omega_{i_1 i_2\dots i_k}(y)dy^{i_1}dy^{i_2}\dots dy^{i_k}.$$

Согласно определению

$$f^*(\alpha\omega) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq m} \alpha[f(x)]\omega_{i_1 i_2\dots i_k}[f(x)]df_{i_1}(x)\wedge df_{i_2}(x)\wedge\cdots$$
$$\cdots\wedge df_{i_k}(x) = (f^*\alpha)(x)(f^*\omega)(x).$$

Предложение доказано. ♦

♦ ***Предложение 2.12.*** *Для любых двух форм ω и θ, определенных на множестве V, имеет место равенство*

$$f^*(\omega\wedge\theta) = f^*\omega\wedge f^*\theta. \tag{2.19}$$

Действительно, пусть

$$\omega = \sum_{I\in S_n^k} \omega_I dy^I, \quad \theta = \sum_{J\in S_n^l} \theta_J dy^J$$

есть канонические представления форм ω и θ. Тогда

$$\omega\wedge\theta = \sum_{I\in S_n^k}\sum_{J\in S_n^l} \omega_I\theta_J dy^{(I,J)}$$

и

$$f^*\omega = \sum_{I\in S_n^k}(\omega_I\circ f)\,f^*(dy^I), \quad f^*\theta = \sum_{J\in S_n^l}(\theta_J\circ f)\,f^*(dy^J). \tag{2.20}$$

В силу утверждения а) предложения 2.11 имеем

$$f^*(\omega\wedge\theta) = \sum_{I\in S_n^k}\sum_{J\in S_n^l}(\omega_I\circ f)(\theta_J\circ f)\,f^*(dy^{(I,J)}). \tag{2.21}$$

Перемножим выражения для $f^*\omega$ и $f^*\theta$, которые даются равенствами (2.20). Сравнивая результат умножения с правой частью равенства (2.21), получим, что предложение 2.12 будет доказано, если мы покажем, что

$$f^*(dy^{(I,J)}) = f^*(dy^I) \wedge f^*(dy^J) \tag{2.22}$$

для любых $I \in S_n^k$ и $J \in S_n^l$.

Пусть дан произвольный набор индексов $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathbb{I}_m^r$. Тогда в $\mathbb{R}^m$ определена внешняя форма dy^I. Покажем, что для нее имеет место равенство

$$f^* dy^I = df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_r}. \tag{2.23}$$

В случае, если $I \in S_n^r$, это непосредственно вытекает из определения. Предположим, что последовательность индексов I не является возрастающей. Если среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_r$ есть о д и н а к о в ы е, то $dy^I = 0$ и, значит, также и $f^* dy^I = 0$. В этом случае произведение в правой части (2.23) содержит два одинаковых множителя и, следовательно, равно нулю. Значит, в данном случае равенство (2.23) верно.

Предположим, что числа $i_1, i_2, \ldots, i_r$ попарно р а з л и ч н ы. Пусть $\alpha \in \mathrm{P}_r$ есть перестановка порядка r такая, что $i_{\alpha_1} < i_{\alpha_2} < \cdots < i_{\alpha_r}$. Положим $J = (i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_r})$. Тогда $dy^I = \sigma(\alpha) dy^J$ и

$$f^* dy^I = \sigma(\alpha) df_{i_{\alpha_1}} \wedge df_{i_{\alpha_2}} \wedge \cdots \wedge df_{i_{\alpha_r}} = df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_r},$$

и тем самым равенство (2.23) доказано.

Пусть $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $J = (j_1, j_2, \ldots, j_l)$. Тогда, по доказанному,

$$f^*(dy^{(I,J)}) = df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \wedge df_{j_1} \wedge df_{j_2} \wedge \cdots \wedge df_{j_l} = f^* dy^I \wedge f^* dy^J.$$

Справедливость равенства (2.19), таким образом, установлена. Предложение полностью доказано. ♦

♦ ***Предложение 2.13.*** *Пусть f есть отображение класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 2$. Тогда для всякой внешней формы ω класса $\mathscr{C}^1$, определенной на множестве V, выполняется равенство $d\{f^*\omega\} = f^*\{d\omega\}$.*

З а м е ч а н и е. Если ω есть внешняя форма класса $\mathscr{C}^r$, а $f \in \mathscr{C}^{r+1}$, то дифференциальная форма $f^*\omega$ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$. Справедливость этого следует из того, что коэффициенты формы $f^*\omega$ выражаются алгебраически через производные первого порядка компонент вектор-функции f и через функции $\omega_I \circ f$, где ω_I есть коэффициенты формы ω.

Действительно, рассмотрим сначала случай $\deg\omega = 0$. Тогда ω есть вещественная функция, определенная на множестве V. Имеем $f^*\omega = \omega \circ f$ и, значит,

$$d\{f^*\omega\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\omega \circ f)}{\partial x_i}\, dx^i.$$

Согласно *правилу дифференцирования сложной функции* (см. главу 7)

$$\frac{\partial(\omega \circ f)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \omega}{\partial y_j}[f(y)] \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получаем

$$d\{f^*\omega\}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\omega}{\partial y_j}[f(x)] \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx^i \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \omega}{\partial y_j}[f(x)]\, df_j(x). \quad (2.24)$$

По определению дифференциала внешней формы (см. выше) имеем

$$d\omega(y) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \omega}{\partial y_j} dy^j, \{f^* d\omega\}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\omega}{\partial y_j}[f(x)] df_j(x). \quad (2.25)$$

Сопоставляя равенства (2.24) и (2.25), убеждаемся в том, что для случая $\deg\omega = 0$ доказываемое предложение верно.

Пусть $\deg\omega \geq 1$. Тогда

$$\omega(y) = \sum_{I \in S_n^k} \omega_I(y)\, dy^I, \quad d\omega(y) = \sum_{I \in S_n^k} d\{\omega_I(y)\} \wedge dy^I.$$

Отсюда получаем

$$\{f^*\omega\}(x) = \sum_{I \in S_n^k} \{f^*\omega_I\}(x)\, \{f^* dy^I\}(x),$$

$$\{f^* d\omega\}(x) = \sum_{I \in S_n^k} \{f^* d\omega_I\}(x) \wedge \{f^* dy^I\}(x),$$

Имеем

$$d\{f^*\omega\}(x) = \sum_{I \in S_n^k} d\{f^*\omega_I\}(x) \wedge \{f^* dy^I\}(x) + \sum_{I \in S_n^k} \{f^*\omega_I\}(x)\, d\{f^* dy^I\}(x).$$

Из леммы 2.1 вытекает равенство

$$d\{f^*dy^I\}(x) = d\{df_{i_1}(x) \wedge df_{i_2}(x) \wedge \cdots \wedge df_{i_k}(x)\} = 0,$$

и, значит,

$$d\{f^*d\omega\}(x) = \sum_{I \in S_n^k} d\{f^*\omega_I\}(x) \wedge \{f^*dy^I\}(x).$$

Предложение доказано. ♦

♦ **Предложение 2.14.** *Пусть U есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$, V — открытое множество в $\mathbb{R}^m$ и, наконец, W есть открытое множество в $\mathbb{R}^k$. Предположим, что заданы отображения $f\colon U \to V$ и $g\colon V \to W$, принадлежащие классу $\mathscr{C}^1$. Положим $h = g \circ f$. Тогда для всякой внешней формы ω, определенной на множестве W, имеет место равенство*

$$f^*\{g^*\omega\} = h^*\omega = (g \circ f)^*\omega.$$

Сначала рассмотрим случай, когда степень формы ω равна нулю, т. е. форма ω является функцией $\omega_0(z)$, определенной на множестве W. Тогда $g^*\omega$ есть функция $\theta_0(y) = \omega_0[g(y)]$, а $f^*\{g^*\omega\}$ — функция $\theta_0[f(x)] = \omega_0\{g[f(x)]\} = \omega_0[h(x)]$, откуда $f^*\{g^*\omega\}(x) = h^*\omega(x)$ для всех x.

Теперь рассмотрим случай, когда ω есть базисная форма первой степени dz^i. Тогда $g^*dz^i(y) = dg_i(y)$ и, значит, согласно предложению 2.12

$$f^*\{g^*\omega\}(x) = [f^*dg_i](x) = d[f^*g_i(x)] = d\{g_i[f(x)]\} = dh_i(x),$$

так что для этого случая доказываемое предложение верно.

В общем случае справедливость данного предложения вытекает из доказанного в силу предложений 2.9 и 2.11. Предложение доказано. ♦

♦ **Предложение 2.15.** *Предположим, что j есть тождественное отображение области $U \subset \mathbb{R}^n$ на себя. Тогда для всякого гладкого отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ справедливо равенство $f^* \circ j^* = f^*$, и для любого гладкого отображения $g\colon V \to U$, где V есть область в $\mathbb{R}^k$, $j^* \circ g^* = g^*$.*

Это есть очевидное следствие предложения 2.12. ♦

2.5. Вторая теорема Пуанкаре

Открытое множество U в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *звездным относительно точки* p, если для всякой точки $x \in U$ отрезок, соединяющий точку p с точкой x, содержится в множестве U, т. е. для любого $t \in [0,1]$ точка $p + t(x-p)$ принадлежит U.

■ ***Теорема 2.2*** (вторая теорема Пуанкаре). *Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, звездное относительно некоторой своей точки p, и $\omega(x)$ есть дифференциальная форма степени $r \geq 0$ и класса $\mathscr{C}^k$, где $k \geq 1$. Тогда если дифференциал формы ω тождественно равен нулю на множестве U, то в множестве U существует дифференциальная форма θ класса $\mathscr{C}^k$ такая,* что $\omega(x) = d\theta(x)$.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ точек (x,t), где $x \in \mathbb{R}^n$, а $t \in \mathbb{R}$, рассмотрим множество $\Omega = U \times \mathbb{R}$, состоящее из всех точек (x,t), для которых $x \in U$. Множество Ω является открытым в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Всякая дифференциальная форма θ степени $r \geq 1$ на множестве Ω может быть представлена в виде

$$\theta(x,t) = \theta_1(x,t) + dt \wedge \theta_2(x,t), \tag{2.26}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(x,t) &= \sum_{I \in S_n^r} f_I(x,t)dx^I, \\ \theta_2(x,t) &= \sum_{J \in S_n^{r-1}} g_J(x,t)dx^J. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Данное представление дифференциальной формы $\theta(x,t)$ определяется по ней единственным образом. Полагаем

$$\Sigma(\theta) = \sum_{J \in S_n^{r-1}} \left(\int_0^1 g_J(x,t)\,dt \right) dx^J.$$

Степень формы $\Sigma(\theta)$ равна $r-1$, так что операция Σ, определенная равенством (2.26), уменьшает степень дифференциальной формы на единицу.

Для всякой дифференциальной формы θ, определенной равенством (2.26), справедливо соотношение

$$d[\Sigma(\theta)] + \Sigma(d\theta) = \theta_1(x,1) - \theta_1(x,0). \tag{2.28}$$

Заметим, что $\Sigma(\theta)$ есть дифференциальная форма степени $r-1$ и, значит, $d[\Sigma(\theta)]$ есть внешняя форма степени r. Степень формы $d\theta$ равна $r+1$, но так как операция Σ уменьшает степень формы на единицу, то, значит, степень формы $\Sigma(d\theta)$ также равна r. Если форма θ принадлежит классу $\mathscr{C}^k$, то, очевидно, также и $\Sigma(\theta) \in \mathscr{C}^k$.

Вывод равенства (2.28) будет дан в конце доказательства теоремы 2.2, а сначала мы покажем, как с помощью равенства (2.28) выводится утверждение теоремы.

Предположим, что множество U звездно относительно некоторой своей точки p. Пусть $\psi(t)$ есть функция переменной $t \in \mathbb{R}$, принадлежащая классу $\mathscr{C}^\infty$ и такая, что $\psi(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\psi(t) = 1$ при $t \geq 1$ и $0 \leq \psi(t) \leq 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Функцию ψ, удовлетворяющую этим условиям, можно получить, например, следующим образом. Положим

$$\lambda(t) = \exp\left(-\frac{1}{t(1-t)}\right)$$

при $t \in (0,1)$ и $\lambda(t) = 0$ для всех остальных значений t. Определим постоянную γ из условия

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^1 \lambda(u)\,du.$$

Функция

$$\psi(t) = \gamma \int_0^t \lambda(u)\,du,$$

очевидно, и будет искомой.

Для всякой точки $x \in U$ точка $\varphi(x,t) = p + \psi(t)(x-p)$ принадлежит U в силу того, что множество U звездно относительно точки p. Мы получаем, таким образом, некоторое отображение Ω на множество U.

Предположим, что форма ω степени r, определенная на множестве U, такова, что $d\omega(x) = 0$. Положим $\theta = \varphi^*\omega$. Тогда в силу установленных выше свойств операции переноса формы посредством отображения имеет место равенство $d\theta = 0$. Поэтому $\Sigma(d\theta) = 0$. Предположим, что

$$\omega(x) = \sum_{I \in S_n^r} \omega_I(x) dx^I.$$

Имеем

$$\varphi^*\omega(x,t) = \sum_{I \in S_n^r} \omega_I[\varphi(x,t)]\varphi^*(dx^I).$$

Пусть $dx^I = dx^{i_1}dx^{i_2}\dots dx^{i_r}$. Тогда $\varphi^*(dx^I)$ есть внешнее произведение следующих форм степени единица: $\psi'(t)(x_{i_1} - p_{i_1})dt + \psi(t)dx^{i_1}$, $\psi'(t)(x_{i_2} - p_{i_2})dt + \psi(t)dx^{i_2}, \dots, \psi'(t)(x_{i_r} - p_{i_r})dt + \psi(t)dx^{i_r}$. Это произведение является суммой конечного числа слагаемых, из которых, как нетрудно видеть, отличны от нуля самое большее $r+1$ слагаемых.

Слагаемое, не содержащее множитель dt, имеет вид $[\psi(t)]^r dx^I$. Мы получаем, что в представлении (2.26) для формы $\theta = \varphi^*\omega$ слагаемое θ_1 в представлении (2.26) имеет вид

$$\theta_1(x,t) = \{\psi(t)\}^r \omega[p + \psi(t)(x-p)].$$

В силу равенства (2.28) мы получим

$$d\Sigma[\varphi^*\omega](x) + \Sigma(d\varphi^*\omega)(x) = \theta_1(x,1) - \theta_1(x,0).$$

Имеем $d\varphi^*\omega = \varphi^* d\omega = 0$. В силу выбора функции ψ разность $\theta_1(x,1) - -\theta_1(x,0)$ равна ω. Таким образом, дифференциал формы $\Sigma[\varphi^*\omega](x)$ равен исходной форме ω.

Для завершения доказательства необходимо установить справедливость равенства (2.28). Применяя *теорему о дифференцировании интегралов, зависящих от параметра*, получим

$$d\Sigma(\theta)(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{J \in S_n^{r-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t)\, dt \right) dx^i \wedge dx^J. \tag{2.29}$$

Далее, имеем

$$d\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{I \in S_n^r} \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x,t) dx^i \wedge dx^I +$$
$$+ \sum_{I \in S_n^r} \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,t) dt \wedge dx^I - \sum_{i=1}^{n} \sum_{J \in S_n^{r-1}} \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t) dt \wedge dx^i \wedge dx^J.$$

Отсюда заключаем, что

$$\Sigma(d\theta)(x,t) = \sum_{I \in S_n^r} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,t)\, dt \right) dx^I -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{J \in S_n^{r-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t)\, dt \right) dx^i \wedge dx^J.$$

Справедливо соотношение

$$\sum_{I\in S_n^r}\left(\int\limits_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,t)\,dt\right)dx^I = \sum_{I\in S_n^r}[f_I(x,1)-f_I(x,0)]dx^I =$$
$$= \theta_1(x,1)-\theta_1(x,0).$$

Принимая во внимание равенство (2.29), получаем равенство

$$\Sigma(d\theta)(x,t) = \theta_1(x,1)-\theta_1(x,0) - d\Sigma(\theta)(x).$$

Отсюда, очевидно, вытекает равенство (2.28). Теорема доказана. ∎

§ 3. Дополнительные сведения о гладких подмногообразиях пространства $\mathbb{R}^n$

В параграфах 1 и 2 этой главы было введено понятие внешней дифференциальной формы. Здесь будет описан другой основной объект, с которым мы будем иметь дело в этой главе, — понятие дифференцируемого подмногообразия пространства $\mathbb{R}^n$. Материал этого параграфа частично повторяет, что уже было изложено в главе 10. Наличие повторов вызвано, прежде всего, желанием сосредоточить весь материал, относящийся к изучаемой теме, в одном месте, что должно облегчить труд читателя. Здесь рассматриваются также вопросы, касающиеся теории многообразий, не рассматривавшиеся в главе 10.

Далее определяется понятие отображения класса $\mathscr{C}^r$ для случая отображений, имеющих областью определения произвольное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, вводится понятие диффеоморфизма для таких множеств и устанавливаются простейшие свойства диффеоморфизмов.

Особо выделяется класс множеств, для которых понятие производной $D^\alpha f$ для функции класса $\mathscr{C}^r$, определенной на данном множестве, может быть определено единственным образом.

Здесь определяются понятия гладкого k-мерного многообразия, а также края многообразия и касательной k-мерной плоскости в точке многообразия. Определяется понятие локальной системы координат или карты многообразия. Доказывается теорема о функциях перехода для различных систем координат. Вводится понятие ориентированного многообразия.

3.1. Отображения класса $\mathscr{C}^r$ с произвольной областью определения

Понятие функции класса $\mathscr{C}^r$, имеющей областью определения некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, было определено только для случая, когда это подмножество открыто. Оказывается полезным определить данное понятие в более общей ситуации.

Пусть G есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^k$. Напомним, что тогда $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением класса* $\mathscr{C}^r$, где $r > 0$ — целое число, если функция f имеет в G все частные производные порядка не выше r, причем каждая из этих производных непрерывна на множестве G.

Пусть A есть произвольное множество в $\mathbb{R}^k$. Будем говорить, что отображение $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$, если для всякой точки $p \in A$ можно указать окрестность $U = B(p, \delta)$ этой точки и функцию $f^*\colon U \to \mathbb{R}^n$, принадлежащую классу $\mathscr{C}^r$ и такую, что $f^*(x) = f(x)$ для всех $x \in A \cap U$.

Пусть G есть открытое множество в $\mathbb{R}^k$. Тогда всякая функция $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, принадлежащая классу $\mathscr{C}^r$ в смысле прежнего определения, удовлетворяет всем условиям нового определения класса $\mathscr{C}^r$. Действительно, в этом случае для произвольной точки $p \in G$ в качестве U мы можем, очевидно, взять шар $B(p, \delta)$ такой, что $G \supset B(p, \delta)$, и положить $f^*(x) = f(x)$.

Справедливо и обратное: если множество G открытое и функция f принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ в смысле данного здесь нового определения, то f будет удовлетворять всем условиям прежнего определения функций класса $\mathscr{C}^r$.

Таким образом, в случае, если множество $A \subset \mathbb{R}^k$ открытое, данное здесь определение принадлежности функции $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ классу $\mathscr{C}^r$ равносильно прежнему.

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R}^k$, причем $A \neq \varnothing$. Тогда если функция $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$, то для всякого множества $E \subset A$ ограничение функции f на множестве E, очевидно, также есть функция класса $\mathscr{C}^r$.

Отметим некоторые с в о й с т в а отображений класса $\mathscr{C}^r$, непосредственно вытекающие из определения.

■ ***Теорема 3.1.*** *Пусть даны множество $A \subset \mathbb{R}^m$ и $B \subset \mathbb{R}^k$ и отображения $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ и $g\colon B \to \mathbb{R}^n$. Тогда если $f(A) \subset B$ и каждое из отображений f и g принадлежит классу $\mathscr{C}^r$, то суперпозиция $g \circ f$ также есть отображение класса $\mathscr{C}^r$.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы. Возьмем произвольно точку $p \in A$. Пусть $q = f(p)$. Так как g принадлежит классу $\mathscr{C}^r$, то согласно данному выше определению найдутся окрестность $V = B(q, \varepsilon)$ точки q и отображение $g^*\colon V \to \mathbb{R}^n$, принадлежащее классу $\mathscr{C}^r$, такое, что $g^*(y) = g(y)$ для всех $y \in V \cap B$. Так как f принадлежит классу $\mathscr{C}^r$, то найдутся число $\delta_1 > 0$ и функция $f^* \in \mathscr{C}^r$, определенная в окрестности $U_1 = B(p, \delta_1)$ точки p и такая, что $f^*(x) = f(x)$ для всех $x \in U_1 \cap A$. Пусть $\delta > 0$ таково, что $\delta \leq \delta_1$, и для всякого $x \in \mathbb{R}^m$ из неравенства $|x - p| < \delta$ следует, что $|f^*(x) - f(p)| = |f^*(x) - q| < \varepsilon$. Для всякого $x \in U = B(p, \delta)$ определена величина $g^*[f^*(x)]$. Функция $h^* = g^* \circ f^*$ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$. Если $x \in U \cap A$, то $f^*(x) = f(x)$, и, значит, для этого x точка $y = f(x) \in B$. Отсюда вытекает, что для данного x имеет место равенство $h^*(x) = g^*(y) = g(y) = g[f(x)]$.

Мы получаем, таким образом, что для всякой точки $x \in A$ можно указать окрестность $U = B(p, \delta)$ этой точки и функцию $h^*\colon U \to \mathbb{R}^n$, принадлежащую классу $\mathscr{C}^r$ и такую, что $h^*(x) = g[f(x)]$ для всех $x \in U \cap A$. Так как точка $p \in A$ была выбрана произвольно, то тем самым установлено, что отображение $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$. Теорема доказана. ■

В общем случае, когда множество A в пространстве $\mathbb{R}^k$ произвольно и функция $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$, то, вообще говоря, частные производные для этой функции не могут быть определены.

Пусть, например, $k = 2$ и множество A есть прямая, состоящая из всех точек $x = (x, y)$ таких, что $x = y$. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}$, определенная условием $f(x) = x = y$ для произвольной точки $x = (x, y) \in A$, принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ при любом r.

Действительно, каждая из функций $g(x, y) \equiv x$ и $h(x, y) \equiv y$ представляет собой продолжение функции f на $\mathbb{R}^2$, которое есть функция класса $\mathscr{C}^r$ при любом r. Имеем $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) \equiv 1$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) \equiv 0$.

В силу сказанного становится непонятным, какое конкретное значение нужно приписать производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$: следует ли считать ее равной единице в каждой точке множества A или же эту производную мы должны считать тождественно равной нулю?

Имеется, однако, один важный частный случай, когда понятие частной производной функции класса $\mathscr{C}^r$ определяется однозначно, хотя область определения функции и не является открытым множеством в пространстве $\mathbb{R}^m$ для какого-либо конкретного значения m. Рассмотрим этот случай.

Предварительно сделаем некоторые общие замечания.

Пусть A есть произвольное непустое множество в метрическом пространстве (M, ρ). Точка x множества A называется *внутренней точкой* A, если существует $\delta > 0$ такое, что шар $B(x, \delta) \subset A$.

Совокупность всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* или *открытым ядром множества* A и обозначается символом A°.

Открытое ядро всякого множества A в метрическом пространстве (M, ρ) есть открытое множество. Действительно, если множество A вообще не имеет внутренних точек, то множество A° пусто и, следовательно, в этом случае A° есть открытое множество.

Предположим, что множество A° непусто. Пусть x есть произвольная точка множества A°. Тогда согласно определению найдется $\delta > 0$ такое, что $B(x, \delta) \subset A$. Все точки шара $B(x, \delta)$ являются его внутренними точками, и так как $B(x, \delta) \subset A$, то каждая точка данного шара является внутренней также и для множества A. Это означает, что $B(x, \delta) \subset A^\circ$ и, следовательно, x есть внутренняя точка множества A°.

Так как точка $x \in A^\circ$ взята произвольно, то тем самым доказано, что множество A° открытое.

Пусть A и B — произвольные множества в метрическом пространстве (M, ρ), причем $B \subset A$. Говорят, что множество B *всюду плотно* в множестве A, если для всякой точки $x \in A$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать точку $y \in B$ такую, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Пусть дано непустое множество A в пространстве $\mathbb{R}^k$. Множество A назовем *регулярным*, если его внутренность всюду плотна в A. Пусть A есть произвольное множество в метрическом пространстве (M, ρ).

Напомним, что множество $G \subset A$ называется *открытым относительно* A, если G есть открытое множество пространства (A, ρ) — подпространства (M, ρ).

Как было показано в свое время (глава 9, п. 1.4.2), множество $G \subset A$ является открытым относительно A в том и только в том случае, если G допускает представление $G = A \cap U$, где U есть открытое множество пространства (X, ρ).

Далее будет полезно следующее утверждение.

■ **Лемма 3.1.** *Если множество A в метрическом пространстве (M, ρ) регулярно, то всякое непустое множество $E \subset A$, открытое относительно A, также является регулярным.*

Доказательство. Пусть A есть регулярное множество в метрическом пространстве (M, ρ) и множество $E \subset A$ является открытым относительно A. Возьмем произвольно точку $x \in E$. Так как множество E является *открытым относительно* A, то найдется $\delta > 0$ такое, что всякая точка $x' \in A$, для которой $\rho(x', x) < \delta$, принадлежит E.

Так как множество A *регулярно*, то x является пределом некоторой последовательности $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ внутренних точек множества A.

Согласно определению понятия предела последовательности точек метрического пространства (§ 1 главы 9) найдется номер $\bar{\nu}$ такой, что для всех $\nu \geq \bar{\nu}$ выполняется неравенство $\rho(x_\nu, x) < \delta$, т. е. $x_\nu \in E$ для всех $\nu \geq \bar{\nu}$.

При $\nu \geq \bar{\nu}$ точка x_ν является внутренней точкой множества E. Действительно, возьмем произвольно номер $\nu \geq \bar{\nu}$. Так как x_ν есть внутренняя точка A, то найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $B(x_\nu, \varepsilon_1) \subset A$. Положим $\varepsilon_2 = \delta - \rho(x_\nu, x)$. Очевидно, $\varepsilon_2 > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ есть наименьшее из чисел ε_1 и ε_2. Тогда если $\rho(x', x_\nu) < \varepsilon$, то $x' \in B(x_\nu, \varepsilon_1) \subset A$, поскольку $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Значит, $x' \in A^\circ$. В то же время имеем $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ и, следовательно,

$$\rho(x', x) \leq \rho(x', x_\nu) + \rho(x_\nu, x) < \varepsilon_2 + \rho(x_\nu, x) = \delta,$$

и потому $x' \in E$.

Мы видим, что все точки шара $B(x_\nu, \varepsilon)$ принадлежат множеству E, т. е. x_ν есть внутренняя точка множества E.

Полагая $y_\nu = x_{\bar{\nu}}$ при $\nu \leq \bar{\nu}$ и $y_\nu = x_\nu$ при $\nu \geq \bar{\nu}$, мы получим последовательность внутренних точек множества E, имеющую своим пределом точку x.

Поскольку точка $x \in E$ была взята произвольно, то тем самым установлено, что множество E регулярно. Лемма доказана. ■

Пусть A — регулярное множество в пространстве $\mathbb{R}^k$ и $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ есть функция класса $\mathscr{C}^r$. Тогда ограничение функции f на множестве A° принадлежит классу $\mathscr{C}^r$. Множество A° открытое. Так как $A^\circ \subset A$, то ограничение f на A° есть функция класса $\mathscr{C}^r$ и, следовательно, функция f имеет в каждой точке множества A° все частные производные порядка не выше r, причем эти производные на множестве A° непрерывны.

Возьмем произвольно точку $p \in A$. В силу регулярности A точка p является предельной для множества A°. Согласно определению функций класса $\mathscr{C}^r$ существуют окрестность $U = B(p, \delta)$ точки p и функция $f^*\colon U \to \mathbb{R}^m$ такие, что f^* принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ и $f^*(x) = f(x)$ для всех $x \in U \cap A$.

В каждой точке $x \in A^\circ$ для всякого k-мерного мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leq r$, определена частная производная $D^\alpha f(x)$. Функции f и f^* на множестве $U \cap A^\circ$ совпадают. Множество $U \cap A^\circ$ открытое, и, значит, $D^\alpha f(x) = D^\alpha f^*(x)$ для всех $x \in U \cap A^\circ$.

Функция $D^\alpha f^*$ непрерывна. Пусть $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность точек множества A°, сходящаяся к произвольной точке

$x \in A \cap U$. Так как U есть открытое множество, то найдется номер $\bar{\nu}$ такой, что при всяком $\nu \geq \bar{\nu}$ точка x_ν принадлежит окрестности U точки p. В силу непрерывности функции $D^\alpha f^*$ существует предел $\lim\limits_{\nu\to\infty} D^\alpha f^*(x_\nu) = D^\alpha f^*(x)$. При $\nu \geq \bar{\nu}$ справедливо равенство $D^\alpha f^*(x_\nu) = D^\alpha f(x_\nu)$. Отсюда, в частности, вытекает, что в рассматриваемом случае существует также и предел

$$\lim_{\nu\to\infty} D^\alpha f(x_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} D^\alpha f^*(x_\nu) = D^\alpha f^*(x).$$

Из доказанного в силу *критерия Гейне* существования предела следует, что для всякой точки $x \in U \cap A$ для любого k-мерного мультииндекса α, удовлетворяющего условию $|\alpha| \leq r$, существует предел $\lim\limits_{t\to x, t\in A^\circ} D^\alpha f(t)$. Значение этого предела равно $D^\alpha f^*(x)$.

В частности, существует предел $\lim\limits_{x\to p, x\in A^\circ} D^\alpha f(x)$. Этот предел будем считать значением производной $D^\alpha f$ в точке p множества A и обозначать символом $D^\alpha f(p)$.

Из проделанного выше построения следует, что всякая точка $p \in A$ имеет окрестность $U = B(p, \delta)$ такую, что во всех точках множества $U \cap A$ имеет место равенство $D^\alpha f(x) = f_\alpha(x)$, где $f_\alpha = D^\alpha f^*$ есть функция, непрерывная в точке p. Отсюда вытекает, что функция $D^\alpha f$ непрерывна в точке p. Точка $p \in A$ взята произвольно, и, следовательно, мы получаем, что функция $D^\alpha f$, где $|\alpha| \leq r$, непрерывна в каждой точке множества A.

Пусть A есть регулярное множество в пространстве $\mathbb{R}^k$ и $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$. Тогда для всякой точки $t \in A$ определены векторы $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Это позволяет для всякого $a \in A$ определить линейное отображение

$$df(a; h)\colon h = (h_1, h_2, \ldots, h_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i}(t) h_i,$$

которое мы будем называть *дифференциалом отображения f в точке a*. Мы будем применять в этом случае те же обозначения для дифференциала, что и в главе 7.

Если f есть отображение класса $\mathscr{C}^r$ множества A, регулярного в $\mathbb{R}^k$, причем $r \geq 1$, то для всякой точки $p \in A$ справедливо соотношение

$$f(t) = f(p) + df(p; t - p) + \alpha(t)|t - p|, \tag{3.1}$$

где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to p$. Действительно, условие $f \in \mathscr{C}^r$ в данном случае согласно определению означает, что существуют окрестность $U = B(a, \delta)$ точки a и функция $f^* \colon U \to \mathbb{R}^n$ класса $\mathscr{C}^r$ такие, что $f^*(t) = f(t)$ для всех $t \in U \cap A$.

В силу известных свойств функций класса $\mathscr{C}^r$, определенных на открытых множествах (глава 7), для всякой точки $p \in U$ справедливо соотношение

$$f^*(t) = f^*(p) + df^*(p; t - p) + \alpha(t, p)|t - p|, \tag{3.2}$$

где $\alpha(t, p) \to 0$ при $t \to p$. Для случая, когда $t \in A$, имеем равенство $f^*(t) = f(t)$, а производные $\dfrac{\partial f^*}{\partial t_i}(p)$ совпадают с соответствующими производными функции f. Это означает, что если $p \in A$, то $df^*(p; h) \equiv \equiv df(p; h)$, какова бы ни была функция $f^* \in \mathscr{C}^r$, определенная на окрестности U точки p и такая, что $f^*(x) = f(x)$ для всех $x \in U \cap A$. (Напомним, что множество A предполагается регулярным.)

3.2. Понятие диффеоморфизма

Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R}^k$. Отображение $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ называется *диффеоморфизмом* класса $\mathscr{C}^r$, если оно удовлетворяет следующим условиям.

1) Отображение f взаимно однозначно и принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ для некоторого $r \geq 1$.

2) Пусть $B = f(A)$. Тогда обратное отображение $f^{-1} \colon B \to \mathbb{R}^k$ принадлежит тому же классу гладкости $\mathscr{C}^r$, что и отображение f.

В дальнейшем, говоря о диффеоморфизмах, в тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, мы, как правило, не будем специально указывать, какому именно классу $\mathscr{C}^r$ принадлежит рассматриваемый диффеоморфизм.

Если $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ есть диффеоморфизм и $B = f(A)$, то будем говорить, что *множество B диффеоморфно A*. При этом если f есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$, то будем говорить, что *множество B диффеоморфно множеству A в классе $\mathscr{C}^r$*.

Пусть даны множество $A \subset \mathbb{R}^k$ и диффеоморфизм $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ класса $\mathscr{C}^r$. Пусть $B = f(A)$.

Отображение f взаимно однозначно, и согласно определению отображение f^{-1} принадлежит классу $\mathscr{C}^r$.

Отображение, обратное к f^{-1}, есть f и, следовательно, принадлежит классу $\mathscr{C}^r$.

Таким образом, мы получаем, что отображение $f^{-1}\colon B \to \mathbb{R}^k$ удовлетворяет указанным выше условиям 1) и 2) и, значит, f^{-1} есть диффеоморфизм того же класса $\mathscr{C}^r$, что и отображение f.

Отметим некоторые простейшие с в о й с т в а диффеоморфизмов, непосредственно вытекающие из определения.

Тождественное отображение множества $A \subset \mathbb{R}^k$ удовлетворяет условиям 1) и 2) данного выше определения для любого $r > 0$ и, следовательно, представляет собой диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$ для любого r.

Пусть даны множество $A \subset \mathbb{R}^k$ и отображение $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ представляет собой диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$. Тогда для всякого множества $E \subset A$ ограничение отображения f на множестве E также есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$.

Пусть даны множества $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^k$ и $C \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что множество A диффеоморфно в $\mathscr{C}^r$ множеству B, а B диффеоморфно в $\mathscr{C}^r$ множеству C.

Пусть дан диффеоморфизм $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ класса $\mathscr{C}^r$, и пусть $B = f(A)$. Предположим, что отображение $g\colon B \to \mathbb{R}^n$ также представляет собой диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$. *Тогда отображение $h = g\circ f$ есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$.* Действительно, каждое из отображений f и g взаимно однозначно. Отсюда следует, что отображение h взаимно однозначно. При этом $h(A) = g[f(A)] = g(B)$. Отображения f и g принадлежат классу $\mathscr{C}^r$. В силу теоремы 3.1 это позволяет заключить, что h принадлежит классу $\mathscr{C}^r$.

Положим $h(A) = C$, $C = g(B)$. Так как каждое из отображений f и g есть диффеоморфизм, то отображения f^{-1} и g^{-1} принадлежат классу $\mathscr{C}^r$. Очевидно, имеем $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Применяя теорему 3.1, отсюда получаем, что отображение h^{-1} также принадлежит классу $\mathscr{C}^r$.

Таким образом, доказано, что h есть диффеоморфизм. Из доказанного, в частности, вытекает, что введенное здесь отношение диффеоморфности для множеств в евклидовых пространствах рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Всякое множество в пространстве $\mathbb{R}^k$ диффеоморфно самому себе. Если $A \subset \mathbb{R}^k$ диффеоморфно $B \subset \mathbb{R}^m$, то, в свою очередь, B диффеоморфно A. Если множество $A \subset \mathbb{R}^k$ диффеоморфно $B \subset \mathbb{R}^m$, B диффеоморфно $C \subset \mathbb{R}^n$, то A диффеоморфно C.

Докажем предложение, которое в случаях, важных для нас, позволяет устанавливать, что некоторое отображение есть диффеоморфизм.

■ **Теорема 3.2.** *Пусть A есть регулярное множество в пространстве $\mathbb{R}^k$, $\varphi\colon A \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $\mathscr{C}^r$ и $B = \varphi(A)$. Предположим, что φ удовлетворяет следующим условиям:*

1) φ взаимно однозначно и обратное отображение $\varphi^{-1}\colon B \to \mathbb{R}^k$ непрерывно;

2) в каждой точке $t \in A$ векторы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, линейно независимы.

Тогда φ есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$.

Доказательство. Предположим, что отображение φ удовлетворяет всем условиям теоремы. Положим $\psi = \varphi^{-1}$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что ψ есть отображение класса $\mathscr{C}^r$.

Возьмем произвольно точку $q \in B$. Пусть $p = \psi(q)$. Тогда $p \in A$ и $\varphi(p) = q$.

По условию, φ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$. Это согласно определению означает, что найдутся окрестность $U = B(p, \delta_1)$ точки p и отображение $\varphi^*\colon U \to \mathbb{R}^n$ класса $\mathscr{C}^r$ такие, что $\varphi^*(t) = \varphi(t)$ для всех $t \in A \cap U$. Так как множество A регулярно, то производные $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)$ определены для всех $t \in A$. Функции $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}$ непрерывны на множестве A. Множество $A^\circ \cap U$ открытое, и так как функции φ и φ^* на нем совпадают, то для всякого $t \in A^\circ \cap U$ имеет место равенство $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t) = \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial t_i}(t)$. Эти производные представляют собой функции, непрерывные на множестве $A \cap U$, откуда следует, что они совпадают во всех точках $t \in A \cap U$.

В частности, $\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial t_i}(p) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(p)$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$. Имеем $q = \varphi(p) = \varphi^*(p)$. Согласно второй теореме о выпрямлении (глава 10, теорема 3.3) можно указать числа $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и отображение $F\colon V \to \mathbb{R}^n$ класса $\mathscr{C}^r$, определенное в окрестности $V = B(q, \varepsilon_1)$ точки $q = \varphi^*(p) \in \mathbb{R}^n$, такие, что $0 < \delta < \delta_1$ и выполнены следующие условия. Для всякого t, достаточно близкого к точке p, а именно, для любого, которое удовлетворяет неравенству $|t - p| < \delta$ при $n = k$, выполняется равенство $F[\varphi^*(t)] = t$, а если $n > k$, то $F[\varphi^*(t)] = (t, 0)$. (Пространство $\mathbb{R}^n$ в последнем случае рассматривается как декартово произведение $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, где $m = n - k$.) Иначе говоря, если $t \in A$ и $|t - p| < \delta$, то i-я компонента вектора $F[\varphi^*(t)]$ равна i-й компоненте вектора t, т. е. $F_i[\varphi^*(t)] = t_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть ψ^* есть отображение $x \mapsto (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)) \in \mathbb{R}^k$. Отображение ψ^* принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ и определено на шаре $B(q, \varepsilon_1)$.

Отображение $\psi = \varphi^{-1}$ в силу условий леммы непрерывно, и, значит, найдется ε такое, что $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, и если $x \in B$ удовлетворяет неравенству $|x - q| < \varepsilon$, то $|\psi(x) - p| < \delta$.

Пусть $x \in B$, причем $|x - q| < \varepsilon$. Положим $t = \psi(x)$. Тогда имеем $\psi^*(x) = \psi^*[\varphi^*(t)] = \psi^*[\varphi(t)] = t$. Мы получаем, таким образом, что $\psi^*(x) = \psi(x)$ для любого $x \in B$, принадлежащего окрестности $B(q, \varepsilon)$ точки q.

Точка $q \in B$ выбрана произвольно. В силу определения из доказанного следует, что $\psi = \varphi^{-1}$ есть отображение класса $\mathscr{C}^r$. Следовательно, отображение φ есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$. Теорема доказана. ∎

∎ ***Лемма 3.2.*** *Пусть A есть регулярное множество в пространстве $\mathbb{R}^k$, $\varphi\colon A \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$. Пусть $B = \varphi(A)$ и $q = \varphi(p)$, где $p \in A$. Предположим, что окрестность $V = B(q, \varepsilon)$ точки q и отображение $\psi\colon V \to \mathbb{R}^k$ класса $\mathscr{C}^r$ таковы, что $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ для всех $x \in U \cap B$. Тогда для всех $t \in A$ таких, что $|\varphi(t) - \varphi(p)| < \varepsilon$, выполняется равенство $d\psi[\varphi(t)] \circ d\varphi(t) = \mathrm{Id}_k$, где Id_k есть тождественное отображение пространства $\mathbb{R}^k$.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Так как φ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$, то согласно определению отображения класса $\mathscr{C}^r$ найдутся окрестность $U = B(p, \delta)$ точки p и отображение $\varphi^*: U \to \mathbb{R}^n$ класса $\mathscr{C}^r$ такие, что $\varphi^*(t) = \varphi(t)$ для всех $t \in U \cap A$ и $|\varphi^*(t) - q| < \varepsilon$ для всех $t \in U$.

Функция φ определена во всех точках множества A° и принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ на множестве A°. Отсюда следует, что φ дифференцируема во всех точках $t \in U \cap A^\circ$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$d[\psi \circ \varphi^*](t) = d\psi[\varphi^*(t)] \circ d\varphi^*(t) \tag{3.3}$$

для всех $t \in U \cap A^\circ$. Пусть $t \in A \cap U$. Тогда $x = \varphi^*(t) = \varphi(t) \in B$ и, значит, $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$. Отсюда следует, что для данного t имеет место равенство

$$\xi(t) = \psi[\varphi^*(t)] = \varphi^{-1}[\varphi(t)] = t.$$

Таким образом, $d\xi(t) = \mathrm{Id}_k$ во всех точках открытого множества $A^\circ \cap U$.

По условию, множество A регулярно и, значит, согласно лемме 3.1 множество $A \cap U$ также регулярно. Возьмем произвольно точку $t \in A$. В силу регулярности множества $A \cap U$ найдется последовательность $(t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ точек множества $(A \cap U)^\circ$ такая, что $t = \lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu$. В каждой из точек t_ν имеем равенство $d[\psi \circ \varphi^*](t_\nu) = \mathrm{Id}_k$. В силу непрерывности функции $d[\psi \circ \varphi^*]$ на множестве $A \cap U$ отсюда следует, что равенство $d[\psi \circ \varphi^*](t) = \mathrm{Id}_k$ выполняется и для данного $t \in A \cap U$. Так как $t \in A \cap U$ было выбрано произвольно, то мы, следовательно, получаем, что для

$t \in A \cap U$ справедливо

$$d\psi \circ d\varphi^*(t) = \mathrm{Id}_k\,.$$

Осталось заметить, что на множестве $A \cap U$ производные $\dfrac{\partial \varphi^*}{\partial t_i}$ совпадают с производными $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_i}$ и, значит, $d\varphi^*(t) = d\varphi(t)$ в каждой точке $t \in A$. Лемма доказана. ■

Замечание. Пусть даны конечномерные векторные пространства X и Y. Пусть $L\colon X \to Y$ есть линейное отображение. Предположим, что существует линейное отображение $M\colon Y \to X$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^k$ выполняется равенство $M[L(\xi)] = \xi$. Тогда для всякой системы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ линейно независимых векторов пространства X векторы $\eta_i = L(\xi_i)$ в пространстве Y линейно независимы.

Действительно, предположим, что отображения L, M и векторы ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяют этим условиям. Зададим произвольно числа l_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, не обращающиеся одновременно в нуль. Пусть

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} l_i \xi_i, \quad \eta = L(\xi) = \sum_{i=1}^{k} l_i L(\xi_i) = \sum_{i=1}^{k} l_i \eta_i.$$

Вектор ξ отличен от нуля. Имеем

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} l_i M[L(\xi_i)] = M\left[\sum_{i=1}^{k} l_i \eta_i\right] = M[L(\xi)] = M(\eta).$$

Отсюда следует, что также и $\eta \neq 0$. Тем самым доказано, что векторы η_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, линейно независимы.

▼ ***Следствие.*** *Пусть множество A в пространстве $\mathbb{R}^k$ является регулярным и отображение $\varphi\colon A \to \mathbb{R}^n$ есть диффеоморфизм. Тогда в каждой точке $t \in A$ векторы $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t), \ldots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_k}(t)$ линейно независимы.*

Замечание. Теорема 3.2 устанавливает некоторые достаточные условия для того, чтобы отображение $f\colon A \to \mathbb{R}^n$, где $A \subset \mathbb{R}^k$ — регулярное множество, было диффеоморфизмом. Данное следствие показывает, что эти условия необходимы.

Доказательство. Пусть A есть регулярное множество в пространстве $\mathbb{R}^k$ и $\varphi\colon A \to \mathbb{R}^n$ есть диффеоморфизм.

Возьмем произвольно точку $p \in A$. Согласно определению отображения класса $\mathscr{C}^r$ найдутся окрестность $U = B(p, \delta)$ точки p, окрестность $V = B(q, \varepsilon)$ точки $q = \varphi(p)$ и отображение $\psi\colon V \to \mathbb{R}^k$ класса $\mathscr{C}^r$

такое, что на множестве $t \in A \cap U$ определено отображение $\psi \circ \varphi$, причем $d\psi[\varphi(t)] \circ d\varphi(t) = \mathrm{Id}_k$.

Положим $d\psi[\varphi(p)] = M$ и $d\varphi(p) = L$. Имеем $M[L(\xi)] = \xi$ для всякого вектора $\xi \in \mathbb{R}^k$ и $L(\mathbf{e}_i) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t)$ при всяком $i = 1, 2, \ldots, k$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ есть *канонический базис* пространства $\mathbb{R}^k$. В силу замечания, предшествующего следствию, отсюда вытекает, что векторы $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, линейно независимы. Следствие доказано. ▼

3.3. Понятие k-мерного подмногообразия пространства $\mathbb{R}^n$

3.3.1. Множество P в пространстве $\mathbb{R}^k$ будем называть k-мерной стандартной областью, если P есть либо

1) открытый k-мерный прямоугольник

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k),$$

либо

2) k-мерный полуоткрытый прямоугольник

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k).$$

В случае 1) множество P будем называть *k-мерным интервалом*, а в случае 2) P называется *k-мерным полуинтервалом.*

Пусть P есть k-мерный полуинтервал

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k).$$

Точки $t \in P$, у которых первая компонента равна b_1, будем называть *краевыми точками* P. Совокупность всех *краевых точек* полуинтервала P называется его *краем* и обозначается символом ∂P. Если $k \geq 2$, то для данного полуинтервала P определен еще $(k-1)$-мерный интервал

$$(a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k),$$

который будем обозначать символом $\partial_0 P$.

Пусть j есть отображение $(t_2, \ldots, t_k) \in \partial_0 P \mapsto (b_1, t_2, \ldots, t_k) \in \partial P$. *Отображение j есть диффеоморфизм.* Действительно, j взаимно однозначно и отображает $\partial_0 P$ на ∂P. При этом $j \in \mathscr{C}^r$ при любом $r \geq 1$. Отображение $p\colon (b_1, t_2, \ldots, t_k) \in \partial P \mapsto (t_2, \ldots, t_k) \in \partial_0 P$, является о б р а т н ы м к j и принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ для любого $r \geq 1$.

Тем самым доказано, что j есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$ при любом $r > 0$.

3.3.2. Покажем, что всякая стандартная k-мерная область P в $\mathbb{R}^k$ является *регулярным множеством* в пространстве $\mathbb{R}^k$. Если P есть k-мерный интервал, то P есть открытое множество в $\mathbb{R}^k$, его *внутренность*, стало быть, совпадает с P и, следовательно, в этом случае *внутренность* P является множеством, всюду плотным в P.

Пусть P есть полуинтервал $(a_1, b_1]\times(a_2, b_2)\times\cdots\times(a_k, b_k)$. Положим $P_0 = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$.

Все точки интервала P_0, очевидно, являются его внутренними точками. Следовательно, они являются внутренними также и для полуинтервала P, т. е. справедливо включение $P_0 \subset P^\circ$. (Предоставляем читателю доказать, что в действительности $P_0 = P^\circ$.)

Всякая точка $t \in P$ является пределом последовательности $(t_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ точек интервала P_0. Действительно, пусть $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in P$. Тогда имеем $a_1 < t_1 \leq b_1$ и $a_i < t_i < b_i$ при $i = 2, \ldots, k$. Если $a_1 < t_1 < b_1$, то t принадлежит множеству $P_0 \subset P^\circ$ и в этом случае все ясно. Предположим, что $t_1 = b_1$. Положим $l = b_1 - a_1$, и пусть t_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, есть точка $t - \dfrac{l}{\nu+1}\mathbf{e}_1$. (Как обычно, символы $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, обозначают векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^k$.) Легко проверяется, что $t_\nu \in P_0$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и $t_\nu \to t$ при $\nu \to \infty$. Мы получаем, следовательно, что P_0, а значит, и P° всюду плотно в P. Множество P, таким образом, является регулярным.

Пусть P есть k-мерная *стандартная область* в $\mathbb{R}^k$ и $\varphi\colon P \to \mathbb{R}^n$ есть *диффеоморфизм*. Тогда в каждой точке $t \in P$ определены векторы

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}(t), \frac{\partial f}{\partial t_2}(t), \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_k}(t).$$

Согласно следствию леммы 3.2 эти векторы линейно независимы. Отсюда, в частности, следует, что $k \leq n$.

Таким образом, если для стандартной k-мерной области P существует диффеоморфизм $\varphi\colon P \to \mathbb{R}^n$, то ее размерность $k \leq n$.

3.3.3. Множество F в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *элементарным k-мерным многообразием класса $\mathscr{C}^r$* или, иначе, *k-ячейкой класса $\mathscr{C}^r$*, если F диффеоморфно в смысле $\mathscr{C}^r$ некоторой k-мерной стандартной области.

Пусть F есть элементарное k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ и $\varphi\colon P \to F$ есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$ стандартной k-мерной области P на множество F.

Отображение φ называется *параметризацией k-ячейки F.*

Обратное ему отображение $\psi = \varphi^{-1}$ называется *локальной системой координат* или *картой k–ячейки F.*

Для произвольной точки $x \in F$ координаты точки $t = \psi(x)$ будем называть *координатами точки x в системе координат ψ.*

Всякая k-ячейка класса $\mathscr{C}^r$ принадлежит также и классу $\mathscr{C}^s$ для любого $s < r$. Если $F \subset \mathbb{R}^n$ есть k-ячейка класса $\mathscr{C}^r$, то параметризация $\varphi\colon P \to F$ называется *допустимой*, если она представляет собой диффеоморфизм именно класса $\mathscr{C}^r$.

Так как тождественное отображение есть диффеоморфизм, то всякая k-мерная стандартная область является элементарным k-мерным многообразием класса $\mathscr{C}^r$ при любом $r \geq 1$.

Напомним (см. § 1 главы 9), что множество $G \subset A$ называется *открытым относительно A*, если G есть открытое множество пространства (A, ρ) — подпространства (X, ρ).

Пусть A — множество в метрическом пространстве (X, ρ). Как показано в главе 9 (см. п. 1.4.2), множество $G \subset A$ является открытым относительно A в том и только в том случае, если G допускает представление $G = A \cap U$, где U есть открытое множество пространства (X, ρ). Пусть x — произвольная точка множества $A \subset X$. *Окрестностью точки x* в множестве A будем называть всякое множество $G \subset A$, открытое относительно A и такое, что $x \in G$.

Множество M в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *k-мерным многообразием класса $\mathscr{C}^r$*, если для всякой точки $x \in M$ существует окрестность F точки x в множестве M, которая является k-ячейкой класса $\mathscr{C}^r$.

В данном определении не исключаются случаи, когда $k = 1$ и $k = n$. В случае $k = n$ будем называть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ также *областью класса $\mathscr{C}^r$* в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Если $k = 1$, то k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ называется *кривой класса $\mathscr{C}^r$.*

В случае $1 < k < n$ всякое k-мерное подмногообразие F класса $\mathscr{C}^r$ пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть также *k-мерной поверхностью класса $\mathscr{C}^r$* в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Отметим еще, что $(n-1)$-мерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$ называется *гиперповерхностью.*

3.3.4. Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, а множество F, открытое относительно M, является k-ячейкой класса $\mathscr{C}^r$.

Всякая параметризация $\varphi\colon P \to F$ k-ячейки F называется *локальной параметризацией* данного многообразия. Слово «локальная» в наименовании параметризации в дальнейшем, как правило, опускается.

Отображение, о б р а т н о е к φ, называется *локальной системой координат* или *картой многообразия* M.

Пусть x — произвольная точка множества F. Тогда будем говорить, что $\varphi\colon P \to F$ есть *параметризация окрестности* F точки x в многообразии M. Отображение $\psi = \varphi^{-1}$ в этом случае будем называть *системой координат* или *картой, определенной на окрестности F точки x.*

Пусть $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ — произвольные локальные параметризации многообразия M. Параметризации φ и ψ называются *перекрывающимися*, если множества $F = \varphi(P)$ и $G = \psi(Q)$ имеют общие точки. Пусть $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ есть перекрывающиеся параметризации k-мерного многообразия M, $F = \varphi(P)$ и $G = \psi(Q)$.

Множества F и G открытые относительно M, и, значит, их пересечение $H = F \cap G$ также есть множество, открытое относительно M.

Положим $S = \varphi^{-1}(H)$ и $T = \psi^{-1}(H)$. В силу непрерывности отображений φ и ψ множество S является открытым относительно P, T есть множество, открытое относительно Q. Согласно лемме 3.1 каждое из множеств S и T является *регулярным* в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Определим отображения $\tau = \psi^{-1} \circ \varphi$ и $\sigma = \varphi^{-1} \circ \psi$. Так как $S = \varphi^{-1}(H)$ и $T = \psi^{-1}(H)$, то φ отображает S на H, ψ^{-1} отображает H на T. Отсюда следует, что τ взаимно однозначно отображает множество S на T.

Аналогично устанавливается, что σ взаимно однозначно отображает T на S. При этом $\sigma = \tau^{-1}$ и $\tau = \sigma^{-1}$. Каждое из отображений φ и ψ^{-1} есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$. Отсюда следует, что отображения τ и $\sigma = \tau^{-1}$ также являются диффеоморфизмами класса $\mathscr{C}^r$.

Отображения τ и σ называются *функциями перехода для локальных параметризаций* φ и ψ многообразия M или, иначе, для *локальных систем координат* φ^{-1} и ψ^{-1}.

Так как множества S и T регулярны, то во всех точках множества S определены частные производные функции τ и в каждой точке u множества T определены частные производные отображения σ.

Пусть σ^* есть отображение класса $\mathscr{C}^r$, определенное на окрестности U точки $t_0 \in T$ и совпадающее с σ на $T \cap U$. Тогда согласно лемме 3.2 для всех $t \in S$ таких, что $\tau(t) \in U$, выполняется равенство $d\sigma^*[\tau(t)] \circ d\tau(t) = \mathrm{Id}_k$, где Id_k означает *тождественное отображение пространства* $\mathbb{R}^k$. При $t \in S$ точка $u = \tau(t) \in T$, и, значит, для этой точки $d\sigma^*[\tau(t)] = d\sigma[\tau(t)]$. В силу этого равенства окончательно получаем для $u = \tau(t)$

$$d\sigma(u) \circ d\tau(t) = \mathrm{Id}_k, \quad d\tau(t) \circ d\sigma(u) = \mathrm{Id}_k. \tag{3.4}$$

3.3.5. Пусть $J(t, \tau)$ означает *якобиан* отображения τ в точке $t \in S$, т. е. определитель линейного отображения $d\tau(t)$, $J(u, \sigma)$ — *якобиан* отображения σ в точке $u = \tau(t)$. Тогда из равенства (3.4) вытекает, что

$$J(t, \tau) J(u, \sigma) = 1. \tag{3.5}$$

Отсюда, в частности, следует, что *якобианы* отображений τ и σ всюду отличны от нуля.

3.4. Понятие края многообразия

3.4.1. Для произвольного подмногообразия пространства $\mathbb{R}^n$ может быть определено некоторое его подмножество, называемое *краем многообразия.* Это определение опирается на следующее утверждение.

■ ***Лемма 3.3.*** *Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\varphi_1 : P_1 \to M$ и $\varphi_2 : P_2 \to M$ — две допустимые параметризации многообразия M. Предположим, что данные параметризации являются перекрывающимися, и пусть $t \in P_1$ и $u \in P_2$ таковы, что $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(u)$. Тогда если t есть внутренняя точка P_1, то u является внутренней точкой P_2.*

Верно и обратное: если известно, что u есть внутренняя точка P_2, то можно утверждать, что также t есть внутренняя точка P_1.

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Пусть $F_1 = \varphi_1(P_1)$, $F_2 = \varphi_2(P_2)$. Множества F_1 и F_2 являются открытыми относительно M. Пусть $H = F_1 \cap F_2$, $S_1 = \varphi^{-1}(H)$, $S_2 = \varphi^{-1}(H)$. Множества S_1 и S_2 являются открытыми относительно P_1 и P_2 соответственно.

Пусть $\tau_1 = {\varphi_2}^{-1} \circ \varphi_1$ и $\tau_2 = {\varphi_1}^{-1} \circ \varphi_2$ — функции перехода для данных параметризаций. Тогда $\tau_2 = {\tau_1}^{-1}$ и каждое из отображений τ_1 и τ_2 представляет собой диффеоморфизм.

Пусть точки $t \in P_1$ и $u \in P_2$ таковы, что $\varphi_1(t) = \varphi_2(u)$. Предположим, что t есть внутренняя точка стандартной области P_1.

Множество S_1 является открытым относительно P_1, $t \in S_1$, и, значит, найдется $\delta_1 > 0$ такое, что всякая точка $t' \in P_1$, для которой $|t' - t| < \delta_1$, принадлежит S_1. Так как t есть внутренняя точка P_1, то найдется $\delta_2 > 0$ такое, что шар $B(t, \delta_2)$ пространства $\mathbb{R}^k$ содержится в P_1.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда шар $B(t, \delta)$ содержится в P_1 и $|t' - t| < \delta_1$ для всякой точки $t' \in B(t, \delta)$.

Отсюда следует, что шар $B(t, \delta)$ содержится в S_1. Отображение τ_1 взаимно однозначно и преобразует шар $B(t, \delta)$ в некоторое подмножество S_2.

Так как *якобиан* отображения τ_1 всюду отличен от нуля, то по *теореме о локальном диффеоморфизме* (глава 10), образ шара $B(t, \delta)$ относительно этого отображения есть открытое множество в $\mathbb{R}^k$. Отсюда, в частности, следует, что точка $u = \tau_1(t) \in \tau_1[B(t, \delta)] \subset S_2$ является внутренней точкой стандартной области P_2.

Так как t и u входят в условие леммы равноправным образом, то, меняя в проделанных рассуждениях местами точки t и u, точно так же получим, что если u есть внутренняя точка $S_2 \subset P_2$, то t есть внутренняя точка множества $S_1 \subset P_1$. Лемма доказана. ■

▼ ***Следствие.*** *Пусть $\varphi_1 : P_1 \to M$ и $\varphi_2 : P_2 \to M$ — две перекрывающиеся параметризации k-мерного многообразия M класса $\mathscr{C}^r$, и пусть точки $t \in P_1$ и $u \in P_2$ таковы, что $\varphi_1(t) = \varphi(u)$. Тогда если одна из точек t и u является краевой точкой соответствующей стандартной области, то и другая является таковой.*

Действительно, предположим, что точка $t \in P_1$ краевая. Тогда в силу леммы 3.3 точка u не может быть внутренней точкой P_2, ибо в противном случае t было бы внутренней точкой P_1. Аналогично заключаем, что если $u \in \partial P_2$, то t не может быть внутренней точкой P_1. Таким образом, мы получаем, что $t \in \partial P_1 \Leftrightarrow u \in \partial P_2$. Следствие доказано. ▼

Предположим, что M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Точка x многообразия M называется *краевой точкой* данного многообразия, если существует параметризация $\varphi\colon P \to M$ многообразия M такая, что *стандартная область* P есть полуинтервал, причем $x = \varphi(t)$, где $t \in \partial P$.

Следствие леммы 3.3 позволяет заключить, что если x есть краевая точка многообразия M, то для любой другой параметризации $\psi\colon Q \to \to M$ многообразия M такой, что $x = \psi(u)$ для некоторого $u \in Q$, область определения этой параметризации Q является полуинтервалом, причем $u \in \partial Q$.

3.4.2. Совокупность всех краевых точек многообразия M называется его *краем* и обозначается символом ∂M.

Многообразие M, в частности, может вообще не иметь краевых точек. В этом случае, естественно, $\partial M = \varnothing$.

Всякая точка многообразия M, не являющаяся его краевой точкой, называется *внутренней точкой.*

Совокупность всех внутренних точек многообразия M будем обозначать символом $\text{Внт}(M)$.

Чтобы избежать расхождения с прежними определениями, слова «внутренняя точка многообразия» следует понимать как единый термин, так что выражения «внутренняя точка многообразия M» и «внутренняя точка множества M» означают разные понятия.

Выполним еще некоторые построения, которые позволят установить, что́ представляет собой край многообразия.

Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, причем $2 \leq k \leq n$. Предположим, что M имеет краевые точки. Выберем произвольно точку $x \in \partial M$, и пусть $\varphi\colon P \to M$ есть локальная параметризация многообразия M такая, что $x = \varphi(t)$ для некоторого $t \in P$. Так как x есть краевая точка многообразия M, то стандартная k-мерная область P представляет собой полуинтервал, причем $t \in \partial P$.

Пусть

$$P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k).$$

Согласно определению ∂P есть совокупность всех тех точек $t \in P$, у которых первая компонента равна b_1. Так как, по условию, $k \geq 2$, то определен $(k-1)$-мерный интервал

$$\partial_0 P = (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k).$$

Имеем отображения

$$j\colon (t_2, \ldots, t_k) \in \partial_0 P \mapsto (b_1, t_2, \ldots, t_k) \in \partial P,$$
$$p\colon (b_1, t_2, \ldots, t_k) \in \partial P \mapsto (t_2, \ldots, t_k) \in \partial_0 P.$$

Отображения j и p взаимно однозначны и принадлежат классу $\mathscr{C}^r$, каково бы ни было $r \geq 1$. При этом j отображает $\partial_0 P$ на ∂P и p является обратным к j. Это означает, что j есть диффеоморфизм класса $\mathscr{C}^r$, каково бы ни было $r > 0$. Отсюда следует, что отображение $\delta\varphi = \varphi \circ j$ есть диффеоморфизм $(k-1)$-мерного интервала $\partial_0 P$ в M. При этом так как j отображает $\partial_0 P$ на ∂P, то $\delta\varphi(\partial_0 P) = \varphi(\partial P)$. Все точки множества $\varphi(\partial P)$ являются *краевыми точками многообразия* M.

Покажем, что множество $\varphi(\partial P)$ является открытым относительно ∂M. Действительно, пусть $F = \varphi(P)$. Множество F является открытым относительно M, и, значит, $F = U \cap M$, где U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Покажем, что

$$\delta\varphi(\partial_0 P) = \varphi(\partial P) = \partial M \cap U. \tag{3.6}$$

Действительно, если $x \in \varphi(\partial P)$, то $x \in \partial M$, и в то же время $x \in F \subset U$, т. е. $x \in \partial M \cap U$.

Обратно, если $x \in \partial M \cap U$, то $x \in M \cap U = \varphi(P)$, и, значит, $x = \varphi(t)$, где $t \in P$. Так как x есть краевая точка многообразия M, то $t \in \partial P$ и, следовательно, $x \in \varphi(\partial P)$. Равенство (3.6) доказано.

Таким образом, если $k \geq 2$, то для всякой краевой точки x k-мерного многообразия M класса $\mathscr{C}^r$ и любой локальной параметризации $\varphi\colon P \to M$ определен диффеоморфизм $\delta\varphi\colon \partial_0 P \to \mathbb{R}^n$ такой, что множество $\partial F = \delta\varphi(\partial_0 P)$ содержится в ∂M и является открытым относительно ∂M и точка $x \in \partial F$. Область определения диффеоморфизма $\delta\varphi$

в данном случае есть открытая $(k-1)$-мерная стандартная область — интервал $\partial_0 P$.

Из доказанного вытекает следующее предложение.

■ **Теорема 3.3.** *Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $k \geq 2$. Тогда если M имеет краевые точки, то край многообразия M есть $(k-1)$-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, не имеющее краевых точек. Последнее утверждение можно представить формулой $\partial(\partial M) = \varnothing$.*

Доказательство. Действительно, как следует из доказанного выше, для всякой точки $x \in \partial M$ существует множество ∂F, открытое относительно M и являющееся элементарным $(k-1)$-мерным многообразием класса $\mathscr{C}^r$. При этом ∂F допускает параметризацию, область определения которой есть открытая $(k-1)$-мерная стандартная область.

Для множества ∂M, таким образом, выполнены все условия определения $(k-1)$-мерного многообразия класса $\mathscr{C}^r$. При этом, как следует из сказанного, никакая точка $x \in \partial M$ не является краевой точкой ∂M, т. е. ∂M не имеет краевых точек. Теорема доказана. ■

Замечание. Для всякой локальной параметризации φ окрестности краевой точки многообразия M определена параметризация $\delta\varphi$ окрестности этой точки на многообразии ∂M. Она получается из φ, если компоненте t_1 точки $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in P$ придать постоянное значение, а именно, положить ее равной наибольшему значению, которое принимает t_1.

3.5. Касательная плоскость и касательное пространство в точке многообразия

Путем или *параметризованной кривой в пространстве* $\mathbb{R}^n$ называется всякое непрерывное отображение $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что путь $x(t)$, $t \in [a,b]$, *лежит в множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$, если $x(t) \in E$ для всех t.

Говорят, что путь $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *исходит из точки* p, если $x(a) = p$.

Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и p есть произвольная точка многообразия M.

Вектор $h \in \mathbb{R}^n$ называется *касательным вектором многообразия* M в точке p, если существует путь $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, лежащий в многообразии M и исходящий из точки p и такой, что $h = x'(a)$.

Множество всех касательных векторов в точке p многообразия M называется *контингенцией многообразия* M в этой точке и обозначается символом $\mathrm{Cnt}_M(p)$. Следующая теорема дает полный ответ на вопрос о строении *контингенции* в произвольной точке многообразия M.

■ **Теорема 3.4.** *Пусть M есть k-мерное дифференцируемое многообразие класса $\mathscr{C}^r$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi\colon P \to \mathbb{R}^n$ есть локальная параметризация многообразия M такая, что $p = \varphi(u)$ для некоторого $u \in P$, и пусть $\mathbf{a}_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда:*

1) если p есть внутренняя точка M, то $\mathrm{Cnt}_M(p)$ состоит из всех векторов ξ вида

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} l_i \mathbf{a}_i, \tag{3.7}$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — произвольные вещественные числа;

2) если p есть краевая точка M, то $\mathrm{Cnt}_M(p)$ есть множество всех векторов ξ, допускающих представление вида (3.7) с коэффициентами l_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющими дополнительно условию $l_1 \leq 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi\colon P \to \mathbb{R}^n$ есть локальная параметризация многообразия M такая, что $p = \varphi(q)$ для некоторого $q \in P$. Положим $F = \varphi(P)$, и пусть $\psi = \varphi^{-1}\colon F \to \mathbb{R}^k$. Отображение ψ есть диффеоморфизм, и, значит, согласно определению диффеоморфизма существуют окрестность V точки x и отображение $\psi^*: V \to \mathbb{R}^k$ класса $\mathscr{C}^r$ такое, что $\psi^*(x) = \psi(x)$ для всех $x \in F \cap V$.

Зададим произвольно касательный вектор ξ многообразия M в точке p, и пусть $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ есть *путь*, лежащий на многообразии M и исходящий из точки p такой, что $x'(a) = \xi$.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что $F = M \cap G$. В силу непрерывности функции $x(t)$ найдется b_0 такое, что $a < b_0 \leq b$, и точка $x(t) \in G \cap V$ для любого $t \in [a, b_0]$ и, значит, $x(t) \in F \cap V$ для всех $t \in [a, b_0]$.

Простоты ради, будем считать, что $x(t) \in F \cap V$ для всех t. Этого, очевидно, всегда можно добиться, заменяя в случае необходимости b определенным сейчас значением b_0. При этом предположении $x(t) \in V$ для всех $t \in [a, b]$. Положим $y(t) = \psi^*[x(t)]$ для $t \in [a, b]$. Так как для всех $t \in [a, b]$ согласно предположению $x(t) \in F \cap V$, то $y(t) = \psi[x(t)] \in P$ для таких t.

Функция x дифференцируема в точке a, причем $x'(a) = \xi$. Отсюда вытекает, что функция y также дифференцируема для $t = a$. При этом $l = y'(a) = d\psi^*[p; \xi]$.

Пусть $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, есть компоненты вектор-функции $y(t)$, l_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — компоненты вектора l. Имеем, очевидно, $l_i = y_i'(a)$. Так как отображение φ является обратным к ψ, то $\varphi[y(t)] = x(t)$ для всех $t \in [a, b]$. Отсюда получаем, что

$$\xi = x'(a) = d\varphi[q; y'(a)] = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(q) l_i = \sum_{i=1}^{k} l_i \mathbf{a}_i,$$

и вектор ξ, таким образом, допускает представление требуемого вида.

Рассмотрим случай, когда $q \in \partial P$. Пусть

$$P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k). \tag{3.8}$$

Тогда имеем $y_1(a) = b_1$ и $y_1(t) \leq b_1$ для всех $t \in [a, b]$. Мы получили, что функция $y_1(t)$ принимает свое наибольшее значение в $[a, b]$ при $t = a$ и, значит, $l_1 = y_1'(a) \leq 0$. Следовательно, в данном случае коэффициент l_1 в равенстве (3.7) неположителен.

Таким образом, мы установили, что всякий касательный вектор в точке $p = \varphi(q)$ многообразия M допускает представление вида, указанного в формулировке теоремы.

Докажем, что верно обратное: *всякий вектор ξ, допускающий представление вида* (3.8), *причем $l_1 \leq 0$ в случае $p \in \partial M$, является касательным вектором многообразия M в точке p.* Зададим произвольно числа l_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. При этом в случае, если $p \in \partial M$, будем предполагать, что $l_1 \leq 0$.

Пусть $l = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$. Положим $y(t) = q + lt$. Тогда найдется $b > 0$ такое, что $y(t) \in P$ при $t \in [0, b]$. Действительно, если q есть внутренняя точка P, то существует $\delta > 0$ такое, что шар $B(q, \delta) \subset P$, и любое число $b > 0$ такое, что $|l|b < \delta$, удовлетворяет требуемому условию.

Предположим, что $p \in \partial M$. В этом случае P есть k-мерный полуинтервал, и согласно предположению $l_1 \leq 0$. Предположим, что P определяется равенством (3.8). Положим

$$\widetilde{P} = (a_1, \infty) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k).$$

Множество $\widetilde{P}$ открытое и $P \subset \widetilde{P}$. Пусть $\delta > 0$ таково, что шар $B(q, \delta) \subset \subset \widetilde{P}$. Пусть $b > 0$ выбрано так, что $|l|b < \delta$. Тогда точка $y(t) \in \widetilde{P}$ при $0 \leq t \leq b$. Так как $y_1(t) = b_1 + l_1 t$, то $y(t)$, очевидно, принадлежит P для таких t.

Положим $x(t) = \varphi[y(t)]$. Этим определен некоторый *путь*, лежащий на многообразии M и исходящий из точки $p = \varphi(q) = x(0)$. Имеем

$$\xi = x'(0) = d\varphi[q; y'(a)] = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(q) l_i = \sum_{i=1}^{k} l_i \mathbf{a}_i.$$

Так как числа l_i были заданы произвольно, то тем самым теорема доказана. ■

Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$. Возьмем произвольную точку $p \in M$. Если p есть внутренняя точка M, то, как следует из теоремы 3.3, множество $\mathrm{Cnt}_M(p)$ представляет собой k-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. Будем называть его *касательным пространством многообразия M* в точке p и обозначать символом $T_M(p)$.

Предположим, что p есть краевая точка M. В этом случае $\mathrm{Cnt}_M(p)$ есть образ полупространства $\mathbb{R}^k_- = \{l = (l_1, l_2, \ldots, l_k) \mid l_1 \leq 0\}$ пространства $\mathbb{R}^k$ относительно некоторого линейного отображения

$$L(l)\colon (l_1, l_2, \ldots, l_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} l_i \mathbf{a}_i,$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ есть система из k линейно независимых векторов пространства $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем мы будем говорить, что в данном случае $\mathrm{Cnt}_M(p)$ есть *касательное полупространство многообразия M в точке p*, обозначая его символом $\Pi_M(p)$.

Пусть E — произвольное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. *Линейной оболочкой множества E* называется множество всех векторов x, каждый из которых может быть представлен как линейная комбинация элементов множества E.

Если M есть k-мерное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $p \in \partial M$, то определено множество $\Pi_M(p)$. Его линейная оболочка есть образ пространства $\mathbb{R}^k$ относительно некоторого невырожденного линейного отображения. А именно, если $\varphi\colon P \to \mathbb{R}^n$ есть параметризация многообразия M такая, что $p = \varphi(t)$, где $t \in \partial P$, то линейная оболочка $\Pi_M(p)$ есть подпространство $d\varphi_t(\mathbb{R}^k)$. Полагаем $T_M(p) = d\varphi_t(\mathbb{R}^k)$ и в этом случае.

3.6. Множества, задаваемые системой уравнений

■ **Теорема 3.5.** *Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$; u, f_i, $i = 1, 2, \ldots, n-k$, где $1 \leq k \leq n$, — вещественные функции класса $\mathscr{C}^r$, M — множество всех точек $x \in U$, для которых выполняются соотношения $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-k$, $u(x) \leq 0$.*

Предположим, что в каждой точке $x \in M$ ранг системы функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-k}\}$ равен $n-k$, причем если $u(x) = 0$, то в точке x ранг системы функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-k}, u\}$ равен $n-k+1$. Тогда множество M представляет собой k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, причем точки, в которых $u(x) = 0$, образуют край многообразия M.

З а м е ч а н и е. Условия теоремы не исключают случай $k = n$. Если $k = n$, то функции f_i отсутствуют и условия теоремы сводятся к следующему. На множестве U задана функция $u\colon U \to \mathbb{R}$ класса $\mathscr{C}^r$, и в каждой точке $x \in U$, для которой $u(x) = 0$, хотя бы одна из частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ отлична от нуля. Множество M в этом случае есть совокупность всех $x \in U$, для которых $u(x) \leq 0$.

Доказательство теоремы. Пусть выполнены все условия теоремы. Для упрощения записи положим $n - k = m$. Обозначим через U_0 множество всех $x \in U$, для которых $u(x) < 0$. Множество всех $x \in M$, для которых $u(x) = 0$, обозначим символом δM.

Возьмем произвольно точку $p \in M$. Сначала мы построим некоторую окрестность V точки p, для которой существует диффеоморфизм, преобразующий данную окрестность в куб так, что множество $V \cap M$ при этом переходит в сечение куба k-мерной плоскостью, параллельной одной из его граней.

Предположим, что $u(p) < 0$. Тогда $p \in U_0$, и в случае $m > 0$ в точке p ранг системы функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ равен m. Значит, по *первой теореме о выпрямлении* (глава 10, теорема 3.2) найдутся n-мерный куб Q и диффеоморфизм $\Phi\colon Q \to \mathbb{R}^n$ такие, что $V = \Phi(Q) \subset U_0$, и для любого $y \in Q$ имеют место равенства: $f_i[\Phi(y)] = y_i$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$.

В случае $m = 0$ находим $\varepsilon > 0$ такое, что шар $B(p, \varepsilon)$ содержится в U_0 (напомним, что для выбранной точки p имеет место неравенство $u(p) < 0$). Полагаем $Q = Q(p, \varepsilon/\sqrt{n}\,)$, а в качестве Φ берем тождественное отображение куба Q в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что $u(p) = 0$. Тогда согласно условию теоремы в точке p ранг системы функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m, u\}$ равен $m + 1$. (Если $m = 0$, эта система состоит из единственной функции — функции u.) Согласно *первой теореме о выпрямлении* (глава 10, теорема 3.2) найдутся n-мерный куб Q и диффеоморфизм $\Phi\colon Q \to \mathbb{R}^n$ такие, что $V = \Phi(Q) \subset U$, $p \in V$ и для любого $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in Q$ выполняется равенство $f_i[\Phi(z)] = z_i$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, m$ и $u[\Phi(z)] = z_{m+1}$. (В случае $m = 0$ из этих соотношений остается только последнее.)

Во всех случаях множество $V = \Phi(Q)$ открытое, $p \in V$. Покажем, что множество $S = V \cap M$ есть элементарное k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$.

Рассмотрим отдельно случай $m = 0$. Пусть $u(p) < 0$. Тогда $S = V = Q$ и S, очевидно, является n-ячейкой класса $\mathscr{C}^r$. Предположим, что $u(p) = 0$. Тогда имеем $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ и для всякой точки $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in Q$ справедливо соотношение

$u(z) = z_1$. Пусть $p = \Phi(q)$, где $q \in Q$. Для точки q ее компонента с номером 1 равна $u(p) = 0$. Отсюда следует, что $a_1 < 0 < b_1$. Полагаем $P = (a_1, 0] \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$. Множество P есть n-мерный полуинтервал. Легко проверяется, что $\Phi(P) = V \cap M$. Таким образом, доказано, что в данном случае всякая точка $p \in M$ имеет окрестность, которая является элементарным n-мерным многообразием класса $\mathscr{C}^r$.

Будем далее считать, что $m > 0$. Пусть

$$Q = (u_1, v_1) \times \dots \times (u_m, v_m) \times (a_1, b_1) \times \dots \times (a_k, b_k).$$

Предположим, что $p = \Phi(q)$, где $q = (r_1, \dots, r_m, h_1, \dots, h_k)$. Пусть $\Sigma = \Phi^{-1}(S)$.

Покажем, что Σ есть множество всех точек куба Q, у которых первые m координат равны нулю, а в случае, когда $p \in \delta M$, координата с номером $m+1$ неположительна. Действительно, пусть $y \in Q$ и пусть $x = \Phi(y)$. Тогда согласно определению M точка x принадлежит множеству M в том и только в том случае, если $f_i(x) = 0$ при каждом $i = 1, 2, \dots, m$ и $u(x) \le 0$.

Согласно определению диффеоморфизма Φ имеем

$$f_i(x) = f_i[\Phi(y)] = y_i$$

для любого $i = 1, 2, \dots, m$, а в случае $p \in \delta M$, кроме того, выполняется еще равенство $u[\Phi(y)] = y_{m+1}$. Отсюда следует, что точка $x = \Phi(y)$ принадлежит S, т. е. $y \in \Sigma$ в том и только в том случае, если $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$, а если $p \in \delta M$, то выполняется еще условие $y_{m+1} \le 0$, что и требовалось доказать.

Доказанное можно понимать также следующим образом.

Отображение $\Psi = \Phi^{-1}$ есть система координат, определенная в окрестности V точки p.

Часть множества M, лежащая в этой окрестности в случае, когда $p \in U_0$, в этой системе координат определяется системой уравнений $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$, а если $p \in \delta M$, то системой уравнений $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$ и неравенством $y_n \le 0$. В частности, для точки $q = (r_1, \dots, r_m, h_1, \dots, h_k)$, определенной условием $p = \Phi(q)$, имеем $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 0$.

Если $p \in \delta M$, то $u(p) = 0$, и, значит, $(m+1)$-я компонента точки q равна нулю, т. е. $h_1 = 0$. Отсюда следует, что в последнем случае $a_1 < 0 < b_1$.

Теперь покажем, что все условия определения элементарного k-мерного многообразия выполняются для множества S.

Пусть H есть k-мерный *прямоугольник*, определенный следующим образом. В случае, когда $p \in U_0$, полагаем $H = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k)$. Если же $p \in \delta M$, то $H = (a_1, 0] \times \cdots \times (a_k, b_k)$.

Пусть j есть отображение

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mapsto (0, \ldots, 0, t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^n.$$

Оно принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ при любом r и отображает H взаимно однозначно на Σ. Отображение j есть диффеоморфизм. Чтобы убедиться в этом, следует показать, что обратное отображение j^{-1} принадлежит классу $\mathscr{C}^r$. Отображение

$$\pi\colon (y_1, \ldots, y_m, t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^n \mapsto (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$$

принадлежит классу $\mathscr{C}^r$ при всяком r и на множестве Σ, очевидно, совпадает с j^{-1}. Это доказывает, что $j^{-1} \in \mathscr{C}^r$ при любом r.

Положим $\varphi = \Phi \circ j$. Отображение φ есть диффеоморфизм. При этом, как нетрудно видеть, $\varphi(H) = S$. Отсюда следует, что S есть элементарное k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$.

Так как точка $p \in M$ взята произвольно, то тем самым доказано, что M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$.

Если $p \notin \delta M$, то прямоугольник H открытый и, значит, в этом случае p есть внутренняя точка M.

Если же $p \in \delta M$, то H есть полуоткрытый прямоугольник и $p = \varphi(t_0)$, где t_0 есть краевая точка H. Отсюда следует, что p является краевой точкой многообразия M. Следовательно, мы получаем, что $\partial M = \delta M$. Теорема доказана. ■

§ 4. Площадь k-мерного многообразия

В этом параграфе определяется понятие k-мерной площади, или поверхностной меры, на дифференцируемом многообразии.

Приводятся формулы для вычисления площади множества на многообразии и рассматриваются примеры.

4.1. Меры на k-мерных плоскостях

Пусть h есть произвольный вектор пространства $\mathbb{R}^n$ и A есть подмножества $\mathbb{R}^n$. Символ $h + A$ обозначает множество всех точек $y \in \mathbb{R}^n$ вида $y = h + x$, где $x \in A$.

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной плоскостью пространства* $\mathbb{R}^n$, если $S = h + P$, где P есть k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$.

В § 1 этой главы показано, как для произвольного k-мерного подпространства P пространства $\mathbb{R}^n$ определить понятия интегрируемой и измеримой функции измеримого множества и k-мерной меры множества.

Пусть $S = h + P$ есть k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$. Тогда будем считать функцию $f\colon S \to \mathbb{R}$ интегрируемой (измеримой), если функция $f(x+h)$ интегрируема (соответственно измерима) на подпространстве P. Полагаем при этом

$$\int\limits_S f(y)\,d\mu_k(y) = \int\limits_P f(x+p)\,d\mu_k(x).$$

Множество $E \subset S$ считаем измеримым относительно k-мерной меры в плоскости S, если множество $-h + E$ измеримо в плоскости P. При этом полагаем $\mu_k(E) = \mu_k(-h + E)$.

Предположим, что линейное отображение $\lambda\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ таково, что $\lambda(\mathbb{R}^k) = P$ есть k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Тогда $t \in \mathbb{R}^k \mapsto h + \lambda(t)$ есть *биективное отображение* $\mathbb{R}^k$ *в плоскость* $S = h + P$.

Напомним, что отображение вида $\varphi(t) = h + \lambda(t)$, где $h \in \mathbb{R}^n$, а $\lambda\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ линейно, называется *аффинным.* Аффинное отображение φ будем называть *ортогональным*, если линейное отображение λ сохраняет неизменными скалярные произведения векторов, т. е. для любых векторов $u, v \in \mathbb{R}^k$ имеет место равенство $\langle u, v\rangle = \langle\lambda(u), \lambda(v)\rangle$.

Биективное аффинное отображение $\varphi(t) = h+\lambda(t)$ пространства $\mathbb{R}^k$ в k-мерную плоскость S называется *аффинной параметризацией* S.

Пусть P есть k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$, и пусть $\lambda\colon \mathbb{R}^k \to P$ есть биективное линейное отображение. Для произвольной точки $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ имеем $\lambda(t) = t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \cdots + t_k\xi_k$. Здесь векторы ξ_i определяются из условия $\xi_i = \lambda(\mathbf{e}_i)$, где $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, есть векторы *канонического базиса* пространства $\mathbb{R}^k$.

Имеем k-репер $\mathbf{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$, который определяет некоторый k-мерный поливектор $[\mathbf{x}] = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k]$. Тогда, как показано в § 1 для произвольной функции f, заданной на подпространстве $P = \lambda(\mathbb{R}^k)$, интеграл функции f относительно k-мерной площади равен интегралу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} f[\lambda(t)]|[\mathbf{x}]|\,dt.$$

В соответствии с этим мы получаем, что для функции f, определенной на k-мерной плоскости $S = h + P$, интеграл от функции $f\colon S \to \mathbb{R}$ относительно k-мерной меры в плоскости S равен интегралу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} f[h + \lambda(t)]\big|[\mathbf{x}]\big|\, dt.$$

Преобразуем этот интеграл. Положим $\varphi(t) = h + \lambda(t)$. Векторы $\xi_i = \lambda(\mathbf{e}_i)$ могут быть представлены следующим образом:

$$\xi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}.$$

Положим

$$g_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_j} \right\rangle.$$

Тогда, как показано в § 1, имеют место равенства

$$|[\mathbf{x}]|^2 = \begin{vmatrix} \langle \xi_1, \xi_1 \rangle & \langle \xi_1, \xi_2 \rangle & \cdots & \langle \xi_1, \xi_k \rangle \\ \langle \xi_2, \xi_1 \rangle & \langle \xi_2, \xi_2 \rangle & \cdots & \langle \xi_2, \xi_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_k, \xi_1 \rangle & \langle \xi_k, \xi_2 \rangle & \cdots & \langle \xi_k, \xi_k \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель будем обозначать символом g. Величина g для всякой *аффинной параметризации плоскости* постоянна в $\mathbb{R}^k$.

Заметим, что если аффинная параметризация φ является ортогональной, то векторы $\xi_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}$ образуют ортонормальный k-репер.

Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^k$. Предположим, что задано множество G, открытое относительно S, и определен диффеоморфизм $\varphi\colon U \to S$ такой, что $\varphi(U) = G$. Отображение φ есть параметризация множества G на плоскости P.

Покажем, каким образом может быть определена k-мерная мера для произвольного множества $E \subset G$ с помощью параметризации φ. Для произвольного $t \in U$ положим

$$g_{ij}(t) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t) \right\rangle.$$

Положим также

$$g(t) = \begin{vmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & \cdots & g_{1k}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & \cdots & g_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1}(t) & g_{k2}(t) & \cdots & g_{kk}(t) \end{vmatrix}.$$

Как следует из доказанного в § 1 этой главы, последний определитель равен квадрату абсолютной величины k-мерного поливектора

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t)\right].$$

Справедливо следующее утверждение.

■ **Лемма 4.1.** *Для всякой функции $f\colon G \to \mathbb{R}$, интегрируемой относительно k-мерной меры μ_k в плоскости S, выполняется равенство*

$$\int\limits_G f(x)\,d\mu_k(x) = \int\limits_{\varphi^{-1}(G)} f[\varphi(t)]\sqrt{g(t)}\,dt.$$

Доказательство. Действительно, пусть $\psi\colon \mathbb{R}^n \to S$ есть какая-либо аффинная ортогональная параметризация плоскости S. Положим $V = \psi^{-1}(G)$. Множество V открытое, и функция $\psi^* f(t) = f[\psi(t)]$ интегрируема по множеству V. При этом в соответствии с данными ранее определениями будем иметь

$$\int\limits_V \psi^* f(u)\,du = \int\limits_G f(x)\,d\mu_k(x).$$

Отображение $\theta = \psi^{-1}\circ\varphi$ является диффеоморфизмом и отображает U на V. При этом имеет место равенство $f[\varphi(t)] = \psi^* f[\theta(t)]$. Отсюда в силу формулы *замены переменных в кратном интеграле*, доказанной в главе 3, следует, что

$$\int\limits_V \psi^* f(u)\,du = \int\limits_V \psi^* f[\theta(t)]|J(x,\theta)|\,dt = \int\limits_V f[\varphi(t)]|J(x,\theta)|\,dt.$$

Лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$|J(x,\theta)| = \sqrt{g(t)}.$$

Заметим, что имеет место равенство $\varphi(t) = \psi[\theta(t)]$. Отсюда согласно *правилу дифференцирования суперпозиции* вытекает, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\psi}{\partial u_j}\frac{\partial\theta_i}{\partial t_j}.$$

Таким образом, мы получили, что векторы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}$ являются линейными комбинациями векторов $\dfrac{\partial\psi}{\partial u_j}$ и *матрица коэффициентов* в этой линейной комбинации является *транспонированной матрицей Якоби отображения* θ. Определитель этой матрицы равен $J(t,\theta)$.

Векторы $\dfrac{\partial\psi}{\partial u_j}$ образуют ортонормальный k-репер, и, значит, величина $|J(t,\theta)|$ равна абсолютной величине k-мерного поливектора

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t)\right],$$

которая равна $\sqrt{g(t)}$. Лемма доказана. ■

4.2. Определение площади k-мерного многообразия

4.2.1. Для всякого k-мерного многообразия класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$, в пространстве $\mathbb{R}^n$ может быть определена некоторая вполне аддитивная функция множества μ_k, которую мы будем называть *k-мерной площадью* или, иначе, *поверхностной мерой* на многообразии M.

Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$, и $\varphi\colon P \to M$ — допустимая параметризация многообразия M. Пусть $F = \varphi(P)$. Множество F является открытым относительно M. Для всякого $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in P$ определены векторы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)$. По аналогии с тем, как это было выполнено в п. 4.1, определим квадратную $k \times k$-матрицу

$$G_\varphi(t) = (g_{ij}(t))_{i,j=1,2,\ldots,k}, \tag{4.1}$$

где

$$g_{ij}(t) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t) \right\rangle.$$

Матрица $G_\varphi(t)$ симметрическая. Покажем, что она является положительно определенной.

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ — произвольные векторы в пространстве $\mathbb{R}^k$. Дифференциал $d\varphi_t$ отображения φ в точке t взаимно однозначно отображает пространство $\mathbb{R}^k$ на касательное пространство $T_M(p)$ многообразия M в точке $p = \varphi(t)$.

Пусть $X = d\varphi_t(\xi)$ и $Y = d\varphi_t(\eta)$. Векторы X и Y принадлежат k-мерной плоскости $T_M(p)$. Имеем

$$X = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)\xi_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t)\eta_j.$$

Отсюда получаем следующее выражение для скалярного произведения векторов X и Y:

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t)\right\rangle \xi_i\eta_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} g_{ij}(t)\xi_i\eta_j.$$

В частности, получаем, что для всякого вектора $X = d\varphi_t(\xi)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$, имеем

$$|X|^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} g_{ij}(t)\xi_i\xi_j \geq 0.$$

Знак равенства здесь имеет место в том и только в том случаем, если $X = 0$ и, значит, также $\xi = 0$. Следовательно, мы получаем, что квадратичная форма

$$\xi \in \mathbb{R}^k \mapsto \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} g_{ij}(t)\xi_i\xi_j \tag{4.2}$$

является *положительно определенной.*

Квадратичная форма (4.2) в дифференциальной геометрии называется *линейным элементом многообразия* M и обозначается символом

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} g_{ij}(t)dt_i dt_j.$$

Далее используется обозначение $g_\varphi(t) = \det G_\varphi(t)$. В силу положительной определенности квадратичной формы ds^2 имеем $g_\varphi(t) > 0$ для всякого $t \in P$.

■ **Лемма 4.2.** *Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ — две перекрывающиеся допустимые параметризации многообразия M, $R = \varphi(P)$ и $S = \psi(Q)$. Предположим, что матричные функции $G_\varphi(t)$ и $G_\psi(u)$ определены равенствами вида* (4.1), *т. е.*

$$G_\varphi(t) = (g_{ij}(t))_{i,j=1,2,\ldots,k}, \quad G_\psi(u) = (h_{ij}(u))_{i,j=1,2,\ldots,k},$$

где

$$g_{ij}(t) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t)\right\rangle, \quad h_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial t_i}(t), \frac{\partial\psi}{\partial t_j}(t)\right\rangle.$$

Пусть $g_\varphi(t) = \det G_\varphi(t)$, $g_\psi(u) = \det G_\psi(u)$, $P_1 = \varphi^{-1}(R \cap S)$, *а* $Q_1 = \psi^{-1}(R \cap S)$. *Обозначим через* θ *отображение* $\psi^{-1} \circ \varphi \colon P_1 \to Q_1$. *Пусть* $J(t, \theta)$ *есть якобиан отображения* θ *в точке* $t \in P_1$. *Тогда для всех* $t \in P_1$ *выполняется равенство*

$$g_\varphi(t) = g_\psi[\theta(t)][J(t, \theta)]^2. \tag{4.3}$$

Доказательство. Множество P_1 является открытым относительно P, а Q_1 есть множество, открытое относительно Q. Отображение $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$ есть диффеоморфизм. Оно отображает P_1 на Q_1.

Пусть t есть произвольная точка множества P_1 и $u = \theta(t) \in Q_1$. Зададим произвольно векторы $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$. Пусть $\tilde{\xi} = d\theta_t(\xi)$ и $\tilde{\eta} = d\theta_t(\eta)$. Имеем $\varphi(t) = \psi[\theta(t)]$. В силу *правила дифференцирования суперпозиции* имеем

$$X = d\varphi_t(\xi) = d\psi_u[d\theta_t(\xi)] = d\psi_u(\tilde{\xi}).$$

Аналогично, для вектора η имеем

$$Y = d\varphi_t(\eta) = d\psi_u(\tilde{\eta}).$$

Отсюда получаем, что скалярное произведение векторов X и Y равно

$$\langle G_\psi(u)\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\rangle = \langle G_\varphi(t)\xi, \eta\rangle.$$

Пусть $A(t)$ есть матрица линейного отображения $d\theta_t$. Тогда $\tilde{\xi} = A(t)\xi$ и $\tilde{\eta} = A(t)\eta$, и мы получаем, что для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$ имеет место равенство

$$\langle G_\psi(u)A(t)\xi, A(t)\eta\rangle = \langle G_\varphi(t)\xi, \eta\rangle.$$

Применяя равенство $\langle u, Hv\rangle = \langle H^*u, v\rangle$, верное для любых векторов $u, v \in \mathbb{R}^k$ и всякой квадратной матрицы H порядка k, находим, что

$$\langle G_\psi(u)A(t)\xi, A(t)\eta\rangle = \langle A(t)^* G_\psi(u)A(u)\xi, \eta\rangle.$$

Таким образом, для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$ имеем равенство

$$\langle A(t)^* G_\psi(u)A(t)\xi, \eta\rangle = \langle G_\varphi(t)\xi, \eta\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$G_\varphi(t) = A(t)^* G_\psi(u)A(t)$$

и, значит,

$$\det G_\varphi(t) = |\det A(t)|^2 \det G_\psi(u),$$

где $u = \theta(t)$. Так как, очевидно, $\det A(t) = J(t,\theta)$, то тем самым лемма доказана. ■

▼ ***Следствие.*** *Предположим, что на k-мерном многообразии M класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$, задана вещественная функция f. Пусть $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ — две перекрывающиеся параметризации многообразия M, $R = \varphi(P)$, $S = \psi(Q)$. Предположим, что множество $E \subset \subset R \cap S$ таково, что множество $B = \psi^{-1}(E)$ измеримо. Положим $\widehat{\varphi}f(t) = f[\varphi(t)]\sqrt{g_\varphi(t)}$, и, аналогично, пусть $\widehat{\psi}f(u) = f[\psi(u)]\sqrt{g_\psi(u)}$. Тогда если функция $\widehat{\psi}f(u)$ интегрируема по множеству $B = \psi^{-1}(E)$, то функция $\widehat{\varphi}(t)$ интегрируема по множеству $A = \varphi^{-1}(E)$. При этом имеет место равенство*

$$\int_A \widehat{\varphi}f(t)\,dt = \int_B \widehat{\psi}f(u)\,du.$$

Доказательство. Применяя *правило замены переменной в кратном интеграле*, получим

$$\int_B \widehat{\psi}f(u)\,du = \int_A \widehat{\psi}f[\theta(t)]|J(t,\theta)|\,dt.$$

Согласно лемме 4.2 для всех $t \in P_1$ имеет место равенство $g_\varphi(t) = g_\psi[\theta(t)][J(t,\theta)]^2$. Принимая во внимание это равенство, получаем

$$\widehat{\psi}f[\theta(t)]|J(t,\theta)| = f[\psi[\theta(t)]]\sqrt{g_\psi(\theta(t))}|J(t,\theta)| = f[\varphi(t)]\sqrt{g_\varphi(t)}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_A \widehat{\varphi}f(t)\,dt = \int_B f[\psi(u)]\sqrt{g_\psi(u)}\,du.$$

Следствие доказано. ▼

4.2.2. Определим понятия измеримой и интегрируемой функции на k-мерном многообразии M в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что *замыканием множества* E в метрическом пространстве (X,ρ) называется множество $\overline{E}$, которое является пересечением всех замкнутых множеств, содержащих множество E. Всякое множество метрического пространства (X, ρ) содержится в некотором замкнутом множестве (например, множество X замкнуто и содержит в себе любое множество данного пространства). Пересечение любой совокупности замкнутых множеств есть замкнутое множество, и, значит, множество $\overline{E}$ является замкнутым.

Зададим произвольно k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество M как подпространство $\mathbb{R}^n$ само является метрическим пространством.

Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *измеримой на многообразии* M, если для любой допустимой параметризации $\varphi\colon P \to M$ многообразия M функция $\varphi^* f = f \circ \varphi$ является измеримой на множестве $\mathbb{R}^k$.

Множество $E \subset M$ называется *измеримым*, если для всякой допустимой параметризации $\varphi\colon P \to M$ многообразия M множество $\varphi^{-1}(E)$ является измеримым в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Множество $E \subset M$ будем называть *ограниченным множеством*, если его замыкание $\overline{E}$ в многообразии M является компактным множеством.

Функция f называется *локально интегрируемой по многообразию* M, если для всякой допустимой параметризации $\varphi\colon P \to M$ многообразия M и любого ограниченного измеримого множества $A \subset H = \varphi(P)$ функция $\widehat{\varphi} f(t) = \varphi^* f(t)\sqrt{g_\varphi(t)}$ интегрируема по множеству $A^* = \varphi^{-1}(A)$.

Будем говорить, что множество E на многообразии M *мало*, если существует локальная параметризация $\varphi\colon P \to M$ многообразия M такая, что $\overline{E} \subset F = \varphi(P)$.

Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ есть функция, которая определена на многообразии M и является измеримой. Предположим, что измеримое множество $E \subset M$ является малым. По определению, это означает, что существуют локальная параметризация $\varphi\colon P \to M$ многообразия M такая, что $E \subset F = \varphi(P)$.

Будем говорить, что функция f интегрируема по множеству E, если функция $\hat{f}(t) = f[\varphi(t)]\sqrt{g_\varphi(t)}$ интегрируема по множеству $\varphi^{-1}(E)$. В этом случае полагаем

$$\int\limits_E f(x)\, d\mu_k(x) = \int\limits_{\varphi^{-1}(E)} \widehat{\varphi} f(t)\, dt. \tag{4.4}$$

Если $\psi\colon Q \to M$ — произвольная другая параметризация многообразия M такая, что $E \subset \psi(Q)$, то согласно лемме 4.2 в этом случае функция $\widehat{\psi} f$ интегрируема по множеству $\psi^{-1}(E)$, причем имеет место равенство

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(E)} \widehat{\varphi} f(t)\,dt = \int\limits_{\psi^{-1}(E)} \widehat{\psi} f(u)\,du.$$

Мы получаем, таким образом, что правая часть равенства (4.4) не зависит от выбора локальной параметризации $\varphi\colon P \to M$ такой, что $E \subset \varphi(P)$. Справедливо следующее утверждение.

♦ ***Предложение 4.1.*** *Всякое ограниченное измеримое множество многообразия M может быть представлено как объединение конечного числа малых множеств.*

Действительно, пусть множество $E \subset M$ является ограниченным. Тогда его замыкание $\overline{E}$ компактно. Для всякой точки $x \in \overline{E}$ найдется локальная параметризация $\varphi\colon P \to M$ такая, что $x \in \varphi(P)$. (Параметризация φ зависит от точки x; простоты ради мы не указываем это в обозначениях.) Положим $F_x = \varphi(P)$.

Множество F_x является открытым относительно M. Множества F_x образуют открытое покрытие множества $\overline{E}$, и так как $\overline{E}$ компактно, то найдется конечное множество точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$, принадлежащих M, такое, что $\overline{E}$ содержится в объединении множеств F_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, N$. Положим $A_i = E \cap F_{x_i}$. Пусть $B_j = \bigcup\limits_{i=1}^{j} A_i$. Множества B_j образуют возрастающую последовательность и $B_N = E$. Положим $E_1 = A_1$, и при $j > 1$ пусть $E_j = B_j \setminus B_{j-1}$. Множества E_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, попарно не пересекаются, их объединение, очевидно, совпадает с множеством E. При каждом j множество E_j содержится в множестве F_{x_j} и, стало быть, оно является *малым* множеством. Предложение доказано. ♦

Доказанное предложение позволяет определить понятие интеграла функции по произвольному ограниченному измеримому подмножеству k-мерного многообразия.

Пусть E есть произвольное ограниченное измеримое подмножество M. Будем говорить, что функция f *интегрируема по множеству E*, если E допускает представление $E = \bigcup\limits_{j=1}^{N} E_j$ такое, что каждое из множеств E_j является *малым*, причем функция f интегрируема по E_j. Полагаем

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu_k(x) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu_k(x). \tag{4.5}$$

Сумма справа не зависит от выбора разбиения множества E на малые множества. (Мы предоставляем читателю доказательство этого простого факта.)

Данные определения распространяются также и на случай неотрицательных измеримых функций.

Если f есть неотрицательная измеримая функция и измеримое множество $E \subset M$ мало, то мы определим интеграл тем же равенством (4.4), что и в случае интегрируемой функции. Если множество E ограничено, то интеграл функции f мы определим посредством равенства (4.5).

В частном случае, когда функция $f\colon M \to R$ тождественно равна единице, интеграл $\int\limits_E f(x)\,d\mu_k(x)$ обозначается символом $\mu_k(E)$ и называется *площадью множества E в многообразии M*.

4.2.3. Рассмотрим примеры вычисления площади подмногообразий в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пример 1. Площадь графика функции. Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $f\colon U \to \mathbb{R}$ есть вещественная функция класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$. Будем исследовать пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ как произведение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, рассматривая произвольную точку $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ как пару (x, y), где $x \in \mathbb{R}^n$, а $y \in \mathbb{R}$.

Пусть M есть *график функции* f в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. множество всех точек $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $x \in U$.

Отображение $\varphi\colon x \in U \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ принадлежит классу $\mathscr{C}^r$. Множество M является n-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Действительно, пусть $p = (a, f(a) \in M$. Точка $a \in U$. Так как U есть открытое множество, то некоторый куб $Q(a, \delta)$ с центром в точке a и длиной ребра, равной 2δ, содержится в множестве U. Если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то

$$Q(a, \delta) = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \times \cdots \times (a_n - \delta, a_n + \delta).$$

Множество V всех точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, что $x \in Q(a, \delta)$, является открытым в $\mathbb{R}^{n+1}$ как прообраз множества $Q(a, \delta)$ относительно непрерывного отображения $\pi\colon (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x, 0)$.

Очевидно, $V \cap M = \varphi[Q(a, \delta)]$. Отображение φ взаимно однозначно и непрерывно. Обратное к нему отображение есть ограничение на M отображения π и, следовательно, также непрерывно.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ есть канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$. В каждой точке $x \in U$ имеет место равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \left(\mathbf{e}_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right).$$

Отсюда вытекает, что векторы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)$ линейно независимы и, стало быть, отображение φ есть диффеоморфизм. Матрица $(g_{ij}(x))_{i,j=1,2,\ldots,n}$ в данном случае будет иметь вид

$$g_\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1+f_{x_1}^2 & f_{x_1}f_{x_2} & \ldots & f_{x_1}f_{x_n} \\ f_{x_2}f_{x_1} & 1+f_{x_2}^2 & \ldots & f_{x_2}f_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n}f_{x_1} & f_{x_n}f_{x_2} & \ldots & 1+f_{x_n}^2 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем квадратичную форму $G_\varphi(x)(\xi)$, матрицей которой является $g_\varphi(x)$. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$d\varphi_x(\xi) = \left(\xi, \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\xi_i\right) = (\xi, \langle\nabla f(x), \xi\rangle).$$

Отсюда следует, что для данного отображения φ имеет место равенство

$$G_\varphi(x)(\xi) = |\xi|^2 + \langle\nabla f(x), \xi\rangle^2$$

и $g_\varphi(x)$ есть матрица коэффициентов этой квадратичной формы.

Пусть P есть ортогональная $n \times n$-матрица такая, что $P\nabla f(x) = |\nabla f(x)|\mathbf{e}_1$. Тогда будем иметь

$$\langle\nabla f(x), P^*\xi\rangle = \langle P\nabla f(x), \xi\rangle = |\nabla f(x)|\xi_1, \quad |P^*\xi|^2 = |\xi|^2.$$

Заменяя в квадратичной форме ξ на $P^*\xi$, получим новую квадратичную форму

$$G_\varphi(x)(P^*\xi) = |\xi|^2 + |\nabla f(x)|^2\xi_1^2 = (1 + |\nabla f(x)|^2)\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2.$$

Используя представление $G_\varphi(x)(\xi) = \langle g_\varphi(x)\xi, \xi\rangle$ квадратичной формы через матрицу ее коэффициентов, получим равенство

$$G_\varphi(x)(P^*\xi) = \langle g_\varphi(x)P^*\xi, P^*\xi\rangle = \langle Pg_\varphi(x)P^*\xi, \xi\rangle.$$

Таким образом, матрица квадратичной формы $G_\varphi(x)(P^*\xi)$ есть матрица $Pg_\varphi P^*$, и ее определитель равен

$$\det Pg_\varphi(x)P^* = [\det P]^2 \det g_\varphi(x) = \det g_\varphi(x).$$

Матрица квадратичной формы $G_\varphi(P^*\xi)$ диагональная, и ее определитель легко вычисляется. Он равен произведению диагональных элементов матрицы. В результате мы получаем, что определитель матрицы $g_\varphi(x)$ равен

$$\det g_\varphi(x) = 1 + |\nabla f(x)|^2.$$

Величина $\det g_\varphi(x)$ легко вычисляется также непосредственно с помощью известных из курса алгебры стандартных приемов преобразования определителей. Способ, которым этот определитель был найден выше, избавляет от необходимости неоднократного выписывания громоздких формул с определителями.

Окончательно мы приходим к *формуле* для вычисления площади поверхности, заданной уравнением $y = f(x)$, где $x \in U$, U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Для произвольного измеримого множества E на данной поверхности M его площадь $\mu_n(E)$ выражается следующей формулой:

$$\mu_n(E) = \int\limits_{\pi(E)} \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}\, dx. \tag{4.6}$$

Пример 2. Площадь сферы в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Будем считать, что *центр сферы* находится в начале координат и радиус ее равен R. Полагаем $U = B(0,1)$. Плоскостью $y = 0$ сфера разбивается на две полусферы, одна из которых, назовем ее в е р х н е й, задается уравнением

$$y = \sqrt{R^2 - |x|^2},$$

а вторая — н и ж н я я полусфера — определяется уравнением

$$y = -\sqrt{R^2 - |x|^2}.$$

Для функции $f(x) = \sqrt{R^2 - |x|^2}$ будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{x_i}{\sqrt{R^2 - |x|^2}}.$$

Отсюда

$$|\nabla f(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{R^2 - |x|^2}}.$$

Применяя формулу (4.6) к рассматриваемому случаю, получим, что *площадь верхней полусферы* равна интегралу

$$\int\limits_{B(0,R)} \frac{R\, dx}{\sqrt{R^2 - |x|^2}}. \tag{4.7}$$

Площадь нижней полусферы, очевидно, равна тому же самому интегралу. В результате получим, что *площадь сферы* $S(0,R)$ *в пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$ равна у д в о е н н о м у интегралу (4.7).

Для вычисления интеграла (4.7) воспользуемся *формулой Кавальери — Лебега.* Пусть

$$E(t) = \left\{ x \in B(0,R) \,\middle|\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - |x|^2}} > t \right\}.$$

При $0 < t < 1$ множество $E(t)$ совпадает с шаром $B(0,R)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. При $t \geq 1$ множество $E(t)$ есть совокупность всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых выполняются неравенства $|x| < R$ и $R^2 > t^2R^2 - t^2|x|^2$. Отсюда получаем

$$R > |x| > \frac{1}{t} R\sqrt{t^2 - 1}.$$

Множество $E(t)$ для таких значений t есть множество

$$B(0,R) \setminus B\left(0, \frac{R}{t}\sqrt{t^2 - 1}\right).$$

Объем шара радиуса R *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ равен $\sigma_n R^n$, где σ_n постоянная. Величина σ_n есть *о б ъ е м единичного шара в пространстве* $\mathbb{R}^n$. Следовательно, мы получаем, что n-мерная мера Лебега множества $E(t)$ выражается следующим образом:

$$\mu_n[E(t)] = \begin{cases} \sigma_n R^n & \text{при} \quad 0 < t < 1, \\ \sigma_n R^n \left(1 - \dfrac{(t^2-1)^{n/2}}{t^n}\right) & \text{при} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что *площадь верхней полусферы* будет равна

$$\int\limits_{B(0,R)} \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - |x|^2}} = \sigma_n R^n \left(1 + \int\limits_1^\infty \left(1 - \frac{(t^2-1)^{n/2}}{t^n}\right) dt\right). \qquad (4.8)$$

В интеграле справа произведем замену переменной по формуле $t = \dfrac{1}{u}$. Переименовывая переменную интегрирования снова в t, получим

$$\int\limits_1^\infty \left(1 - \frac{(t^2-1)^{n/2}}{t^n}\right) dt = \int\limits_0^1 [1 - (1-t^2)^{n/2}] \frac{dt}{t^2}. \qquad (4.9)$$

Последний интеграл преобразуем по *формуле интегрирования по частям*. Имеем

$$\frac{dt}{t^2} = d\left(-\frac{1}{t}\right),$$

откуда получаем

$$\int_0^1 [1-(1-t^2)^{n/2}]\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}[1-(1-t^2)^{n/2}]\Big|_{t=+0}^{t=1} + n\int_0^1 (1-t^2)^{n/2-1}\,dt =$$

$$= -1 + \frac{n}{2}\int_0^1 (1-t)^{n/2-1}t^{-1/2}\,dt = -1 + \frac{n}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Применяя известную формулу, представляющую *бета*-функцию через *гамма*-функцию, получим равенство

$$\frac{n}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left[\frac{n}{2}+1\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

Подставив найденное значение для интеграла (4.9) в правую часть равенства (4.8), получим, что площадь n-мерной полусферы равна

$$\int\limits_{B(0,R)} \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-|x|^2}} = \sigma_n\frac{\Gamma\left[\frac{n}{2}+1\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]}R^n.$$

Заметим, что $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Как показано в § 8 главы 13 (см. равенство (8.20)), справедливо равенство

$$\sigma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Отсюда после очевидных преобразований получим, что площадь полусферы равна

$$\int\limits_{B(0,R)} \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-|x|^2}} = \frac{\pi^{(n/2)+1}}{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]}R^n.$$

Окончательно заключаем, что *площадь сферы* $S(0, R)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ выражается следующим соотношением:

$$\mu_n[S(0,R)] = \omega_n R^n = \frac{2\pi^{(n/2)+1}}{\Gamma\left[\dfrac{n+1}{2}\right]} R^n.$$

Умножим числитель и знаменатель этой дроби на $n+1$. Принимая во внимание, что $\dfrac{n+1}{2}\Gamma\left[\dfrac{n+1}{2}\right] = \Gamma\left[\dfrac{n+1}{2}+1\right]$, получим следующее выражение для величины ω_n — *площади единичной сферы в пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\omega_n = (n+1)\frac{\pi^{(n/2)+1}}{\Gamma\left[\dfrac{n+1}{2}+1\right]} = (n+1)\sigma_{n+1}.$$

Здесь σ_{n+1} есть *объем единичного шара в пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$.

§ 5. Внешние дифференциальные формы на многообразиях

В этом параграфе определяется понятие внешней дифференциальной формы (кратко, внешней формы или просто формы) на k-мерном подмногообразии пространства $\mathbb{R}^n$.

Говорят, что на многообразии задана внешняя дифференциальная форма степени M, если в каждой точке многообразия M в касательном пространстве $\mathrm{T}_M(x)$ задана полилинейная кососимметрическая функция степени m. Операции над внешними дифференциальными формами, определенные в параграфе 2 для случая форм на открытых множествах, здесь распространяются на общий случай внешних дифференциальных форм на произвольном k-мерном многообразии.

Вводится понятие ориентируемого k-мерного многообразия и устанавливается некоторый критерий ориентируемости многообразий.

5.1. Определение понятия внешней дифференциальной формы на k-мерном многообразии

5.1.1. Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для всякой точки $x \in M$ в касательном пространстве $\mathrm{T}_M(x)$ многообразия M определена кососимметрическая полилинейная функция $\omega(x)$ степени $m \leq k$. В этом случае будем говорить, что на многообразии M задана внешняя дифференциальная форма $\omega(x)$ степени m.

Возьмем произвольно точку p многообразия M. (Как обычно предполагается, что M принадлежит классу $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$.) Пусть $\mathrm{T}_M(x)$ есть касательное пространство многообразия M в точке p. Предположим, что в $\mathrm{T}_M(p)$ задана внешняя форма ω степени $m \leq k$, и пусть $\varphi\colon P \to M$ есть допустимая параметризация многообразия M такая, что $p \in F = \varphi(P)$. Тогда найдется значение $t_0 \in P$ такое, что $p = \varphi(t_0)$. Линейная функция $d\varphi(t)$ отображает пространство $\mathbb{R}^k$ на касательное пространство $\mathrm{T}_M(p)$ многообразия M. Для всякой внешней формы ω, определенной на пространстве $\mathrm{T}_M(p)$, может быть определена некоторая внешняя форма $\varphi(t_0)^*\omega$, которую мы будем называть представлением формы ω в параметризации φ многообразия M. Форма $\varphi(t_0)^*\omega$ определяется следующим образом. Для произвольной системы из m векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ пространства $\mathbb{R}^k$ полагаем

$$\varphi(t_0)^*\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \omega[d\varphi_t(\xi_1), d\varphi_t(\xi_2), \ldots, d\varphi_t(\xi_m)]. \tag{5.1}$$

В силу предложения 2.10 данное здесь определение формы $\varphi(t_0)^*\omega$ согласуется с определением операции перенесения внешней формы отображением класса $\mathscr{C}^r$.

■ **Лемма 5.1.** *Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$, $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ — две перекрывающиеся параметризации многообразия M, $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$ — функция перехода для данных параметризаций. Пусть точка $p \in M$, причем $p = \varphi(t) = \psi(u)$, где $t \in P$, а $u \in Q$. Предположим, что в касательном пространстве $\mathrm{T}_M(p)$ многообразия задана внешняя форма ω степени $m \leq k$, и пусть $\varphi^*\omega$ и $\psi^*\omega$ есть представления этой формы относительно данных параметризаций. Тогда имеет место равенство $\theta^*(\psi^*\omega) = \varphi^*\omega$.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Положим $F = \varphi(P)$ и $G = \psi(Q)$, и пусть $P_1 = \varphi^{-1}(G)$, $Q_1 = \psi^{-1}(F)$. Множества F и G являются открытыми относительно M. Отсюда следует, что множества P_1 и Q_1 являются открытыми относительно P и Q соответственно. В частности, множества P и Q являются регулярными, и, значит, для отображения $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$ в каждой точке $t \in P_1$ определены все частные производные и дифференциал отображения θ в этой точке.

Пусть p есть данная точка на многообразии M, $p = \varphi(t) = \psi(u)$. Зададим произвольно векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ в пространстве $\mathbb{R}^k$, $m \leq k$. На множестве P_1 определена внешняя форма $\varphi^*\omega$, на Q_1 — форма $\psi^*\omega$.

Имеем

$$\psi^*\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \omega[d\psi(\xi_1), d\psi(\xi_2), \ldots, d\psi(\xi_m)],$$

где $d\psi$ означает дифференциал отображения ψ в точке u. Согласно предложению 2.10 имеет место равенство

$$\theta^*(\psi^*\omega)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \psi^*\omega[d\theta(\xi_1), d\theta(\xi_2), \ldots, d\theta(\xi_m)].$$

Для любых векторов $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ имеет место равенство

$$\varphi^*\omega(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) = \omega[d\varphi(\eta_1), d\varphi(\eta_2), \ldots, d\varphi(\eta_m)]. \tag{5.2}$$

Значения дифференциалов здесь берутся в точке t. Если векторы $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$ таковы, что $\eta = d\theta_t(\xi)$, то

$$X = d\psi_u(\eta) = d\psi_u[d\theta_t(\xi)] = (d\psi_u \circ d\theta_t)(\xi) = d(\psi \circ \theta)_t(\xi).$$

Из определения θ следует, что $(\psi \circ \theta)(t) = \varphi(t)$ для всех $t \in P_1$. Следовательно, мы получаем, что если $\eta = d\theta_t(\xi)$, а $X = d\psi_u(\eta)$, то $X = d\varphi_u(\xi)$. (Здесь точки $t \in P_1$ и $u \in Q_1$ таковы, что $\varphi(t) = \psi(u)$, т. е. $u = \psi^{-1}[\varphi(t)] = \theta(t)$.)

Полагая в равенстве (5.2) $\eta_i = d\theta_t(\xi_i)$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$, получим, что

$$\theta^*(\psi^*\omega)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \omega[d\varphi_t(\xi_1), d\varphi_t(\xi_2), \ldots, d\varphi_t(\xi_m)].$$

Таким образом, мы получаем, что внешние дифференциальные формы $\theta^*\psi^*\omega$ и $\varphi^*\omega$ совпадают. Лемма доказана. ■

5.1.2. Пусть M есть произвольное k-мерное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^n$ класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$. Предположим, что для всякой точки $x \in M$ в касательном пространстве $\mathrm{T}_M(x)$ многообразия M определена кососимметрическая полилинейная функция $\omega(x)$ степени $m \leq k$. В этом случае будем говорить, что на многообразии M задана внешняя дифференциальная форма $\omega(x)$ степени m. Для всякой допустимой параметризации $\varphi\colon P \to M$ в этом случае в стандартной области P определена внешняя дифференциальная форма $\varphi^*\omega(t)$ — представление формы ω в данной параметризации. Будем говорить, что форма ω принадлежит классу $\mathscr{C}^s$, где $s \leq r - 1$, если форма $\varphi^*\omega(t)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^s$ для любой параметризации φ многообразия M.

Пусть $\varphi : P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ — две перекрывающиеся параметризации многообразия M, и пусть $F = \varphi(P)$, $G = \psi(P)$, $H = F \cap G$. Определим также множества $P_1 = \varphi^{-1}(H)$ и $Q_1 = \psi^{-1}(H)$. Множество P_1 является открытым относительно P, и точно так же Q_1 есть множество, открытое относительно Q. В этом случае определены диффеоморфизмы $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi \colon P_1 \to Q_1$ и $\tau = \varphi^{-1} \circ \psi \colon Q_1 \to P_1$. Диффеоморфизмы θ и τ принадлежат классу $\mathscr{C}^r$. При этом $\tau = \theta^{-1}$ и $\theta = \tau^{-1}$. Если на многообразии M задана внешняя дифференциальная форма ω степени $m \leq k$, тогда на стандартных областях P и Q определены внешние формы $\varphi^*\omega$ и $\psi^*\omega$. Лемма 5.1 позволяет заключить, что имеет место равенство $\varphi^*\omega = \theta^*(\psi^*\omega)$. Параметризации φ и ψ в формулировку леммы входят равноправным образом. Отсюда следует, что имеет место также и равенство

$$\psi^*\omega = \tau^*(\varphi^*\omega).$$

Выражения для коэффициентов внешней дифференциальной формы $\varphi^*\omega$ через коэффициенты внешней дифференциальной формы $\psi^*\omega$ содержат производные компонент отображения θ. Эти производные принадлежат классу $\mathscr{C}^{r-1}$. Отсюда ясно, что понятие внешней дифференциальной формы класса $\mathscr{C}^s$ для $s > r-1$ на многообразии M, принадлежащем классу $\mathscr{C}^r$, не имеет смысла. Это утверждение может быть представлено в виде точного математического предложения. А именно, *какова бы ни была внешняя дифференциальная форма ω степени $m \geq 1$ на многообразии M, всегда найдется допустимая параметризация φ многообразия M, в которой коэффициенты внешней формы $\varphi^*\omega$ есть функции класса $\mathscr{C}^{r-1}$ и не являются функциями класса $\mathscr{C}^r$.* (Мы оставляем данное утверждение без доказательства, поскольку оно в дальнейшем не используется.)

5.1.3. Операции над внешними дифференциальными формами, определенные ранее для случая внешних дифференциальных форм, заданных на открытых подмножествах пространств $\mathbb{R}^n$, распространяются естественным образом на внешние дифференциальные формы на многообразиях. Это распространение существенно опирается на следующее предложение.

■ ***Лемма 5.2.*** *Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что для всякой допустимой параметризации $\varphi \colon P \to M$ многообразия M определена внешняя дифференциальная форма ω_φ класса $\mathscr{C}^s$, где $s \leq r-1$, причем выполнено следующее условие. Для любых двух перекрывающихся параметризаций $\varphi \colon P \to M$ и $\psi \colon Q \to M$ для всех $t \in P$, для которых определено отображение $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$, имеет место равенство $\theta^*\omega_\psi(t) = \omega_\varphi(t)$. Тогда на многообразии M может быть определена, и притом единственным способом, внешняя дифференциальная форма ω такая, что для всякой допустимой параметризации φ многообразия M выполняется равенство $\omega_\varphi = \varphi^*\omega$.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия леммы. Выберем произвольно точку $p \in M$. Пусть $\varphi\colon P \to M$ есть допустимая параметризация многообразия M такая, что $p = \varphi(t)$. Зададим произвольно векторы $X_1, X_2, \dots, X_m$, принадлежащие касательному пространству $\mathrm{T}_M(p)$ многообразия M в точке p. Тогда $d\varphi_t$ есть взаимно однозначное линейное отображение пространства $\mathbb{R}^k$ на $\mathrm{T}_M(p)$. Пусть векторы $\xi_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, 2, \dots, m$, таковы, что $d\varphi_t(\xi_i) = X_i$. Положим

$$\omega(p; X_1, X_2, \dots, X_m) = \omega_\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m).$$

Функция $\omega(p; X_1, X_2, \dots, X_m)$, определенная таким образом, представляет собой внешнюю дифференциальную форму степени m в пространстве $\mathrm{T}_M(p)$.

Покажем, что значение этой внешней формы не зависит от выбора параметризации $\varphi\colon P \to M$ такой, что $p \in \varphi(P)$. Действительно, пусть $\psi\colon Q \to M$ есть произвольная другая параметризация многообразия M такая, что $p = \psi(u)$, где $u \in Q$. Зададим произвольно векторы $X_1, X_2, \dots, X_m$ в пространстве $\mathrm{T}_M(p)$, и пусть векторы $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}^k$ таковы, что $d\varphi_t(\xi_i) = d\psi_u(\eta_i) = X_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, m$. Покажем, что

$$\omega_\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \omega_\psi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m). \tag{5.3}$$

Действительно, при каждом $i = 1, 2, \dots, m$ имеет место равенство

$$\eta_i = (d\psi_u)^{-1}(X_i) = (d\psi_u)^{-1}[d\varphi_t(\xi_i)] = d(\psi^{-1} \circ \varphi)_t(\xi_i) = d\theta_t(\xi_i).$$

Следовательно, мы получаем

$$\omega_\psi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = \omega_\psi[d\theta_t(\xi_1), d\theta_t(\xi_2), \dots, d\theta_t(\xi_m)] =$$
$$= \theta^*\omega_\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \omega_\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m),$$

и равенство (5.3), таким образом, доказано.

Из равенства (5.3) следует, что величина $\omega(p; X_1, X_2, \dots, X_m)$ не зависит от выбора параметризации φ такой, что $p = \varphi(t)$ для некоторого t.

Точка $p \in M$ была выбрана произвольно. Мы получаем, следовательно, что на многообразии M определена некоторая внешняя дифференциальная форма ω. Из ее определения непосредственно следует, что для всякой допустимой параметризации φ многообразия M справедливо равенство $\omega_\varphi = \varphi^*\omega$. Лемма доказана. ■

5.1.4. Операции над внешними формами производятся следующим образом. Пусть α и β есть внешние формы, определенные на k-мерном многообразии M в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\varphi\colon P \to M$ есть произвольная параметризация данного многообразия. Тогда на множестве P определены формы $\varphi^*\alpha$ и $\varphi^*\beta$. Положим $\lambda_\varphi = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$.

Каждой допустимой параметризации φ многообразия M, таким образом, сопоставлена некоторая внешняя дифференциальная форма λ_φ степени, равной $\deg\alpha + \deg\beta$, заданная в области определения этой параметризации.

Пусть $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ — две перекрывающиеся параметризации многообразия M. Пусть $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$ есть функция перехода для данных параметризаций. Имеем

$$\varphi^*\alpha = \theta^*(\psi^*\alpha)$$

и, аналогично,

$$\varphi^*\beta = \theta^*(\psi^*\beta).$$

Отсюда в силу свойств операции переноса внешней формы дифференцируемым отображением следует, что

$$\lambda_\varphi = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta = \theta^*(\psi^*\alpha) \wedge \theta^*(\psi^*\beta) = \theta^*(\psi^*\alpha \wedge \psi^*\beta) = \theta^*\lambda_\psi.$$

Таким образом, для любых двух перекрывающихся параметризаций φ и ψ многообразия M выполняется равенство

$$\lambda_\varphi = \theta^*\lambda_\psi,$$

где $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$. Тем самым в силу леммы 5.2 на многообразии M определена некоторая внешняя дифференциальная форма λ.

Будем говорить, что λ есть произведение внешних форм α и β, и писать $\lambda = \alpha \wedge \beta$. Все свойства операции умножения внешних форм, доказанные ранее для форм, определенных в открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$, имеют место и в данном случае. Проверка этого, будучи тривиальной по существу, оказывается несколько громоздкой, и мы ее опускаем.

Приведем еще определение операции дифференцирования для внешних форм на многообразии. Предположим, что M есть гладкое многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 2$, и пусть α — внешняя дифференциальная форма степени $m \leq k$ на многообразии M и класса $\mathscr{C}^s$, где $1 \leq s \leq r-1$. Тогда для всякой допустимой параметризации $\varphi\colon P \to M$ определена форма $\alpha_\varphi = \varphi^*\alpha$. Эта форма принадлежит классу $\mathscr{C}^s$, и так как $s \geq 1$, то определен дифференциал $d\alpha_\varphi$. Пусть φ и ψ — две перекрывающиеся допустимые параметризации многообразия M и $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$. Имеем $\alpha_\varphi = \theta^* \alpha_\psi$. В силу свойств дифференциала, доказанных в § 2, отсюда вытекает, что $d\alpha_\varphi = \theta^* d\alpha_\psi$.

Для всякой допустимой параметризации φ, таким образом, определена некоторая дифференциальная форма $d\alpha_\varphi$ степени $m + 1$, причем выполнено условие леммы 5.2: формы, соответствующие разным параметризациям, преобразуются одна в другую согласно правилу, указанному в лемме 5.2. Согласно лемме 5.2 это означает, что на многообразии M определена некоторая форма β такая, что $\varphi^*\beta = d\varphi^*\alpha$ для всякой допустимой параметризации φ многообразия M. Форма β далее называется *дифференциалом внешней формы* α и обозначается символом $d\alpha$. Свойства операции дифференцирования, установленные в § 2 для внешних форм, определенных на подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$, очевидным образом распространяются на рассматриваемый здесь общий случай.

5.2. Понятия ориентации и ориентируемого многообразия

5.2.1. Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ — две перекрывающиеся параметризации многообразия M. Пусть $F = \varphi(P)$ и $G = \psi(Q)$. Множества F и G являются открытыми относительно многообразия M. Пусть $P_1 = \varphi^{-1}(F \cap G)$ и $Q_1 = \psi^{-1}(F \cap G)$. Множества P_1 и Q_1 являются открытыми относительно P и Q соответственно и, следовательно, представляют собой регулярные множества в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Пусть $\theta = \varphi^{-1} \circ \psi$ и $\tau = \psi^{-1} \circ \varphi$, $\tau = \theta^{-1}$. Отображения τ и θ есть диффеоморфизмы. При этом τ отображает множество P_1 на Q_1, а θ отображает Q_1 на P_1.

В каждой точке $t \in P_1$ определена величина $J(t, \tau)$ — *якобиан отображения* τ *в точке* t. Если $u = \tau(t)$, то имеет место равенство $J(t,\tau)J(u,\theta) = 1$. Отсюда, в частности, следует, что величины $J(t, \tau)$ и $J(u, \theta)$ имеют один и тот же знак.

Параметризации φ и ψ называются *когерентными*, если якобиан функции $\tau = \psi^{-1} \circ \varphi$ имеет один и тот же знак во всех точках, где он определен, т. е. для всех $t \in P_1$. В этом случае в силу равенства $J(t,\tau)J(u,\theta) = 1$, где $\theta = \tau^{-1}$, также и якобиан функции θ имеет один и тот же знак во всех точках множества Q_1.

Предположим, что перекрывающиеся параметризации $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ когерентны. Тогда мы будем говорить, что они *одинаково ориентированы* или, иначе, *имеют одну и ту же ориентацию*, если якобиан отображения $\tau = \psi^{-1} \circ \varphi$ всюду положителен. Если же якобиан отображения τ всюду отрицателен, то будем говорить, что параметризации φ и ψ ориентированы противоположно.

Будем говорить, что k-мерное многообразие M *ориентируемо*, если любые две его параметризации когерентны и множество всех параметризаций многообразия M можно разбить на два класса так, что любые две перекрывающиеся параметризации, принадлежащие одному классу, *ориентированы одинаково*, а параметризации, принадлежащие разным классам, *ориентированы противоположно*.

Говорят, что задана определенная ориентация многообразия или, иначе, что многообразие ориентировано, если все параметризации одного класса названы *правыми*, а параметризациям другого класса присвоено наименование *левых* параметризаций.

5.2.2. Приведем некоторый критерий ориентируемости многообразия. Сначала проделаем некоторые предварительные построения.

Введем здесь некоторые понятия, связанные с k-реперами, т. е. упорядоченными системами из k векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть P есть k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$ и

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}, \quad \mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$$

— два невырожденных репера в плоскости P. Тогда векторы Y_i могут быть представлены как линейные комбинации векторов X_j, т. е. имеют место равенства

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} X_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{5.4}$$

Пусть A есть матрица $(a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,k}$. Тогда равенства (5.4) сокращенно записываются в виде $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$. Будем говорить, что реперы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ ориентированы одинаково, если $\det A > 0$. Если определитель матрицы A отрицателен, то говорят, что данные k-реперы ориентированы противоположно.

Пусть $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ есть невырожденные k-реперы в k-мерном подпространстве P. Тогда $\mathbf{Z} = B\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ и, значит, $\mathbf{Z} = BA\mathbf{X}$. Имеем $\det BA = \det A \det B$. Предположим, что k-реперы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ ориентированы противоположно, т. е. $\det A < 0$. Отсюда следует, что если $\det B > 0$, т. е. k-репер $\mathbf{Z}$ ориентирован одинаково с k-репером $\mathbf{Y}$, то он ориентирован противоположно реперу $\mathbf{X}$. Если же $\det B < 0$, тогда k-репер $\mathbf{Z}$ ориентирован одинаково с k-репером $\mathbf{X}$.

Множество всех невырожденных k-реперов, лежащих в плоскости P, таким образом, распадается на два класса. При этом реперы одного класса ориентированы одинаково с $\mathbf{X}$, а реперы другого класса ориентированы одинаково с $\mathbf{Y}$. Легко проверяется, что два репера, принадлежащие одному классу, ориентированы одинаково, а реперы, принадлежащие разным классам, ориентированы противоположно.

Говорят, что задана определенная ориентация k-мерного подпространства P, если некоторый невырожденный k-репер $\mathbf{X}$, лежащий в этой плоскости, назван *правым.* В этом случае всякий k-репер, ориентированный одинаково с $\mathbf{X}$, также называется *правым.* Реперы, ориентированные противоположно $\mathbf{X}$, называются *левыми.*

Пусть M есть k-мерное ориентируемое многообразие класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. В каждой точке $x \in M$ определено подпространство $\mathrm{T}_M(x)$. Предположим, что задана ориентация многообразия M.

Покажем, что в этом случае для всякой точки $x \in M$ может быть однозначно определена некоторая ориентация касательного пространства $\mathrm{T}_M(x)$ многообразия M в этой точке.

Пусть $\varphi\colon P \to M$ есть произвольная параметризация многообразия M и $F = \varphi(P)$. Пусть $x = \varphi(t)$ и $p_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Векторы p_i линейно независимы и принадлежат k-мерному подпространству $\mathrm{T}_M(x)$ пространства $\mathbb{R}^n$. В плоскости $\mathrm{T}_M(x_0)$, таким образом, определен некоторый k-репер $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Будем говорить, что $\mathbf{p}$ есть *координатный репер параметризации φ в точке $x \in M$.*

Условимся считать, что k-репер $\mathbf{p}$ является правым или, иначе, *положительно ориентированным*, если параметризация φ многообразия M правая. Если же параметризация φ левая, то k-репер $\mathbf{p}$ будем считать левым (*отрицательно ориентированным*) k-репером в плоскости $\mathrm{T}_M(x)$.

Пусть $\varphi\colon P \to M$ и $\psi\colon Q \to M$ — две перекрывающиеся параметризации многообразия M. Пусть $x = \varphi(t_0) = \psi(u_0)$. Положим $q_i = \dfrac{\partial\psi}{\partial u_i}(u_0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тем самым в точке x определен координатный репер $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ параметризации ψ.

Параметризации φ и ψ перекрывающиеся. Пусть $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$ есть функция перехода для параметризаций φ и ψ. Тогда $\varphi(t) = \psi[\theta(t)]$ в некоторой окрестности точки $t_0 \in P$. Дифференцируя обе части равенства $\varphi(t) = \psi[\theta(t)]$ по t_i и полагая $t = t_0$, мы получим, что при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняется равенство

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial\theta_j}{\partial t_i}(t_0). \tag{5.5}$$

Пусть D есть матрица $\left(\frac{\partial\theta_j}{\partial t_i}(t_0)\right)_{i,j=1,2,\ldots,k}$. Тогда равенства (5.5) сокращенно могут быть записаны следующим образом: $\mathbf{p} = D\mathbf{q}$. Определитель матрицы D, очевидно, равен якобиану отображения θ — функции перехода для данных параметризаций. Если параметризации φ и ψ ориентированы одинаково, то $J(t,\theta) = \det D > 0$, и, значит, в этом случае также и k-реперы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ ориентированы одинаково. Если же $J(t,\theta) = \det D < 0$, то параметризации φ и ψ ориентированы противоположно. В этом случае k-реперы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ ориентированы противоположно.

Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что многообразие M ориентируемо и задана определенная его ориентация. Символом $\varepsilon(x)$ будем обозначать внешнюю дифференциальную форму степени k, определенную на многообразии M следующим условием.

Пусть $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ есть положительно ориентированный ортонормальный k-репер в пространстве $\mathrm{T}_M(x)$. Тогда выполняется равенство

$$\varepsilon(x)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k) = 1. \tag{5.6}$$

Этим условием дифференциальная форма $\varepsilon(x)$ на многообразии M определена однозначно. Действительно, пусть $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ — произвольный k-репер в плоскости $\mathrm{T}_M(x)$. Тогда имеем $\mathbf{X} = A\mathbf{u}$ и, значит, как вытекает из леммы 1.4 в § 1, имеет место равенство

$$\varepsilon(x; X_1, X_2, \ldots, X_k) = \det A.$$

Если репер $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ является правым ортонормальным репером, то матрица A является ортогональной и определитель ее равен единице. Следовательно, мы получаем, что для всякого правого ортонормального репера $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ в плоскости $\mathrm{T}_M(x)$ имеет место равенство

$$\varepsilon(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = 1.$$

Внешнюю дифференциальную форму $\varepsilon(x)$ на многообразии M будем называть *единичной дифференциальной формой степени k на многообразии M.*

Пусть $\varphi\colon P \to M$ есть произвольная параметризация многообразия M. Найдем выражение для формы $\varphi^*\varepsilon(t)$. Степень этой формы равна k, и, следовательно, ее каноническое представление имеет вид

$$\varphi^*\varepsilon(t) = \mu(t)dt^1dt^2\ldots dt^k.$$

Требуется найти функцию $\mu(t)$. Имеем

$$\mu(t) = \varphi^*\varepsilon(t; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k),$$

где $\mathbf{p}_i = d\varphi(t; \mathbf{e}_i) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)$. Пусть $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ есть правый ортонормальный репер в плоскости $\mathrm{T}_M(x)$, где $x = \varphi(t)$. Тогда имеем

$$p_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\mathbf{u}_j.$$

Отсюда получаем

$$\langle p_i, p_s\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\lambda_{sj}. \tag{5.7}$$

Пусть $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=1,2,\dots,k}$. Тогда имеем $\mathbf{p} = \Lambda\mathbf{u}$ и, значит, $\mu(t) = \varepsilon(x, p_1, p_2, \dots, p_k) = \det\Lambda$. Для вектор-функции φ определена матрица $G_\varphi(t) = (g_{ij}(t))_{i,j=1,2,\dots,k}$, где $g_{ij}(t) = \left\langle \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t), \dfrac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t)\right\rangle$.

Равенство (5.7) в матричной форме может быть записано следующим образом:

$$G_\varphi(t) = \Lambda\Lambda^*,$$

где $*$ означает операцию транспонирования матрицы. В результате получаем

$$g_\varphi(t) = \det G_\varphi(t) = \det\Lambda \det\Lambda^* = (\det\Lambda)^2.$$

Отсюда $|\mu(t)| = \sqrt{g_\varphi(t)}$.

Имеем $\det\Lambda > 0$, если параметризация φ правая, и $\det\Lambda < 0$, если параметризация φ левая. Окончательно получаем

$$\varphi^*\varepsilon(t) = \varkappa(\varphi)\sqrt{g_\varphi(t)}\, dt^1 dt^2 \dots dt^k, \tag{5.8}$$

где $\varkappa(\varphi) = 1$, если φ есть правая параметризация, и $\varkappa(\varphi) = -1$, если эта параметризация левая. Из доказанного, в частности, следует, что внешняя форма $\varepsilon(x)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^{r-1}$.

■ ***Теорема 5.1*** (критерий ориентируемости дифференцируемого многообразия). *Пусть M есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$. Для того чтобы многообразие M было ориентируемо, необходимо и достаточно, чтобы на многообразии M существовала внешняя дифференциальная форма $\omega(x)$ степени, равной размерности k многообразия M, принадлежащая классу $\mathscr{C}^{r-1}$ и такая, что во всякой точке $x \in M$ внешняя дифференциальная форма $\omega(x)$ отлична от нуля.*

Доказательство. Установим необходимость условия теоремы. Предположим, что многообразие M ориентируемо и задана определенная его ориентация. Тогда внешняя форма $\varepsilon(x)$ — единичная внешняя форма степени k на многообразии M, соответствующая данной ориентации — непрерывна и отлична от нуля во всех точках многообразия. Форма $\omega(x) \equiv \varepsilon(x)$ удовлетворяет всем требуемым условиям, и тем самым необходимость условия теоремы установлена.

Докажем достаточность условия. Предположим, что на k-мерном многообразии M может быть определена внешняя дифференциальная форма ω степени k, принадлежащая классу $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$, и такая, что в каждой точке $x \in M$ внешняя дифференциальная форма ω отлична от нуля. Пусть $\varphi\colon P \to M$ есть произвольная допустимая параметризация многообразия M. Тогда в k-мерном прямоугольнике P определена внешняя дифференциальная форма $\varphi^*\omega$. *Степень* этой внешней формы равна k, и, значит, она имеет вид

$$\lambda(t)dt^1dt^2\dots dt^k.$$

Коэффициент λ представляет собой непрерывную функцию. При этом $\lambda(t) \neq 0$ для всех $t \in P$. Отсюда вытекает, что величина $\lambda(t)$ имеет один и тот же знак во всех точках прямоугольника P. Будем считать параметризацию φ правой, если $\lambda(t) > 0$ для всех $t \in P$, и левой в случае, если $\lambda(t) < 0$ для всех $t \in P$.

Предоставляем читателю проверку того, что любые две перекрывающиеся параметризации многообразия когерентны. При этом якобиан функции перехода от одной параметризации к другой положителен, если эти параметризации являются одноименными, т. е. если они либо обе правые, либо обе левые. Если же одна из двух перекрывающихся параметризаций правая, а другая левая, то якобиан функции перехода отрицателен.

Таким образом, достаточность условия теоремы установлена. Теорема доказана. ■

Замечание. Предположим, что на k-мерном многообразии M задана непрерывная внешняя форма $\omega(x)$, отличная от нуля во всех точках M. Тогда внешняя форма ω, как показано при доказательстве теоремы 5.1, позволяет указать некоторую конкретную ориентацию многообразия. А именно, ориентацию, в которой параметризация φ является правой, если коэффициент λ в представлении формы $\varphi^*\omega(t) = \lambda(t)dt^1dt^2\dots dt^k$ всюду положителен. Если же этот коэффициент всюду отрицателен, то параметризация φ является левой. Будем говорить, что данная ориентация *определяется внешней дифференциальной формой* ω.

5.3. Индуцированная ориентация края многообразия

5.3.1. Если многообразие с краем в пространстве $\mathbb{R}^n$ ориентируемо, то и его край, как будет показано здесь, также является ориентируемым многообразием. При этом если задана некоторая ориентация многообразия, то по ней может быть однозначно определена ориентация края многообразия.

Предварительно проделаем вспомогательные рассуждения. Зададим в пространстве $\mathbb{R}^n$ k-мерное многообразие M, $k \geq 2$, принадлежащее классу $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$. Предположим, что край ∂M многообразия M не является пустым множеством. Тогда согласно теореме 3.2 множество ∂M является $(k-1)$-мерным многообразием класса $\mathscr{C}^r$. При этом ∂M не имеет краевых точек.

В каждой точке $x \in \partial M$ определена контингенция $\mathrm{Cnt}_M(p)$ многообразия M. Она, как показано в § 3, представляет собой некоторое k-мерное полупространство. *Касательное пространство* $\mathrm{T}_{\partial M}(x)$ многообразия ∂M есть $(k-1)$-мерное пространство, содержащееся в множестве $\mathrm{Cnt}_M(p)$ и являющееся *краем* этого множества.

Пусть $\mathbf{n}(x)$ есть единичный вектор, лежащий в касательном пространстве $\mathrm{T}_M(x)$ многообразия M в точке x, не принадлежащий множеству $\mathrm{Cnt}_M(x)$ и ортогональный плоскости $\mathrm{T}_{\partial M}(x)$, т. е. такой, что для всякого вектора $X \in \mathrm{T}_{\partial M}(x)$ имеет место равенство $\langle \mathbf{n}(x), X\rangle = 0$. Вектор $\mathbf{n}(x)$ будем называть *вектором внешней нормали края многообразия M в точке x.*

■ **Лемма 5.4.** *Пусть M есть многообразие с краем, и для $x \in \partial M$ пусть $\mathbf{n}(x)$ есть вектор внешней нормали в точке $x \in \partial M$. Вектор-функция $\mathbf{n}(x)$ непрерывна на множестве ∂M.*

Доказательство. Возьмем произвольно точку $x_0 \in \partial M$. Пусть $\varphi\colon P \to M$ есть параметризация многообразия M такая, что $x \in F = \varphi(P)$. Множество F является открытым относительно M, и, значит, $\partial F = F \cap \partial M$ есть множество, открытое относительно ∂M. Как показано в § 3, в рассматриваемом случае стандартная k-мерная область P является k-мерным полуинтервалом, $P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \ldots \cdots \times (a_n, b_n)$.

Лемма будет доказана, если мы установим, что ограничение функции $\mathbf{n}$ на множестве ∂F непрерывно. Если $x \in \partial F$, то $x = \varphi(t)$, где $t = (b_1, t_2, \ldots, t_k)$. Векторы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)$, где $i = 2, \ldots, k$, принадлежат касательному пространству $\mathrm{T}_{\partial M}(x)$ многообразия ∂M. Всякий вектор $X \in \mathrm{T}_{\partial M}(x)$ является линейной комбинацией векторов $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t)$, $i = 2, \ldots, k$. Сначала построим вектор $\mathbf{u}(x)$, полагая

$$\mathbf{u}(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} - \lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial t_2} - \cdots - \lambda_k\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}.$$

Коэффициенты $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ определим из условия: вектор $\mathbf{u}(x)$ ортогонален каждому из векторов $\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t)$, где $i = 2, \ldots, k$. Это приводит к следующей системе линейных уравнений для коэффициентов λ_i:

$$g_{1i}(t) = \lambda_2 g_{2i}(t) + \cdots + \lambda_k g_{ki}(t), \quad i = 2, \ldots, k. \tag{5.9}$$

Здесь мы используем обозначения, введенные в § 3:

$$g_{ij}(t) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\rangle.$$

Квадратичная форма

$$G_\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} g_{ij}(t) \xi_i \xi_j$$

является положительно определенной. Отсюда вытекает, что частичная квадратичная форма

$$\sum_{i=2}^{k} \sum_{j=2}^{k} g_{ij}(t) \xi_i \xi_j$$

также положительно определенная. Это позволяет заключить, что определитель системы уравнений (5.9) отличен от нуля.

Решая систему уравнений (5.9), мы получим, что коэффициенты $\lambda_2(t), \ldots, \lambda_k(t)$ выражаются через компоненты векторов $\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(t)$ посредством некоторых рациональных функций. Отсюда вытекает их непрерывность, а следовательно, и непрерывность вектор-функции $\mathbf{u}(x)$ на множестве ∂F.

В каждой точке $t \in \partial P$ вектор $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}$ не принадлежит полуплоскости $\Pi_M(x)$. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{u}(x)$ также не принадлежит $\Pi_M(x)$. Величина $l(x) = |\mathbf{u}(x)|$ является функцией, определенной и непрерывной на множестве ∂F. Имеем, очевидно, равенство

$$\mathbf{n}(x) = \frac{1}{l(x)} \mathbf{u}(x)$$

для всех $x \in \partial F$.

Из доказанного следует, что всякая точка $x \in \partial M$ имеет в множестве M окрестность такую, что ограничение функции $\mathbf{n}$ на этой окрестности непрерывно. Тем самым установлено, что вектор-функция $\mathbf{n}$ непрерывна на множестве ∂M. Лемма доказана. ■

5.3.2. Основным результатом этого раздела является следующая теорема об ориентируемости края многообразия.

■ ***Теорема 5.2*** (об ориентируемости края многообразия). *Пусть M — ориентируемое многообразие класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$, в пространстве $\mathbb{R}^n$, причем его размерность $k \geq 2$. Тогда если край многообразия M не пуст, то он представляет собой ориентируемое многообразие размерности $k-1$.*

Доказательство. Пусть M есть ориентируемое многообразие класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$, и пусть $\Gamma = \partial M$ есть край данного многообразия.

Как показано в § 3, множество Γ является $(k-1)$-мерным многообразием класса $\mathscr{C}^r$.

Пусть $\varepsilon(x)$ есть единичная внешняя дифференциальная форма степени k на многообразии M. Возьмем произвольно точку $x \in \Gamma$. В точке x определен вектор внешней нормали $\mathbf{n}(x)$ края многообразия. Определим на многообразии Γ внешнюю дифференциальную форму θ степени $k-1$, полагая для произвольных касательных векторов $X_1, \ldots, X_{k-1}$ многообразия Γ значение этой формы в точке x равным величине $\varepsilon(x; \mathbf{n}(x), X_1, \ldots, X_{k-1})$.

Покажем, что построенная внешняя дифференциальная форма θ принадлежит классу $\mathscr{C}^{r-1}$ и отлична от нуля в каждой точке $x \in \Gamma$.

Действительно, пусть $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ есть ортонормальная система векторов в плоскости $\mathrm{T}_\Gamma(x)$ такая, что $\{\mathbf{n}(x), \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ есть правый ортонормальный репер в пространстве $\mathrm{T}_M(x)$. Тогда $\theta(\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k) = \varepsilon(x; \mathbf{n}(x), \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k) = 1$.

Пусть $\varphi \colon P \to M$ есть параметризация многообразия M такая, что точка $x \in \Gamma$ принадлежит множеству $F = \varphi(P)$. Предположим, что P есть прямоугольник

$$P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k).$$

Тогда $x = \varphi(t)$, где $x \in \partial P$. Пусть $\delta\varphi \colon \partial_0 P \to \Gamma$ есть соответствующая параметризация края многообразия M. Имеем $\delta\varphi(t_2, \ldots, t_k) = \varphi(b_1, t_2, \ldots, t_k)$. Для внешней дифференциальной формы $\theta(x)$ на многообразии Γ имеем

$$\{\delta\varphi\}^* \theta(t) = \mu(t) dt^2 \ldots dt^k.$$

Коэффициент $\mu(t)$ при этом определяется из равенства

$$\mu(t) = \{\delta\varphi\}^*\theta(t; \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k) =$$
$$= \theta\Big(t; \frac{\partial \delta\varphi}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial \delta\varphi}{\partial t_k}\Big) = \varepsilon\Big\{\varphi(t), \mathbf{n}[\varphi(t)], \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t)\Big\}.$$

Отсюда следует, что функция $\mu(t)$ непрерывна. Тем самым установлено, что внешняя форма θ на многообразии M непрерывна в окрестности любой точки $x \in \Gamma$.

Таким образом, мы получаем, что для многообразия Γ выполняется *критерий ориентируемости дифференцируемого многообразия*, установленный теоремой 5.1, и, следовательно, многообразие $\Gamma = \partial M$ ориентируемо. Теорема доказана. ■

Замечание. Пусть M есть ориентированное k-мерное многообразие с краем, $\varepsilon(x)$ — единичная форма степени k на этом многообразии. При доказательстве теоремы 5.2 установлено, что внешняя дифференциальная форма $\theta(x)$ на многообразии ∂M, определенная равенством $\theta(x; X_1, \ldots, X_{k-1}) = \varepsilon(x; \mathbf{n}(x), X_1, \ldots, X_{k-1})$, непрерывна и всюду отлична от нуля. Она задает некоторую ориентацию многообразия ∂M, о которой мы будем говорить, что она индуцирована ориентацией многообразия M. Пусть векторы $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ в плоскости $\mathrm{T}_{\partial M}(x)$ образуют ортонормальный репер. Тогда векторы $\mathbf{n}(x), \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ также образуют некоторый ортонормальный репер. Если этот репер является правым, то $\theta(x; \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k) = \varepsilon(x; \mathbf{n}, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k) = 1$. Таким образом, форма $\theta(x)$ определяет на многообразии ∂M ориентацию, в которой ортонормальный репер $\{\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ является правым на многообразии M в том и только в том случае, если $\{\mathbf{n}, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ есть правый репер в касательном пространстве $\mathrm{T}_M(x)$ многообразия M. Форма θ, как следует из сказанного, является единичной формой степени $k - 1 = \dim \partial M$ на многообразии ∂M.

В заключение сделаем замечание, которое понадобится нам далее.

Пусть x_0 — краевая точка k-мерного многообразия M, $\varphi\colon P \to M$ есть параметризация этого многообразия такая, что $x_0 \in \varphi(P)$. Тогда P есть k-мерный полуинтервал $P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$. В этом случае, как показано в п. 3.3.1, определена параметризация $\delta\varphi\colon \partial_0 P \to \partial M$ края многообразия M. Мы будем говорить, что $\delta\varphi$ есть параметризация края, порожденная параметризацией φ окрестности краевой точки многообразия M.

Покажем, что если многообразие M ориентируемо и задана определенная его ориентация, край многообразия M наделен индуцированной ориентацией, то параметризация $\delta\varphi$ окрестности точки x_0 в множестве

∂M будет одноименной с параметризацией φ, т. е. если φ есть правая параметризация M, то $\delta\varphi$ есть правая параметризация ∂M. Точно так же если φ — левая параметризация ∂M, то $\delta\varphi$ есть левая параметризация ∂M.

Действительно, пусть $P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$. Тогда $\delta\varphi(t_2, \ldots, t_k) = \varphi(b_1, t_2, \ldots, t_k)$. Пусть $\varepsilon_{\partial M}$ есть единичная форма $(k-1)$-мерного многообразия ∂M. Чтобы выяснить, является параметризация $\delta\varphi$ левой или правой, следует найти знак выражения:

$$\varepsilon_{\partial M}\left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial\delta\varphi}{\partial t_k}\right) = \varepsilon_M\left(\mathbf{n}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}\right). \tag{5.10}$$

Заметим, что, по построению, имеет место равенство

$$\mathbf{n}(x) = \alpha(t)\mathbf{u}(x) = \alpha(t)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t_1} - \lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial t_2} - \cdots - \lambda_k\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}\right].$$

Множитель $\alpha(t)$ здесь положителен. Мы получаем, что выражение (5.10) имеет тот же знак, что и величина

$$\varepsilon_M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1} - \lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial t_2} - \cdots - \lambda_k\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}\right).$$

Функция ε_M линейна по каждому из своих аргументов. Кососимметрическая функция обращается в нуль, если какие-либо два ее аргумента равны между собой. Преобразуя последнее выражение в соответствии с этими свойствами функции ε_M, получим

$$\varepsilon_{\partial M}\left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial\delta\varphi}{\partial t_k}\right) = \alpha(t)\varepsilon_M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}\right).$$

Так как $\alpha(t)$ положительно, то $\varepsilon_{\partial M}$ и ε_M имеют один и тот же знак. Это позволяет заключить, что если φ есть правая параметризация M, то $\delta\varphi$ есть правая параметризация ∂M, а если φ — левая параметризация, то и $\delta\varphi$ является левой параметризацией.

5.4. Пример неориентируемого многообразия

Сначала приведем некоторые построения наглядного характера. В пространстве $\mathbb{R}^3$ построим некоторую поверхность.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ ленту в виде плоского прямоугольника $ABA'B'$ (см. рис. 1). При этом будем предполагать, что сторона AA' значительно длиннее стороны AB.

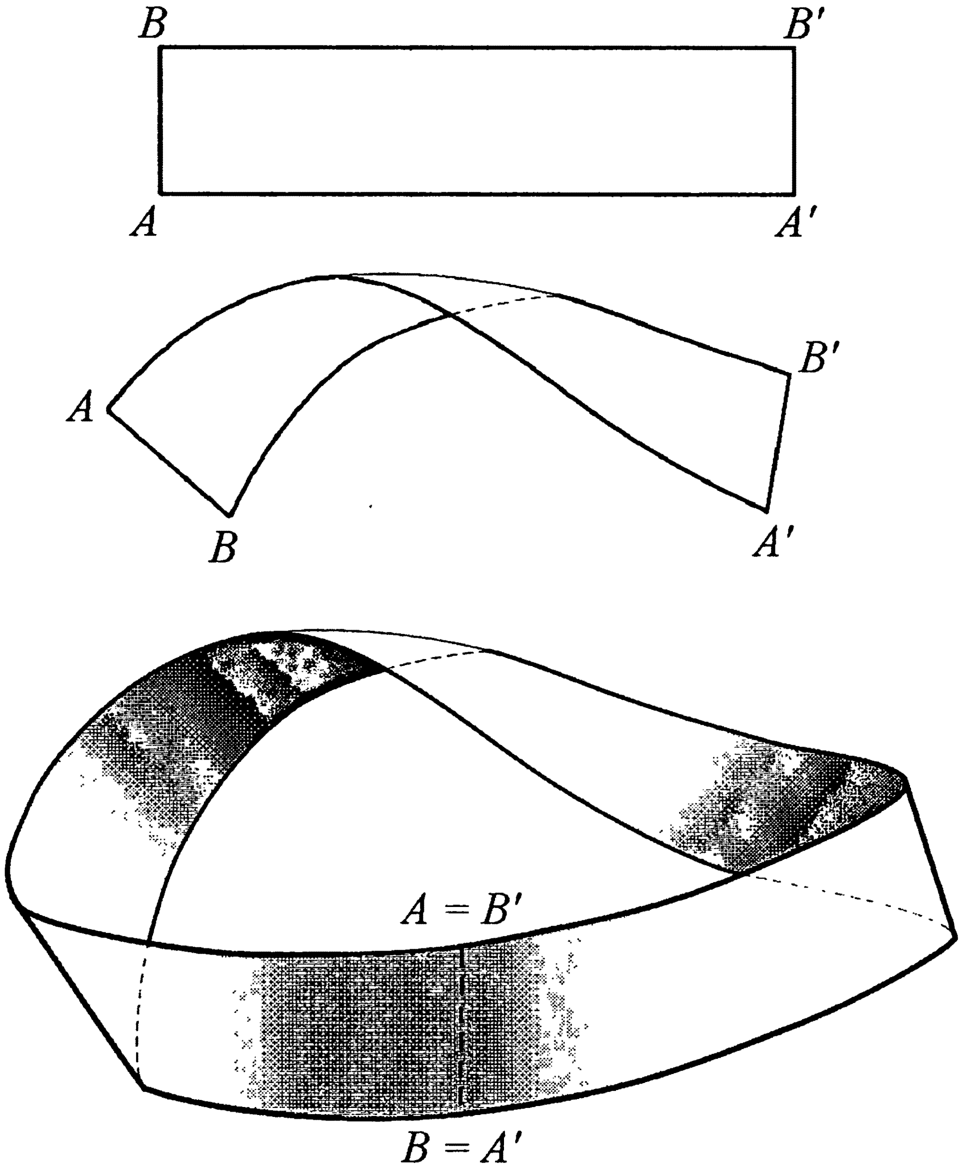

Рис. 1

Данную ленту сначала изогнем в виде кольца, а затем склеим по отрезкам AB и $A'B'$, перевернув отрезок AB так, чтобы точка A при этом совместилась с точкой B', а точка B с точкой A'. Для этого, очевидно, придется ленту перекрутить, как это показано на рис. 1. Склеивание может быть осуществлено так, что в результате получится *гладкое многообразие.* Это многообразие называется *листом Мёбиуса.* Неориентируемость построенного многообразия мы установим с помощью *критерия ориентируемости*, который дается теоремой 5.2.

Покажем, как описать приведенное выше геометрическое построение мебиусова листа аналитическими средствами. В плоскости $x_3 = 0$ зададим окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Пусть $z(u) = (\cos u, \sin u, 0)$, $0 \le u \le 2\pi$, есть параметризация этой окружности. Обозначим через l ось $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть P_u есть плоскость, проходящая через прямую l и точку $z(u)$. В плоскости P_u зададим прямолинейный отрезок с концами в точках $\xi(u)$ и $\eta(u)$

такой, что длина его $|\eta(u)-\xi(u)| = 2h = \mathrm{const} < 2$ и серединой отрезка является точка $z(u)$, т. е. $z(u) = \dfrac{\xi(u)+\eta(u)}{2}$.

Предположим, что когда u монотонно изменяется в пределах от 0 до 2π, отрезок $[\xi(u)\eta(u)]$ с постоянной скоростью вращается в плоскости P_u. Это означает, что угол, образуемый вектором $\eta(u) - z(u)$ с вектором $z(u)$, равен λu, где λ постоянная. Имеем

$$\eta(u) - z(u) = (h\cos\lambda u)z(u) + (h\sin\lambda u)\mathbf{e}_3 = \\ = (h\cos\lambda u\cos u, h\cos\lambda u\sin u, h\sin\lambda u).$$

Произвольная точка отрезка $[\xi(u)\eta(u)]$ может быть представлена следующим образом:

$$x(t,u) = z(u) + t[\eta(u) - z(u)] = \\ = ([1 + t\cos\lambda u]\cos u, [1 + t\cos\lambda u]\sin u, t\sin\lambda u), \qquad (5.11)$$

где $-h \le t \le h$. Когда параметр t монотонно меняется в пределах от 0 до 2π, отрезок $[\xi(u)\eta(u)]$ зачерчивает в пространстве $\mathbb{R}^3$ двумерную поверхность, которая, как мы покажем, является двумерным многообразием класса $\mathscr{C}^\infty$.

Если $\lambda = 0$, то мы будем иметь $\xi(2\pi) = \xi(0)$, а $\eta(2\pi) = \eta(0)$. В этом случае рассматриваемая поверхность представляет собой круговое кольцо в плоскости $x_3 = 0$, ограниченное двумя окружностями, радиусы которых равны $1-h$ и $1+h$. Это кольцо, очевидно, представляет собой ориентируемое дифференцируемое двумерное многообразие.

Рассмотрим случай, когда $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Получим, что $\eta(2\pi) = \xi(0)$, а $\xi(2\pi) = \eta(0)$. В этом случае один из концов полосы, зачерчиваемой отрезком $[\xi(u)\eta(u)]$ при обходе окружности, поворачивается на $180°$. Обозначим через L множество, которое зачерчивается отрезком $[\xi(u)\eta(u)]$, когда u пробегает промежуток $[0, 2\pi]$. Отметим, что при данном выборе λ имеет место равенство $x(t, u + 2\pi) = x(-t, u)$.

Покажем, сначала, что множество L является двумерным многообразием. Сначала приведем одно общее замечание. Именно, справедливо следующее утверждение.

♦ ***Предложение 5.1.*** *Пусть даны метрические пространства M и N и компактное множество A в пространстве M. Тогда если непрерывное отображение $f\colon A \to N$ взаимно однозначно, то обратное отображение f^{-1} непрерывно.*

Действительно, пусть множество $A \subset M$ компактно и $f\colon A \to N$ есть непрерывное взаимно однозначное отображение. Положим $B = f(A)$, и пусть $g = f^{-1}$. Зададим произвольно замкнутое множество E в пространстве M. Так как $g(B) = A$, то

$$g^{-1}(E) = g^{-1}(E \cap A) = f(E \cap A).$$

Множество $E \cap A$ компактно, и, значит, множество $f(E \cap A) = g^{-1}(E)$ компактно и потому замкнуто. Таким образом, полный прообраз любого замкнутого множества пространства M относительно отображения g является замкнутым множеством. Отсюда следует, что g непрерывно (см. главу 9, следствие теоремы 1.18). Предложение доказано. ♦

Рассмотрим произвольный промежуток $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ такой, что $\beta - \alpha < 2\pi$. Полуоткрытый прямоугольник $P = (-h, h] \times (\alpha, \beta)$ содержится в замкнутом прямоугольнике $\overline{P} = [-h, h] \times [\alpha, \beta]$. Отображение $x\colon (t, u) \in \overline{P} \mapsto x(t, u)$ взаимно однозначно и непрерывно. Так как множество $\overline{P}$ компактно, то в силу предложения 5.1 обратное отображение непрерывно. Отображение x взаимно однозначно и непрерывно на прямоугольнике P. Обратное к нему отображение является ограничением непрерывного отображения на множестве $x(P)$ и, следовательно, непрерывно.

В каждой точке (t, u) векторы $\dfrac{\partial x}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ линейно независимы. Положим $P' = [-h, h] \times (\alpha, \beta)$. Множество $x(P')$ представляет собой пересечение множества L с множеством $V_{\alpha,\beta}$ всех точек $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, для которых $x_1 = r\cos u$, $x_2 = r\sin u$, где $r > 0$, и $\alpha < u < \beta$. Множество $V_{\alpha,\beta}$ открытое как образ множества

$$(0, \infty) \times (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$$

относительно отображения $(r, u, x_3) \mapsto (r\cos u, r\sin u, x_3)$, которое, очевидно, является диффеоморфизмом. Отсюда вытекает, что $F' = x(P')$ есть открытое относительно L множество.

Множество $F = x(P)$ получается из F' исключением дуги R, являющейся *образом* относительно отображения x стороны прямоугольника $\overline{P}$, состоящей из всех точек $(t, u) \in \overline{P}$, для которых $t = -h$. *Дуга* R представляет собой компактное и, следовательно, замкнутое множество.

Окончательно получаем, что $F = x(P)$ есть множество, открытое относительно L.

Пусть X есть произвольная точка L. Тогда $X = x(t_0, u_0)$ для некоторых $t_0 \in [-h, h]$ и $u \in \mathbb{R}$. Предположим, что $-h < t_0 < h$. В этом случае полагаем $\alpha = u_0 - \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = u_0 + \dfrac{\pi}{2}$. Мы видим, что

$$X \in F = x(P),$$

где $P = (-h, h] \times (\alpha, \beta)$.

Таким образом, в данном случае точка X имеет в множестве L окрестность, которая является *элементарным двумерным многообразием класса* $\mathscr{C}^\infty$.

При $t_0 = h$ α и β определим, как и в предыдущем случае. Получим, что $X \in F = x(P)$.

Рассмотрим случай $t_0 = -h$. Положим, как и в предыдущих двух случаях, $\alpha = u_0 - \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = u_0 + \dfrac{\pi}{2}$. Пусть $Q = [-h, h) \times (\alpha, \beta)$. Отображение $x\colon (t, u) \in Q \mapsto x(t, u) \in \mathbb{R}^3$, где $x(t, u)$ определяется равенствами (5.11), есть диффеоморфизм, и множество $F = x(Q)$ является окрестностью данной точки X в множестве L. Справедливость этого утверждения устанавливается рассуждениями, аналогичными тем, которые были выполнены ранее.

Прямоугольник Q имеет тот недостаток, что он содержит в себе точки левой стороны, параллельной оси Ou, а не правой, как это требуется определением параметризации дифференцируемого многообразия. Данный недостаток легко исправляется заменой t на $-t$ и соответственно функции $x(t, u)$ функцией $x(-t, u)$.

Итак, мы показали, что L действительно есть дифференцируемое многообразие класса $\mathscr{C}^\infty$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Очевидно, это есть *многообразие с краем.*

Докажем, что многообразие L неориентируемо.

Предположим, напротив, что L есть ориентируемое многообразие. Пусть $\varepsilon(x)$ — единичная внешняя форма второй степени на многообразии L. Рассмотрим замкнутую кривую $x(0, u)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, на многообразии L. Пусть

$$\mathbf{h}_1(u) = \frac{\partial x}{\partial u}(0, u) = (-\sin u, \cos u, 0),$$

$$\mathbf{h}_2(u) = \frac{\partial x}{\partial t}(0, u) = (\cos \lambda u \cos u, \cos \lambda u \sin u, \sin \lambda u).$$

Легко проверяется, что векторы $\mathbf{h}_1(u)$ и $\mathbf{h}_2(u)$ единичные и ортогональны между собой.

Ориентацию многообразия L будем считать выбранной из условия, что $\{\mathbf{h}_1(0), \mathbf{h}_2(0)\}$ есть правый репер в касательной плоскости многообразия L в точке $x(0,0)$. Функция $\eta(u) \equiv \varepsilon(x(0,u), \mathbf{h}_1(u), \mathbf{h}_2(u))$ непрерывна. Так как ε есть единичная внешняя формы степени 2 на многообразии L, то $\eta(u) = \varepsilon(x(0,u), \mathbf{h}_1(u), \mathbf{h}_2(u)) = \pm 1$ для всех $u \in [0, 2\pi]$.

Так как репер $\{\mathbf{h}_1(0), \mathbf{h}_2(0)\}$ правый, то

$$\eta(0) = \varepsilon(x(0,0), \mathbf{h}_1(0), \mathbf{h}_2(0)) = 1$$

и, значит, $\eta(u) = 1$ для всех u. В частности, должно выполняться равенство $\eta(2\pi) = \varepsilon(x(0,2\pi), \mathbf{h}_1(2\pi), \mathbf{h}_2(2\pi)) = 1$. Напомним, что λ предполагается равным $\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $\mathbf{h}_1(2\pi) = \mathbf{h}_1(0)$, а $\mathbf{h}_2(2\pi) = -\mathbf{h}_2(0)$, и, значит, $\eta(2\pi) = \varepsilon(x(0,2\pi), \mathbf{h}_1(2\pi), \mathbf{h}_2(2\pi)) = \varepsilon(x(0,0), \mathbf{h}_1(0), -\mathbf{h}_2(0)) = -1$. Таким образом, одновременно выполняются равенства $\eta(2\pi) = 1$ и $\eta(2\pi) = -1$.

Итак, допущение, что многообразие L ориентируемо, приводит к противоречию. Следовательно, многообразие L не является ориентируемым.

§ 6. Обобщенная интегральная теорема Стокса

В этом параграфе, как и в предыдущем, также рассматриваются внешние дифференциальные формы (кратко, внешние формы или просто формы) на k-мерном подмногообразии пространства $\mathbb{R}^n$.

Определяется понятие интеграла внешней дифференциальной формы степени k по k-мерному многообразию класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$.

Основной результат этого параграфа — обобщенная интегральная теорема Стокса. Согласно этой теореме интеграл от внешней дифференциальной формы степени $k-1$ по краю k-мерного многообразия равен интегралу от дифференциала внешней формы по самому многообразию. Из обобщенной интегральной теоремы Стокса получаем известные интегральные формулы Остроградского и Гаусса.

Доказательство интегральной теоремы Стокса опирается на некоторый вспомогательный результат — лемму о разбиении единицы. Эта лемма имеет и определенный самостоятельный интерес.

В качестве приложения интегральной теоремы Стокса дается доказательство классической теоремы Брауэра о неподвижной точке в пространстве $\mathbb{R}^n$. В главе 8 данного курса эта теорема была доказана для случая $n = 2$. Геометрическая часть доказательства теоремы Брауэра для произвольного n проводится так же, как и в случае $n = 2$. Аналитическая часть в общем случае основана на применении обобщенной теоремы Стокса.

6.1. Лемма о разбиении единицы

Предварительно введем некоторую вспомогательную функцию $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, полагая

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{t}\right) & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Так как $\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right) \to 0$ при t, стремящемся к нулю справа, то функция ψ непрерывна в точке 0, а значит, и для всех $x \in \mathbb{R}$. Функция ψ принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$ на каждом из лучей $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. При этом производная порядка r функции ψ тождественно равна нулю в промежутке $(-\infty, 0)$.

В промежутке $(0, \infty)$ производная $\psi^{(r)}(t)$ является функцией вида

$$P_r\left(\frac{1}{t}\right)\exp\left(-\frac{1}{t}\right),$$

где P_r есть некоторый полином. Действительно, имеем

$$\psi'(t) = \frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{1}{t}\right).$$

Предположим, что для некоторого $r \in \mathbb{N}$ доказано, что для всех $t > 0$ выполняется равенство

$$\psi^{(r)}(t) = P_r\left(\frac{1}{t}\right)\exp\left(-\frac{1}{t}\right).$$

Дифференцируя это равенство, получим, что в интервале $(0, \infty)$ выполняется соотношение

$$\psi^{(r+1)}(t) = \frac{1}{t^2}\left[P_r\left(\frac{1}{t}\right) - P_r'\left(\frac{1}{t}\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{t}\right) = P_{r+1}\left(\frac{1}{t}\right)\exp\left(-\frac{1}{t}\right),$$

где $P_{r+1}(x) = x^2\big[P_r(x) - P_r'(x)\big]$. Если P_r есть полином степени $2r$ (для $r = 1$ это условие выполнено), то P_{r+1} также есть полином, причем степень P_{r+1} равна $2r + 2 = 2(r+1)$.

Для всякого целого $N > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t^N}\exp\left(-\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^N}{e^x} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t\to+0}\psi^{(r)}(t) = \lim_{t\to+0}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)P_r\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Так как $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t) = 0 = \psi(0)$, то функция ψ непрерывна в точке 0, а значит, и для всех $t \in \mathbb{R}$.

Предположим, что для некоторого $r \geq 0$ доказано, что производная $\theta = \psi^{(r)}$ определена и непрерывна для всех $t \in \mathbb{R}$. (Под производной нулевого порядка функции ψ понимается сама функция ψ.) Тогда функция θ дифференцируема в каждой точке $t \neq 0$, при этом $\lim\limits_{t\to 0}\theta'(t) = 0$. Применяя *правило Лопиталя* к соотношению

$$\frac{\theta(t)-\theta(0)}{t} = \frac{\theta(t)}{t},$$

получим, что функция θ дифференцируема также и в точке $t = 0$. При этом производная функции θ непрерывна в $\mathbb{R}^n$. Этим доказано, что функция ψ принадлежит классу $\mathscr{C}^{r+1}(\mathbb{R})$. По индукции из сказанного следует, что $\psi \in \mathscr{C}^r(\mathbb{R})$ при всяком $r \in \mathbb{N}$, т. е. $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Положим $\eta(t) = \varphi(1-t)\varphi(4-t)$. Функция η неотрицательна, принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$ и обращается в нуль вне интервала $(1, 4)$. Определим по ней новую функцию $\tau(t)$, полагая

$$\tau(t) = \gamma\int_t^\infty \eta(t)\,dt, \tag{6.1}$$

где γ постоянная, значение которой определяется из условия $\tau(0) = 1$. Очевидно, функция τ принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$. При этом $\tau(t) = 1$ при $t \leq 1$ и $\tau(t) = 0$ при $t \geq 4$.

Функция τ является убывающей, так как ее производная равна $-\eta(t) \leq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, $0 \leq \tau(t) \leq 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Напомним, некоторые определения, приведенные в § 6 главы 13.

Пусть дана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что функция f сосредоточена на множестве $A \subset E$, если $f(x) = 0$ при всяком $x \notin A$. Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если существует компактное множество $A \subset U$ такое, что функция f сосредоточена на множестве A, т. е. такое, что $f(x) = 0$ для всякого $x \notin A$.

■ ***Лемма 6.1*** (лемма о разбиении единицы). *Пусть U есть произвольное открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ есть семейство открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что $U = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} U_\xi$. Тогда найдется последовательность $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ неотрицательных функций класса $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что выполнены следующие условия:*

1) *для каждой из функций φ_ν существует $\xi \in \Xi$ такое, что φ_ν сосредоточена в множестве U_ξ;*

2) *для всякого компактного множества $A \subset U$ существует номер $N(A)$ такой, что сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{N(A)} \psi_\nu(t) = 1$ для всех t, принадлежащих некоторому открытому множеству $V \supset A$;*

3) *для всякого $x \in U$ выполняется равенство $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) = 1$.*

Замечание. Будем говорить, что последовательность функций $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ образует *разбиение единицы*, подчиненное семейству открытых множеств $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

Доказательство леммы. Пусть S есть множество всех точек $x \in U$, у которых все координаты есть рациональные числа. Множество S является подмножеством счетного множества

$$\mathbb{Q}^n = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{n \text{ множителей}}.$$

Шар $B(x, r)$ назовем *допустимым*, если $x \in S$, r есть рациональное число и найдется $\xi \in \Xi$ такое, что замкнутый шар $\overline{B}(x, 2r)$ содержится в множестве U_ξ. Множество всех допустимых шаров, очевидно, допускает взаимно однозначное отображение в $\mathbb{Q}^{n+1}$ и, следовательно, не более чем счетно.

Покажем, что всякая точка $x \in U$ принадлежит по крайней мере одному из допустимых шаров. Действительно, пусть

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U.$$

Так как объединение множеств U_ξ совпадает с U, то $x \in U_\xi$ для некоторого $\xi \in \Xi$. Множество U_ξ открытое, и, значит, найдется $\delta > 0$ такое, что шар $B(x, \delta) \subset U_\xi$. Пусть t_i есть рациональное число такое, что

$$|x_i - t_i| < \frac{\delta}{3\sqrt{n}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для точки $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ имеем неравенство $|x - t| < \delta/3$. Пусть r есть рациональное число такое, что $|x - t| < r < \delta/3$. Шар $B(t, r)$

содержит точку x. Для всякого $y \in \overline{B}(t, 2r)$ имеем: $|y-x| \leq |y-t| + |t-x| < 2\delta/3 + \delta/3 = \delta$ и, значит, $\overline{B}(t, 2r) \subset B(x, \delta) \subset U_\xi$.

Мы получаем, что если r удовлетворяет неравенствам $|x-t| < r < \delta/3$ и является рациональным числом, то открытый шар $B(t, r)$ содержит данную точку $x \in U$, а замкнутый шар $\overline{B}(t, 2r)$ содержится в одном из множеств U_ξ. Шар $B(t, r)$, следовательно, является *допустимым.*

Множество всех допустимых шаров не более чем счетно. Это множество бесконечно и, следовательно, счетно.

Занумеруем произвольным образом множество всех допустимых шаров. Пусть B_ν есть шар с номером ν. Пусть x_ν есть центр шара B_ν, r_ν — его радиус.

Обозначим символом $\widehat{B}_\nu$ замкнутый шар $\overline{B}(x_\nu, 2r_\nu)$, концентричный шару B_ν и такой, что его радиус вдвое больше радиуса шара B_ν. Пусть $\theta_\nu(x) = \tau\left(\dfrac{|x-x_\nu|^2}{r_\nu^2}\right)$, где τ есть функция в R, определенная равенством (6.1). Тогда $\theta_\nu(x) = 1$ при $\dfrac{|x-x_\nu|^2}{r_\nu^2} \leq 1$ и $\theta_\nu(x) = 0$, если $\dfrac{|x-x_\nu|^2}{r_\nu^2} \geq 4$, т. е. при $|x-x_\nu| \geq 2r_\nu$. Мы получаем, таким образом, что $\theta_\nu(x) = 1$ при $x \in B_\nu$ и $\theta_\nu(x) = 0$, если $x \notin \widehat{B}_\nu$. Для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства $0 \leq \theta_\nu(x) \leq 1$.

Положим $\lambda_1(x) = 1 - \theta_1(x)$. При $\nu > 1$ полагаем

$$\lambda_\nu(x) = \prod_{k=1}^{\nu}[1-\theta_k(x)] = \lambda_{\nu-1}(x)(1-\theta_\nu(x)). \tag{6.2}$$

При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ определим следующие множества:

$$V_\nu = \bigcup_{k=1}^{\nu} B_\nu, \quad F_\nu = \bigcup_{k=1}^{\nu} \widehat{B}_\nu.$$

Каждое из множеств V_ν является открытым как объединение некоторого множества открытых шаров, а каждое множество F_ν компактно как объединение конечного числа замкнутых шаров. При этом имеют место включения

$$V_\nu \subset F_\nu \subset U.$$

Всякая точка $x \in U$, как показано выше, принадлежит некоторому допустимому шару, т. е. одному из шаров B_ν. Отсюда следует, что

$$U = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} V_\nu.$$

Функция $1 - \theta_\nu(x)$ обращается в нуль при $x \in B_\nu$ и равна единице при $x \notin \widehat{B}_\nu$. Для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$0 \leq 1 - \theta_\nu(x) \leq 1.$$

Отсюда следует, что функция λ_ν неотрицательна, обращается в нуль на множестве V_ν и равна единице в н е множества F_ν.

Искомую последовательность функций $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ мы получим, полагая $\varphi_1(x) = 1 - \lambda_1(x) = \theta_1(x)$, а при $\nu > 1$ — задавая функцию φ_ν равенством

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_{\nu-1}(x) - \lambda_\nu(x).$$

В силу (6.2) при каждом $\nu > 1$ верно равенство

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_{\nu-1}(x)\theta_\nu(x).$$

Отсюда следует, что функция φ_ν неотрицательна и принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$.

Заметим, что в данном случае функция φ_ν обращается в нуль на множестве $V_{\nu-1}$, так как функция $\lambda_{\nu-1}$ обращается в нуль на этом множестве.

Функция θ_ν обращается в нуль в н е шара $\widehat{B}_\nu$, и, значит, также и функция φ_ν обращается в нуль вне этого шара. Согласно определению допустимого шара найдется $\xi \in \Xi$ такое, что $\widehat{B}_\nu \subset U_\xi$.

Таким образом, мы получаем, что для любого номера $\nu \in \mathbb{N}$ функция φ_ν неотрицательна и финитна, принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ и сосредоточена в одном из множеств $(U_\xi)_{\xi \in \Xi}$ данного открытого покрытия множества U. Это означает, что для построенной последовательности функций $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ выполняется условие 1) формулировки леммы.

Обозначим через Φ_N сумму первых N функций φ_ν. Имеем

$$\Phi_N = \sum_{\mu=1}^{N} \varphi_\mu = (1 - \lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2) + \cdots + (\lambda_{N-1} - \lambda_N) = 1 - \lambda_N.$$

Величина $\Phi_N(x)$ обращается в нуль при $x \notin F_N$ и равна единице при $x \in V_N$.

Пусть $A \subset U$ есть компактное множество. Каждая точка $x \in A$ принадлежит по крайней мере одному из открытых шаров B_ν. Значит, по *теореме Бореля* (глава 9, теорема 2.4) найдется конечное семейство допустимых шаров $(B_{\nu_1}, B_{\nu_2}, \ldots, B_{\nu_m})$, объединение которых содержит множество A.

Пусть $N = N(A)$ есть наибольший из номеров $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$. Тогда, очевидно, $A \subset V_N \subset F_N \subset U$. Отсюда следует, что для всех $x \in V_N$ имеет место равенство

$$\sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu(x) = \Phi_N(x) = 1.$$

Мы получаем, следовательно, что последовательность функций $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathrm{N}}$ удовлетворяет также и условию 2) формулировки леммы.

Заметим, что при $\nu > N$ функция φ_ν обращается в нуль на множестве V_N. Следовательно, для всех $x \in V_N$ имеет место равенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) = 1.$$

Применяя этот результат к тому частному случаю, когда множество A состоит из единственной точки, получаем, что условие 3) формулировки леммы для построенной последовательности функций $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathrm{N}}$ выполняется. Лемма полностью доказана. ■

6.2. Определение интеграла по произвольному k-мерному многообразию

Пусть N есть k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что многообразие M ориентируемо. Зададим произвольно ориентацию многообразия M, и пусть ε есть единичная внешняя форма степени k на многообразии M, соответствующая данной ориентации многообразия.

Предположим, что на многообразии M задана внешняя дифференциальная форма ω, степень которой также равна числу $k = \dim M$. Тогда для всякой точки $x \in M$ определено некоторое число $f(x)$ такое, что $\omega(x) = f(x)\varepsilon(x)$. Мы будем говорить, что внешняя форма $\omega(x)$ интегрируема по многообразию M, если функция f интегрируема по многообразию M относительно поверхностной меры на M. Интегралом внешней формы $\omega(x)$ по многообразию M называется число, равное интегралу от функции $f(x)$ по многообразию M относительно площади. Интеграл от формы $\omega(x)$ по многообразию M обозначается символом $\int\limits_M \omega(x)$. В соответствии с определением имеем

$$\int\limits_M \omega(x) = \int\limits_M f(x)\, d\mu_k(x).$$

Заметим, что если ориентацию многообразия M изменить на противоположную, т. е. переименовать все правые параметризации в левые, а левые в правые, то внешняя форма ε при этом умножается на -1. Отсюда следует, что при этом также и функция $f(x)$ заменяется на $-f(x)$, и в результате мы получаем, что интеграл внешней формы ω по многообразию M при изменении ориентации многообразия на противоположную умножается на -1.

Внешняя дифференциальная форма $\omega(x)$, определенная на k-мерном многообразии M класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$, называется *финитной*, если существует компактное множество $A \subset M$ такое, что $\omega(x) = 0$ в каждой точке $x \notin A$.

Далее используется следующий простой факт.

♦ **Предложение 6.1.** *Пусть M есть ориентированное k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 1$, и $\varphi\colon P \to M$ есть допустимая параметризация многообразия M. Предположим, что на M определена внешняя дифференциальная форма ω степени k, причем существует компактное множество $A \subset F = \varphi(P)$ такое, что $\omega(x)$ обращается в нуль вне этого множества. Тогда*

$$\int\limits_M \omega(x) = \varkappa(\varphi) \int\limits_P \varphi^*\omega(t)\,dt,$$

где $\varkappa(\varphi) = 1$, если параметризация φ правая, и $\varkappa(\varphi) = -1$, если параметризация φ левая.

Действительно, имеем $\omega(x) = f(x)\varepsilon(x)$. Отсюда

$$\varphi^*\omega(t) = f[\varphi(t)]\varphi^*\varepsilon(t) = f[\varphi(t)]\sqrt{g(t)}\,dt^1 dt^2 \dots dt^k.$$

Согласно определению

$$\int\limits_M \omega(x) = \int\limits_M f(x)\,d\mu_k(x) = \int\limits_P f[\varphi(t)]\sqrt{g(t)}\,dt^1 dt^2 \dots dt^k. \tag{6.3}$$

В силу равенства (5.8) справедливо соотношение

$$\varphi^*\varepsilon(t) = \varkappa(\varphi)\sqrt{g_\varphi(t)}\,dt^1 dt^2 \dots dt^k,$$

и, значит, подынтегральное выражение правой части равенства (6.3) может быть представлено в виде

$$f[\varphi(t)]\sqrt{g_\varphi(t)}\,dt^1 dt^2 \dots dt^k = \varkappa(\varphi)\varphi^*\omega(t).$$

Отсюда получаем требуемый результат. Предложение доказано. ♦

6.3. Обобщенная интегральная теорема Стокса

Сначала докажем некоторые предложения, являющиеся частными случаями общей теоремы. Доказательство общей теоремы основано на сведении к рассматриваемым ниже частным случаям в леммах 6.2 и 6.3. Формулировка и доказательство общего утверждения будут даны в конце этого раздела.

Пусть $\omega(t)$ есть внешняя форма степени $k-1$ в пространстве $\mathbb{R}^k$. Предположим, что внешняя форма ω принадлежит классу $\mathscr{C}^1$. Тогда определена форма $d\omega(t)$ степени k — дифференциал формы $\omega(t)$.

Пусть

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega_i(t) dt_{\varepsilon_i}$$

есть каноническое представление внешней формы $\omega(t)$, где dt_{ε_i} есть базисная внешняя форма $dt_1 \ldots \hat{dt_i} \ldots dt_k$, знак $\hat{}$ над каким-либо множителем означает, что этот множитель пропускается.

Имеет место равенство

$$d\omega(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_i}(t) dt^1 dt^2 \ldots dt^k. \tag{6.4}$$

Действительно, согласно определению имеем

$$d\omega(t) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_j}(t) dt^j \wedge dt_{\varepsilon_i} \qquad (6.5).$$

При $j \neq i$ произведение $dt^j \wedge dt_{\varepsilon_i} = dt^j \wedge dt^1 \wedge dt^{i-1} \wedge dt^{i+1} \wedge \ldots$ $\cdots \wedge dt^k$ содержит два одинаковых множителя и, следовательно, обращается в нуль. При $j = i$ мы получаем произведение

$$dt^i \wedge dt^1 \wedge dt^{i-1} \wedge dt^{i+1} \wedge \cdots \wedge dt^k,$$

которое преобразуется в $dt^1 dt^2 \ldots dt^k$ выполнением $i-1$ транспозиций. При каждой транспозиции перед произведением появляется множитель -1, и в результате будет

$$dt^i \wedge dt^1 \wedge dt^{i-1} \wedge dt^{i+1} \wedge \cdots \wedge dt^k = (-1)^{i-1} dt^1 dt^2 \ldots dt^k.$$

Окончательно получим

$$d\omega(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_i}(t) dt^1 dt^2 \ldots dt^k.$$

Таким образом, равенство (6.4) доказано.

Используя выражение для дифференциала внешней формы степени $k-1$ в пространстве $\mathbb{R}^k$, которое дается формулой (6.4), мы можем теперь доказать следующие леммы 6.2 и 6.3.

■ **Лемма 6.2.** *Пусть даны k-мерный интервал $P = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$ и внешняя форма ω степени $k-1$ класса $\mathscr{C}^1$, определенная и финитная на интервале P. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_P d\omega(x) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\omega(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega_i(t) dt_{\varepsilon_i}$ есть каноническое представление внешней формы ω. По условию, существует компактное множество $A \subset P$ такое, что $\omega_i(t) = 0$, если $t \notin A$. Прямоугольник P рассматриваем как ориентированное k-мерное многообразие, ориентация которого определена соглашением: тождественное отображение $\mathrm{Id}_k : t \in P \mapsto t$ есть правая параметризация P.

Имеем $d\omega(t) = \lambda(t) dt^1 dt^2 \ldots dt^k$. Из условий леммы следует, что $\lambda(t) = 0$, если t лежит вне множества A.

Форма $\varepsilon(t)$ в данном случае есть внешняя дифференциальная форма $dt^1 dt^2 \ldots dt^k$. Применяя общее определение к данному случаю, получим равенство

$$\int\limits_P d\omega(x) = \int\limits_P \lambda(t)\, dt^1 dt^2 \ldots dt^k.$$

В силу равенства (6.4) справедливо соотношение

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_i}(t).$$

Лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$\int\limits_P \frac{\partial \omega_i}{\partial t_i}(t)\, dt^1 dt^2 \ldots dt^k = 0$$

при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$. Применяя *теорему Фубини* (глава 13, § 7), получим

$$\int\limits_P \frac{\partial \omega_i}{\partial t_i}(t)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_k = \int\limits_{P_i} \left(\int\limits_{a_i}^{b_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_i}(t) dt_i \right) dt^1 \ldots \hat{dt^i} \ldots dt^k.$$

(Здесь P_i есть открытый прямоугольник в $\mathbb{R}^{k-1}$.) При фиксированных значениях переменных t_j, где $j \neq i$, функция ω_i обращается в нуль вне некоторого интервала $(a_i+\delta, b_i-\delta)$, и, значит,

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} \frac{\partial\omega_i}{\partial t_i}(t)\,dt_i = \int\limits_{a_i+\delta}^{b_i-\delta} \frac{\partial\omega_i}{\partial t_i}(t)\,dt_i = \omega_i(\ldots, b_i-\delta, \ldots) - \omega_i(\ldots, a_i+\delta, \ldots).$$

Имеем $\omega_i(\ldots, b_i-\delta, \ldots) = 0$ и $\omega_i(\ldots, a_i+\delta, \ldots) = 0$. Отсюда следует, что при каждом $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняется равенство

$$\int\limits_P \frac{\partial\omega_i}{\partial t_i}(t)\,dt^1 dt^2 \ldots dt^k = 0.$$

Лемма доказана. ■

■ ***Лемма 6.3.*** *Пусть даны k-мерный полуинтервал $P = (a_1, b_1] \times \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$ и внешняя форма ω степени $k-1$ класса $\mathscr{C}^1$, определенная и финитная на полуинтервале P. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_P d\omega(x) = \int\limits_{\partial P} \omega(x).$$

Доказательство. Пусть форма ω удовлетворяет условиям леммы. Прямоугольник P мы рассматриваем как ориентированное k-мерное многообразие с краем. При этом ориентацию P определим посредством соглашения, что тождественное отображение $\mathrm{Id}_k : t \in P \mapsto t \in P$ есть правая параметризация P. Край многообразия P есть множество всех точек $t = (b_1, t_2, \ldots, t_k)$, где $a_i < t_i < b_i$ при каждом $i > 1$.

Применяя формулу (6.4), получим, что и в этом случае

$$\int\limits_P d\omega(t) = \sum_{i=1}^{k} \left(\int\limits_P \frac{\partial\omega_i}{\partial t_i}(t)\,dt^1 dt^2 \ldots dt^k \right). \tag{6.6}$$

Применяя к интегралу

$$I_1 = \int\limits_P \frac{\partial\omega_1}{\partial t_1}(t)\,dt^1 dt^2 \ldots dt^k$$

теорему Фубини, найдем, что

$$I_1 = \int\limits_{\partial_0 P} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{\partial\omega_1}{\partial t^1}(t)\,dt_1 \right) dt^2 \ldots dt^k.$$

Функция $\omega_1(t)$ согласно условию леммы обращается в нуль вне некоторого компактного множества $A \subset P$. Отсюда следует, что при фиксированных значениях переменных $t_2, \ldots, t_k$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\omega_1(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ обращается в нуль при $t_1 < a_1 + \delta$. Отсюда следует, что в этом случае

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial t_1}(t)\, dt_1 = \int\limits_{a_1+\delta}^{b_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial t_1}(t)\, dt_1 =$$
$$= \omega_1(b_1, t_2, \ldots, t_k) - \omega_1(a_1 + \delta, t_2, \ldots, t_k) = \omega_1(b_1, t_2, \ldots, t_k),$$

ибо $\omega_1(a_1 + \delta, t_2, \ldots, t_k) = 0$. В результате получим

$$I_1 = \int\limits_{\partial_0 P} \omega_1(b_1, t_2, \ldots, t_k)\, dt^2 \ldots dt^k.$$

Имеем отображение $j\colon (t_2, \ldots, t_k) \in \partial_0 P \mapsto (b_1, t_2, \ldots, dt_k)$. Нетрудно видеть, что $j^*\omega$ есть форма $\omega_1(b_1, t_2, \ldots, t_k) dt^2 \ldots dt^k$. Следовательно, величина I_1 равна интегралу формы ω по краю ∂P прямоугольника P.

Рассмотрим те слагаемые в сумме (6.6), которые соответствуют значениям $i > 1$. Пусть

$$I_i = \int\limits_P \frac{\partial \omega_i}{\partial t_i}(t)\, dt^1 dt^2 \ldots dt^k.$$

Рассуждениями, аналогичными проделанным при доказательстве леммы 6.2, устанавливается, что при $i > 1$ величина $I_i = 0$ обращается в нуль. В результате получаем

$$\int\limits_P d\omega(t) = \int\limits_{\partial P} \omega(t).$$

Лемма доказана. ■

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат этого раздела.

■ **Теорема 6.1** (обобщенная интегральная теорема Стокса). *Пусть M есть ориентируемое k-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$, $r \geq 2$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что задана некоторая ориентация M и на многообразии M определена внешняя дифференциальная форма ω класса $\mathscr{C}^1$ и степени $k-1$, финитная относительно многообразия M. Тогда если M не имеет краевых точек, то*

$$\int\limits_M d\omega(x) = 0.$$

Если же край многообразия M не пуст, то имеет место равенство

$$\int\limits_M d\omega(x) = \int\limits_{\partial M} \omega(x). \tag{6.7}$$

При этом предполагается, что край ∂M многообразия наделен ориентацией, которая индуцирована ориентацией многообразия M.

З а м е ч а н и е. Формула (6.7) носит наименование *обобщенной интегральной формулы Стокса.*

Доказательство теоремы. Пусть $A \subset M$ есть компактное множество такое, что $\omega(x) = 0$ при $x \notin A$.

Рассмотрим сначала частный случай, когда множество A является малым в том смысле, что можно указать параметризацию $\varphi\colon P \to M$ многообразия M, для которой множество A содержится в элементарном k-мерном многообразии $F = \varphi(P)$.

В силу предложения 6.1 имеем

$$\int\limits_M d\omega(x) = \varkappa(\varphi) \int\limits_P \varphi^* d\omega(t) = \varkappa(\varphi) \int\limits_P d\varphi^*\omega(t). \tag{6.8}$$

По условию, $A \subset P$ и $\omega(x) = 0$ при $x \notin A$. Отображение φ^{-1} непрерывно, и, значит, множество $E = \varphi^{-1}(A) \subset P$ компактно. При $t \notin E$, очевидно, $\varphi^*\omega(t) = 0$.

Предположим, что F не содержит краевых точек многообразия M. Так как $A \subset F$ и $\omega(x) = 0$ при $x \notin A$, то форма $\omega(x)$ тождественно равна нулю на многообразии ∂M и, следовательно,

$$\int\limits_{\partial M} \omega(x) = 0.$$

Покажем, что в данном случае равен нулю также и интеграл:

$$\int\limits_M d\omega(x) = 0.$$

Действительно, в этом случае k-мерная стандартная область P является k-мерным интервалом, а внешняя дифференциальная форма $\varphi^*\omega(t)$ обращается в нуль вне компактного множества $E \subset P$. На основании леммы 6.2 отсюда следует, что

$$\int\limits_P d\varphi^*\omega(t) = 0.$$

В силу равенства (6.8) отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае

$$\int\limits_M d\omega(x) = 0 = \int\limits_{\partial M} \omega(x)$$

и, значит, в этом случае *обобщенная интегральная формула Стокса* верна.

Предположим, что F содержит краевые точки многообразия M. В этом случае область определения параметризации φ есть k-мерный полуинтервал, $P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k)$. Пусть $\delta\varphi\colon \partial_0 P \to \partial M$ есть параметризация элементарного k-мерного многообразия $F \cap \partial M$, порожденная параметризацией φ. Если φ есть правая параметризация M, то параметризация $\delta\varphi$ также является правой, а если φ — левая параметризация M, то $\delta\varphi$ есть левая параметризация ∂M. Согласно предложению 6.1 имеем

$$\int\limits_{\partial M} \omega(x) = \varkappa(\delta\varphi) \int\limits_{\partial P} \{\delta\varphi\}^*\omega(t), \qquad \int\limits_M d\omega(x) = \varkappa(\varphi) \int\limits_P \varphi^* d\omega(t). \tag{6.9}$$

Так как $\varphi^* d\omega = d\varphi^*\omega$, то в силу леммы 6.3 имеем

$$\int\limits_P \varphi^* d\omega(t) = \int\limits_{\partial P} \varphi^*\omega.$$

Заметим, что $\delta\varphi = \varphi \circ j$, где j есть отображение $(t_2, \ldots t_k) \in \partial_0 P \mapsto$ $\mapsto (b_1, t_2, \ldots, t_k)$ и, значит,

$$\int\limits_{\partial P} \varphi^*\omega = \int\limits_{\partial_0 P} j^*\varphi^*\omega = \int\limits_{\partial_0 P} \{\delta\varphi\}^*\omega.$$

В результате получаем, что

$$\int\limits_P \varphi^* \, d\omega(t) = \int\limits_{\partial_0 P} \{\delta\varphi\}^* \omega.$$

В силу равенств (6.9) из доказанного вытекает равенство

$$\int\limits_M d\omega(x) = \int\limits_{\partial M} \omega(x).$$

Таким образом, справедливость обобщенной интегральной формулы Стокса установлена для случая внешних дифференциальных форм, обращающихся в нуль вне некоторого малого множества.

Рассмотрим общий случай. Пусть $A \subset M$ есть компактное множество такое, что форма $\omega(x)$ обращается в нуль вне множества A. Для всякой точки $x \in M$ существует параметризация $\varphi\colon P \to M$ многообразия M такая, что $x \in F = \varphi(P)$. Множество F является открытым относительно M, и, значит, найдется открытое множество U_φ в пространстве $\mathbb{R}^n$ такое, что $F = U_\varphi \cap M$. Таким образом, мы получаем некоторое семейство открытых множеств U_φ, покрывающее многообразие M.

По *теореме о разбиении единицы* найдется последовательность $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ неотрицательных финитных функций класса $\mathscr{C}^\infty$, каждая из которых сосредоточена в одном из множеств U_φ, причем для всякого компактного множества $A \subset M$ существует номер $N = N(A)$ такой, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu(x) = 1 \tag{6.10}$$

для всех x, принадлежащих некоторому открытому множеству $V \supset A$.

Пусть $A \subset M$ есть компактное множество такое, что $\omega(x) = 0$ при $x \notin A$. Пусть $N = N(A)$ есть номер, отвечающий данному компактному множеству A в указанном выше смысле. Тогда для всех $x \in A$ выполняется равенство (6.10).

Пусть $\varphi_\nu\colon P_\nu \to M$ есть параметризация многообразия M такая, что функция α_ν сосредоточена на множестве $U_\nu = U_{\varphi_\nu}$. Положим $\omega_\nu(x) = \alpha_\nu(x)\omega(x)$. Тогда для всех $x \in M$ справедливо равенство

$$\omega(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \omega_\nu(x). \tag{6.11}$$

Для $x \notin A$ равенство верно в силу того, что $\omega(x) = 0$ для такого x и, значит, также и $\omega_\nu(x) = 0$ для всех $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Если же $x \in A$, то равенство (6.11) верно в силу того, что для таких x сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu(x) = 1$.

Имеем

$$d\omega(x) = \sum_{\nu=1}^{N} d\omega_\nu(x),$$

откуда следует, что

$$\int\limits_M d\omega(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_M d\omega_\nu(x). \tag{6.12}$$

Имеем $\omega_\nu(x) = \alpha_\nu(x)\omega(x)$. Функция α_ν обращается в нуль вне некоторого компактного множества $E_\nu \subset U_\nu$, $\omega(x) = 0$ при $x \notin A$, где A компактно. Отсюда следует, что форма $\omega_\nu(x)$ обращается в нуль, если $x \notin A_\nu = E_\nu \cap A$. Множество A_ν компактно и содержится в k-ячейке F_ν.

Для каждой из дифференциальных форм ω_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, в силу установленного в первой части доказательства теоремы имеет место равенство

$$\int\limits_M d\omega_\nu(x) = \int\limits_{\partial M} \omega_\nu(x).$$

Суммируя данные равенства почленно по $\nu = 1, 2, \ldots, N$, в силу равенств (6.11) и (6.12) получаем искомое равенство (6.7):

$$\int\limits_M d\omega(x) = \int\limits_{\partial M} \omega(x).$$

Теорема доказана. ■

6.4. Интегральные формулы Остроградского и Гаусса

6.4.1. Рассмотрим специально случай, когда размерность многообразия в пространстве $\mathbb{R}^n$ с краем равна размерности n, т. е. размерности пространства $\mathbb{R}^n$.

Всякое n-мерное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^n$ ориентируемо. Действительно, пусть M есть n-мерное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\varphi\colon P \to M$ есть произвольная параметризация многообразия M. Множество P представляет собой *n-мерный прямоугольник*, и, следовательно, в каждой точке $t \in M$ матрица Якоби отображения φ является *квадратной* и ее определитель, т. е. *якобиан отображения* φ *в точке* t, отличен от нуля. Так как область определения отображения φ есть n-мерный прямоугольник, то $J(t, \varphi) = \det d\varphi(t)$ имеет один и тот же знак во всех точках множества P. Назовем параметризацию $\varphi\colon P \to M$ n-мерного многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ *правой*, если якобиан отображения φ положителен для всех $t \in P$. Нетрудно показать, что все условия определения ориентации многообразия в данном случае выполняются. Получаемую описанным способом ориентацию многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть его *естественной ориентацией*.

Пусть M есть n-мерное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для произвольной его параметризации $\varphi\colon P \to M$ образ всякой внутренней точки n-мерного прямоугольника P согласно *теореме о локальном диффеоморфизме* является внутренней точкой M как подмножества $\mathbb{R}^n$, т. е. если $x = \varphi(t)$, где $t \in P^\circ$, то можно указать $\delta > 0$ такое, что шар $B(x, \delta)$ содержится в M.

♦ **Предложение 6.2.** *Пусть M есть n-мерное многообразие с краем в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда если точка $x \in M$ является краевой точкой многообразия M, то x является граничной точкой M как подмножества пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Действительно, пусть x_0 есть краевая точка многообразия M. Пусть $\varphi\colon P \to M$ есть произвольная допустимая параметризация M такая, что $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда согласно определению краевой точки многообразия P есть n-мерный полуинтервал и $t_0 \in \partial P$. Пусть $P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. Множество $F = \varphi(P)$ является открытым относительно M, и, значит, найдется открытое множество U пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что $F = U \cap M$.

Пусть $\varphi^*\colon V \to \mathbb{R}^n$ есть отображение, определенное на некоторой окрестности $V = B(t_0, \delta)$ точки t_0 такое, что $\varphi^* \in \mathscr{C}^r$ и $\varphi^*(t) = \varphi(t)$ для всех $t \in P \cap V$. Согласно определению диффеоморфизма, данному в § 3, векторы $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t_0) = \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial t_i}(t_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимые и, значит, якобиан отображения φ^* в точке t_0 отличен от нуля. По *теореме о локальном диффеоморфизме* найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $0 < \delta_1 \leq \delta$ и отображение φ^* на шаре $B_0 = B(t_0, \delta_1)$ взаимно однозначно, причем $\varphi^*(B_0)$ содержится в открытом множестве U, пересечение которого с M есть множество $F = \varphi(P \cap V)$.

Пусть $P = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. Пусть r таково, что $0 < r \leq \delta_1$. Плоскостью $t_1 = b_1$ шар $B(t_0, r)$ делится на две половины. Пусть $B^+(r)$ есть верхняя половина, т. е. множество точек $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in B(t_0, r)$ таких, что $t_1 > b_1$, а $B^-(r)$ — нижняя половина шара $B(t_0, r)$, состоящая из тех его точек, у которых $t_1 \leq b_1$. Так как отображение φ^* на шаре $B(t_0, \delta_1)$ взаимно однозначно, то множества $G^+(r) = \varphi^*[B^+(r)]$ и $G^-(r) = \varphi^*(B^-(r))$ не имеют общих точек.

Если r достаточно мало́, то множество $G^+(r)$ не содержит точек множества M. Действительно, допустим, что это не так. Тогда для всякого $\nu \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_\nu \in M$, принадлежащая множеству $G^+\left(\dfrac{\delta_1}{\nu}\right)$. Очевидно, $x_\nu \in F$ и при $\nu \to \infty$ имеем $x_\nu \to x_0$. Так как отображение φ^{-1} непрерывно, то при $\nu \to \infty$ точки $t_\nu = \varphi^{-1}(x_\nu)$ сходятся к точке $t_0 = \varphi^{-1}(x_0)$. Значит, при достаточно больших ν точка $t_\nu \in B^+(\delta_1)$ и, следовательно, точка $x_\nu = \varphi(t_\nu)$ принадлежит множеству $G^-(\delta_1)$. В то же время $x_\nu \in G^+(\delta_1)$.

Таким образом, мы получаем противоречие с тем фактом, что множества $G^+(\delta_1)$ и $G^-(\delta_1)$ не имеют общих элементов. Отсюда заключаем, что найдется значение δ_0 такое, что $0 < \delta_0 \leq \delta_1$ и множество $G^+(\delta_0)$ не содержит точек множества M.

Множество $G^+(\delta_1)$, очевидно, содержит точки, сколь угодно близкие к точке x_0. Так как $G^+(\delta_1)$ с множеством M не пересекается, то из доказанного вытекает, что x_0 есть граничная точка M. Предложение доказано. ♦

6.4.2. Докажем один важный частный случай обобщенной интегральной теоремы Стокса — интегральную теорему Остроградского.

Предположим, что множество M в пространстве $\mathbb{R}^n$ является n-мерным многообразием класса $\mathscr{C}^r$, где $r \geq 1$, и каждой точке $x \in M$ сопоставлен вектор $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) \in \mathbb{R}^n$. В этом случае будем говорить, что на множестве M определено векторное поле $\mathbf{u}(x)$. Предположим, что векторное поле $\mathbf{u}$ принадлежит классу $\mathscr{C}^1$. Величина

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)$$

называется *дивергенцией векторного поля* $\mathbf{u}(x)$ *в точке* x.

Напомним обозначения, введенные в § 2. Символ $\mathbf{e}^{\varepsilon_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, означает базисную внешнюю дифференциальную форму степени $n-1$, определенную условиями

$$\mathbf{e}^{\varepsilon_1} = dx^2 \ldots dx^{n-1} dx^n, \quad \mathbf{e}^{\varepsilon_n} = dx^1 dx^2 \ldots dx^{n-1},$$

а если $1 < k < n$, то $\mathbf{e}^{\varepsilon_k} = dx^1 \ldots \widehat{dx^k} \ldots dx^n$, где запись $\widehat{dx^k}$ означает, что множитель dx^k должен быть пропущен.

Всякому векторному полю $\mathbf{u}(x)$, заданному на множестве M, может быть сопоставлена внешняя дифференциальная форма степени $n-1$, которую будем обозначать символом $*\mathbf{u}(x)$. Пусть

$$\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$$

для всех $x \in M$. Полагаем

$$*\mathbf{u}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k(x) \mathbf{e}^{\varepsilon_k}.$$

Как показано в § 2, имеет место равенство

$$d[*\mathbf{u}(x)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x) dx^1 dx^2 \ldots dx^n = \operatorname{div} \mathbf{u}(x) dx^1 dx^2 \ldots dx^n.$$

■ ***Лемма 6.4.*** *Пусть дана ортонормальная система* $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_{n-1}$ *из* $n-1$ *векторов пространства* $\mathbb{R}^n$. *Определим вектор* $\mathbf{n}_0$, *полагая* $\mathbf{n}_0 = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, *где* $\nu_k = (-1)^{k-1} \mathbf{e}^{\varepsilon_k}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_{n-1})$. *Вектор* $\mathbf{n}_0$ *ортогонален каждому из векторов* $\mathbf{n}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, *длина его равна единице, и ортогональный репер* $\{\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-1}\}$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *является правым.*

Доказательство. Пусть дана произвольная система векторов $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим $(n-1) \times n$-матрицу, составленную из компонент векторов X_i:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1,n-1} & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2,n-1} & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{n-1,1} & X_{n-1,2} & \ldots & X_{n-1,n-1} & X_{n-1,n} \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Положим $\xi_k(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = (-1)^{k-1} \mathbf{e}^{\varepsilon_k}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$. Величина $\mathbf{e}^{\varepsilon_k}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ есть значение *определителя квадратной матрицы*, получаемой из матрицы (6.13) вычеркиванием k-го столбца. Таким образом, определен вектор

$$\xi(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

где $\xi_k(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = (-1)^{k-1} \mathbf{e}^{\varepsilon_k}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$.

Пусть дан вектор $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Тогда в силу известной из алгебры *формулы разложения определителя по минорам первой строки* величина

$$\langle Y, \xi \rangle = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} Y_k \mathbf{e}^{\varepsilon_k}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$$

равна определителю

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n \\ X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n-1,1} & X_{n-1,2} & \ldots & X_{n-1,n} \end{vmatrix}. \tag{6.14}$$

Если $Y = X_k$ для одного из номеров $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то определитель (6.14) содержит две одинаковые строки и, следовательно, равен нулю. Мы получаем, таким образом, что скалярное произведение $\langle \xi, X_k \rangle = 0$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n-1$, т. е. вектор ξ ортогонален каждому из векторов $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$.

Рассмотрим случай, когда векторы $X_i = \mathbf{n}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, образуют ортонормальную систему. Пусть $\hat{\mathbf{n}}$ есть единичный вектор, ортогональный каждому из векторов $\mathbf{n}_i$, где $i > 0$, и такой, что n-репер

$$\{\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_{n-1}\} \tag{6.15}$$

является правым. Векторы $\mathbf{n}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, линейно независимы, и, значит, множество решений системы линейных уравнений $\langle x, \mathbf{n}_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, одномерно. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{n}_0 = \xi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_{n-1})$ равен $\lambda\hat{\mathbf{n}}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Вычислим значение определителя (6.11) для случая, когда $Y = \hat{\mathbf{n}}$, а $X_i = \mathbf{n}_i$. Тогда матрица определителя (6.14) будет ортогональной. Так как n-репер (6.15) является правым, то определитель (6.14) в этом случае положителен и его значение равно единице. По доказанному, значение этого определителя равно $\langle \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{n}_0 \rangle = \lambda$. Следовательно, мы получаем, что $\mathbf{n}_0 = \hat{\mathbf{n}}$. Лемма доказана. ■

З а м е ч а н и е. Для систем из $n-1$ векторов $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ пространства $\mathbb{R}^n$, как показано в доказательстве леммы, определен вектор $\xi = \xi(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$, координаты которого задаются равенствами: $\xi_k = (-1)^{k-1} \mathbf{e}^{\varepsilon_k}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ при каждом $k =, 1, 2, \ldots, n-1$. Вектор ξ называется *векторным произведением векторов* $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_{n-1}$. Будем обозначать его символом $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$. Как установлено при доказательстве леммы 6.4, вектор $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$ ортогонален каждому из векторов X_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Произведение $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$ является полилинейной кососимметрической функцией векторов $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$.

Предоставляем читателю проверить, что длина вектора $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$ равна абсолютной величине поливектора $[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}]$.

Если векторы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ линейно независимы, то n-репер $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$, где $X_0 = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$, является правым, т. е. ориентирован одинаково с базисным репером $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ пространства $\mathbb{R}^n$.

В случае $n = 3$ определенное здесь понятие векторного произведения совпадает с понятием векторного произведения, известного из курса аналитической геометрии.

■ ***Теорема 6.2*** (интегральная теорема Остроградского). *Пусть M есть n-мерное многообразие класса $\mathscr{C}^r$ с краем в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{n}(x)$ есть единичный вектор внешней нормали в точке $x \in \partial M$. Предположим, что на множестве M задана вектор-функция $\mathbf{u}\colon x \mapsto (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$, причем существует компактное множество $A \subset M$ такое, что $\mathbf{u}(x) = 0$ при $x \notin A$. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_M \operatorname{div} \mathbf{u}(x)\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n = \int\limits_{\partial M} \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{n}(x) \rangle \, d\mu_{n-1}(x). \tag{6.16}$$

З а м е ч а н и е. Равенство (6.16) носит название *интегральной формулы Остроградского.*

Доказательство теоремы. Применяя обобщенную теорему Стокса получим, что имеет место равенство

$$\int\limits_{\partial M} *\mathbf{u}(x) = \int\limits_M d\{*\mathbf{u}(x)\}.$$

Правая часть этого равенства есть интеграл

$$\int\limits_M \operatorname{div} \mathbf{u}(x)\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n.$$

Доказательство теоремы поэтому сводится к преобразованию интеграла в левой части последнего равенства.

Пусть ε_{n-1} есть единичная внешняя форма степени $n-1$ на многообразии ∂M. Тогда

$$*\mathbf{u}(x) = \lambda(x)\varepsilon_{n-1}(x) \tag{6.17}$$

для всех $x \in \partial M$, причем имеет место равенство

$$\int\limits_{\partial M} *\mathbf{u}(x) = \int\limits_{\partial M} \lambda(x)\, d\mu_{n-1}(x).$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ есть правый ортонормальный репер в касательном пространстве $T_{\partial M}(x)$ многообразия ∂M в точке x. Тогда

$$\varepsilon_{n-1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}) = 1,$$

и, следовательно, множитель $\lambda(x)$, стоящий в равенстве (6.17), равен $*\mathbf{u}(x)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1})$. Имеем

$$* \, \mathbf{u}(x)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k(x) \mathbf{e}^{\varepsilon_k}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) n_k(x) = \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{n}(x) \rangle.$$

Здесь $\mathbf{n}(x)$ есть вектор, k-я координата которого равна $\mathbf{e}^{\varepsilon_k}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{u}_{n-1})$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$. Согласно лемме 6.4 вектор $\mathbf{n}(x)$ ортогонален плоскости $T_{\partial M}(x)$, $|\mathbf{n}(x)| = 1$ для всех $x \in \partial M$ и n-репер $\{\mathbf{n}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ является правым в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $\mathbf{n}(x)$ есть вектор внешней нормали многообразия M в точке x. Теорема доказана. ■

6.4.3. Интегральная формула Гаусса. Под интегральной формулой Гаусса понимается тот частный случай обобщенной теоремы Стокса, который соответствует значению $n = k = 2$. Пусть G есть ограниченное открытое множество на плоскости, граница которого есть гладкая замкнутая кривая Γ. В данном случае гладкость кривой означает, что замкнутая кривая Γ допускает параметризацию $\mathbf{z}\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) производные $\mathbf{z}'(t)$ и $\mathbf{z}''(t)$ определены и непрерывны для всех $t \in [0, L]$, причем $\mathbf{z}'(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, L]$;
2) $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(L)$ и $\mathbf{z}'(0) = \mathbf{z}'(L)$, а также и $\mathbf{z}''(0) = \mathbf{z}''(L)$;
3) при $t_1 \neq t_2$ равенство $\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}(t_2)$ имеет место в том и только в том случае, когда одно из данных значений t_1 и t_2 равно нулю, а другое равно L.

При этих условиях множество $G \cup \Gamma$ представляет собой двумерное многообразие класса $\mathscr{C}^2$.

Действительно, пусть $p = (a, b)$ есть произвольная точка M. Если $p \in G$, то найдется $\delta > 0$ такое, что круг $B(p, \delta\sqrt{2}) \subset G$. Тогда квадрат $Q(p,\delta) \subset B(p,\delta\sqrt{2}\,) \subset G$. Полагая $P = Q(p,\delta)$ и $\varphi = \mathrm{Id}_2$, получим параметризацию окрестности точки p, удовлетворяющую всем условиям определения многообразия. Предположим, что $p \in \Gamma$. Тогда $a = x(t_0)$, $b = y(t_0)$, где $0 \le t_0 \le L$.

Ограничимся случаем $0 < t_0 < L$. Имеем $\mathbf{z}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. В силу условия 1) по крайней мере одно из чисел $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$ отлично от нуля. Для определенности предположим, что $x'(t_0) \ne 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и φ есть отображение $(\xi,\eta) \mapsto (x(t_0+\eta), y(t_0+\eta)+\xi)$ интервала $P_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)$. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то φ отображает P_ε взаимно однозначно на некоторую окрестность H точки $\mathbf{z}(t_0)$. Кривая Γ разбивает H на две части, одна из которых содержится в M (см. рис. 2).

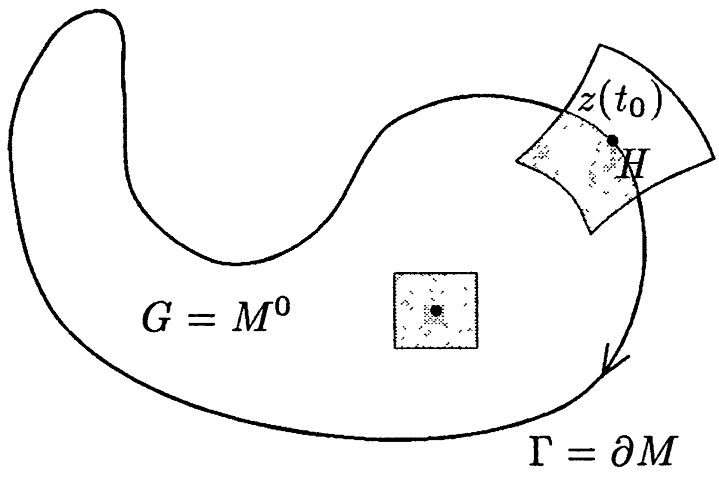

Рис. 2.

Якобиан отображения φ, как легко вычисляется, равен $-x'(t_0+\eta)$ и при $|\eta| < \varepsilon$ отличен от нуля, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Если та из половин множества H, которая содержится в M, соответствует значениям $\xi \le 0$, то ограничение φ на прямоугольнике $(-\varepsilon, 0]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ есть параметризация окрестности точки $\mathbf{z}(t_0)$ в M. Если часть множества H, содержащаяся в M, образована точками $\varphi(\xi,\eta)$, для которых $\xi \ge 0$, то ограничение функции $\varphi(-\xi,\eta)$ будет параметризацией окрестности точки $\mathbf{z}(t_0)$ в многообразии M.

Будем говорить, что область G расположена слева от кривой Γ, если параметризации окрестности точки φ, построенные, как описано выше, являются правыми.

(Рассмотрение случая, когда в точке t_0 $x'(t_0) = 0$ и $y'(t_0) \ne 0$, а также случаев $t = t_0$ и $t_0 = L$, мы предоставляем читателю.)

Пусть $\omega = u(x,y)dx + v(x,y)dy$ есть внешняя дифференциальная форма первой степени, определенная на множестве $M = G \cup \Gamma$. Тогда дифференциал внешней формы ω есть внешняя форма

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right) dxdy.$$

Пусть задана параметризация $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ граничной кривой Г, удовлетворяющая всем указанным выше условиям 1)–3). Предположим, что при изменении параметра t область G оказывается лежащей слева от кривой Г. Интеграл внешней формы ω по краю многообразия M в данном случае равен

$$\int_0^L \{u[x(t), y(t)]x'(t) + v[x(t), y(t)]y'(t)\}\, dt.$$

Применяя *обобщенную интегральную теорему Стокса*, получим равенство

$$\int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right) dxdy = \int_0^L \{u[\mathbf{z}(t)]x'(t) + v(\mathbf{z}(t)]y'(t)\}\, dt. \quad (6.18)$$

Равенство (6.18) называется *интегральной формулой Гаусса.*

6.5. Общая теорема Брауэра о неподвижной точке

■ ***Теорема 6.3*** (общая теорема Брауэра о неподвижной точке). *Пусть B есть замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ и непрерывное отображение $f\colon B \to \mathbb{R}^n$ таково, что $f(B) \subset B$. Тогда найдется точка $x \in B$, для которой $f(x) = x$.*

Замечание. Частный случай теоремы 6.3 был рассмотрен в главе 8 КМА, часть I, книга 2.

Доказательство теоремы. Пусть $B = \overline{B}(a,r)$ и $S = S(a,r)$. Рассмотрим сначала случай, когда отображение f принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$.

Предположим, вопреки доказываемому, что точка $x \in B$ такая, что $f(x) = x$, не существует. Это означает, что $x \neq f(x)$ для всякого $x \in B$. Наша задача — привести это допущение к противоречию.

Дальнейшие рассуждения состоят из двух частей.

1. Первая часть, по существу, геометрическая и состоит в построении по f некоторого отображения шара B на сферу $\mathbf{S}$ (см. рис. 3).

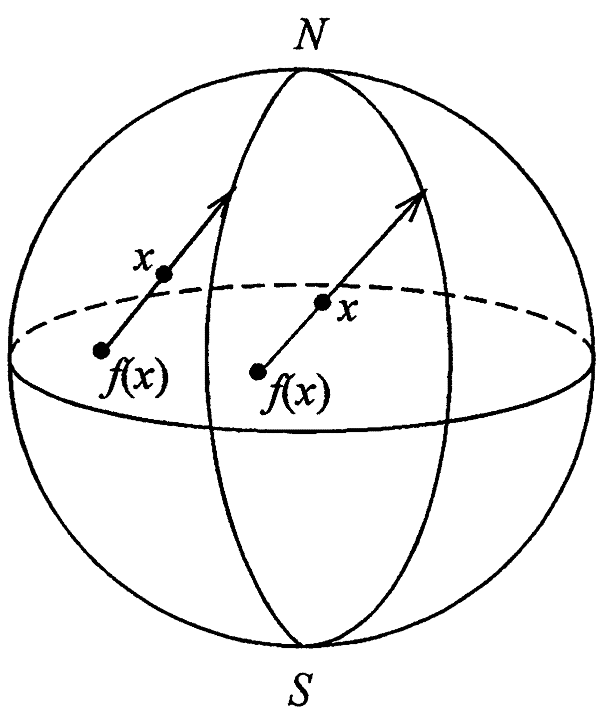

Рис. 3

Возьмем произвольно точку $x \in B$. Найдем точку $f(x)$ и построим луч, исходящий из точки $f(x)$ и проходящий через точку x. Так как, по предположению, $x \neq f(x)$, то такой луч существует и определяется этими условиями однозначно.

Пусть $\varphi(x)$ есть *точка пересечения* этого луча со сферой $\mathbf{S}$. Формально это означает, что

$$\varphi(x) = f(x) + t[x - f(x)],$$

где $t > 0$, причем $|\varphi(x) - a| = r$. Определенное таким образом отображение φ непрерывно и, более того, оно принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$, как и исходное отображение f. Постараемся это показать.

Укажем явное выражение для $\varphi(x)$. Условие $|\varphi(x) - a| = r$, очевидно, равносильно условию

$$|\varphi(x) - a|^2 - r^2 = 0.$$

Положим $x - f(x) = g(x)$. Имеем

$$|\varphi(x) - a|^2 - r^2 = |f(x) - a + tg(x)|^2 - r^2 =$$
$$= \langle f(x) - a + tg(x), f(x) - a + tg(x)\rangle - r^2 = A(x)t^2 + 2tB(x) + C(x),$$

где

$$A(x) = \langle g(x), g(x)\rangle, \quad B(x) = \langle f(x) - a, g(x)\rangle, \quad C(x) = |f(x) - a|^2 - r^2.$$

Положим $P(t) = A(x)t^2 + 2tB(x) + C(x)$. Так как согласно предположению $x \neq f(x)$ для всех $x \in B$, то $A(x) = |g(x)|^2 > 0$, каково бы ни было $x \in B$.

Очевидно, функции A, B и C принадлежат классу $\mathscr{C}^\infty$. Так как $f(x) \in B$, то $|f(x) - a| \leq r$, откуда следует, что $C(x) \leq 0$. Это позволяет заключить, что уравнение $P(t) = 0$ имеет два вещественных корня: t_1 и t_2, один из которых неположителен.

Пусть $t_1 \geq t_2$. Если $|x - a| < r$, то $P(1) < 0$. Так как $A(x) > 0$, то имеет место неравенство $t_1 > 1 > t_2$.

В случае $|x - a| = r$, очевидно, $t_1 = 1$ является корнем уравнения $P(t) = 0$.

Если $|x-a| < r$, то $P(1) = |x-a|^2 - r^2 < 0$, и, значит, в этом случае $t_1 > 1$.

Таким образом, $t_1 \geq 1$ во всех случаях. Отсюда вытекает, что

$$t_1 = t(x) = \frac{-B(x) + \sqrt{B(x)^2 - A(x)C(x)}}{A(x)}.$$

Функция $t(x)$, очевидно, принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$, откуда следует, что $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$.

Если $x \in \mathbf{S}$, то $\varphi(x) = x$. Действительно, если это $x \in \mathbf{S}$, то единственное $t > 0$ такое, что

$$|f(x) - a + t[x - f(x)]| = r,$$

очевидно, есть $t = 1$. Отсюда следует, что в этом случае

$$\varphi(x) = f(x) + x - f(x) = x.$$

Таким образом, нами построено отображение φ шара B на его границу — сферу $\mathbf{S}$, при котором каждая точка этой сферы переходит в себя.

Чтобы почувствовать «парадоксальность ситуации», стоит понять, что́ означает полученный результат хотя бы для $n = 2$.

2. Вторая часть рассуждения — аналитическая (а на самом деле топологическая) — имеет целью привести к противоречию возникшую «парадоксальную ситуацию».

Пусть $\omega(x)$ есть дифференциальная форма степени $n - 1$, определенная равенством

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(x_i - a_i)dx_1 dx_2 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n.$$

Имеем

$$d\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(x_i - a_i)}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = n dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

На основании *интегральной теоремы Стокса* (см. выше) отсюда получаем

$$\int\limits_S \omega(x) = \int\limits_B d\omega(x) = n\mu_n(B). \qquad (6.19)$$

Здесь $\mu_n(B)$ означает объем шара B.

Определим внешнюю дифференциальную форму $\theta(x) = \varphi^*\omega(x)$. В силу установленных ранее (см. § 2 этой главы) свойств операции внешнего дифференцирования имеем

$$d\theta(x) = \varphi^* d\omega(x) = n d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n.$$

Для всякого $x \in B$ имеет место равенство $F[\varphi(x)] = 0$, где $F(y) = \langle y - a, y - a\rangle - r^2$.

Функция F дифференцируема и ее г р а д и е н т отличен от нуля в каждой точке $y \neq 0$. Дифференцируя соотношение $F[\varphi(x)] = 0$ по переменной x_i, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j}[\varphi(x)] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \qquad (6.20)$$

где $\lambda_j = \dfrac{\partial F}{\partial y_j}[\varphi(x)]$. Умножая обе части равенства (6.20) на dx_i и суммируя по i, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j d\varphi_j(x) = 0.$$

Для каждого $x \in B$ хотя бы одно из чисел λ_j в этой сумме отлично от нуля. Следовательно, мы получаем, что внешние дифференциальные формы $d\varphi_j(x)$ линейно зависимы. Отсюда следует равенство

$$d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n \equiv 0.$$

Из доказанного вытекает, что

$$\int\limits_S \theta(x) = \int\limits_B d\theta(x) = 0.$$

Докажем теперь, что

$$\int\limits_S \theta(x) = \int\limits_S \omega(x). \tag{6.21}$$

Тем самым мы получим требуемое противоречие: с одной стороны, некоторый интеграл равен нулю, а с другой — в силу равенства (6.19) он отличен от нуля!

Справедливость равенства (6.21) вытекает из того, что для $x \in \mathbf{S}$ $\varphi(x) = x$. Действительно, пусть $\alpha\colon P \to \mathbf{S}$ есть произвольная параметризация сферы $\mathbf{S}$. Представление дифференциальной формы θ в этой параметризации есть дифференциальная форма

$$\alpha^*\theta(t) = \alpha^*[\varphi^*\omega] = [\varphi \circ \alpha]^*\omega.$$

Для всякого $t \in P$ точка $\alpha(t) \in \mathbf{S}$, и, следовательно, имеет место равенство $\varphi[\alpha(t)] = \alpha(t)$. Следовательно, получим $\varphi \circ \alpha \equiv \alpha$, и, значит, $\alpha^*\theta(t) = \alpha^*\omega(t)$. Таким образом, в любой параметризации сферы представления внешних дифференциальных форм θ и ω совпадают. Отсюда вытекает, что интегралы от этих дифференциальных форм по сфере $\mathbf{S}$ также равны между собой. Тем самым равенство (6.21) доказано.

Итак, допустив, что $x \neq f(x)$ для отображения f при всех x, мы получаем противоречие. Следовательно, для данного отображения f найдется хотя бы одна точка x такая, что $x = f(x)$.

В проделанных рассуждениях предполагалось, что отображение f принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$. Теперь освободимся от этого ограничения. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Пусть f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть компоненты вектор-функции f. Согласно *теореме Вейерштрасса* (см. главу 13) при каждом i найдется полином u_i от n переменных, для которого

$$|u_i(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$$

для всех $x \in B$. Положим $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$. Тогда, как легко проверяется, $|f(x) - u(x)| < \varepsilon/2$ для всех $x \in B$.

Пусть $\delta = \varepsilon/2$. Очевидно, вектор-функция u принадлежит классу $\mathscr{C}^\infty$. Но мы не можем утверждать, что u отображает шар B в себя. Нетрудно видеть, однако, что для всякого $x \in B$ имеет место неравенство

$$|u(x) - a| \leq |u(x) - f(x)| + |f(x) - a| < \delta + r.$$

Таким образом, мы получаем, что $u(x) \in B(a, r + \delta)$ для любого $x \in B$.

Шар $B(a, r + \delta)$ преобразуем в шар $B(a, r)$ подобным преобразованием относительно точки a. Именно, пусть

$$\psi(y) = a + \frac{r}{r+\delta}(y - a).$$

Для всякого $y \in B(a, r + \delta)$ будет

$$|\psi(y) - a| = \frac{r}{r+\delta}|y - a| \le \frac{r}{r+\delta}(r + \delta) = r.$$

Далее, для любого $y \in B(a, r + \delta)$ справедливо соотношение

$$|y - \psi(y)| = |y - a|\left(1 - \frac{r}{r+\delta}\right) \le \delta.$$

Полагая в этом неравенстве $y = u(x)$, получим $|u(x) - \psi[u(x)]| < \delta$.

Пусть $g(x) = \psi[u(x)]$. Тогда g есть отображение класса $\mathscr{C}^\infty$ шара $B = \overline{B}(a, r)$ в себя. При этом

$$|g(x) - f(x)| \le |g(x) - u(x)| + |u(x) - f(x)| < \delta + \delta = \varepsilon.$$

По доказанному, найдется точка $x_0 \in B$ такая, что $g(x_0) = x_0$. Имеем

$$|f(x_0) - x_0| = ||f(x_0) - x_0| - |g(x_0) - x_0|| \le |f(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{x \in B} |f(x) - x| \le |f(x_0) - x_0| < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то мы получаем, что

$$\inf_{x \in B} |f(x) - x| \le 0,$$

и, значит, в силу неотрицательности $|f(x) - x|$ будем иметь

$$\inf_{x \in B} |f(x) - x| = 0.$$

Функция $x \mapsto |x - f(x)|$ непрерывна. Так как множество B компактно, то найдется точка $x \in B$, для которой $|f(x) - x| = 0$, т. е. $f(x) = x$. Теорема доказана. ■