4.2. Нижняя и верхняя огибающие последовательности интегрируемых функций

4.2.1. Пусть дана последовательность $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ вещественных функций, каждая из которых определена почти всюду в M. Найдем множество $E \subset M$, состоящее из всех $x \in M$, для которых $f_\nu(x)$ не определено хотя бы для одного значения $\nu \in \mathbb{N}$. Для всякого $x \notin E$ определены величины

$$g(x) = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu(x), \quad h(x) = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu(x).$$

Определенную таким образом функцию g будем называть *нижней огибающей последовательности* $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Функция h называется *верхней огибающей последовательности.* Будем писать

$$g = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu, \quad h = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu.$$

Докажем некоторые вспомогательные утверждения относительно точной нижней и точной верхней границ числовой последовательности.

■ ***Лемма 4.2.*** *Пусть E — произвольное множество. Тогда для всякой функции $F\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ имеют место равенства*

$$\inf_{\xi\in E} F(\xi) = -\sup_{\xi\in E}(-F(\xi)), \tag{4.2}$$

$$\sup_{\xi\in E} F(\xi) = -\inf_{\xi\in E}(-F(\xi)). \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть $p = -\sup\limits_{\xi\in E}(-F(\xi))$. Тогда для всякого $\xi \in E$ имеем $-F(\xi) \leq -p$ и, значит, $F(\xi) \geq p$ для всех $\xi \in E$, т. е. p является нижней границей функции F.

Пусть p' — произвольная другая нижняя граница функции F. Тогда для любого $\xi \in E$ выполняется $F(\xi) \geq p'$, откуда следует, что для всех $\xi \in E$ выполняется $-F(\xi) \leq -p'$.

Мы получаем, таким образом, что $-p'$ есть верхняя граница функции $-F$. Так как $-p$ есть точная верхняя граница функции $-F$ на E, то $-p \leq -p'$, откуда получаем, что

$$p \geq p'. \tag{4.4}$$

Таким образом, p есть нижняя граница функции F, и для любой другой ее нижней границы выполняется неравенство (4.4). По определению, это и означает, что $p = \inf\limits_{\xi\in E} F(\xi)$. Этим доказано равенство (4.1).

Функция F в равенстве (4.1) совершенно произвольна. Заменяя в нем F на $-F$, получим

$$\inf_{\xi \in E}(-F(\xi)) = -\sup_{\xi \in E} F(\xi),$$

откуда, очевидно, следует (4.2). Лемма доказана. ■

4.2.2. Для произвольных $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ символ $\max\{x, y\}$ означает наибольшее, символ $\min\{x, y\}$ — наименьшее из этих чисел.

■ ***Лемма 4.3.*** *Пусть дана последовательность $(x_n \in \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$. Определим по индукции последовательности $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ и $(q_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, полагая $p_1 = q_1 = x_1$. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ числа p_n и q_n определены, то $p_{n+1} = \min\{p_n, x_{n+1}\}$, $q_{n+1} = \max\{q_n, x_{n+1}\}$. Тогда $(q_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть возрастающая последовательность, $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ — убывающая последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$.*

Доказательство. Из определения следует, что при каждом n выполняются неравенства $p_{n+1} \leq p_n$, $q_{n+1} \geq q_n$. Это доказывает, что $(q_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть возрастающая последовательность, а $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ — убывающая.

Пусть $L = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$. При каждом n имеем $x_n \leq q_n \leq L$ и, значит, L есть верхняя граница последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Пусть L' — произвольная другая верхняя граница последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Докажем, что для всех n выполняется неравенство $q_n \leq L'$. Для $n = 1$ это, очевидно, верно.

Предположим, что для некоторого n неравенство $q_n \leq L'$ выполняется. Так как $x_{n+1} \leq L'$, то также и $q_{n+1} = \max\{q_n, x_{n+1}\} \leq L'$.

Из доказанного, очевидно, следует, что $q_n \leq L'$ для всех n и, значит, $L = \lim\limits_{n\to\infty} q_n \leq L'$. Таким образом, L есть верхняя граница последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и для любой другой ее верхней границы L' выполняется неравенство $L \leq L'$. По определению, это и означает, что $L = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Для последовательности $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ соответствующее утверждение доказывается аналогично. (Формально можно получить его как следствие доказанного, используя результат леммы 4.2.) Лемма доказана. ■

■ ***Теорема 4.2.*** *Пусть $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть произвольная последовательность интегрируемых функций. Предположим, что существует интегрируемая функция φ такая, что при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ выполняется $f_\nu(x) \geq \varphi(x)$ для почти всех $x \in M$. Тогда нижняя огибающая последовательности функций $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ интегрируема. Если существует функция ψ такая, что при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ выполняется $f_\nu(x) \leq \psi(x)$ для почти всех $x \in M$, то верхняя огибающая последовательности функций $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть интегрируемая функция.*

Доказательство. Предположим, что при каждом ν выполняется $f_\nu(x) \geq \varphi(x)$ для почти всех $x \in M$, где $\varphi \in L_1(\Sigma)$. Пусть g есть нижняя огибающая последовательности $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Пусть E_ν есть множество меры нуль, состоящее из всех точек $x \in M$, для которых либо одна из величин $f_\nu(x)$, $\varphi(x)$ не определена, либо они обе определены, но неравенство $f_\nu(x) \geq \varphi(x)$ не выполняется. Положим $E = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$. Множество E является *пренебрежимым.*

Построим некоторую последовательность функций $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, полагая $u_\nu(x) = \infty$ для любого $x \in E$ при всех $\nu \in \mathbb{N}$. Для $x \notin E$ последовательность $(u_\nu(x))_{\nu\in\mathbb{N}}$ определим из условий $u_1(x) = f_1(x)$, и если значение $u_\nu(x)$ определено для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$, то $u_{\nu+1}(x) = \min\{u_\nu(x), f_{\nu+1}(x)\}$.

В силу принципа математической индукции этими условиями последовательность $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ определяется однозначно.

Из определения последовательности $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ видно, что она является убывающей. Функция u_1 интегрируема, и $u_1(x) \geq \varphi(x)$ для всех $x \notin E$. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$ таково, что функция u_ν для данного ν интегрируема, причем $u_\nu(x) \geq \varphi(x)$ для всех $x \notin E$. В силу свойств интегрируемых функций, установленных ранее (см. § 2), из определения функции $u_{\nu+1}$ следует, что тогда функция $u_{\nu+1} = \min\{u_\nu, f_{\nu+1}\}$ также интегрируема.

Так как, по условию, $f_{\nu+1}(x) \geq \varphi(x)$, $u_\nu(x) \geq \varphi(x)$ для всякого $x \notin E$, то также и $u_{\nu+1}(x) \geq \varphi(x)$ для любого $x \notin E$.

В силу леммы 4.3 для всякого $x \notin E$ имеем $g(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu(x)$, так что функции u_ν сходятся к функции g почти всюду в M. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi \leq u_\nu \leq u_1$ почти всюду в M и, значит,

$$I(\varphi) \leq I(u_\nu) \leq I(u_1).$$

Последовательность интегралов $(I(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, таким образом, является ограниченной. В силу *теоремы Леви для последовательностей* (следствие 3 теоремы 4.1) отсюда вытекает, что функция g интегрируема, что и требовалось доказать.

Утверждение, касающееся верхней огибающей последовательности функций $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, может быть доказано аналогичными рассуждениями. Формально это следует из доказанного. Именно, пусть h есть верхняя огибающая последовательности $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Тогда в силу леммы 4.2 $-h$ является нижней огибающей последовательности $(-f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Если при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ для почти всех $x \in M$ выполняется $f_\nu(x) \leq \psi(x)$, где $\psi \in L_1$, то $-f_\nu(x) \geq -\psi(x)$ для почти всех x.

Функция $-\psi$ интегрируема, и, значит, по доказанному, также интегрируема функция $-h$, т. е. имеет место равенство

$$-\sup_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu = -h = \inf_{\nu\in\mathbb{N}}(-f_\nu).$$

Отсюда следует интегрируемость h. Теорема доказана. ■

4.3. Теоремы Фату и Лебега о предельном переходе

4.3.1. Докажем сначала некоторые вспомогательные результаты, касающиеся числовых последовательностей.

Понятия верхнего и нижнего пределов в главе 2 определены только для последовательностей, все члены которых конечны. Однако определения, приведенные там (КМА, часть I, книга 1), без изменений могут быть распространены на случай последовательностей, у которых отдельные члены равны $\pm\infty$.

Пусть дана последовательность $(x_\nu \in \overline{\mathbb{R}})_{\nu\in\mathbb{N}}$. Число $H \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *нижним числом* данной последовательности, если существует номер $\bar{\nu}$ такой, что для всех $\nu \geq \bar{\nu}$ выполняется неравенство $x_\nu \geq H$.

Множество нижних чисел непусто, так как $-\infty$ является нижним числом любой последовательности рассматриваемого вида.

Точная верхняя граница множества всех нижних чисел последовательности называется ее *нижним пределом* и обозначается символом $\varliminf\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$.

Аналогично, число $H \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *верхним числом* последовательности $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, если существует номер $\bar{\nu}$ такой, что для всех $\nu \geq \bar{\nu}$ выполняется неравенство $x_\nu \leq H$.

Множество верхних чисел непусто. Его точная нижняя граница называется *верхним пределом* последовательности $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ и обозначается символом $\varlimsup\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$.

В соответствии со сказанным будем говорить, что число $L \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом последовательности $(x_\nu \in \overline{\mathbb{R}})_{\nu\in\mathbb{N}}$, если

$$L = \varliminf_{\nu\to\infty} x_\nu = \varlimsup_{\nu\to\infty} x_\nu.$$

При этом верхний и нижний пределы предполагаются определенными, как указано выше.

Из результатов главы 2 вытекает, что для случая последовательностей, все члены которых конечны, данное определение предела равносильно тому, которое приводится в главе 2.

■ **Лемма 4.4.** *Пусть $(X_\nu \in \overline{\mathbb{R}})_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть произвольная числовая последовательность. Для $\nu \in \mathbb{N}$ положим $N_\nu = \inf\limits_{\mu\geq\nu} X_\mu$, $V_\nu = \sup\limits_{\mu\geq\nu} X_\mu$. Тогда последовательность $(N_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ возрастающая, последовательность $(V_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ убывающая и имеют место равенства*

$$\lim_{\nu\to\infty} N_\nu = \varliminf_{\nu\to\infty} X_\nu, \quad \lim_{\nu\to\infty} V_\nu = \varlimsup_{\nu\to\infty} X_\nu.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{N}_\nu = \{\mu \in \mathbb{N} | \ \mu \geq \nu\}$. Тогда

$$N_\nu = \inf_{\mu \in \mathbb{N}_\nu} X_\mu, \quad V_\nu = \sup_{\mu \in \mathbb{N}_\nu} X_\mu.$$

При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ выполняется $\mathbb{N}_\nu \supset \mathbb{N}_{\nu+1}$, откуда в силу известных свойств точной верхней и точной нижней границ функции (см. главу 1) вытекает, что $N_\nu \leq N_{\nu+1}$, $V_\nu \geq V_{\nu+1}$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность $(N_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ возрастающая, а последовательность $(V_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ убывающая, и, значит, пределы, указанные в формулировке доказываемой леммы, существуют.

Положим

$$P' = \lim_{\nu \to \infty} N_\nu, \quad P = \varliminf_{\nu \to \infty} X_\nu, \quad Q' = \lim_{\nu \to \infty} V_\nu, \quad Q = \varlimsup_{\nu \to \infty} X_\nu.$$

Требуется доказать, что $P' = P$ и $Q' = Q$.

Напомним, что величина $l \in \mathbb{R}$ называется *нижним числом последовательности* $(X_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, если существует номер $\bar{\nu}$ такой, что при каждом $\nu \geq \bar{\nu}$ выполняется неравенство $X_\nu \geq l$. Согласно определению *нижний предел последовательности* $(X_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть точная верхняя граница множества $N(X)$ всех ее нижних чисел.

При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеем $X_\mu \geq N_\nu$ для любого $\mu \geq \nu$, откуда следует, что N_ν есть нижнее число последовательности $(X_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ для любого $\nu \in \mathbb{N}$ и, значит, $N_\nu \leq P$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что

$$P' = \lim_{\nu \to \infty} N_\nu \leq P = \sup N(X). \tag{4.5}$$

Пусть $l \in N(X)$. Для этого l найдется номер $\bar{\nu}$ такой, что $X_\nu \geq l$ для всех $\nu \geq \bar{\nu}$. Отсюда следует, что $P' \geq N_{\bar{\nu}} \geq l$. Так как $l \in N(X)$ взято произвольно, то, следовательно, мы получаем, что P' является верхней границей множества $N(X)$ и, значит,

$$P' \geq P. \tag{4.6}$$

Из неравенств (4.5) и (4.6), очевидно, вытекает, что $P' = P$.

Равенство $Q' = Q$ доказывается аналогичным образом. Нужно только в рассуждениях, проделанных выше, надлежащим образом изменить знаки неравенств. Мы предоставляем эту работу читателю.

Заметим еще, что формально данное равенство может быть выведено из доказанного применением леммы 4.2. Лемма доказана. ■

■ ***Теорема 4.3*** (теорема Фату о предельном переходе). *Пусть $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть произвольная последовательность интегрируемых функций. Предположим, что существует интегрируемая функция φ такая, что $f_\nu(x) \geq \varphi(x)$ почти всюду в M при каждом $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда если величина $\varliminf\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu)$ конечна, то функция f, определенная условием $f(x) = \varliminf\limits_{\nu \to \infty} f_\nu(x)$ для почти всех $x \in M$, интегрируема, причем имеет место неравенство $I(f) \leq \varliminf\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu)$.*

Доказательство. Предположим, что выполнены все условия теоремы и величина $L = \varliminf_{\nu\to\infty} I(f_\nu)$ конечна. Для $\nu \in \mathrm{N}$ обозначим через g_ν нижнюю огибающую последовательности $(f_{\mu+\nu-1})_{\mu\in\mathrm{N}}$. Для почти всех $x \in M$ выполняется неравенство $g_\nu(x) \geq \varphi(x)$. Согласно теореме 4.2 функция g_ν интегрируема. Для любого $\mu \geq \nu$

$$\varphi(x) \leq g_\nu(x) \leq f_\mu(x)$$

для почти всех $x \in M$. Отсюда вытекает, что

$$I(\varphi) \leq I(g_\nu) \leq I(f_\mu)$$

для любого $\mu \geq \nu$ и, следовательно,

$$I(g_\nu) \leq \inf_{\mu\geq\nu} I(f_\mu) \leq L. \tag{4.7}$$

Последовательность функций $(g_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$ возрастающая. Согласно лемме 4.4 для почти всех $x \in M$ имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} g_\nu(x) = \varliminf_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = f(x).$$

Последовательность интегралов $(I(g_\nu))_{\nu\in\mathrm{N}}$, как следует из неравенств (4.7), является ограниченной. Отсюда согласно *теореме Леви для последовательностей* (следствие 3 теоремы 4.1) вытекает, что функция f интегрируема, причем

$$I(f) = \lim_{\nu\to\infty} I(g_\nu) \leq L = \varliminf_{\nu\to\infty} I(f_\nu).$$

Теорема доказана. ■

▼ ***Следствие 1.*** *Пусть $(f_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$ есть последовательность интегрируемых функций. Предположим, что существует интегрируемая функция ψ такая, что при каждом $\nu \in \mathrm{N}$ для почти всех $x \in M$ выполняется неравенство $f_\nu(x) \leq \psi(x)$. Пусть функция f определена условием $f(x) = \varlimsup_{\nu\to\infty} f_\nu(x)$ для почти всех $x \in M$. Тогда если $K = \varlimsup_{\nu\to\infty} I(f_\nu) > -\infty$, то функция f интегрируема, причем имеет место неравенство $I(f) \geq \varlimsup_{\nu\to\infty} I(f_\nu)$.*

Доказательство. Предположим, что последовательность функций $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет всем условиям следствия. Положим $f^*_\nu = -f_\nu$, $\psi^* = -\psi$, $f^* = -f$. Тогда при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ выполняется $f^*_\nu(x) \geq \psi^*(x)$ почти всюду в M, $I\big(f^*_\nu\big) = -I\big(f_\nu\big)$ и для почти всех $x \in M$

$$f^*(x) = -\varlimsup_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = \varliminf_{\nu\to\infty}[-f_\nu(x)] = \varliminf_{\nu\to\infty} f^*_\nu(x).$$

Аналогично получаем

$$\varliminf_{\nu\to\infty} I\big(f^*_\nu\big) = -\varlimsup_{\nu\to\infty} I(f_\nu). \tag{4.8}$$

Для последовательности функций $\big(f^*_\nu\big)_{\nu\in\mathbb{N}}$ выполнены все условия теоремы. Отсюда вытекают интегрируемость функции f^* и неравенство

$$I(f^*) \leq \varliminf_{\nu\to\infty} I\big(f^*_\nu\big). \tag{4.9}$$

Отсюда же получаем интегрируемость функции $f = -f^*$. В силу соотношений (4.8) и (4.9) будем иметь

$$I(f) = -I(f^*) \geq -\varliminf_{\nu\to\infty} I\big(f^*_\nu\big) = \varlimsup_{\nu\to\infty} I(f_\nu).$$

Следствие 1 доказано. ▼

▼ ***Следствие 2*** (теорема Лебега о предельном переходе). *Пусть $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть произвольная последовательность интегрируемых функций, сходящаяся почти всюду в M к функции f. Предположим, что существуют интегрируемые функции φ и ψ такие, что при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ для почти всех $x \in M$ выполняются неравенства $\varphi(x) \leq f_\nu(x) \leq \psi(x)$. Тогда предельная функция f интегрируема, причем имеет место равенство $I(f) = \lim\limits_{\nu\to\infty} I(f_\nu)$.*

Доказательство. Пусть последовательность $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет всем условиям следствия. Тогда при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеем $I(\varphi) \leq I(f_\nu) \leq I(\psi)$, так что последовательность $(I(f_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ является ограниченной. Отсюда следует, что ее верхний и нижний пределы конечны. Так как $f(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(x)$ для почти всех $x \in M$, то, значит, $f(x) = \varliminf\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(x)$ почти всюду в M, поскольку предел последовательности в случае, если он существует, является также ее нижним и верхним пределами.

Применяя теорему 4.3, отсюда заключаем, что функция f интегрируема, причем имеет место неравенство $I(f) \leq \varliminf\limits_{\nu\to\infty} I(f_\nu)$.

Далее, следствие 1 позволяет заключить, что имеет место также неравенство $I(f) \geq \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} I(f_\nu)$. Так как, с другой стороны, $\underline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} I(f_\nu) \leq$ $\leq \overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} I(f_\nu)$, то из доказанного следует, что

$$I(f) = \underline{\lim_{\nu\to\infty}} I(f_\nu) = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} I(f_\nu).$$

Таким образом, верхний и нижний пределы последовательности $(I(f_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ совпадают, причем их общее значение равно $I(f)$. Это означает, что

$$I(f) = \lim_{\nu\to\infty} I(f_\nu).$$

Следствие 2 доказано. ▼

4.3.2. Докажем некоторые простые утверждения о приближении интегрируемых функций в $\mathbb{R}^n$ непрерывными финитными функциями.

■ ***Лемма 4.5.*** *Пусть f есть ступенчатая функция в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого открытого множества U, содержащего носитель функции f по любому $\varepsilon > 0$, можно указать непрерывную финитную функцию φ такую, что* $\operatorname{Spr}(\varphi) \subset U$, *и имеет место неравенство* $\|f - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.

Доказательство. Обозначим символом $\tau(t)$ функцию переменной $t \in \mathbb{R}$, определенную следующим образом: $\tau(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\tau(t) = 0$ при $t < 0$. Предположим, что дан полуинтервал $\sigma = [\alpha, \beta)$, где $-\infty <$ $< \alpha < \beta < \infty$. Разность $\tau(x - \alpha) - \tau(x - \beta)$ равна единице при $t \in \sigma$, и равна нулю при $x \notin \sigma$, т. е. эта разность совпадает с индикатором χ_σ отрезка σ. Для произвольного $h > 0$ положим

$$\tau_h(t) = \frac{(x + h)^+ - x^+}{h}.$$

Легко проверяется, что $\tau_h(t) = 0$ при $t < -h$, $\tau_h(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $0 \leq \tau_h(t) \leq 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Функция τ_h, очевидно, является непрерывной. Имеем $\lim\limits_{h\to 0} \tau_h(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть дан полуинтервал $\sigma = [\alpha, \beta)$. Положим $\chi_{\sigma,h} = \tau_h(x - \alpha) -$ $-\tau_h(x - \beta)$. Из сказанного следует, что

$$\lim_{h\to 0} \chi_{\sigma,h} = \tau(x - \alpha) - \tau(x - \beta) = \chi_\sigma(t)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Функция $\chi_{\sigma,h}$ непрерывна и обращается в нуль вне промежутка $[\alpha - h, \beta]$.

Предположим теперь, что задан n-мерный полуинтервал

$$\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_n,$$

где $\sigma_k = [\alpha_k, \beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\chi_{\sigma,h}(x) = \prod_{k=1}^{n} \chi_{\sigma_k,h}(x_k).$$

Функция $\chi_{\sigma,h}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ непрерывна и обращается в нуль вне замкнутого n-мерного прямоугольника

$$\sigma_h = [\alpha_1 - h, \beta_1] \times [\alpha_2 - h, \beta_2] \times \cdots \times [\alpha_n - h, \beta_n].$$

Для всякой точки $x \in \sigma_h$ можно указать точку $y \in \sigma$ такую, что $|x - y| < h\sqrt{n}$.

Функция $\chi_{\sigma,h}(x)$ непрерывна и финитна, причем

$$0 \leq \chi_{\sigma,h}(x) \leq 1$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. При этом справедливо соотношение

$$\lim_{h \to 0} \chi_{\sigma,h}(x) = \prod_{k=1}^{n} \chi_{\sigma_k}(x_k) = \chi_\sigma(x).$$

Пусть f есть произвольная *ступенчатая функция* в пространстве $\mathbb{R}^n$ и

$$f(x) = \sum_{j=i}^{m} a_i \chi_{\sigma_j}(x)$$

есть представление f в виде линейной комбинации попарно непересекающихся двоичных кубов. Будем считать, что коэффициенты a_i в этом представлении все отличны от нуля. Тогда носитель $\mathrm{Spr}\,(f)$ функции f, как нетрудно видеть, совпадает с объединением замкнутых кубов $\bar{\sigma}_j$. Предположим, что открытое множество U содержит носитель функции f. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для всякой точки $x \in \mathrm{Spr}\,(f)$ шар $\overline{B}(x, \delta)$ содержится в множестве U.

Для $h > 0$ положим

$$f_h(x) = \sum_{j=i}^{m} a_i \chi_{\sigma_j,h}(x).$$

Функция f_h, очевидно, является непрерывной и финитной и $f_h(x) \to$ $\to f(x)$ при $h \to 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Если h достаточно мало, а именно, если $h < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, то носитель функции f_h будет содержаться в множестве U. Функции $f_h(x)$ ограничены, $|f_h(x)| \leq \max\limits_{1 \leq j \leq m} |a_j| = |f(x)|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Для любого $H > 0$ найдется n-мерный куб $Q = [-L, L]^n$ такой, что при $0 < h \leq H$ функции f_h обращаются в нуль вне этого куба.

Применяя *теорему Лебега о предельном переходе,* получим, что $\|f - f_h\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \to 0$ при $h \to 0$. Утверждение леммы очевидным образом следует из доказанного. Лемма доказана. ■

■ **Теорема 4.4.** *Для всякой интегрируемой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная финитная функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\|f - \varphi\|_{L_1} < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть f есть функция класса $L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда согласно определению интегрируемой функции для всякого $\varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция ψ, для которой имеет место неравенство $\|f - \psi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу леммы 4.5 можно указать непрерывную финитную функцию φ такую, что $\|\psi - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда получаем

$$\|f - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f - \psi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|\psi - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана. ■

§ 5. Измеримые функции и множества

Здесь мы опишем некоторый класс функций, естественно возникающий в теории интеграла. Условия, определяющие класс интегрируемых функций, в некоторых случаях оказываются слишком ограничительными. В связи с этим, возникает необходимость ввести более широкий класс функций, который был бы определен условиями, менее жесткими, чем это имеет место в случае интегрируемых функций. Таким является класс измеримых функций.

Понятие измеримой функции позволяет производить различные преобразования интегрируемых функций, не заботясь при этом, чтобы функции, получаемые на промежуточных этапах, были интегрируемыми. Если результатом преобразований является некоторая функция, то ее интегрируемость может быть установлена в конце вычислений.

Применение измеримых функций оказывается полезным при изучении интегрируемых функций. Соответствующие примеры приводятся в этой главе позднее.

5.1. Определения и простейшие свойства измеримых функций

Зададим произвольно систему с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$. Дальнейшие рассмотрения относятся именно к этой системе с интегрированием.

Функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, определенная в M почти всюду, называется *измеримой*, если существует последовательность функций $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, принадлежащих классу $\mathscr{F}$, такая, что $\varphi_\nu(x) \to f(x)$ для почти всех $x \in M$. Для системы с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$ множество всех функций, измеримых в этой системе, обозначается символом $\mathbf{M}(\Sigma)$.

Всякая интегрируемая функция измерима. Действительно, пусть $f \in L_1(\Sigma)$. Согласно определению интегрируемой функции для всякого $\nu \in \mathbb{N}$ найдется функция $\varphi_\nu \in \mathscr{F}$ такая, что $\|f - \varphi_\nu\|_{L_1(\Sigma)} < \dfrac{1}{2^\nu}$. Имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|f - \varphi_\nu\|_{L_1(\Sigma)} < \infty.$$

Отсюда согласно следствию 1 теоремы 4.1 вытекает, что для почти всех $x \in M$ разность $f(x) - \varphi_\nu(x) \to 0$ при $\nu \to \infty$ и, значит, $\varphi_\nu(x) \to f(x)$ для почти всех $x \in M$ при $\nu \to \infty$. Согласно определению это и означает, что функция f измерима.

Множество $A \subset M$ называется *измеримым*, если его индикатор χ_A является измеримой функцией.

■ **Теорема 5.1.** *Если вещественная функция f, определенная в M почти всюду, измерима, то функции $|f|$, f^+, f^- являются измеримыми.*

Доказательство. Так как функция f измерима, то согласно определению существует последовательность $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ функций класса $\mathscr{F}$, сходящаяся к f почти всюду. Для всякого $x \in M$, для которого $\varphi_\nu(x) \to f(x)$ при $\nu \to \infty$, очевидно,

$$|\varphi_\nu(x)| \to |f(x)|, \quad {\varphi_\nu}^+(x) \to f^+(x), \quad {\varphi_\nu}^-(x) \to f^-(x).$$

Функции $|\varphi_\nu|$, ${\varphi_\nu}^+$, ${\varphi_\nu}^-$ принадлежат классу $\mathscr{F}$ при всех $\nu \in \mathbb{N}$. Следовательно, мы получаем, что для каждой из функций $|f|$, f^+ и f^- можно указать последовательность функций, принадлежащих классу $\mathscr{F}$, сходящуюся к ней почти всюду. Тем самым измеримость всех этих функций установлена. Теорема доказана. ■

■ **Лемма 5.1.** *Пусть $(x_\nu \in \mathbb{R})_{\nu \in \mathbb{N}}$ и $(y_\nu \in \mathbb{R})_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть произвольные числовые последовательности, каждая из которых имеет конечный или бесконечный предел. Пусть $X = \lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu$, $Y = \lim\limits_{\nu \to \infty} y_\nu$. Положим $u_\nu = \min\{x_\nu, y_\nu\}$ и $v_\nu = \max\{x_\nu, y_\nu\}$. Тогда каждая из последовательностей $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ и $(v_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ имеет предел. При этом*

$$\lim_{\nu \to \infty} u_\nu = \min\{X, Y\}, \quad \lim_{\nu \to \infty} v_\nu = \max\{X, Y\}.$$

Доказательство. В случае, когда X и Y конечны, доказываемые соотношения непосредственно вытекают из соотношений

$$\min\{x, y\} = x - (x - y)^+, \quad \max\{x, y\} = y + (x - y)^+.$$

Пусть одна из величин X и Y равна $-\infty$. Для определенности будем считать, что $X = -\infty$. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеем $u_\nu \leq x_\nu$. Отсюда следует, что в этом случае $\lim\limits_{\nu \to \infty} u_\nu = -\infty$.

Предположим, что $Y > X = -\infty$. Тогда найдется номер $\bar{\nu}$ такой, что при всяком $\nu \geq \bar{\nu}$ имеет место неравенство $x_\nu < y_\nu$. Для всех таких ν имеем $v_\nu = y_\nu$. Отсюда вытекает, что в этом случае

$$\lim_{\nu \to \infty} v_\nu = \lim_{\nu \to \infty} y_\nu = Y = \max\{X, Y\}.$$

Рассмотрим случай, когда $X = Y = -\infty$. Зададим произвольно $K > -\infty$. Согласно определению предела тогда найдется номер $\bar{\nu} \in \mathbb{N}$ такой, что для всякого $\nu \geq \bar{\nu}$ выполняются неравенства $x_\nu < K$ и $y_\nu < K$. Для всех $\nu \geq \bar{\nu}$, очевидно, выполняется неравенство $v_\nu < K$.

Так как $K > -\infty$ было выбрано произвольно, то тем самым установлено, что и в данном случае $\lim\limits_{\nu \to \infty} v_\nu = Y = \max\{X, Y\}$. Случай, когда хотя бы одно из чисел X и Y равно ∞, рассматривается аналогично. Лемма доказана. ■

■ **Теорема 5.2.** *Пусть f и g есть вещественные функции, определенные в M почти всюду. Тогда если функции f и g измеримы, то измеримы также и функции $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$.*

Если сумма $f(x) + g(x)$ определена для почти всех $x \in M$, то функция $f + g$ измерима. Для всякого $\alpha \neq 0$ функция αf измерима.

З а м е ч а н и е. Требование $\alpha \neq 0$ в последнем утверждении теоремы введено только для того, чтобы избежать ситуации, когда $f(x) = \pm\infty$ на множестве, не являющемся пренебрежимым.

Доказательство теоремы. Пусть $E_1 \subset M$ и $E_2 \subset M$ — пренебрежимые множества такие, что $f(x)$ определено для всех $x \notin E_1$, а $g(x)$ определено для любого $x \notin E_2$. Построим последовательности $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ и $(\psi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ функций класса $\mathscr{F}$, сходящиеся почти всюду к функциям f и g соответственно.

Пусть $A_1 \subset M \setminus E_1$ и $A_2 \subset M \setminus E_2$ — пренебрежимые множества такие, что $\varphi_\nu(x) \to f(x)$ для любого $x \notin E_1 \cup A_1$ и $\psi_\nu(x) \to g(x)$ для всех $x \notin E_2 \cup A_2$.

Множество $E = E_1 \cup A_1 \cup E_2 \cup A_2$ пренебрежимо. Для всякого $x \notin E$ величины $f(x)$ и $g(x)$ определены, причем $f(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x)$ и $g(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \psi_\nu(x)$. В силу леммы 5.1 для всякого $x \notin E$ имеем

$$\max\{f(x), g(x)\} = \lim_{\nu \to \infty} \max\{\varphi_\nu(x), \psi_\nu(x)\},$$
$$\min\{f(x), g(x)\} = \lim_{\nu \to \infty} \min\{\varphi_\nu(x), \psi_\nu(x)\}.$$

Функции $\max\{\varphi_\nu, \psi_\nu\}$ и $\min\{\varphi_\nu, \psi_\nu\}$ принадлежат классу $\mathscr{F}$ при каждом $\nu \in \mathbb{N}$. Согласно определению доказанное означает, что функции $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ измеримы.

Если $x \notin E_1 \cup E_2$, то для этого x определены значения каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$.

Предположим, что сумма $f(x) + g(x)$ определена для почти всех $x \in \mathbb{M}$, т. е. существует пренебрежимое множество $E_0 \subset M \setminus (E_1 \cup E_2)$ такое, что для всякого $x \notin E_0 \cup E_1 \cup E_2$ определено $f(x) + g(x)$. Это означает, что выражение $f(x) + g(x)$ не является суммой вида $-\infty + \infty$ или $\infty + (-\infty)$. Для всякого $x \notin E_0 \cup E_1 \cup E_2$ имеет место равенство

$$f(x) + g(x) = \lim_{\nu \to \infty} [\varphi_\nu(x) + \psi_\nu(x)].$$

Функция $\varphi_\nu + \psi_\nu$ при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ принадлежит классу $\mathscr{F}$. При $\nu \to \infty$ функции $\varphi_\nu + \psi_\nu$ сходятся к $f + g$ почти всюду. Согласно определению отсюда следует, что функция $f + g$ измерима.

Наконец, заметим, что если функции φ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, класса $\mathscr{F}$ при $\nu \to \infty$ сходятся почти всюду в M к функции f и $\alpha \neq 0$, то функции $\alpha\varphi_\nu$ почти всюду сходятся к функции αf. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ функция $\alpha\varphi_\nu$ принадлежит классу $\mathscr{F}$. Отсюда следует измеримость функции αf. Теорема доказана. ■

■ ***Лемма 5.2.*** *Пусть f есть неотрицательная вещественная функция, определенная в M почти всюду. Тогда если функция f измерима, то существует последовательность неотрицательных функций класса $\mathscr{F}$, сходящаяся к f почти всюду.*

Доказательство. Пусть f — неотрицательная измеримая функция, $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций класса $\mathscr{F}$, сходящаяся к f почти всюду. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ функция $|\varphi_\nu|$ принадлежит классу $\mathscr{F}$, и для всякого $x \in M$, для которого $\varphi_\nu(x) \to f(x)$ при $\nu \to \infty$, также и $|\varphi_\nu| \to |f(x)|$ при $\nu \to \infty$. Так как функция f неотрицательна, то $|f(x)| \equiv f(x)$ и, значит, $|\varphi_\nu(x)| \to f(x)$ почти всюду. Последовательность $(|\varphi_\nu|)_{\nu\in\mathbb{N}}$ и есть искомая. Лемма доказана. ■

■ ***Теорема 5.3.*** *Пусть f есть измеримая функция. Тогда если существует интегрируемая функция g такая, что $|f(x)| \leq g(x)$ для почти всех $x \in M$, то функция f интегрируема.*

Доказательство. Предположим, что функции f и g удовлетворяют всем условиям теоремы, причем функция f неотрицательна. Согласно лемме 5.2 найдется последовательность $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ неотрицательных функций класса $\mathscr{F}$, сходящаяся к f почти всюду.

Положим $f_\nu = \min\{\varphi_\nu, g\}$. При всяком ν функция f_ν интегрируема, и для почти всех $x \in M$ выполняется неравенство $0 \leq f_\nu(x) \leq g(x)$. При $\nu \to \infty$ для почти всех $x \in M$ имеем $f_\nu(x) \to \min\{f(x), g(x)\} = f(x)$.

На основании *теоремы Лебега о предельном переходе* (следствие 2 теоремы 4.3) из доказанного следует интегрируемость f.

Рассмотрим случай, когда f есть функция произвольного знака. Из условий теоремы следует, что $f^+(x) \leq g(x)$ и $f^-(x) \leq g(x)$ для почти всех $x \in M$. Функции f^+ и f^- неотрицательны и измеримы.

Из доказанного следует, что f^+ и f^- интегрируемы и, следовательно, интегрируема также и функция f. Теорема доказана. ■

5.2. Теорема о пределе последовательности измеримых функций

Здесь будет доказано, что предел последовательности измеримых функций, сходящейся почти всюду, есть измеримая функция.

■ ***Лемма 5.3.*** *Пусть дана система с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$, и пусть f есть вещественная функция, определенная в M почти всюду. Если существует последовательность $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ интегрируемых функций, сходящаяся к f почти всюду, то функция f измерима.*

Доказательство. Пусть $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть последовательность интегрируемых функций, сходящаяся к f почти всюду. Пусть E_1 есть пренебрежимое множество такое, что $f(x)$ определено для всех $x \notin E_1$, а $E_2 \subset M \setminus E_1$ — множество всех x, для которых сходимость $f_\nu(x) \to$ $\to f(x)$ не имеет места.

По условию множество E_2 также пренебрежимо. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ найдем функцию φ_ν класса $\mathscr{F}$ такую, что $\|\varphi_\nu - f_\nu\|_{L_1} < \frac{1}{2^\nu}$. Имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|\varphi_\nu - f_\nu\|_{L_1} < \infty,$$

откуда следует, что $\varphi_\nu(x) - f_\nu(x) \to 0$ для почти всех $x \in M$.

Пусть E_3 есть множество *меры нуль*, состоящее из всех точек x, для которых $\varphi_\nu(x) - f_\nu(x)$ не стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Положим $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Возьмем произвольно точку $x \in M \setminus E$. Тогда $x \notin E_1$ и, значит, для этого x значение $f(x)$ определено.

Далее, в этом случае $x \notin E_2$ и, значит, $f_\nu(x) \to f(x)$ при $\nu \to \infty$. Данная точка x не принадлежит также и множеству E_3, откуда вытекает, что $\varphi_\nu(x) - f_\nu(x) \to 0$ для этого x при $\nu \to \infty$.

Из доказанного следует, что $\varphi_\nu(x) \to f(x)$ при $\nu \to \infty$ для всякого $x \notin E$. Таким образом, построена последовательность $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ функций класса $\mathscr{F}$, сходящаяся к f почти всюду. Тем самым установлено, что функция f измерима. Лемма доказана. ■

■ ***Теорема 5.4.*** *Пусть дана система с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$, и пусть f есть вещественная функция, определенная в M почти всюду. Тогда если существует последовательность измеримых функций, сходящаяся к f почти всюду, то функция f измерима.*

Доказательство. Предположим, что функция f удовлетворяет условию теоремы. Пусть $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть последовательность измеримых функций, сходящаяся к f почти всюду.

Рассмотрим сначала случай, когда функции f и f_ν все неотрицательные. Пусть E_0 есть множество *меры нуль* такое, что для всякого $x \notin E_0$ значения $f(x)$ и $f_\nu(x)$ определены для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и $f_\nu(x) \to f(x)$ при $\nu \to \infty$. Согласно лемме 5.2 при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ найдется последовательность $(\varphi_{\nu,m})_{m \in \mathbb{N}}$ неотрицательных функций класса $\mathscr{F}$, сходящаяся к f_ν почти всюду при $\nu \to \infty$.

Пусть E_ν есть множество *меры нуль* такое, что для всех $x \notin E_\nu$ $f_\nu(x)$ определено и $\varphi_{\nu,m}(x) \to f_\nu(x)$ при $m \to \infty$. Положим

$$E = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} E_\nu.$$

Отмечаем, что множество E пренебрежимо. Для всякого $x \notin E$ имеем $f_\nu(x) \to f(x)$ при $\nu \to \infty$ и $\varphi_{\nu,m}(x) \to f_\nu(x)$ при $m \to \infty$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\theta_k(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \varphi_{\nu,m}(x).$$

Фиксируем произвольно значение $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$g_k = \min\{\theta_k, f\}, \quad g_{k,\nu} = \min\{\theta_k, f_\nu\}.$$

Для всякого $x \notin E$ при $\nu \to \infty$ имеем $g_{k,\nu}(x) \to g_k(x)$. Каждая из функций $g_{k,\nu}$ измерима. При этом $0 \le g_{k,\nu}(x) \le \theta_k(x)$ для всякого $x \notin E$, т. е. для почти всех $x \in M$. Отсюда в силу теоремы 5.3 следует, что функция $g_{k,\nu}$ интегрируема.

Для почти всех $x \in M$ имеем $g_{k,\nu}(x) \to g_k(x)$ и $0 \le g_{k,\nu}(x) \le \theta_k(x)$. В силу *теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла* (следствие 2 теоремы 4.3) отсюда вытекает, что функция g_k интегрируема.

Докажем теперь, что $g_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ для всех $x \notin E$. Действительно, если $f(x) = 0$ для некоторого $x \notin E$, то

$$g_k(x) = \min\{\theta_k(x), f(x)\} = \min\{\theta_k(x), 0\} = 0$$

для любого k и, значит, в этом случае $g_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$.

Пусть $f(x) > 0$. Так как $f_\nu(x) \to f(x)$ для данного x при $\nu \to \infty$, то найдется ν_0 такое, что $f_{\nu_0}(x) > 0$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{\nu_0,m}(x) = f_{\nu_0}(x) > 0$$

и, значит, ряд

$$\varphi_{\nu_0,1}(x) + \varphi_{\nu_0,2}(x) + \dots + \varphi_{\nu_0,m}(x) + \dots$$

расходится, поскольку для него не выполнено необходимое условие сходимости.

Пусть $\Phi_k(x)$ есть *частная сумма* с номером k этого ряда. Так как все члены ряда неотрицательны и ряд расходится, то $\Phi_k(x) \to \infty$ при $k \to \infty$. Если $k \ge \nu_0$, то в силу неотрицательности функций $\varphi_{\nu,m}$ имеем

$$\theta_k(x) \ge \sum_{m=1}^{k} \varphi_{\nu_0,m}(x) = \Phi_k(x),$$

откуда следует, что $\theta_k(x) \to \infty$ при $k \to \infty$.

Из доказанного следует, что $g_k(x)$ при $k \to \infty$ стремится к пределу, равному

$$\min\{f(x), \infty\} = f(x),$$

т. е. и в данном случае $g_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$.

Таким образом, мы построили последовательность интегрируемых функций, сходящуюся к f почти всюду. В силу леммы 5.3 тем самым доказано, что функция f является измеримой.

В проделанных рассуждениях предполагалось, что функции f и f_ν неотрицательны.

Рассмотрим общий случай. Пусть $(f_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$ — произвольная последовательность измеримых функций, сходящаяся почти всюду к функции f. Тогда $f_\nu^+(x) \to f^+(x)$ и $f_\nu^-(x) \to f^-(x)$ при $\nu \to \infty$ для почти всех x. Функции f_ν^+ и f_ν^- неотрицательны и измеримы. Значит, по доказанному, функции f^+ и f^- измеримы. Отсюда вытекает измеримость функции f. Теорема доказана. ■

▼ ***Следствие.*** *Пусть $(f_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$ — произвольная последовательность вещественных функций и функции U и V определены посредством равенств*

$$U(x) = \sup_{\nu\in\mathrm{N}} f_\nu(x),$$
$$V(x) = \inf_{\nu\in\mathrm{N}} f_\nu(x).$$

Тогда если каждая из функций f_ν измерима, то U и V есть измеримые функции.

Доказательство. Определим вспомогательные последовательности функций $(U_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$ и $(V_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$, полагая $U_1 = V_1 = f_1$. Если U_ν и V_ν определены, то

$$U_{\nu+1} = \max\{U_\nu, f_{\nu+1}\},$$
$$V_{\nu+1} = \min\{U_\nu, f_{\nu+1}\}.$$

Последовательность $(U_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$ возрастающая, последовательность $(V_\nu)_{\nu\in\mathrm{N}}$ убывающая. При $\nu \to \infty$ имеем $U_\nu(x) \to U(x)$ и $V_\nu(x) \to V(x)$ для всех $x \in M$, для которых величины $U(x)$ и $V(x)$ определены.

Функции $U_1 = V_1 = f_1$ измеримы. Если для некоторого $\nu \in \mathrm{N}$ измеримость функций U_ν и V_ν установлена, то в силу теоремы 5.2 отсюда вытекает измеримость функций $U_{\nu+1}$ и $V_{\nu+1}$.

На основании *принципа математической индукции* получаем, что функции U_ν и V_ν измеримы для всех $\nu \in \mathrm{N}$. Имеем

$$U(x) = \lim_{\nu\to\infty} U_\nu(x),$$
$$V(x) = \lim_{\nu\to\infty} V_\nu(x).$$

Таким образом, из сказанного следует измеримость каждой из функций U и V. Следствие доказано. ▼

5.3. Распространение интеграла на измеримые функции

Зададим произвольно систему с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{C}, I)$. Множество всех неотрицательных измеримых функций в системе с интегрированием Σ обозначим символом $\mathbf{M}^+(\Sigma)$.

Понятие интеграла частично может быть распространено на случай измеримых функций. Простоты ради мы ограничимся случаем неотрицательных функций. Заметим, что определить понятие интеграла для произвольной измеримой функции — с сохранением некоторых из его основных свойств — невозможно.

Пусть f есть неотрицательная измеримая функция, $f \in \mathbf{M}^+(\Sigma)$. Если f интегрируема, то величина $I(f)$ имеет тот же смысл, что и ранее (см. определение в § 2). Если же функция f не является интегрируемой, то полагаем $I(f) = \infty$.

■ **Теорема 5.5.** *Пусть f и g — две функции класса $\mathbf{M}^+(\Sigma)$. Тогда если $f(x) \leq g(x)$ почти всюду в M, то имеет место неравенство*

$$I(f) \leq I(g). \tag{5.1}$$

Доказательство. Если $I(g) = \infty$, то неравенство теоремы, очевидно, выполняется. Предположим, что $I(g) < \infty$. Тогда функция g интегрируема. По условию, $f(x) \leq g(x)$ для почти всех $x \in M$. Отсюда в силу теоремы 5.3 следует, что функция f интегрируема и неравенство (5.1) вытекает из следствия 2 теоремы 2.2. Теорема доказана. ■

■ **Теорема 5.6.** *Для любых двух функций f и g класса $\mathbf{M}^+(\Sigma)$ имеет место равенство*

$$I(f+g) = I(f) + I(g). \tag{5.2}$$

Доказательство. Если $I(f) < \infty$ и $I(g) < \infty$, то функции f и g интегрируемы и в этом случае доказываемое утверждение следует из свойств интеграла, установленных ранее (теорема 2.1).

Предположим, что хотя бы одна из величин $I(f)$ и $I(g)$ равна ∞. Тогда $I(f) + I(g) = \infty$, и наша задача состоит в том, чтобы доказать, что $I(f+g) = \infty$.

Допустим, напротив, что $I(f+g)$ конечно. Тогда функция $f+g$ интегрируема. Так как $0 \leq f(x) \leq f(x) + g(x)$ и $0 \leq g(x) \leq f(x) + g(x)$ для почти всех $x \in M$, то функции f и g интегрируемы и величины $I(f)$ и $I(g)$ конечны, что противоречит сделанному выше допущению. Значит, $I(f+g) = \infty$, т. е. и в этом случае $I(f+g) = I(f) + I(g)$. Теорема доказана. ■

■ **Теорема 5.7.** *Пусть $(f_\nu)_{\nu \in \mathrm{N}}$ — произвольная возрастающая последовательность функций класса $\mathbf{M}^+(\Sigma)$, $f(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} f_\nu(x)$ для $x \in M$. Определенная таким образом функция f является измеримой, причем*

$$I(f) = \lim_{\nu \to \infty} I(f_\nu). \tag{5.3}$$

Для любой последовательности $(u_\nu)_{\nu \in \mathrm{N}}$ измеримых функций, неотрицательных и определенных в M почти всюду, функция $F = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ является измеримой, причем имеет место равенство

$$I(F) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I(u_\nu). \tag{5.4}$$

Замечание. Если по крайней мере одно из слагаемых, встречающихся в каждой из сумм, указанных во втором утверждении теоремы 5.7, равно ∞, то и всю сумму мы считаем равной ∞.

Доказательство теоремы. Измеримость функции f следует из теоремы 5.4. Так как последовательность $(f_\nu)_{\nu \in \mathrm{N}}$ возрастающая, то последовательность $(I(f_\nu))_{\nu \in \mathrm{N}}$ также возрастающая. При каждом $\nu \in \mathrm{N}$ имеем $I(f_\nu) \le I(f)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu) \le I(f)$.

Если $\lim\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu) = \infty$, то отсюда вытекает, что $I(f) = \infty$, и, стало быть, в этом случае равенство (5.3) верно.

Если же предел $\lim\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu)$ конечен, то, как следует из *теоремы Леви для последовательностей* (следствие 3 теоремы 4.1), предельная функция f является интегрируемой, причем $I(f) = \lim\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu)$.

Таким образом, доказано утверждение теоремы, относящееся к неравенству (5.3).

Докажем утверждение теоремы, касающееся равенства (5.4). Положим $F_\nu = \sum\limits_{\lambda=1}^{\nu} u_\lambda$. Последовательность функций $(F_\nu)_{\nu \in \mathrm{N}}$, получаемая таким образом, является возрастающей. Для почти всех $x \in M$ существует предел $\lim\limits_{\nu \to \infty} F_\nu(x) = F(x)$. Отсюда в силу доказанного утверждения теоремы относительно функциональных последовательностей вытекает, что

$$I(F) = \lim_{\nu \to \infty} I(F_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} I\Big(\sum_{\lambda=1}^{\nu} u_\lambda\Big) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{\lambda=1}^{\nu} I(u_\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I(u_\nu).$$

Теорема доказана. ■

▼ ***Следствие.*** *Для всякой неотрицательной измеримой функции f ее L_1-норма равна $I(f)$.*

Действительно, в случае, когда f есть интегрируемая функция, данное предложение доказано ранее. Предположим, что f неинтегрируема. Тогда $I(f) = \infty$. Пусть $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ — произвольная последовательность простых функций, мажорирующая функцию f. Для всякого $x \in M$ существует предел $\lim\limits_{\nu \to \infty} f_\nu(x)$, который мы обозначим символом $\bar{f}$. Функция $\bar{f}$ измерима, и для всех $x \in M$ имеет место неравенство $0 \leq f(x) \leq \bar{f}(x)$. Отсюда в силу теоремы 5.5 вытекает, что $I(\bar{f}) = \infty$. Согласно теореме 5.7 $I(\bar{f}) = \lim\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu)$. Таким образом, для всякой последовательности простых функций $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, мажорирующей данную функцию f, в рассматриваемом случае $I(f_\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$. Отсюда согласно определению L_1-нормы вытекает, что $\|f\|_{L_1(M)} = \infty$. Следствие доказано. ▼

■ ***Теорема 5.8*** (теорема Фату для последовательности измеримых функций). *Пусть $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть произвольная последовательность неотрицательных измеримых функций, и пусть функция f определена равенством $f(x) = \varliminf\limits_{\nu \to \infty} f_\nu(x)$. Тогда имеет место неравенство*

$$I(f) \leq \varliminf_{\nu \to \infty} I(f_\nu). \tag{5.5}$$

Доказательство. Предположим, что выполнены все условия теоремы. Положим $L = \varliminf\limits_{\nu \to \infty} I(f_\nu)$. Если $L = \infty$, то неравенство (5.5) верно. Будем считать, что L конечно. Для $\nu \in \mathbb{N}$ обозначим через g_ν нижнюю огибающую последовательности $(f_\mu)_{\mu \geq \nu}$. Это означает, что $g_\nu(x) = \inf\limits_{\mu \geq \nu} f_\nu(x)$ для почти всех $x \in M$. Следствие теоремы 5.4 позволяет заключить, что каждая из функций g_ν измерима. Функции g_ν все неотрицательны в силу неотрицательности функций f_ν. При всяком $\mu \geq \nu$ имеем $g_\nu \leq f_\mu$, и, значит, $I(g_\nu) \leq I(f_\mu)$ при любом $\mu \geq \nu$. Отсюда следует, что $I(g_\nu) \leq \inf\limits_{\mu \geq \nu} I(f_\mu) \leq L$. По предположению L конечно, и, значит, $I(g_\nu) < \infty$ для всех ν, т. е. функции g_ν все интегрируемы.

Последовательность функций $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ возрастающая. Для почти всех $x \in M$ имеем $\lim\limits_{\nu \to \infty} g_\nu(x) = \varliminf\limits_{\nu \to \infty} f_\nu(x) = f(x)$.

Последовательность интегралов $(I(g_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ ограничена сверху. Отсюда согласно *теореме Леви для последовательностей* (следствие 3 теоремы 4.1) вытекает, что функция f интегрируема, причем

$$I(f) = \lim_{\nu \to \infty} I(g_\nu) \leq L = \varliminf_{\nu \to \infty} I(f_\nu).$$

Теорема доказана. ■

5.4. Понятие измеримого множества. Интеграл как аддитивная функция множества

В произвольной системе с интегрированием может быть выделен некоторый класс множеств, которые мы будем называть *измеримыми*. В случае евклидовой системы с интегрированием измеримые множества есть в точности те, для которых может быть определено естественным образом понятие n-мерного объема. «Естественность» в данном случае означает, что n-мерный объем должен обладать некоторыми «хорошими» свойствами.

5.4.1. Пусть дана система с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$. По произвольному множеству A определим операцию над множествами, которую будем называть *операцией огораживания функции f по множеству A*.

Сначала определим по множеству $A \subset M$ некоторые вспомогательные функции $\chi_A(x)$ и $\theta_A(x)$, полагая $\chi_A(x) = 1$, $\theta_A(x) = \infty$ при $x \in A$, $\chi_A(x) = \theta_A(x) = 0$ при $x \notin A$. Функция χ_A есть уже известная нам функция — *индикатор* или *характеристическая функция множества A*.

Предположим, что задана функция f, область определения которой есть подмножество M, содержащее множество A. Полагаем

$$R_A f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Если взять $f(x) \equiv 1$, то $R_A f = \chi_A$, а если $f(x) \equiv \infty$, то $R_A f = \theta_A$. Будем говорить, что функция $R_A f$ есть результат *огораживания функции f по множеству A*.

Множество $A \subset M$ называется *измеримым относительно системы с интегрированием* Σ, если функция χ_A в этой системе является измеримой.

Если множество A измеримо, то функция θ_A также является измеримой. Действительно, в этом случае при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ функция $\nu\chi_A$ измерима и $\nu\chi_A(x) \to \theta_A(x)$ при $\nu \to \infty$ для всех x, откуда и следует измеримость функции θ_A.

Пусть даны вещественные функции f и g, определенные почти всюду в M. Предположим, что линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ также определена почти всюду в M. Тогда имеет место равенство

$$R_A(\lambda f + \mu g) = \lambda R_A f + \mu R_A g.$$

Действительно, если $x \notin A$, то $R_A(\lambda f(x) + \mu f(x)) = 0$, $R_A f(x) = 0$ и $R_A g(x) = 0$, и для этого x, очевидно, имеет место равенство

$$R_A(\lambda f(x) + \mu f(x)) = \lambda R_A f(x) + \mu R_A g(x). \tag{5.6}$$

Если же $x \in A$ и для этого x определены $f(x)$, $g(x)$ и $\lambda f(x) + \mu f(x)$, то $R_A f(x) = f(x)$, $R_A g(x) = g(x)$, $R_A[\lambda f(x) + \mu f(x)] = \lambda f(x) + \mu f(x)$, и, значит, в данном случае также

$$R_A(\lambda f(x) + \mu f(x)) = \lambda R_A f(x) + \mu R_A g(x).$$

Таким образом, функции, стоящие в равенстве (5.6) слева и справа, принимают одинаковые значения для всех $x \in M$, что и требовалось доказать.

Пусть $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ есть измеримая функция. Тогда для любого измеримого множества A функция $R_A f$ является измеримой. Действительно, предположим сначала, что функция f неотрицательна. Тогда, как очевидно, имеет место равенство $R_A f(x) = \min\{\theta_A(x), f(x)\}$. Так как функции f и θ_A измеримы, то отсюда вытекает измеримость функции $R_A f$.

В случае, когда $f(x)$ принимает значения произвольного знака, имеет место равенство $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Отсюда следует, что для всех $x \in M$

$$R_A f(x) = R_A f^+(x) - R_A f^-(x).$$

По доказанному, функции $R_A f^+$ и $R_A f^-$ измеримы, и, следовательно, функция $R_A f$ также является измеримой.

■ **Лемма 5.4.** *Пусть f — неотрицательная функция. Тогда для любых множеств $A, B \subset M$ выполняется равенство*

$$R_{A \setminus B} f = \{R_A f - R_B f\}^+. \tag{5.7}$$

Доказательство. Пусть f есть неотрицательная функция, A и B — произвольные подмножества M. Положим $E = A \setminus B$. Пусть $x \in E$. Тогда $x \in A$, $x \notin B$.

Для данного x имеем $R_E f(x) = f(x)$ и в то же время $R_A f(x) = f(x)$, $R_B f(x) = 0$. Значит,

$$[R_A f(x) - R_B f(x)]^+ = [f(x)]^+ = f(x),$$

так что для данного x равенство (5.7) выполняется.

Предположим, что $x \notin E$. Тогда $R_E f(x) = 0$. Возможны два случая: a) $x \in B$ и b) $x \notin B$.

В случае a) могут иметь место две возможности: либо $x \in A$ и тогда $R_A f(x) = f(x)$ и $R_B f(x) = f(x)$, либо $x \notin A$ и тогда $R_A f(x) - R_B f(x) = -f(x)$ и $[R_A f(x) - R_B f(x)]^+ = 0$.

В случае b) x не является элементом множества A, ибо в противном случае x было бы, вопреки предположению, элементом E. Значит, для данного x выполняется равенство $R_A f(x) = R_B f(x) = 0$. Тем самым лемма доказана. ■

5.4.2. Установим дальнейшие свойства *операции огораживания.*

■ ***Лемма 5.5.*** *Пусть $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ есть неотрицательная функция, $(A_t)_{t\in T}$ — непустое семейство подмножеств M, U есть объединение множеств данного семейства, V — их пересечение,*

$$U = \bigcup_{t\in T} A_t, \quad V = \bigcap_{t\in T} A_t.$$

Тогда имеют место равенства

$$R_U f = \sup_{t\in T} R_{A_t} f, \quad R_V f = \inf_{t\in T} R_{A_t} f. \tag{5.8}$$

Пусть $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть последовательность попарно непересекающихся подмножеств M, U — объединение множеств этой последовательности. Тогда

$$R_U f = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{A_\nu} f. \tag{5.9}$$

Доказательство. Пусть даны неотрицательная функция f и семейство множеств $(A_t)_{t\in T}$, а множества U, V определены, как указано в формулировке леммы. Из определения функции $R_E f$ следует, что для всякого множества $E \subset M$ для любого $x \in M$ выполняется неравенство

$$R_E f(x) \le f(x).$$

Пусть $x \notin U$. Тогда $R_U f(x) = 0$. В этом случае $x \notin A_t$ для всех $t \in T$ и, значит, для данного x выполняется равенство $R_{A_t} f(x) = 0$, каково бы ни было $t \in T$, и равенство

$$R_U f(x) = \sup_{t\in T} R_{A_t} f$$

для данного x верно.

Пусть $x \in U$. Тогда $R_U f(x) = f(x)$. В этом случае x принадлежит хотя бы одному из множеств A_t, $t \in T$. Отсюда следует, что по крайней мере одна из величин $R_{A_t} f(x)$ равна $f(x)$ и, значит,

$$\sup_{t\in T} R_{A_t} f(x) \ge f(x).$$

Так как при каждом $t \in T$ имеем $R_{A_t} f(x) \le f(x)$, то, с другой стороны, имеем

$$\sup_{t \in T} R_{A_t} f(x) \le f(x).$$

Значит, также и для данного x

$$\sup_{t \in T} R_{A_t} f(x) = f(x).$$

Первое из равенств (5.8) доказано.

Докажем второе равенство (5.8). Пусть $x \in M$. Если $x \notin V$, то $R_V f(x) = 0$. В этом случае x не принадлежит хотя бы одному из множеств A_t, $t \in T$, и, значит, по крайней мере одно из чисел $R_{A_t} f(x)$ равно нулю. Отсюда следует, что для данного x имеет место равенство

$$\inf_{t \in T} R_{A_t} f(x) = 0 = R_V f(x).$$

Если же $x \in V$, то $R_V f(x) = f(x)$. В данном случае $x \in A_t$, каково бы ни было $t \in T$. Отсюда вытекает, что для этого x для всех $t \in T$ выполняется равенство $R_{A_t} f(x) = f(x)$. Значит,

$$\inf_{t \in T} R_{A_t} f(x) = f(x) = R_V f(x).$$

Тем самым доказано также и второе из равенств (5.8).

Докажем равенство (5.9). Пусть $(A_\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ есть произвольная последовательность попарно непересекающихся множеств, A — их объединение.

Если $x \notin A$, то $R_{A_\nu} f(x) = 0$ для всех ν, и в этом случае равенство (5.9) выполняется.

Предположим, что $x \in A$. Тогда $R_A f(x) = f(x)$. В этом случае найдется значение $\nu_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in A_{\nu_0}$. Так как множества A_ν попарно непересекающиеся, то $x \notin A_\nu$ при $\nu \ne \nu_0$. Мы получаем, что в данном случае $R_{A_\nu} f(x) = 0$ при $\nu \ne \nu_0$ и $R_{A_\nu} f(x) = f(x)$ при $\nu = \nu_0$. Отсюда видно, что для данного x также будем иметь

$$R_A f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{A_\nu} f(x).$$

Лемма доказана. ■

▼ **Следствие.** *Для любых двух множеств $A \subset M$ и $B \subset M$ и любой неотрицательной вещественной функции $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ выполняются равенства $R_{A \cup B} f = \max\{R_A f, R_B f\}$, $R_{A \cap B} f = \min\{R_A f, R_B f\}$.*

Для доказательства достаточно применить лемму 5.5 к случаю семейства, имеющего только два элемента. ▼

5.4.3. Функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ далее называется *обобщенно измеримой*, если для всякого измеримого множества $A \subset M$ функция $R_A f$ является измеримой.

Примеры обобщенно измеримых функций.

Пример 1. Всякая функция, измеримая в обычном смысле, как следует из доказанного выше (см. п. 5.1, теоремы 5.2 и 5.3), является обобщенно измеримой. В частности, *если функция f интегрируема, то она также и обобщенно измерима.*

Пример 2. Другой пример обобщенно измеримой функции — функция, тождественно равная единице.

Пусть $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ есть обобщенно измеримая функция, A — измеримое множество. Величина $I(R_A f)$, если таковая для данной функции f определена, называется *интегралом функции f по множеству A*. Для ее обозначения будем применять также выражение

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu(x).$$

Интеграл

$$\int\limits_M \chi_A(x)\,d\mu(x) = I(\chi_A)$$

называется *мерой множества A в этой системе с интегрированием* и обозначается символом $\mu_\Sigma(A)$. Индекс Σ в этой записи в дальнейшем опускается каждый раз, когда это не может привести к недоразумению.

В случае, когда Σ есть *евклидова система с интегрированием в пространстве* $\mathbb{R}^n$ (см. п. 2.1), понятие меры решает задачу строгого обоснования понятий объема и площади и имеет простой геометрический смысл.

5.4.4. Установим некоторые общие свойства измеримых функций и измеримых множеств в произвольной системе с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$. Докажем следующее утверждение.

■ ***Теорема 5.9.*** *Для любых двух измеримых множеств A, B множества $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$ измеримы. Для всякой последовательности измеримых множеств $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ объединение и пересечение множеств последовательности являются измеримыми множествами.*

Доказательство. Пусть A и B — произвольные измеримые множества. Тогда функции χ_A и χ_B измеримы. Применяя леммы 5.4 и 5.5 к функции $f(x) \equiv 1$, получим, что $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$, $\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$ и $\chi_{A\setminus B} = [\chi_A - \chi_B]^+$. В силу теоремы 5.2 функции

$\max\{\chi_A, \chi_B\}$, $\min\{\chi_A, \chi_B\}$ измеримы. Таким образом, функции $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$ и $\chi_{A\setminus B}$ являются измеримыми, и, значит, $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$ есть измеримые множества.

Пусть $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность измеримых множеств,

$$U = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu, \quad V = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu.$$

Полагая в лемме 5.5 $f(x) \equiv 1$, получим

$$\chi_U = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \chi_{A_\nu}, \quad \chi_V = \inf_{\nu\in\mathbb{N}} \chi_{A_\nu}.$$

Отсюда следует измеримость функций χ_U и χ_V, а значит, и множеств U и V. Теорема доказана. ∎

∎ ***Теорема 5.10*** (свойство счетной аддитивности интеграла как функции множества). *Пусть $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ есть неотрицательная обобщенно измеримая функция, $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ — последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств, U есть объединение множеств этой последовательности. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_U f(x)\, d\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{A_\nu} f(x)\, d\mu(x).$$

Доказательство. Пусть $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть произвольная последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств, U — объединение множеств последовательности и f есть неотрицательная обобщенно измеримая функция. Тогда согласно лемме 5.5 имеем

$$R_U f = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{A_\nu} f.$$

Функция $R_U f$ измерима в силу теоремы 5.7. Согласно лемме 5.5 имеет место равенство

$$I(R_U f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I(R_{A_\nu} f).$$

Тем самым теорема доказана. ∎

▼ ***Следствие*** (о счетной аддитивности меры). *Пусть $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть последовательность измеримых множеств. Тогда если эти множества попарно не имеют общих элементов, то выполняется равенство*

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu).$$

Данное предложение следует из теоремы 5.10, если в условиях, содержащихся в ней, положить $f(x) \equiv 1$. ▼

■ ***Теорема 5.11.*** *Для всякой убывающей последовательности измеримых множеств $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ такой, что $\mu(A_1)$ конечно и пересечение множеств последовательности $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ пусто, справедливо соотношение*

$$\lim_{\nu\to\infty} \mu(A_\nu) = 0.$$

Доказательство. Для $\nu = 1, 2, \ldots$ положим $\varphi_\nu = \chi_{A_\nu}$. Тогда при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_\nu \geq \varphi_{\nu+1}$. Отсюда вытекает, что последовательность функций $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ является убывающей. Каждая из функций φ_ν неотрицательна.

Из условия $\mu(A_1) < \infty$ вытекает, что функция φ_1 интегрируема. Так как $\varphi_1 \geq \varphi_\nu \geq 0$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$, то, как следует из теоремы 5.3, функция φ_ν интегрируема при всех $\nu \in \mathbb{N}$.

Для всех $x \in M$ выполняется $\varphi_\nu(x) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Действительно, возьмем произвольно $x \in M$. Так как пересечение последовательности множеств $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ пусто, то найдется номер ν_0 такой, что $x \notin A_{\nu_0}$. Так как последовательность $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ убывающая, то при $\nu \geq \nu_0$ множество $A_\nu \subset A_{\nu_0}$ и, значит, при всяком $\nu \geq \nu_0$ точка x не принадлежит множеству A_ν. Следовательно, для всех $\nu \geq \nu_0$ имеет место равенство $\varphi_\nu(x) = 0$. Отсюда вытекает, что $\varphi_\nu(x) \to 0$ при $\nu \to \infty$ для всех $x \in M$.

Так как $x \in M$ было выбрано произвольно, то, таким образом, доказано, что последовательность функций $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ поточечно сходится к нулю на множестве M. Эта последовательность убывающая, и все ее члены есть интегрируемые функции. В силу *теоремы Леви* из доказанного следует, что $\mu(E_\nu) = I(\varphi_\nu) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е. Из теорем 5.9, 5.10 и 5.11 вытекает теорема 3.1, ранее приведенная без доказательства.

5.5. Системы с интегрированием, счетные в бесконечности

5.5.1. Введем дополнительное условие, при котором может быть расширен класс операций, выполнение которых над измеримыми функциями снова приводит к измеримым функциям.

Пусть дана система с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$. Система Σ называется *счетной в бесконечности*, если в дополнение к условиям R1–R5 определения системы с интегрированием (см. § 2 этой главы) она удовлетворяет еще условию

R6. Существует последовательность $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ функций класса $\mathscr{F}$ такая, что $1 = \lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x)$ для всех $x \in M$.

В том частном случае, который для нас является основным, а именно, в случае *евклидовой системы с интегрированием с базисным пространством* $\mathbb{R}^n$, условие R6 выполняется. Действительно, для $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ пусть σ_ν есть n-мерный куб

$$[-\nu, \nu) \times [-\nu, \nu) \times \cdots \times [-\nu, \nu).$$

Пусть φ_ν есть индикатор этого куба. Так как куб σ_ν может быть представлен как объединение двоичных кубов ранга 1, то функция φ_ν является ступенчатой.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{\nu} \in \mathbb{N}$ таково, что $|x_i| < \bar{\nu}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $x \in \sigma_\nu$ при $\nu \geq \bar{\nu}$ и, значит, для всех $\nu \geq \bar{\nu}$ справедливо равенство $\varphi_\nu(x) = 1$. Следовательно, мы получаем, что $\varphi_\nu(x) \to 1$ при $\nu \to \infty$.

Так как $x \in \mathbb{R}^n$ было взято произвольно, то мы получили, что условие R6 для данной системы с интегрированием выполняется.

Зададим произвольно систему с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$, счетную в бесконечности. (До конца этого раздела все рассуждения относятся именно к этой системе с интегрированием.)

Из условия R6 вытекает, что функция, тождественно постоянная на базисном пространстве M системы с интегрированием Σ, является измеримой. Отсюда в силу установленных выше свойств измеримых функций (теорема 5.2) вытекает, что для всякой измеримой функции f в системе с интегрированием — счетной в бесконечности — функции $f(x) - t$, $[f(x) - t]^+$, $\max\{f(x), t\}$ и $\min\{f(x), t\}$ измеримы, каково бы ни было число $t \in \mathbb{R}$.

5.5.2. Пусть дана функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$. Множества $f^{-1}(\langle a, b \rangle)$, где $\langle a, b \rangle$ — произвольный промежуток в $\overline{\mathbb{R}}$, называются *множествами Лебега функции* f.

Для одного частного случая множеств Лебега введем специальные обозначения. Пусть дано произвольное число $t \in \mathbb{R}$. Для функции $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ полагаем

$$E_f(t) = \{x \in M|\ f(x) > t\} = f^{-1}\{(t,\infty]\}, \tag{5.10}$$
$$\overline{E}_f(t) = \{x \in M|\ f(x) \geq t\} = f^{-1}\{[t,\infty]\}. \tag{5.11}$$

Отметим некоторые с в о й с т в а множеств Лебега $E_f(t)$ и $\overline{E}_f(t)$.

Если $f(x) > t$, то $f(x) \geq t$, т. е. если $x \in E_f(t)$, то $x \in \overline{E}_f(t)$. Мы получаем, что при каждом $t \in \overline{\mathbb{R}}$ имеет место включение

$$\overline{E}_f(t) \supset E_f(t). \tag{5.12}$$

Далее, легко проверяется, что если $t_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $t_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ таковы, что $t_1 < t_2$, то имеет место включение $E_f(t_1) \supset \overline{E}_f(t_2)$.

Наша ближайшая цель — доказать, что если функция f измерима, то и ее *множества Лебега* также являются измеримыми. Для этого нам потребуется следующее простое предложение.

■ ***Лемма 5.6.*** *Для $y \in \overline{\mathbb{R}}$, $t \in \mathbb{R}$ пусть*

$$\sigma(y,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ y > t, \\ 0, & \text{если } \ y \leq t; \end{cases} \qquad \bar\sigma(y,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ y \geq t, \\ 0, & \text{если } \ y < t. \end{cases}$$

Для произвольного $\nu \in \mathbb{N}$ положим $\sigma_\nu(y,t) = \min\{\nu(y-t)^+, 1\}$. Тогда имеют место следующие соотношения: для любых $y \in \overline{\mathbb{R}}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\sigma(y,t) = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(y,t), \quad \bar\sigma(y,t) = \lim_{\nu\to\infty} \sigma\left(y, t - \frac{1}{\nu}\right).$$

Доказательство. Если $y \leq t$, то $(y-t)^+ = 0$ и, значит, $\sigma_\nu(y,t) = 0 = \sigma(y,t)$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и, следовательно, в этом случае верно равенство

$$\sigma(y,t) = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(y,t). \tag{5.13}$$

Пусть $y > t$. Тогда найдется $\bar\nu$ такое, что $\bar\nu(y-t) \geq 1$. При всяком $\nu \geq \bar\nu$ выполняются равенства $\sigma_\nu(y,t) = 1 = \sigma(y,t)$. Это доказывает, что равенство (5.13) верно и для данного y.

Пусть $y \geq t$. Тогда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ выполняется $y > t - \dfrac{1}{\nu}$ и $\sigma\left(y, t-\dfrac{1}{\nu}\right) = 1 = \bar\sigma(y,t)$, откуда следует, что в этом случае верно равенство

$$\bar\sigma(y,t) = \lim_{\nu\to\infty} \sigma\left(y, t - \frac{1}{\nu}\right). \tag{5.14}$$

Пусть $y < t$. Тогда найдется $\bar{\nu}$ такое, что $y < t - \frac{1}{\bar{\nu}}$. Для всех $\nu \geq \bar{\nu}$, очевидно, имеем $\sigma\left(y, t - \frac{1}{\nu}\right) = 0 = \bar{\sigma}(y, t)$. Тем самым установлено, что равенство (5.14) выполняется и в этом случае. Лемма доказана. ■

5.5.3. Пусть дана функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда для всякого $t \in \mathbb{R}$ имеем равенства

$$\sigma(f(x), t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad f(x) > t, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) \leq t; \end{cases} \qquad \bar{\sigma}(f(x), t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad f(x) \geq t, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) < t. \end{cases}$$

Это означает, что функция $x \mapsto \sigma(f(x), t)$ является индикатором множества $E_f(t)$, а функция $x \mapsto \bar{\sigma}(f(x), t)$ — индикатором множества $\overline{E}_f(t)$.

■ ***Теорема 5.12.*** *Если система с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$ счетна в бесконечности, то для всякой измеримой функции $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ множества $E_f(t)$ и $\overline{E}_f(t)$ измеримы.*

Доказательство. Пусть f есть измеримая функция. Зададим произвольно значение $t \in \mathbb{R}$. Функции $\alpha_\nu(x) = \min\{\nu(f(x) - t)^+, 1\}$ измеримы при всех $\nu \in \mathbf{N}$, как следует из теоремы 5.2. При $\nu \to \infty$ для всех $x \in M$ в силу леммы 5.6 предел $\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu(x)$ существует и равен $\sigma(f(x), t)$. На основании теоремы 5.4 это позволяет заключить, что функция $x \mapsto \sigma(f(x), t)$ измерима при любом $t \in \mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что $\sigma(f(x), t) \equiv \chi_{E_f(t)}(x)$. Таким образом, доказана измеримость индикатора множества $E_f(t)$, т. е. это множество измеримо при любом $t \geq 0$.

Функции $\beta_\nu(x) = \min\{[\nu(f(x) - t) + 1]^+, 1\}$ при $\nu \to \infty$, как следует из леммы 5.6, поточечно сходятся к функции $\bar{\sigma}(f(x), t)$, которая тождественно совпадает с функцией $\chi_{\overline{E}_f(t)}$. Измеримость функций β_ν следует из теоремы 5.2. Применяя теорему 5.4, получаем, что функция $\chi_{\overline{E}_f(t)}$ измерима. Значит, множество $\overline{E}_f(t)$ является измеримым при любом $t \in \mathbb{R}$. Теорема доказана. ■

5.6. Общая теорема об операциях над измеримыми функциями

Зададим произвольно систему с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$. Будем предполагать, что эта система является счетной в бесконечности.

Пусть дан промежуток $\Delta = [p, q) \subset \mathbb{R}$ и χ_Δ есть его индикатор в $\mathbb{R}$, $\chi_\Delta(y) = 0$ при $y \notin \Delta$ и $\chi_\Delta(y) = 1$, если $y \in \Delta$.

Для всякой измеримой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ функция $\chi_\Delta[f(x)]$ измерима. Действительно, пусть

$$\bar{\sigma}(y,t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \geq t, \\ 0, & \text{если} \quad y < t, \end{cases}$$

есть функция, определенная в п. 5.5. Тогда имеет место равенство

$$\chi_\Delta(y) = \bar{\sigma}(y,p) - \bar{\sigma}(y,q). \tag{5.15}$$

Проверка данного равенства сводится к последовательному рассмотрению случаев: a) $y < p$, b) $p \leq y < q$ и c) $q \leq y$. Мы предоставляем это читателю.

Из равенства (5.15) следует, что

$$\chi_\Delta[f(x)] = \bar{\sigma}(f(x),p) - \bar{\sigma}(f(x),q) = \chi_{\overline{E}_f(p)} - \chi_{\overline{E}_f(q)}.$$

Так как функция f измерима и рассматриваемая система с интегрированием счетна в бесконечности, то множества $\overline{E}_f(p)$ и $\overline{E}_f(q)$ измеримы. Следовательно, мы получаем, что функция $\chi_\Delta[f(x)]$ есть разность двух измеримых функций и поэтому измерима.

Заметим, что $\chi_\Delta[f(x)]$ есть *характеристическая функция множества Лебега* $f^{-1}\{\Delta\}$ функции f.

■ **Теорема 5.13.** *Предположим, что система с интегрированием* $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$ *счетна в бесконечности. Пусть даны множество E в пространстве $\mathbb{R}^m$ и непрерывная функция $\Phi\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда если функции $f_k\colon M \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, измеримы, каждая из них всюду конечна и для всех $x \in M$ точка $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ пространства $\mathbb{R}^m$ принадлежит множеству E, то функция*

$$x \mapsto \Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

является измеримой.

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы. Зададим произвольно *брус* Δ в пространстве $\mathbb{R}^m$. Имеем

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_m,$$

где $\Delta_k = [p_k, q_k)$ есть полуоткрытые отрезки в множестве $\mathbb{R}$. Для $z \in \mathbb{R}^m$ пусть χ_Δ есть индикатор множества Δ в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Докажем измеримость функции $x \mapsto \chi_\Delta[f(x)]$. Каждая из функций $u_k(x) = \chi_{\Delta_k}[f_k(x)]$, как следует из рассуждений, предшествующих теореме, является измеримой. Для всех $x \in M$ имеет место равенство

$$\chi_\Delta[f(x)] = \min\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)\}. \tag{5.16}$$

Действительно, каждая из величин $u_k(x) = \chi_{\Delta_k}[f_k(x)]$, $k = 1, 2, \dots, m$, может принимать только два значения: 0 и 1.

Если $f(x) \notin \Delta$, то $\chi_\Delta[f(x)] = 0$. В этом случае найдется хотя бы одно значение k, $1 \leq k \leq m$, такое, что $f_k(x) \notin \Delta_k$ и, значит, $u_k(x) = \chi_{\Delta_k}[f_k(x)] = 0$. Отсюда следует, что в этом случае

$$\min\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)\} = 0 = \chi_\Delta[f(x)].$$

Если $f(x) \in \Delta$, то $\chi_\Delta[f(x)] = 1$ и при каждом $k = 1, 2, \dots, m$ $f_k(x) \in \Delta_k$ и, значит, $u_k(x) = \chi_{\Delta_k}[f_k(x)] = 1$. В данном случае

$$\min\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)\} = 1 = \chi_\Delta[f(x)].$$

Равенство (5.16), таким образом, доказано. В силу известных свойств измеримых функций (теорема 5.2) отсюда вытекает измеримость функции $\chi_\Delta[f(x)]$.

Зададим произвольно $\nu \in \mathbb{N}$ и найдем все *двоичные кубы ранга* ν в пространстве $\mathbb{R}^m$, которые содержат точки *куба* $\overline{Q}(0, \nu)$. Множество таких кубов конечно (см. § 1 этой главы). Пусть Δ_k, $k = 1, 2, \dots, m_\nu$, — все те из этих кубов, которые пересекаются с множеством E. Для каждого $k = 1, 2, \dots m_\nu$ выберем произвольно точку $y_k \in \alpha_k$, принадлежащую E. Положим

$$\Phi_\nu(y) = \sum_{k=1}^{m_\nu} \Phi(y_k)\chi_{\Delta_k}(y).$$

Функция

$$\Phi_\nu(f(x)) = \sum_{k=1}^{m_\nu} \Phi(y_k)\chi_{\Delta_k}(f(x)),$$

как следует из доказанного, измерима. При $\nu \to \infty$ имеем $\Phi_\nu(y) \to \Phi(y)$ для всех $y \in E$. Действительно, возьмем произвольно точку $y \in E$. Найдем $\bar{\nu}$ такое, что $y \in \overline{Q}(0, \bar{\nu})$. Пусть α_ν есть двоичный брус ранга ν, содержащий точку y. При $\nu \geq \bar{\nu}$ имеет место равенство $\Phi_\nu(y) = \Phi(z_\nu)$, где z_ν также принадлежит α_ν. Имеем $|z_\nu - y| \leq 2^{-\nu}\sqrt{m}$, и, значит, $z_\nu \to y$ при $\nu \to \infty$.

Поскольку функция Φ непрерывна, то $\Phi_\nu(y) = \Phi(z_\nu) \to \Phi(y)$ при $\nu \to \infty$.

Из доказанного следует, что $\Phi_\nu[f(x)] \to \Phi[f(x)]$ при $\nu \to \infty$ для всех $x \in M$. Функции $\Phi_\nu \circ f$ все измеримы и, по доказанному, поточечно сходятся к функции $\Phi \circ f$. Отсюда следует, что функция $\Phi \circ f$ измерима. Теорема доказана. ■

▼ ***Следствие 1.*** *Если система с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$ счетна в бесконечности, то произведение любого конечного числа измеримых всюду конечных функций есть функция измеримая.*

Доказательство. Это есть частный случай теоремы 5.12, получаемый, если взять $E = \mathbb{R}^m$ и $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = y_1 y_2 \ldots y_m$. Следствие 1 доказано. ▼

▼ ***Следствие 2.*** *Если система с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$ счетна в бесконечности и функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, $g\colon M \to \mathbb{R}$ измеримы, причем $g(x) \neq 0$ для всех $x \in M$, то функция $h = \dfrac{f}{g}$ измерима.*

Доказательство. Достаточно в условиях теоремы 5.12 положить $m = 2$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ и $\Phi(x, y) = \dfrac{x}{y}$. Тем самым следствие 2 доказано. ▼

§ 6. Измеримые множества и функции в пространстве $\mathbb{R}^n$

В этом параграфе мы изучим свойства измеримых функций и множеств в евклидовой системе с интегрированием, т. е. в системе, в которой базисное пространство есть $\mathbb{R}^n$, основными функциями являются ступенчатые функции, а интеграл определяется, как описано в параграфе 1.

Здесь устанавливается измеримость открытых и замкнутых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ в этой системе с интегрированием. Указываются геометрические характеристики меры открытого множества. Определяется понятие внешней меры и устанавливаются некоторые ее простые свойства. Дается геометрическая характеристика множеств меры нуль.

Для случая функций, определенных на числовой прямой $\mathbb{R}$, здесь выясняется связь между теорией интегрирования, излагаемой в этой главе, и теорией интеграла, изложенной в главе 5. Устанавливается совпадение различных понятий интеграла для некоторых важных классов функций.

6.1. Кубическое подразделение открытого множества

Измеримость открытых множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$ мы получим как следствие некоторого общего утверждения о разбиении произвольного открытого множества в пространстве $\mathbb{R}^n$ на кубы. Предварительно введем некоторые вспомогательные понятия.

Пусть x есть точка пространства $\mathbb{R}^n$ и r — целое число. Символом $\alpha_r(x)$ обозначим *двоичный куб ранга r, содержащий точку x.*

Пусть α есть двоичный куб в $\mathbb{R}^n$. Он представляет собой некоторый n-мерный прямоугольник вида $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$. В этом случае определен замкнутый куб $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, который мы будем обозначать символом $\bar{\alpha}$.

■ ***Лемма 6.1*** (лемма о кубическом подразделении). *Для всякого открытого множества пространства $\mathbb{R}^n$ существует последовательность $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ попарно непересекающихся двоичных кубов такая, что при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ замкнутый куб $\bar{\alpha}_\nu$ содержится в U и имеет место равенство*

$$U = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu. \tag{6.1}$$

Доказательство. Двоичный куб α мы будем называть *допустимым*, если его ранг неотрицателен и замкнутый куб $\bar{\alpha}$ содержится в множестве U.

Если α есть *допустимый куб*, то любой двоичный куб $\beta \subset \alpha$ также является допустимым, поскольку в этом случае ранг β не может быть меньше ранга α и, следовательно, ранг β неотрицателен и, как очевидно, $\bar{\beta} \subset \bar{\alpha} \subset U$.

Допустимый куб α будем называть *экстремальным*, если никакой двоичный куб, содержащий α и отличный от α, не является допустимым. Множество всех экстремальных допустимых кубов обозначим через $\mathscr{E}$.

Если α_1 и α_2 — два различных элемента $\mathscr{E}$, то α_1 и α_2 не имеют общих точек. Действительно, допустим, напротив, что пересечение $\alpha_1 \cap \alpha_2$ непусто. Тогда в силу доказанных ранее свойств двоичных кубов (см. § 1) либо $\alpha_1 \supset \alpha_2$, либо $\alpha_2 \supset \alpha_1$. Так как, по условию, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то это противоречит *условию экстремальности* каждого из кубов α_1 и α_2.

Покажем, что всякая точка $x \in U$ принадлежит по крайней мере одному из кубов множества $\mathscr{E}$. Действительно, пусть $x \in U$. Найдем $\delta > 0$ такое, что шар $B(x, \delta)$ содержится в U. Рассмотрим куб $\alpha_r(x)$. Для всякой точки $x' \in \bar{\alpha}_r(x)$ имеем, очевидно,

$$|x' - x| \leq 2^{-r}\sqrt{n}.$$

Пусть $r_0 \leq 0$ таково, что $2^{-r_0}\sqrt{n} < \delta$. Тогда если $r \geq r_0$, то для всякой точки $x' \in \bar{\alpha}_r(x)$ будем иметь

$$|x' - x| \leq 2^{-r}\sqrt{n} \leq 2^{-r_0}\sqrt{n} < \delta.$$

Это означает, что куб $\bar{\alpha}_r(x)$ содержится в шаре $B(x,\delta) \subset U$. Отсюда вытекает, что для $r \geq r_0$ куб $\alpha_r(x)$ допустимый.

Пусть r_1 есть наименьшее значение $r \geq 0$ такое, что $\alpha_r(x)$ есть допустимый куб. Покажем, что куб $\alpha_{r_1}(x)$ экстремальный. Предположим, что это не так. Тогда найдется допустимый двоичный куб β, содержащий $\alpha_{r_1}(x)$ и отличный от $\alpha_{r_1}(x)$.

Пусть r_2 есть ранг куба β. Тогда $r_2 \geq 0$, $\beta = \alpha_{r_2}(x)$. Так как $\beta \neq \alpha_{r_1}(x)$, то $r_2 < r_1$. Мы получаем противоречие с тем, что, по условию, r_1 есть наименьшее из чисел r таких, что куб $\alpha_r(x)$ является допустимым.

Таким образом, всякий куб $\alpha \in \mathscr{E}$ содержится в G и, как мы показали, любая точка $x \in G$ принадлежит хотя бы одному из кубов $\alpha \in \mathscr{E}$. Отсюда вытекает, что

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{E}} \alpha = G. \tag{6.2}$$

Заметим, что всякий замкнутый куб $\bar{\alpha}$, где $\alpha \in \mathscr{E}$, также содержится в U и любая точка $x \in U$ принадлежит хотя бы одному из них. Отсюда следует, что также и

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{E}} \bar{\alpha} = U. \tag{6.3}$$

Докажем, что множество $\mathscr{E}$ всех экстремальных кубов α бесконечно.

Множество U открытое. Покажем, что в U не существует точки, в которой функция $\pi_1 \colon (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$ принимала бы свое наименьшее значение. Действительно, пусть $x \in U$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что шар $B(x,\delta) \subset U$. Пусть $t \in (0,\delta)$ и $x' = x - te_1$. Тогда имеем $\pi_1(x') = \pi_1(x) - t < \pi_1(x)$.

Точка $x \in G$ была взята произвольно, и, значит, в U нет такой точки, в которой функция π_1 принимала бы свое наименьшее значение.

Предположим, что $\mathscr{E}$ конечно. В силу (6.3) *объединение* кубов $\bar{\alpha}$, где $\alpha \in \mathscr{E}$, совпадает с G. Так как каждое из множеств $\bar{\alpha}$ ограничено и замкнуто, то, значит, в этом случае также и U ограничено и замкнуто, т. е. U компактно. В силу *теоремы Вейерштрасса* (глава 9, теорема 1.24) функция π_1 принимает на множестве U свое наименьшее значение, что невозможно!

Итак, допустив, что $\mathscr{E}$ конечно, мы получаем противоречие. Так как множество всех двоичных кубов счетно, из доказанного следует, что $\mathscr{E}$ счетно.

Занумеруем произвольным образом кубы, принадлежащие $\mathscr{E}$. Пусть α_ν есть куб с номером $\nu \in \mathbb{N}$. Кубы α_ν попарно не пересекаются, и в силу (6.2) $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = U$. Лемма доказана. ■

6.2. Измеримость открытых и замкнутых множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$

Лемма о кубическом подразделении открытого множества позволяет дать простое доказательство измеримости открытых множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$. Напомним, что в соответствии с общим определением, данным в § 5, функция f, определенная в $\mathbb{R}^n$ почти всюду, называется измеримой, если существует последовательность ступенчатых функций $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ такая, что $\varphi_\nu(x) \to f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. В частности, всякая ступенчатая функция φ измерима. Действительно, в этом случае последовательность $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, в которой $\varphi_\nu \equiv \varphi$ при каждом $\nu \in \mathbb{N}$, удовлетворяет всем условиям определения измеримой функции.

■ ***Теорема 6.1.*** *Всякое открытое множество и любое замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ являются измеримыми.*

Доказательство. Пусть U есть произвольное открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Согласно лемме 6.1 найдется последовательность $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ попарно непересекающихся двоичных кубов такая, что

$$U = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu. \tag{6.4}$$

Индикатор двоичного куба α_ν при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ представляет собой ступенчатую функцию. Всякая ступенчатая функция является измеримой. Отсюда вытекает, что всякий двоичный куб представляет собой измеримое множество. В силу теоремы 5.9 из равенства (6.4) следует измеримость множества U.

Пусть A есть замкнутое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Множество $U = \mathbf{C}A$ открытое и, значит, по доказанному, U измеримо. Имеем $A = \mathbb{R}^n \setminus U$. Множество $\mathbb{R}^n$ измеримо. Так как разность двух измеримых множеств есть измеримое множество, отсюда следует измеримость множества A. Теорема доказана. ■

Пусть $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть последовательность попарно непересекающихся двоичных кубов такая, что их объединение совпадает с данным открытым множеством U пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда согласно теореме 5.10 мера множества U допускает представление

$$\mu_n(U) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(\alpha_\nu).$$

Данное равенство устанавливает геометрический смысл меры открытого множества в пространстве $\mathbb{R}^n$. Мера открытого множества равна сумме мер кубов, на которые может быть подразделено множество U. Значение этой суммы не зависит от способа подразделения открытого множества.

6.3. Внешняя мера множества. Геометрическая характеристика внешней меры множеств в $\mathbb{R}^n$

Пусть A — произвольное множество в системе с интегрированием $\Sigma = (M, \mathscr{F}, I)$. Величина $\|\chi_A\|_{L_1(\Sigma)}$ называется внешней мерой множества A.

Будем говорить, что последовательность множеств $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *покрывает множество* E, если E содержится в объединении множеств A_ν.

Отметим некоторые свойства операций над множествами.

Пусть дано произвольное множество M. Последовательность $(E_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ подмножеств M будем называть ***возрастающей***, если при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ имеет место включение $E_\nu \subset E_{\nu+1}$.

Как следует из леммы 1.1, последовательность множеств $(E_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ является возрастающей в том и только в том случае, если последовательность индикаторов множеств E_ν является возрастающей.

I. Пусть $(E_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть возрастающая последовательность подмножеств множества M, а E — объединение множеств этой последовательности. Тогда

$$\chi_E(x) = \lim_{\nu \to \infty} \chi_{E_\nu}(x) \tag{6.5}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Действительно, если $x \notin E$, то $x \notin E_\nu$ для всех x и, значит, в этом случае $\chi_{E_\nu}(x) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и, следовательно,

$$\lim_{\nu \to \infty} \chi_{E_\nu}(x) = 0 = \chi_E(x).$$

Если же $x \in E$, то найдется номер $\nu_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $x \in E_{\nu_0}$. При всяком $\nu \geq \nu_0$ множество E_ν содержит в себе множество E_{ν_0}, и, значит, $\chi_{E_\nu}(x) = 1 = \chi_E(x)$ для любого $\nu \geq \nu_0$. Отсюда вытекает, что и в этом случае $\lim\limits_{\nu \to \infty} \chi_{E_\nu}(x) = \chi_E(x)$, и предложение I, таким образом, доказано.

II. Пусть $(E_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть произвольная возрастающая последовательность множеств и $(H_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть последовательность, определенная по ней следующим образом: $H_1 = E_1$ и $H_\nu = E_\nu \setminus E_{\nu-1}$ при $\nu > 1$. Тогда множества H_ν попарно непересекающиеся. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ $\bigcup\limits_{\mu=1}^{\nu} H_\mu = E_\nu$ и имеет место равенство $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} H_\nu$. Действительно, возьмем произвольно номера ν и μ, причем $\nu \neq \mu$. Для определенности будем считать, что $\nu < \mu$. Тогда $\mu - 1 \geq \nu$. Имеем $H_\nu \subset E_\nu \subset E_{\mu-1}$ и $H_\mu = E_\mu \setminus E_{\mu-1}$. Отсюда следует, что множества H_μ не имеют общих элементов с множеством E_μ, а значит, и с множеством $H_\nu \subset E_\mu$. Таким образом, доказано, что множества H_ν попарно непересекающиеся.

Пусть $x \in E_\nu$. Найдем наименьшее значение $\mu \le \nu$ такое, что $x \in E_\mu$. Если $\mu = 1$, то мы получаем, что $x \in H_1$. Если же $\mu > 1$, то $x \notin E_{\mu-1}$ и, значит, $x \in H_\mu$. Таким образом, всякий элемент x множества E_ν принадлежит одному из множеств H_μ, где $1 \le \mu \le \nu$.

Так как для таких значений μ множество H_μ содержится в E_ν, то из доказанного вытекает, что объединение множеств H_μ, номера которых удовлетворяют условию $1 \le \mu \le \nu$, совпадает с множеством E_ν.

Теперь заметим, что E — объединение множеств последовательности $(E_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ содержит каждое из множеств H_ν. Всякая точка множества E принадлежит по крайней мере одному из множеств E_ν, а значит, как следует из доказанного выше, по крайней мере одному из множеств H_μ. Отсюда вытекает, что E совпадает с объединением множеств H_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$. Предложение II, таким образом, доказано.

III. Пусть M есть базисное пространство системы с интегрированием $(M, \mathscr{F}, I)$. Тогда для всякой возрастающей последовательности измеримых множеств $(E_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\right) = \lim_{\nu\to\infty} \mu(E_\nu).$$

Действительно, пусть $(E_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть произвольная возрастающая последовательность измеримых множеств, E — объединение множеств этой последовательности. Тогда в силу предложения I последовательность функций $(\chi_{E_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ — индикаторов множеств E_ν — является возрастающей и $\lim\limits_{\nu\to\infty} \chi_{E_\nu}(x) = \chi_E(x)$ для всех $x \in M$. В силу теоремы Леви для последовательностей измеримых функций (теорема 5.7) отсюда вытекает, что $I(\chi_E) = \lim\limits_{\nu\to\infty} I(\chi_{E_\nu})$, т. е. $\mu(E) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \mu(E_\nu)$, что и требовалось доказать.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *элементарным*, если оно является объединением конечного числа двоичных кубов. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является элементарным в том и только в том случае, если его индикатор является ступенчатой функцией.

Пусть E есть элементарное множество. Представим его как объединение двоичных кубов, и пусть r есть наибольший из рангов кубов, составляющих E. Тогда каждый из двоичных кубов, объединением которых является множество E, может быть представлен как объединение конечного числа двоичных кубов ранга r. Двоичные кубы одного и того же ранга попарно не пересекаются, и, следовательно, мы получаем, что всякое элементарное множество является объединением конечного числа попарно непересекающихся двоичных кубов.

Пусть A и B есть элементарные множества. Тогда их *объединение*, *пересечение* и *разность* также являются элементарными множествами. Пусть r — целое число такое, что каждое из множеств A и B есть объединение конечного числа двоичных кубов ранга r. Множество $A \cap B$ мы получим, если из кубов, составляющих A и B, оставим только те, которые содержатся как в A, так и в B. Разность $A \setminus B$ состоит из тех двоичных кубов ранга r, которые содержатся в A, но не содержатся в B. Из сказанного ясно, что $A \cap B$ и $A \setminus B$ есть элементарные множества.

То, что объединение двух элементарных множеств снова есть элементарное множество, следует непосредственно из определения понятия элементарного множества.

Будем говорить, что последовательность множеств $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *покрывает множество* E, если E содержится в объединении множеств A_ν.

Следующая теорема устанавливает геометрический смысл понятия внешней меры для множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для упрощения изложения удобно считать, что пустое множество является двоичным кубом.

■ **Теорема 6.2.** *Внешняя мера произвольного множества в пространстве $\mathbb{R}^n$ равна точной нижней границе сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(\alpha_\nu)$, где $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность двоичных кубов, покрывающая множество E.*

Доказательство. Пусть (α_ν) есть последовательность двоичных кубов, покрывающая множество E. Покажем, что имеет место неравенство

$$\bar{\mu}_n(E) \leq \sum_\nu \mu_n(\alpha_\nu). \tag{6.6}$$

Пусть $E' = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. Положим $\varphi_m(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{m} \chi(\alpha_\nu)$. Функция φ_m является ступенчатой. Эта функция неотрицательна. Последовательность $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ возрастающая. Имеем

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_{\alpha_\nu}(x) \geq \chi_{E'}(x).$$

Так как $E \subset E'$, то $\chi_E(x) \leq \chi_{E'}(x)$. Таким образом, мы получаем, что $\chi_E(x) \leq \lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Это означает, что последовательность ступенчатых функций $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ мажорирует функцию χ_E и, значит, согласно определению L_1-нормы функции имеет место неравенство

$$\bar{\mu}_n(E) = \|\chi_E\|_{L_1} \leq \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_m(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(\alpha_\nu).$$

Неравенство (6.6), таким образом, доказано.

Если внешняя мера множества E равна ∞, то в силу неравенства (6.6) для всякой последовательности двоичных кубов, покрывающей множество E, имеем $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(\alpha_\nu) = \infty$, и в этом случае утверждение теоремы верно.

Будем далее предполагать, что $\bar{\mu}_n(E) < \infty$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$, и пусть $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ есть последовательность ступенчатых функций, мажорирующая функцию χ_E и такая, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu(x)\,dx < \bar{\mu}_n(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зададим число t такое, что $0 < t < 1$ и выполняется неравенство

$$\frac{\bar{\mu}_n(E) + \varepsilon/2}{t} < \bar{\mu}_n(E) + \varepsilon.$$

Пусть E_ν есть множество всех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых выполняется неравенство $\varphi_\nu(x) > t$.

Покажем, что множество E_ν является объединением конечного числа попарно непересекающихся двоичных кубов. Действительно, пусть

$$\varphi_\nu(x) = \sum_{j=1}^{k_\nu} h_j \chi_{\sigma_j}(x)$$

есть представление функции φ_ν в виде линейной комбинации попарно непересекающихся двоичных кубов. Множество E_ν является объединением кубов σ_j, отвечающих тем значениям j, для которых $h_j > t$.

Отметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu(x)\,dx \geq \sum_{j:h_j>t} t\mu_n(\sigma_j) = t\mu_n(E_\nu).$$

(Суммирование производится по множеству всех j, для которых выполняется неравенство $h + j > t$.) Отсюда вытекает, что

$$\mu_n(E_\nu) \leq \frac{1}{t} \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu(x)\,dx < \frac{\bar{\mu}_n(E) + \varepsilon/2}{t} < \bar{\mu}_n(E) + \varepsilon.$$

Если $\varphi_\nu(x) > t$, то тем более $\varphi_{\nu+1}(x) > t$. Таким образом, если $x \in E_\nu(t)$, то $x \in E_{\nu+1}$, и, следовательно, $E_\nu \subset E_{\nu+1}$ при каждом

$\nu \in \mathbb{N}$. Последовательность множеств $(E_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, таким образом, является возрастающей.

Пусть $E'' = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$. Покажем, что $E \subset E''$. Действительно, возьмем произвольно точку $x \in E$. Так как $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x) \geq \chi_E(x) = 1$ и $t < 1$, то найдется номер ν, для которого $\varphi_\nu(x) > t$. Очевидно, $x \in E_\nu \subset E''$. Так как $x \in E''$ было взято произвольно, то тем самым доказано, что $E \subset E''$.

Положим $H_1 = E_1$, и пусть $H_\nu = E_\nu \setminus E_{\nu-1}$ при $\nu > 1$. Множества H_ν в силу предложения II попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} H_\nu = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$. Отсюда следует, что множество E'' измеримо и

$$\mu_n(E'') = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(H_\nu).$$

Каждое из множеств H_ν является элементарным. Представив каждое из множеств H_ν как объединение попарно непересекающихся двоичных кубов, мы получим некоторое конечное или бесконечное множество двоичных кубов. Занумеровав их произвольным образом, мы получим последовательность попарно непересекающихся двоичных кубов $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, объединение которых совпадает с объединением множеств H_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, т. е. с множеством $E'' \supset E$. Последовательность кубов $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, таким образом, покрывает множество E. Имеем

$$\bar{\mu}_n(E) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(\alpha_\nu) = \mu_n(E'') < \bar{\mu}_n(E) + \varepsilon.$$

(Первое неравенство здесь следует из того, что данная последовательность кубов покрывает множество E.)

Так как $\varepsilon > 0$ было взято произвольно, то тем самым установлено, что точная нижняя граница сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(\alpha_\nu)$ для последовательностей двоичных кубов, покрывающих множество E, равна $\bar{\mu}_n(E)$. Теорема доказана. ■

▼ ***Следствие.*** *Для того чтобы множество E в пространстве $\mathbb{R}^n$ было множеством меры нуль, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовала последовательность двоичных кубов $(\alpha_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, покрывающая множество E и такая, что $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(\alpha_\nu) < \varepsilon$.*

Данное утверждение очевидным образом вытекает из того, что множества меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^n$ есть в точности те множества, внешняя мера которых равна нулю. ▼

6.4. Измеримость некоторых классов функций в $\mathbb{R}^n$

Установим измеримость некоторых классов функций в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предварительно опишем конструкцию, которая понадобится нам для этой цели.

Пусть ν есть произвольное натуральное число. Обозначим символом Q_ν n-мерный куб $[-\nu, \nu) \times [-\nu, \nu) \times \cdots \times [-\nu, \nu)$.

Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ пусть $\alpha_\nu(x)$ есть двоичный куб ранга ν, содержащий точку x. Если $x \in Q_\nu$, то $\alpha_\nu(x) \subset Q_\nu$. При каждом ν имеет место включение $\alpha_\nu(x) \supset \alpha_{\nu+1}(x)$.

■ **Лемма 6.2.** *Для всякой неотрицательной вещественной функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существует возрастающая последовательность ступенчатых функций $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ такая, что для всякой точки $x \in \mathbb{R}^n$, в которой функция f непрерывна, справедливо соотношение*

$$f(x) = \lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(x) = f(x).$$

Доказательство. Пусть дана неотрицательная функция $f\colon \mathbb{R}^n \to$ $\to \mathbb{R}$. Возьмем произвольно точку $x \in \mathbb{R}^n$. Если $x \notin Q_\nu$, то полагаем $\varphi_\nu(x) = 0$. Если же $x \in Q_\nu$, то полагаем $\varphi_\nu(x) = \inf\limits_{t\in\alpha_\nu(x)} f(x)$.

Функция φ_ν отлична от нуля только на тех двоичных кубах ранга ν, которые содержатся в кубе Q_ν. Множество таких кубов конечно. Если α есть двоичный куб ранга ν, то $\alpha = \alpha_\nu(x)$ для всякой точки $x \in \alpha$. Отсюда ясно, что функция φ_ν на этом кубе постоянна. Мы получаем, следовательно, что функция φ_ν является ступенчатой при всяком $\nu \in \mathbb{N}$.

Из определения функции φ_ν ясно, что эта функция неотрицательна.

Если $\varphi_\nu(x) = 0$, то, очевидно, $\varphi_\nu(x) \leq \varphi_{\nu+1}(x)$. Предположим, что $\varphi_\nu(x) > 0$. Тогда, как следует из определения функции φ_ν, двоичный куб $\alpha_\nu(x) \subset Q_\nu$. Имеем $\alpha_{\nu+1}(x) \subset \alpha_\nu(x)$ и, значит, $\alpha_{\nu+1}(x) \subset$ $\subset Q_\nu \subset Q_{\nu+1}$. Отсюда вытекает, что для данного x величина $\varphi_{\nu+1}(x)$ определяется равенством $\varphi_{\nu+1}(x) = \inf\limits_{t\in\alpha_{\nu+1}(x)} f(x)$ и, значит, $\varphi_{\nu+1} \geq$ $\geq \inf\limits_{t\in\alpha_\nu(x)} f(x) = \varphi_\nu(x)$.

Мы видим, что при каждом ν функция φ_ν неотрицательна и является ступенчатой и последовательность функций $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ возрастающая. При этом $f(x) \geq \varphi_\nu(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Предположим, что функция f непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем по нему $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $\nu_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $|x_0| < \nu_0$ и $\sqrt{n}\,2^{-\nu_0} < \delta$. Пусть $\nu \geq \nu_0$ и $x \in \alpha_{\nu_0}$. Тогда $|x - x_0| \leq \sqrt{n}\,2^{-\nu} < \sqrt{n}\,2^{-\nu_0} < \delta$ и, значит, $f(x) > f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что для таких значений ν имеет место неравенство $\varphi_\nu(x_0) \geq f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} > f(x_0) - \varepsilon$. Поскольку $\varphi_\nu(x_0) \leq f(x_0)$, то мы получаем, следовательно, что для всякого $\nu \geq \nu_0$ имеет место неравенство

$$|\varphi_\nu(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, этим доказано, что $\varphi_\nu(x_0) \to f(x_0)$ при $\nu \to \infty$. Лемма доказана. ■

▼ ***Следствие 1.*** *Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такова, что ее множества точек разрыва есть множество меры нуль, то функция f измерима.*

Действительно, пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду в $\mathbb{R}$, т. е. ее множество точек разрыва есть множество меры нуль. Предположим сначала, что функция f неотрицательна. Тогда согласно лемме 6.2 существует последовательность ступенчатых функций, сходящаяся к f в каждой точке, в которой функция f непрерывна, и, значит, сходящаяся к f почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Отсюда в силу определения измеримой функции вытекает, что функция f измерима.

Предположим, что f принимает значения произвольного знака. Тогда справедливо равенство $f = f^+ - f^-$. В каждой точке, в которой непрерывна функция f, непрерывны также и функции f^+ и f^-. Функции f^+ и f^- неотрицательны. Из доказанного следует, что они измеримы и, значит, измерима также и функция f. Следствие 1 доказано. ▼

Пусть дана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что функция f сосредоточена на множестве $A \subset E$, если $f(x) = 0$ при всяком $x \notin A$. Пусть U есть открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если существует компактное множество $A \subset U$ такое, что функция f сосредоточена на множестве A, т. е. такое, что $f(x) = 0$ для всякого $x \notin A$.

Совокупность всех непрерывных финитных функций, определенных на множестве U, обозначается символом $\mathscr{C}_0(U)$.

▼ ***Следствие 2.*** *Всякая непрерывная финитная функция в пространстве $\mathbb{R}^n$ интегрируема.*

Доказательство. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть непрерывная финитная функция в $\mathbb{R}^n$. Условие финитности означает, что существует компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $f(x) = 0$ для всех $x \notin A$.

Всякое компактное множество ограничено. Пусть $R < \infty$, $R > 0$ таково, что $|x| \le R$ для всех $x \in A$. Отсюда, в частности, следует, что функция f обращается в нуль вне замкнутого куба $\overline{Q}(0, R)$. Пусть $M = \sup\limits_{x \in \overline{Q}(0,R)} |f(x)|$. Так как функция f непрерывна, а множество $\overline{Q}(0, R)$ компактно, то $M < \infty$. Очевидно, $M \ge 0$ и $f(x) \le M$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Предположим, что функция f неотрицательна. Пусть $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть последовательность ступенчатых функций, указанная в лемме 6.2. Эта последовательность является возрастающей, и $\varphi_\nu(x) \to f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. При каждом $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $0 \le \varphi_\nu(x) \le f(x)$. Отсюда вытекает, что функции φ_ν все обращаются в нуль вне куба $\overline{Q}(0, R)$ и при каждом ν для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства $0 \le \varphi_\nu(x) \le M$. В силу оценки леммы 1.4 интеграл функции φ_ν не превосходит $2^n R^n M$.

Таким образом, последовательность интегралов ступенчатых функций φ_ν является ограниченной. В силу теоремы Леви о предельном переходе из доказанного вытекает, что предельная функция f в нашем случае интегрируема.

Предположим, что $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ есть функция произвольного знака. Тогда ее положительная часть f^+ и ее отрицательная части являются функциями класса $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Так как функции f^+ и f^- неотрицательны, то из доказанного вытекает, что они интегрируемы, а значит, в силу равенства $f = f^+ - f^-$ функция f интегрируема. Следствие 2 доказано. ▼

6.5. Сопоставление различных теорий интегрирования в $\mathbb{R}$

Все описанные здесь построения без каких-либо изменений проводятся и в случае пространства $\mathbb{R}$ — числовой прямой.

С другой стороны, для функций одной переменной в главе 5 построена другая теория интеграла, основанная на понятии первообразной. Естественно возникает вопрос о соотношении между этими двумя теориями интеграла в $\mathbb{R}$.

Пусть дана функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$. Согласно определению, данному в главе 5, функция f интегрируема по промежутку $[a, b]$, если существует непрерывная функция $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ такая, что $F'(x) = f(x)$ в промежутке $[a, b]$ в основном, т. е. всюду, кроме, может быть, точек, образующих не более чем счетное множество. Функция F, удовлетворяющая этому условию, называется первообразной функции f на промежутке $[a, b]$. В случае если функция f имеет в промежутке $[a, b]$ первообразную, то она определена с точностью до постоянного слагаемого.

Если функция f удовлетворяет этому условию, то мы будем говорить, что f интегрируема по промежутку $[a, b]$ в смысле Ньютона. Разность $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной F функции f. Здесь мы будем называть ее интегралом в смысле Ньютона функции f по промежутку $[a, b]$ и обозначать символом

$$(N)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если f интегрируема на (a, b) *в евклидовой системе с интегрированием*, определенной в $\mathbb{R}$, то мы будем говорить, что f интегрируема на (a, b) в смысле Лебега, и интеграл $\int\limits_{(a,b)} f(x)\,dx$ будем обозначать также символом

$$(L)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Возникает вопрос: в каких случаях интегрируемость в одном смысле влечет интегрируемость в другом и интегралы в двух разных смыслах совпадают? Ответ на этот вопрос в общем случае требует весьма глубоких соображений, на которых здесь нет возможности остановиться. Ограничимся основным классом функций, интегрируемость которых была установлена в главе 5.

■ **Теорема 6.3.** *Пусть $f\colon (a, b) \to R$ — непрерывная в основном функция. Для того чтобы f была интегрируема в смысле Лебега на отрезке (a, b), необходимо и достаточно, чтобы функция $|f|$ была интегрируема по Ньютону на (a, b). Если f удовлетворяет этому условию, то имеет место равенство*

$$(N)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (L)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим случай, когда $f\colon (a, b) \to R$ непрерывна в основном на (a, b) и интегрируема в смысле Лебега по промежутку $[a, b]$. Тогда также и функция $|f|$ интегрируема по $[a, b]$ в смысле Лебега.

Обозначим через E не более чем счетное подмножество (a, b) такое, что функция f непрерывна в каждой точке $x \in (a, b) \setminus E$. Положим

$$F(x) = (L)\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Докажем, что определенная таким образом функция F является первообразной функции f на $[a,b]$.

Сначала установим непрерывность F. Введем вспомогательную функцию $\chi(x,t)$, полагая $\chi(x,t) = 0$ при $t \geq x$, $\chi(x,t) = 1$ при $t < x$. Тогда

$$F(x) = (L)\int\limits_a^b f(t)\chi(x,t)\,dt.$$

При всяком $t \in [a,b]$ функция $x \mapsto \chi(x,t)$ имеет в промежутке $[a,b]$ единственную точку разрыва, а именно, точку $x = t$. График функции $x \mapsto \chi(x,t)$ представлен на рис. 3.

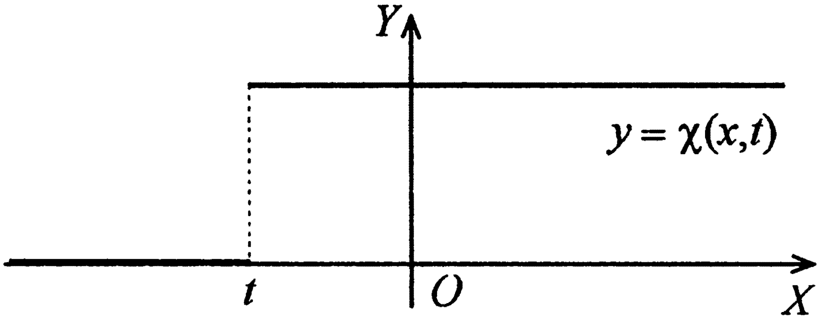

Рис. 3

Зададим произвольно точку $x_0 \in [a,b]$, и пусть $(x_m)_{m\in N}$ есть последовательность точек отрезка $[a,b]$, сходящаяся к x_0 при $m \to \infty$. Тогда $\chi(x_m,t) \to \chi(x_0,t)$ при $m \to \infty$ для любого $t \neq x_0$.

Пусть $\varphi\colon t \mapsto f(t)\chi(x_0,t)$, $\varphi_m\colon t \mapsto f(t)\chi(x_m,t)$. Тогда, по доказанному, $\varphi_m(t) \to \varphi(t)$ при $m \to \infty$ для всякого $t \neq x_0$, т. е. $\varphi_m(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t)$ почти всюду. При всяком m имеем $|\varphi_m| \leq |f|$. В силу *теоремы Лебега о предельном переходе* (следствие 2 теоремы 4.3) отсюда вытекает, что

$$(L)\int\limits_a^b \varphi_m(t)\,dt \to (L)\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt,$$

т. е. $F(x_m) \to F(x_0)$ при $m \to \infty$. Непрерывность функции F тем самым доказана.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)\backslash E$. Функция f непрерывна в точке x_0.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем по нему $\delta > 0$ такое, что если $x \in (a,b) \setminus E$ таково, что $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Для всех t из интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняются неравенства

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{6.7}$$

Возьмем произвольно $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$. Тогда

$$F(x) - F(x_0) = (L) \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{при} \quad x > x_0,$$

$$F(x) - F(x_0) = -(L) \int_{x}^{x_0} f(t)\,dt \quad \text{при} \quad x < x_0.$$

В силу неравенства (6.7), очевидно,

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \leq (L) \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leq (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

для случая $x > x_0$ и

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x_0 - x) \leq (L) \int_{x}^{x_0} f(t)\,dt \leq (f(x_0) + \varepsilon)(x_0 - x)$$

для случая, когда $x < x_0$. Отсюда получаем, что

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из доказанного вытекает, что функция F дифференцируема в точке x_0, причем $F'(x_0) = f(x_0)$. Функция F, таким образом, удовлетворяет всем условиям в определении первообразной. Следовательно, f интегрируема в смысле Ньютона.

Отметим, что

$$F(b) - F(a) = (L) \int_{a}^{b} f(t)\,dt,$$

т. е.

$$(N) \int_{a}^{b} f(t)\,dt = (L) \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

Необходимость условия теоремы, таким образом, установлена.

Докажем д о с т а т о ч н о с т ь условия теоремы. Пусть f есть функция, непрерывная в основном на промежутке $[a,b]$, причем функция $|f|$ интегрируема на промежутке $[a,b]$.

Предположим сначала, что функция f неотрицательна. Пусть $\hat{f}$ — ее нулевое продолжение на $\mathbb{R}$.

Ясно, что $\hat{f}$ есть непрерывная в основном функция. Имеет место равенство

$$(N)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)\,dx = (N)\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

По лемме 6.2 найдется последовательность неотрицательных ступенчатых функций φ_ν такая, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ числовая последовательность $(\varphi_\nu(x))_{\nu\in N}$ возрастает и стремится к пределу, равному $\hat{f}(x)$ для всякого x, не принадлежащего некоторому не более чем счетному множеству E. При каждом m имеют место неравенства

$$(N)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)\,dx \geq (N)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\nu(x)\,dx. \tag{6.8}$$

Для ступенчатых функций интегралы в смысле Лебега и в смысле Ньютона с о в п а д а ю т по определению, и, значит, при каждом ν верно равенство

$$(N)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\nu(x)\,dx = (L)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\nu(x)\,dx. \tag{6.9}$$

Неравенство (6.8) и равенство (6.9) позволяют заключить, что последовательность интегралов

$$\left((L)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\nu(x)\,dx\right)_{\nu=1,2,\ldots}$$

ограничена сверху. На основании *теоремы Леви* (следствие 3 теоремы 4.1) получаем, что функция $\hat{f}$ интегрируема в смысле Лебега на $\mathbb{R}$, и для неотрицательных функций достаточность условия теоремы доказана.

Предположим, что f — непрерывная в основном функция такая, что $|f|$ интегрируема в смысле Ньютона на $[a,b]$. Тогда f также интегрируема на $[a,b]$ в смысле Ньютона и, значит, каждая из функций f^+ и f^- интегрируема в смысле Ньютона на отрезке $[a,b]$.

На основании доказанного отсюда вытекает, что f^+ и f^-, а значит, и f интегрируемы на $[a,b]$ в смысле Лебега. Теорема доказана. ■

§ 7. Теорема Фубини и ее следствия

В этом параграфе доказывается, что интеграл функции в $\mathbb{R}^n$ может быть получен как результат последовательного выполнения одномерных интегрирований.

Сначала рассматривается случай интегрируемых в $\mathbb{R}^n$ функций. Затем доказывается справедливость аналогичного утверждения для неотрицательных измеримых функций.

7.1. Теорема Фубини

В дальнейшем мы часто будем применять следующее представление пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $n \geq 2$, k и m есть натуральные числа такие, что $k + m = n$. Пространство $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с произведением $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, рассматривая произвольную точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ как пару (y, z), где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$, причем $y_i = x_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$ и $z_j = x_{k+j}$ при каждом $j = 1, 2, \ldots, m$. Для произвольной функции f, определенной в $\mathbb{R}^n$, ее значение $f(x)$ в точке $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать символом $f(y, z)$.

Пусть даны произвольные множества $B \subset \mathbb{R}^k$ и $C \subset \mathbb{R}^m$. Множество A всех точек $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$, для которых $y \in B$, а $z \in C$, будем обозначать символом $B \times C$. Пусть χ_B есть *индикатор множества* B в пространстве $\mathbb{R}^k$, а χ_C — *индикатор множества* C в $\mathbb{R}^m$. Тогда для всякого $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\chi_A(x) = \chi_B(y)\chi_C(z). \tag{7.1}$$

Действительно, если $\chi_A(x) = 0$, то $x \notin A$ и, значит, или $y \notin B$, или $z \notin C$. Отсюда следует, что в этом случае один из множителей в правой части (7.1) равен нулю и тогда равенство (7.1) верно. Если же $\chi_A(x) = 1$, то $x \in A$ и, значит, $y \in B$, а $z \in C$. Следовательно, $\chi_B(y) = 1$, $\chi_C(z) = 1$, так что равенство (7.1) выполняется и в этом случае. Если $B \subset \mathbb{R}^k$ есть k-мерный прямоугольник, а $C \subset \mathbb{R}^m$ — m-мерный прямоугольник, то $A = B \times C$ есть n-мерный прямоугольник.

Всякий n-мерный многоугольник A может быть представлен в виде $A = B \times C$, где B и C есть прямоугольники соответствующей размерности в пространствах $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$. Действительно, пусть

$$A = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle = \prod_{j=1}^{n} \langle a_j, b_j \rangle.$$

Тогда, очевидно, $A = B \times C$, где

$$B = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_k, b_k \rangle = \prod_{j=1}^{k} \langle a_j, b_j \rangle,$$

$$C = \langle a_{k+1}, b_{k+1} \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle = \prod_{j=k+1}^{n} \langle a_j, b_j \rangle.$$

Для прямоугольника $A = B \times C$ имеет место равенство

$$\mu_n(A) = \mu_k(B)\mu_m(C). \tag{7.2}$$

Если прямоугольник A является двоичным кубом ранга r в пространстве $\mathbb{R}^n$, то множители B и C в представлении $A = B \times C$ прямоугольника A являются двоичными кубами ранга r в пространствах $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

■ ***Лемма 7.1.*** *Пусть f есть ступенчатая функция в пространстве $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Для всякого $y \in \mathbb{R}^k$ функция $z \in \mathbb{R}^m \mapsto f(y,z)$ является ступенчатой в $\mathbb{R}^m$, и для любого $z \in \mathbb{R}^m$ функция $y \in \mathbb{R}^k \mapsto f(y,z)$ есть ступенчатая функция в $\mathbb{R}^k$. Если*

$$F(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y,z)\,dz, \quad G(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dy, \tag{7.3}$$

то F и G есть ступенчатые функции в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^k$ соответственно. При этом имеют место равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} G(z)\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx. \tag{7.4}$$

Доказательство. Пусть f есть ступенчатая функция в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда согласно определению ступенчатой функции (см. § 1) имеем

$$f(x) = \sum_{j=1}^{l} h_j \chi_{\alpha_j}(x),$$

где h_j — вещественные числа, α_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, — двоичные кубы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Каждый из кубов α_j можно представить как произведение $\beta_j \times \gamma_j$, где β_j есть двоичный куб в $\mathbb{R}^k$, а γ_j — двоичный куб в $\mathbb{R}^m$.

В силу равенства (7.1) имеем $\chi_{\alpha_j}(y,z) = \chi_{\beta_j}(y)\chi_{\gamma_j}(z)$ при каждом $j = 1,2,\ldots,l$. Отсюда получаем, что для всякого $x = (y,z) \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(y,z) = \sum\limits_{j=1}^{l} h_j\chi_{\beta_j}(y)\chi_{\gamma_j}(z)$.

Из данного равенства непосредственно видно, что при фиксированном $y \in \mathbb{R}^k$ отображение $z \mapsto f(y,z)$ есть ступенчатая функция в пространстве $\mathbb{R}^m$ и при любом фиксированном $z \in \mathbb{R}^m$ отображение $y \mapsto f(y,z)$ есть ступенчатая функция в $\mathbb{R}^k$.

Далее, используя представление интеграла ступенчатой функции, установленное в § 1, получим, что

$$F(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y,z)\,dz = \sum_{j=1}^{l} h_j\mu_m(\gamma_j)\chi_{\beta_j}(y)$$

и, аналогично,

$$G(z) = \sum_{j=1}^{l} h_j\mu_k(\beta_j)\chi_{\gamma_j}(z).$$

Отсюда видно, что функции F и G являются ступенчатыми. При этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(y)\,dy = \sum_{j=1}^{l} h_j\mu_m(\gamma_j)\mu_k(\beta_j) = \sum_{j=1}^{l} h_j\mu_n(\alpha_j) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

и, аналогично,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} G(z)\,dz = \sum_{j=1}^{l} h_j\mu_k(\beta_j)\mu_m(\gamma_j) = \sum_{j=1}^{l} h_j\mu_n(\alpha_j) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Лемма доказана. ■

Введем некоторые временные обозначения.

Пусть дана функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для произвольной точки $y \in \mathbb{R}^k$ символ $S_y f$ обозначает функцию, определенную на $\mathbb{R}^m$ следующим условием: $S_y f(z) = f(y,z)$ для всех $z \in \mathbb{R}^m$. Полагаем $\overline{F}(y) = \|S_y f\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}$.

Для произвольной точки $z \in \mathbb{R}^m$ пусть $\sigma_z f$ есть функция $y \in \mathbb{R}^k \mapsto f(y,z)$. Символом $\overline{G}(z)$ обозначим L_1-норму функции $\sigma_z f$ в пространстве $\mathbb{R}^k$.

■ ***Лемма 7.2.*** *Для всякой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ имеют место неравенства*

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \geq \|\overline{F}\|_{L_1(\mathbb{R}^k)}, \quad \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \geq \|\overline{G}\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}. \tag{7.5}$$

Доказательство. Если $\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \infty$, то неравенства (7.5), очевидно, верны. Будем далее предполагать, что величина $\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ конечна.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$, и пусть $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть последовательность ступенчатых функций в пространстве $\mathbb{R}^n$, мажорирующая функцию f и такая, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu(x)\, dx < \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon.$$

Согласно данному в § 2 определению последовательности функций, мажорирующей функцию f, функции φ_ν неотрицательны, для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ последовательность $(\varphi_\nu(x))_{\nu \in \mathbb{N}}$ возрастающая, причем

$$f(x) \leq \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x).$$

При каждом $y \in \mathbb{R}^k$ определены функции $S_y f$ и $S_y \varphi_\nu$. Функции $S_y \varphi_\nu$ являются ступенчатыми в пространстве $\mathbb{R}^m$. Для любого $z \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство $S_y \varphi_\nu(z) \geq 0$ и последовательность $(S_y \varphi_\nu(z))_{\nu \in \mathbb{N}}$ является возрастающей. При этом имеет место неравенство

$$S_y f(z) \leq \lim_{\nu \to \infty} S_y \varphi_\nu(z).$$

Таким образом, при каждом $y \in \mathbb{R}^k$ мы имеем последовательность ступенчатых функций в пространстве $\mathbb{R}^m$, мажорирующую функцию $S_y f$. Из определения L_1-нормы непосредственно вытекает, что

$$\overline{F}(y) = \|S_y f\|_{L_1(\mathbb{R}^m)} \leq \lim_{\nu \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} S_y \varphi_\nu(z)\, dz. \tag{7.6}$$

Положим

$$\Phi_\nu(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} S_y \varphi_\nu(z)\, dz = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_\nu(y, z)\, dz.$$

Функция Φ_ν, как следует из леммы 7.1, является ступенчатой в пространстве $\mathbb{R}^k$. При каждом $\nu \in \mathbb{N}$ интеграл от функции Φ_ν по пространству $\mathbb{R}^k$ согласно лемме 7.1 равен интегралу от функции φ_ν по пространству $\mathbb{R}^n$. В силу известных нам свойств интегралов ступенчатых функций функция Φ_ν неотрицательна и последовательность $(\Phi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ является возрастающей.

Для всякого $y \in \mathbb{R}^k$ в силу (7.6) выполняется неравенство

$$\overline{F}(y) = \|S_y f\|_{L_1(\mathbb{R}^m)} \leq \lim_{\nu \to \infty} \Phi_\nu(y).$$

Мы получаем, что последовательность ступенчатых функций $(\Phi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ мажорирует функцию $\overline{F}$. Отсюда следует, что

$$\|\overline{F}\|_{L_1(\mathbb{R}^k)} \leq \lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^k} \Phi_\nu(y)\, dy = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu(x)\, dx < \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ было взято произвольно, то отсюда, очевидно, вытекает первое из неравенств (7.4). Второе неравенство (7.4) доказывается аналогичным образом. Лемма доказана. ■

Теперь мы можем доказать основное утверждение о сведе́нии вычисления интеграла функции n переменных к отысканию интегралов для функций меньшего числа переменных. Это утверждение содержится в формулируемой далее теореме. Оно является одним из главных средств, применяемых для отыскания значений тех или иных конкретных интегралов.

■ **Теорема 7.1** (теорема Фубини). *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ есть интегрируемая функция в $\mathbb{R}^n$. Тогда для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$ функция $S_y f\colon z \mapsto f(y,z)$ интегрируема по $\mathbb{R}^m$, для почти всех $z \in \mathbb{R}^m$ функция $\sigma_z f\colon y \mapsto f(y,z)$ интегрируема по $\mathbb{R}^k$.*

Пусть $F(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y,z)\, dz$, $G(z) = \int_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\, dy$. Тогда функция F интегрируема по $\mathbb{R}^k$, функция G интегрируема по $\mathbb{R}^m$, причем имеют место равенства $\int_{\mathbb{R}^k} F(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} G(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$.

Доказательство. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть произвольная интегрируемая функция. Для всякого $\nu \in \mathbb{N}$ найдем ступенчатую функцию φ_ν такую, что

$$\|f - \varphi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2^\nu}.$$

Положим $f - \varphi_\nu = r_\nu$. Для всякого $y \in \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$ определена функция $S_y r_\nu = S_y f - S_y \varphi_\nu$. Положим $\overline{R}_\nu(y) = \|r_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}$. Согласно лемме 7.2 выполняется неравенство

$$\|\overline{R}_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^k)} \leq \|r_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{1}{2^\nu}.$$

Из последнего неравенства, очевидно, следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|\overline{R}_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^k)} < \infty.$$

В силу *теоремы о нормально сходящемся ряде* (теорема 4.1) отсюда вытекает, что $\overline{R}_\nu(y) \to 0$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$.

Пусть E есть множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^k$, состоящее из всех точек $y \in \mathbb{R}^k$, для которых $\overline{R}_\nu(y)$ не стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Пусть $y \notin E$. Тогда $\overline{R}_\nu(y) \to 0$ при $\nu \to \infty$, т. е. для этого y

$$\|S_y f - S_y \varphi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}$$

стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Функция $S_y\varphi_\nu$ является ступенчатой. Из доказанного поэтому следует, что функция $S_y f$ интегрируема для всякого y, не принадлежащего множеству E меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^k$. Таким образом, мы получаем, что для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$ функция $z \mapsto f(y,z)$ интегрируема по пространству $\mathbb{R}^m$. Для $y \notin E$ положим

$$F(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y,z)\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^m} S_y f(z)\,dz.$$

Для $y \in E$ считаем, что $F(y) = 0$. Пусть $\Phi_\nu(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_\nu(y,z)\,dz$.

Согласно лемме 7.1 функция Φ_ν является ступенчатой в $\mathbb{R}^k$. При всяком $y \notin E$ имеем

$$|F(y) - \Phi_\nu(y)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^m} [f(y,z) - \varphi_\nu(y,z)]\,dz\right| \leq$$
$$\leq \|S_y f - S_y\varphi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^m)} = \overline{R}_\nu(y). \qquad (7.7)$$

Имеем также

$$\|\overline{R}_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^k)} \leq \|f - \varphi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Переопределим функцию $\overline{R}_\nu$, полагая $\overline{R}_\nu(y) = \infty$ при $y \in E$. Значение L_1-нормы функции $\overline{R}_\nu$ при этом не изменится. В то же время неравенство (7.7) для переопределенной функции $\overline{R}_\nu$ будет выполняться уже для всех $y \in \mathbb{R}^k$. Это позволяет заключить, что

$$\|F - \Phi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^k)} \leq \|\overline{R}_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^k)} \leq \|f - \varphi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

и, значит, $\|F - \Phi_\nu\|_{L_1(\mathbb{R}^k)} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Функции Φ_ν согласно лемме 7.1 являются ступенчатыми. Из доказанного поэтому следует, что функция F интегрируема по пространству $\mathbb{R}^k$. При этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(y)\,dy = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Phi_\nu(y)\,dy.$$

Согласно лемме 7.1 при каждом ν имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} \Phi_\nu(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu(x)\,dx.$$

Интеграл справа при $\nu \to \infty$ стремится к пределу, равному $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$. Мы получаем, таким образом, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(y)\,dy = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Phi_\nu(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Первое равенство теоремы, таким образом, доказано. Доказательство второго равенства утверждения осуществляется аналогично. Предоставляем читателю рассмотрение всех деталей доказательства в этом случае. Теорема доказана. ■

▼ ***Следствие 1.*** *Пусть E есть множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для произвольного $y \in \mathbb{R}^k$ обозначим через S_yE множество всех точек $z \in \mathbb{R}^m$, для которых $(y,z) \in E$. Для $z \in \mathbb{R}^m$ пусть σ_zE есть множество всех $y \in \mathbb{R}^k$, для которых $(y,z) \in E$. Тогда для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$ множество S_yE есть множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^m$. Аналогично, для почти всех $z \in \mathbb{R}^m$ множество σ_zE есть множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^k$.*

З а м е ч а н и е. Множество S_yE называется *y-сечением множества E* и соответственно σ_zE — *z-сечением множества E.*

Доказательство. Данное утверждение получается приложением утверждения теоремы 7.1 к функции χ_E — индикатору множества E. Если E является множеством меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^n$, то функция χ_E интегрируема и интеграл от нее равен нулю. По теореме 7.1 найдется множество A_1 меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^k$ такое, что если $y \notin A_1$, то функция $S_y\chi_E\colon z \mapsto \chi_E(y,z)$ интегрируема. Положим

$$F(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_E(y,z)\,dz.$$

Величина $F(y)$ равна мере множества S_yE. В силу утверждения теоремы 7.1 функция F интегрируема. Для всякого $y \notin A_1$ величина $F(y)$ неотрицательна. В силу теоремы 7.1 интеграл от функции F по $\mathbb{R}^k$ равен интегралу от функции χ_E по пространству $\mathbb{R}^n$, т. е. он равен нулю. Отсюда заключаем, что $F(y) = 0$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$, для которых $F(y)$ определено.

Пусть A_2 есть множество тех $y \in \mathbb{R}^k$, для которых $F(y) \neq 0$. В силу леммы 2.9 A_2 есть множество меры нуль. Положим $A = A_1 \cup A_2$. Тогда множество A есть множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^k$. Для всякого $y \notin A$ множество $S_y E$ представляет собой множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Утверждение следствия, касающееся множеств $S_y E$, таким образом, доказано. Для $\sigma_z E$ рассуждения проводятся аналогично. Следствие 1 доказано. ▼

▼ ***Следствие 2.*** *Все утверждения теоремы* 7.1 *остаются верными также и в случае, если функция f, интегрируемая по $\mathbb{R}^n$, определена лишь почти всюду в $\mathbb{R}^n$.*

Действительно, предположим, что f есть интегрируемая функция, определенная в $\mathbb{R}^n$ почти всюду. Пусть E есть множество тех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $f(x)$ не определено.

Продолжим функцию f на множество E произвольным образом. Получим некоторую функцию $\tilde{f}$, определенную всюду в $\mathbb{R}^n$. Эта функция интегрируема. При этом интегралы функций f и $\tilde{f}$ совпадают. Пусть A_1 есть множество тех $y \in \mathbb{R}^k$, для которых соответствующее y-сечение множества E не является множеством меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^m$. Далее, пусть A_2 есть множество тех $y \in \mathbb{R}^k$, для которых функция $S_y \tilde{f}$ интегрируема по $\mathbb{R}^m$. Тогда $A_1 \cup A_2$ есть *пренебрежимое множество в* $\mathbb{R}^k$.

Возьмем произвольно $y \notin A$. Множество $S_y E$ для данного y является пренебрежимым в $\mathbb{R}^m$ в силу того, что $y \notin A_1$. Если $z \notin S_y E$, то $x = (y, z) \notin E$ и, значит, для этого z имеем $S_y f(z) = f(y, z) = S_y f(z)$. Так как $y \notin A_2$, то для данного y функция $S_y f$ интегрируема. Так как $y \notin A_1$, то для данного y функция $S_y f(z) = S_y \tilde{f}(z)$ для почти всех $z \in \mathbb{R}^m$. Следовательно, мы получаем, что если $y \notin A$, то функция $S_y f \colon z \in \mathbb{R}^m \mapsto f(y, z)$ интегрируема по $\mathbb{R}^m$. При этом

$$F(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y, z)\, dz = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}(y, z)\, dz = \widetilde{F}(y).$$

В силу теоремы 7.1 функция $\widetilde{F}$ интегрируема по $\mathbb{R}^k$. Отсюда вытекает, что функция F интегрируема по $\mathbb{R}^k$. При этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \widetilde{F}(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

Рассуждения, касающиеся функции $G(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dy$ (см. выше), проводятся аналогично. Следствие 2 доказано. ▼

7.2. Теорема Тонелли

Здесь мы докажем а н а л о г теоремы Фубини для случая измеримых функций. Необходимость в таком аналоге вызвана тем обстоятельством, что условия теоремы Фубини делают ее в некоторых случаях неудобной для применения. Для того чтобы применять эту теорему, необходимо заранее знать, что рассматриваемая функция интегрируема. Оказывается, что преобразования интегралов функции n переменных, возможность которых вытекает из теоремы Фубини, приводят к правильному результату при значительно более слабых предположениях.

Напомним некоторые обозначения. Пусть $n \geq 2$, k и m есть натуральные числа такие, что $k + m = n$. Пространство $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с произведением $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, рассматривая произвольную точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ как пару (y, z), где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$, причем $y_i = x_i$ для $i = 1, 2, \ldots, k$ и $z_j = x_{k+j}$ при каждом $j = 1, 2, \ldots$.

Для произвольной функции f, определенной в $\mathbb{R}^n$, ее значение $f(x)$ в точке $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать символом $f(y, z)$.

Для функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ символ $S_y f$, где $y \in \mathbb{R}^k$, как и ранее, означает функцию, определенную на $\mathbb{R}^m$ условием $S_y f(z) = f(y, z)$ для всех $z \in \mathbb{R}^m$. Полагаем $\overline{F}(y) = \|S_y f\|_{L_1(\mathbb{R}^m)}$.

Для произвольной точки $z \in \mathbb{R}^m$ пусть $\sigma_z f$ есть функция $y \in \mathbb{R}^k \mapsto f(y, z)$.

■ **Теорема 7.2** (теорема Тонелли). *Предположим, что пространство $\mathbb{R}^n$ представлено как прямое произведение $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ есть неотрицательная измеримая функция. Тогда для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$ функция $S_y f$ измерима в $\mathbb{R}^m$, для почти всех $z \in \mathbb{R}^m$ функция $\sigma_z f$ измерима в $\mathbb{R}^k$. Пусть*

$$F(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y, z)\, dz, \quad G(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y, z)\, dy.$$

Определенные так функции F и G неотрицательны, измеримы в пространствах $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, и имеют место равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} G(z)\, dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

Доказательство. Предположим, что измеримая вещественная функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ неотрицательна и определена всюду в $\mathbb{R}^n$. Величина $f(x)$, таким образом, предполагается определенной для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Построим некоторую вспомогательную последовательность функций f_ν. Пусть B_ν есть n-мерный брус

$$B_\nu = [-\nu, \nu) \times [-\nu, \nu) \times \cdots \times [-\nu, \nu) = \{[-\nu, \nu)\}^n.$$

Брус B_ν может быть представлен как объединение конечного числа двоичных кубов, и, следовательно, его индикатор является ступенчатой, а значит, и измеримой функцией.

Положим $\chi_\nu = \nu\chi_{B_\nu}$, и пусть $f_\nu = \min\{f, \chi_\nu\}$. Функция f_ν неотрицательна и измерима. При всяком $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $f(x)$ определено, выполняются неравенства

$$0 \le f_\nu(x) \le \chi_\nu(x).$$

Отсюда вытекает, что функция f_ν при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ интегрируема.

Если $x \notin B_\nu$, то $f_\nu(x) = 0$ и, значит, в этом случае $f_\nu(x) \le f_{\nu+1}(x)$. Пусть $x \in B_\nu$. Если $f(x) \le \nu$, то $f(x) \le \nu + 1$ и, следовательно,

$$f_\nu(x) = f_{\nu+1}(x) = f(x).$$

Если $\nu < f(x) \le \nu + 1$, то

$$f_\nu(x) = \nu < f(x) = f_{\nu+1}(x).$$

Если $\nu + 1 < f(x)$, то имеем $f_\nu(x) = \nu$, $f_{\nu+1}(x) = \nu + 1$. В этом случае

$$f_\nu(x) < f_{\nu+1}(x).$$

Последовательность $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, определенная таким образом, является возрастающей. Для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} \chi_\nu(x) = \infty.$$

Отсюда следует, что для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = \min\{f(x), \infty\} = f(x).$$

При каждом ν для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$ функция $S_y f_\nu$ интегрируема по $\mathbb{R}^m$. Пусть A_ν есть то множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^k$, состоящее из тех исключительных значений $y \in \mathbb{R}^k$, для которых функция

$S_y f_\nu$ не является интегрируемой по $\mathbb{R}^m$. Для всякого $y \notin A_\nu$ определена величина

$$F_\nu(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_\nu(y, z)\, dz.$$

Получаемая таким образом функция F_ν интегрируема по пространству $\mathbb{R}^k$. При этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F_\nu(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\, dx.$$

Пусть $A = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Тогда A есть множество меры нуль в пространстве $\mathbb{R}^k$. Возьмем произвольно точку $y \notin A$. Для этого y функция $S_y f_\nu$ определена для всех $z \in \mathbb{R}^m$ и интегрируема по пространству $\mathbb{R}^m$. Последовательность функций $(S_y f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ является возрастающей, и $S_y f_\nu(z) \to S_y f(z)$ при $\nu \to \infty$ для всех $z \in \mathbb{R}^m$. Отсюда вытекает измеримость функции $S_y f$. В силу неотрицательности функции $S_y f$ для данного y определена величина $F(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y, z)\, dz$. В силу *теоремы Леви для последовательностей измеримых функций* (теорема 5.7) мы получаем, что $F(y) = \lim\limits_{\nu \to \infty} F_\nu(y)$. В силу свойства монотонности интеграла последовательность $(F_\nu(y))_{\nu \in \mathbb{N}}$ является возрастающей для всякого y. При этом $F_\nu(y) \to F(y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$. Отсюда вытекает измеримость функции F.

Теорема Леви для последовательности измеримых функций позволяет заключить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F(y)\, dy = \lim_{\nu \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} F_\nu(y)\, dy. \tag{7.8}$$

При каждом ν в силу теоремы 7.1 имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} F_\nu(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\, dx.$$

Имеем также

$$\lim_{\nu \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx. \tag{7.9}$$

Из равенств (7.7) и (7.9) вытекает равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} F(y)\,dy.$$

Первое из равенств теоремы доказано. Равенство, относящееся к функции G, устанавливается аналогичным образом.

В проделанных выше рассуждениях предполагалось, что функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ определена для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Случай, когда $f(x)$ определено лишь для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, сводится к рассмотренному и осуществляется рассуждениями, почти дословно повторяющими доказательство следствия 2 теоремы 7.1.

Приведем одно полезное следствие *теоремы Тонелли.* Пусть $n = k + m$, где k, m — натуральные числа. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Для произвольного $y \in \mathbb{R}^k$ символом $S_y(A)$ обозначим множество всех $z \in \mathbb{R}^m$ таких, что точка $x = (y, z)$ принадлежит A. Пусть $z \in \mathbb{R}^m$. Множество всех $y \in \mathbb{R}^k$ таких, что точка $x = (y, z) \in A$, будем обозначать символом $\sigma_z(A)$ и называть z-сечением множества A.

▼ ***Следствие.*** *Пусть даны измеримое множество A в пространстве $\mathbb{R}^n$ и неотрицательная измеримая функция $f\colon A \to \mathbb{R}$. Тогда для почти всех $y \in \mathbb{R}^k$ множество S_y измеримо в $\mathbb{R}^m$, для почти всех $z \in \mathbb{R}^m$ измеримо множество $\sigma_z(A)$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ и имеет место равенство*

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \left\{ \int\limits_{S_y(A)} f(y,z)\,dz \right\} dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left\{ \int\limits_{\sigma_z(A)} f(y,z)\,dy \right\} dz.$$

Доказательство. Утверждение следствия об измеримости множеств $S_y(A)$ и $\sigma_z(A)$ устанавливается применением *теоремы Тонелли* к функции $\chi_A(y, z)$ — индикатору множества A.

Пусть $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ есть неотрицательная измеримая функция, определенная на множестве A пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Продолжим функцию f на все пространство $\mathbb{R}^n$, полагая $f(x) = 0$ при $x \notin A$. Продолжение является неотрицательной измеримой функцией на пространстве $\mathbb{R}^n$. Согласно *теореме Тонелли* имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y,z)\,dz \right\} dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dy \right\} dz.$$

Пусть $y \in \mathbb{R}^k$ таково, что для этого y функция $z \mapsto f(y, z)$ является измеримой в пространстве $\mathbb{R}^m$ и множество $S_y(A)$ измеримо. Таковы почти все $y \in \mathbb{R}^m$. При $z \notin S_y(A)$ величина $f(y,z)$ обращается в нуль. В соответствии с определением интеграла функции по подмножеству отсюда получаем, что для данного y имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y,z)\,dz = \int\limits_{S_y(A)} f(y,z)\,dz.$$

Принимая во внимание, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_{A} f(x)\,dx,$$

отсюда получаем первое из доказываемых равенств. Справедливость второго устанавливается аналогичными рассуждениями. Следствие доказано. ▼

Замечание. Утверждение следствия, касающееся интеграла функции $f(x) \equiv f(y,z)$, верно также и для случая, когда f есть произвольная интегрируемая функция в множестве $A \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае требуемый результат устанавливается рассуждениями, аналогичными тем, которые были проделаны при доказательстве следствия.

7.3. Формула Кавальери — Лебега

7.3.1. Если система с интегрированием является счетной в бесконечности, то может быть установлено равенство, которое позволяет представить *интеграл неотрицательной измеримой функции* через меры ее множеств Лебега. Выводом этой формулы мы и займемся.

Предварительно докажем некоторое предложение о представлении несобственного интеграла в виде предела суммы ряда.

■ **Лемма 7.3.** *Пусть $\theta\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ есть неотрицательная убывающая функция. Для $h > 0$ положим $S_h(\theta) = h\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \theta(\nu h)$. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_0^\infty \theta(x)\,dx = \lim_{h\to 0} S_h(\theta). \tag{7.10}$$

При каждом $h > 0$ справедливо неравенство

$$S_h(\theta) \geq S_{2h}(\theta). \tag{7.11}$$