

Задача о минимизации затрат на пересылку данных по компьютерной сети

По компьютерной сети из компьютеров C_1, C_2, \dots, C_n требуется за секунду переслать Z МБайт с компьютера C_1 на C_n . Известны максимальные пропускные способности D_{ij} МБайт/с для всех имеющихся каналов связи между компьютерами, конфигурация сети, а также стоимость A_{ij} пересылки 1 Мбайта с компьютера C_i на C_j .

Составить схему пересылки данных с C_1 на C_n , при которой пропускная способность ни одного канала не превышена и суммарные затраты на пересылку минимальны.

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{1j} = Z \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = 0, \quad i = \overline{2, n-1} \\ x_{ij} \leq D_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 127 & 83 \\ 46 & 0 & 34 \\ 53 & 129 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 29 \\ 50 & 0 & 7 \\ 32 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = 33$$

Решение Имеем следующую задачу ЛП:

$$\begin{cases} f = 127x_{12} + 83x_{13} + 46x_{21} + 34x_{23} + 53x_{31} + 129x_{32} \rightarrow \min \\ x_{12} + x_{13} = 33 \\ x_{21} + x_{23} - x_{12} - x_{32} = 0 \\ x_{11} \leq 0 \\ x_{12} \leq 50 \\ x_{13} \leq 29 \\ x_{21} \leq 50 \\ x_{22} \leq 0 \\ x_{23} \leq 7 \\ x_{31} \leq 32 \\ x_{32} \leq 9 \\ x_{33} \leq 0 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3} \end{cases}$$

Приведем к каноническому виду:

$$\begin{cases} f = -127x_{12} - 83x_{13} - 46x_{21} - 34x_{23} - 53x_{31} - 129x_{32} \rightarrow \max \\ x_{12} + x_{13} = 33 \\ x_{21} + x_{23} - x_{12} - x_{32} = 0 \\ x_{11} + s_1 = 0 \\ x_{12} + s_2 = 50 \\ x_{13} + s_3 = 29 \\ x_{21} + s_4 = 50 \\ x_{22} + s_5 = 0 \\ x_{23} + s_6 = 7 \\ x_{31} + s_7 = 32 \\ x_{32} + s_8 = 9 \\ x_{33} + s_9 = 0 \\ x_{ij}, s_k \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}, k = \overline{1, 9} \end{cases}$$

Тут достаточно гауссовых преобразований, чтобы получить специальную ЗЛП.

$$\left\{ \begin{array}{l} f = -3099 + 12x_{23} - 175x_{22} - 34x_{23} - 53x_{31} - 90s_3 \rightarrow \max \\ x_{12} - s_3 = 4 \\ x_{21} + x_{23} - x_{32} - s_3 = 4 \\ x_{11} + s_1 = 0 \\ s_2 + s_3 = 46 \\ x_{13} + s_3 = 29 \\ -x_{23} + x_{32} + s_3 + s_4 = 46 \\ x_{22} + s_5 = 0 \\ x_{23} + s_6 = 7 \\ x_{31} + s_7 = 32 \\ x_{32} + s_8 = 9 \\ x_{33} + s_9 = 0 \\ x_{ij}, s_k \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}, k = \overline{1,9} \end{array} \right.$$

Базисные переменные - $[x_{12}, x_{21}, x_{11}, s_2, x_{13}, s_4, x_{22}, s_6, s_7, s_8, x_{33}]$

Итерация симплекс-метода:

| B | x_0 | x_{11} | x_{12} | x_{13} | x_{21} | x_{22} | x_{23} | x_{31} | x_{32} | x_{33} | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 | s_6 | s_7 | s_8 | s_9 |
|----------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f | -3099 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -12 | 53 | 175 | 0 | 0 | 0 | 90 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{12} | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{21} | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{11} | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| s_2 | 46 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{13} | 29 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| s_4 | 46 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{22} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| s_6 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| s_7 | 32 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| s_8 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x_{33} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Таблица не оптимальна (есть отрицательные числа в строке f), не является неразрешимой (нет столбцов, состоящих только из отрицательных чисел).

Столбец x_{23} является ведущим, т.к. в строке f отрицательное число

Строка x_{21} является ведущей, т.к. $\frac{4}{1} = \min_{a_{0q}>0} \frac{a_{i0}}{a_{iq}} = \min\{4, 7\}$

Преобразование...

| B | x_0 | x_{11} | x_{12} | x_{13} | x_{21} | x_{22} | x_{23} | x_{31} | x_{32} | x_{33} | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | s_5 | s_6 | s_7 | s_8 | s_9 |
|----------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f | -3051 | 0 | 0 | 0 | 12 | 0 | 0 | 53 | 163 | 0 | 0 | 0 | 78 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{12} | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{21} | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{11} | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| s_2 | 46 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{13} | 29 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| s_4 | 50 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x_{22} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| s_6 | 3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| s_7 | 32 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| s_8 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| x_{33} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Проверка на оптимальность: все числа в строке f неотрицательны, тем самым имеем оптимальное базисное решение $(0, 4, 29, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 46, 0, 50, 0, 3, 32, 9, 0)$ оптимально.

Вернемся к исходной задаче: так как мы при приведении задачи ЛП к канонической форме умножали целевую функцию на -1, теперь также умножим ответ на -1

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 29 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f^* = -(-3051) = 3051$$