Matematikai alapismeretek 2

Ruzsa Zoltán
ruzsa.zoltan@emk.semmelweis.hu

https://ruzsaz.github.io/mat2.pdf
(vagy Moodle)

Függvények

Mi a függvény?

Mit érdemes tudni róla?

Mi a függvény definíciója?

Függvények

A, B halmazok

$f \colon A \to B$ függvény, ha A minden eleméhez egy B-beli elemet rendel.

(esetleg nem kell minden elemen értelmezettnek lennie)

Függvények

A, B halmazok

$f\colon A \to B$ függvény, ha A minden eleméhez egy B-beli elemet rendel.

Definíció:

(a,b) rendezett párokból ($a \in A$, $b \in B$) álló f halmaz függvény,

- ha $a \in A$, akkor van olyan $b \in B$, hogy $(a,b) \in f$
- $(a,b) \in f$ és $(a,c) \in f$ csak úgy lehet, hogy $b = c$

Függvények megadása

- Mivel jelöljük? Mely halmazok között működik?

$$f\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$$

- Mihez mit rendel?
  - Képlettel: $x \mapsto x^2+3x$, $f(x) = \sin x$
  - Függvény nevével: $\sin$, $\sin^2$, $\sqrt[3]{}$
  - Mesével: “minden emberhez a nemét rendeli”
  - Rajzzal, táblázattal, ...

Néhány függvény…?

- $a(x) = \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$
- b minden síkbeli háromszöghöz a területét rendeli
- c: $P_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}$, amely egy polinomhoz a gyökét rendeli
- $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x) = \sqrt{x}$
- e egy emberhez a születéskor várható élettartamát rendeli
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$
- g minden macskához a szemét rendeli

Logaritmus

Definíció 1: $\ln(x)$ az exponenciális függvény inverze.

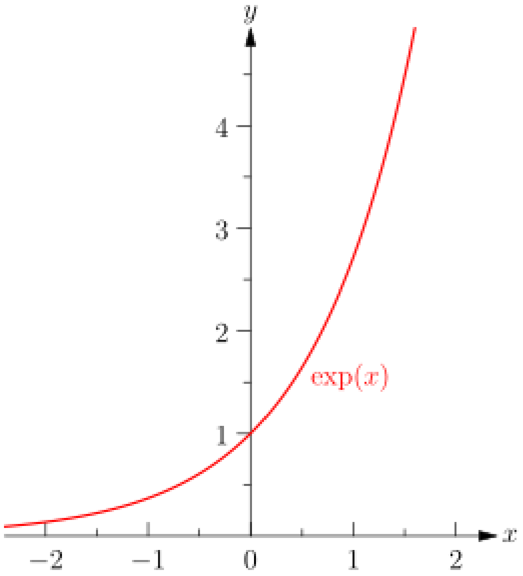
Definíció 2: $\ln(x)$ az az y szám, amelyre $e^y=x$. ($e=2,71828...$)

Esetleg: $\log_a(x)$ az az y szám, amelyre $a^y=x$.

Exponenciális függvény

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n)$

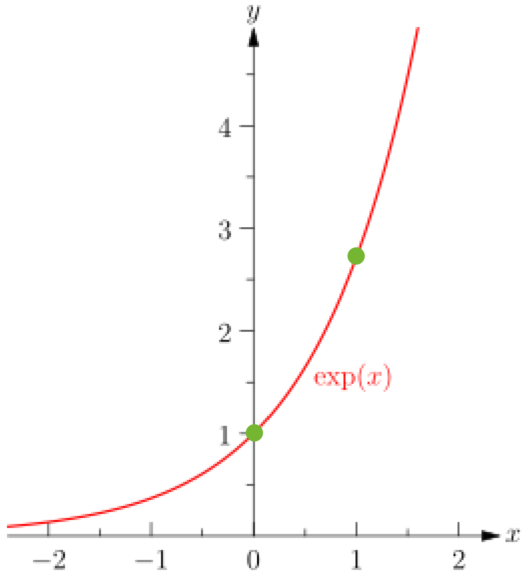


Exponenciális függvény

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Naív definíció:

1) Ha $n \in \mathbb{N}$: $e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot \ldots e}_{n \text{ db}}$



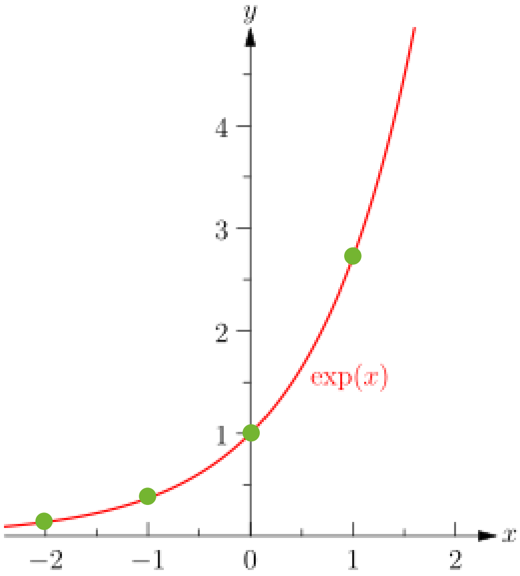
Exponenciális függvény

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Naív definíció:

1) Ha $n \in \mathbb{N}$: $e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot \ \ldots \ e}_{n \text{ db}}$

2) Ha $n \in \mathbb{N}$: $e^{-n} = 1/e^n$



Exponenciális függvény

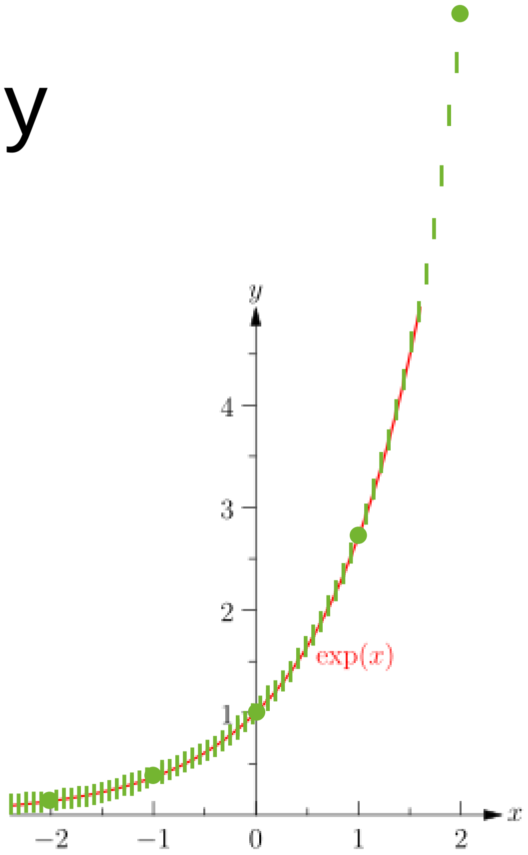
$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Naív definíció:

1) Ha $n \in \mathbb{N}$: $e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot \dots e}_{n \text{ db}}$

2) Ha $n \in \mathbb{N}$: $e^{-n} = 1/e^n$

3) Ha $p,q \in \mathbb{N}$: $e^{p/q} = \sqrt[q]{e^q}$



Exponenciális függvény

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

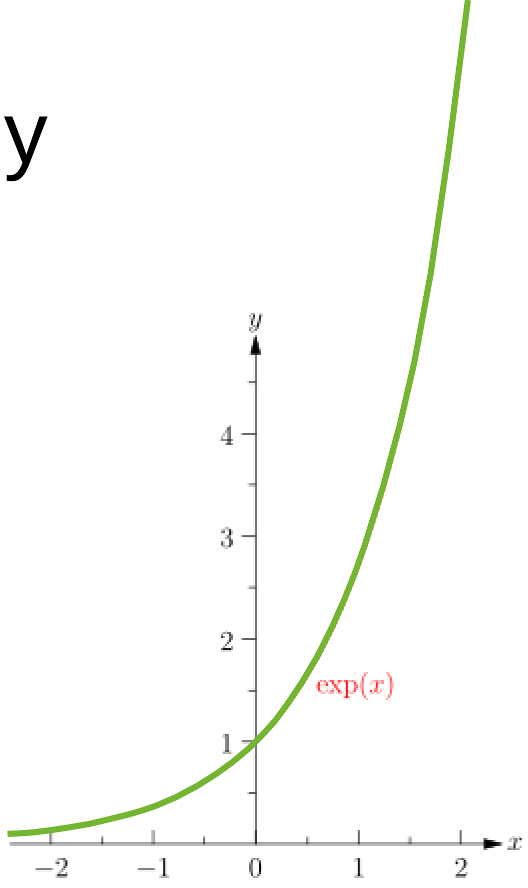
Naív definíció:

1) Ha $n \in \mathbb{N}$: $e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot \dots e}_{n \text{ db}}$

2) Ha $n \in \mathbb{N}$: $e^{-n} = 1/e^n$

3) Ha $p,q \in \mathbb{N}$: $e^{p/q} = \sqrt[q]{e^q}$

4) Ha x irracionális: $e^x = \lim\limits_{q \to x,\ q \in \mathbb{Q}} e^q$



Inverz függvény

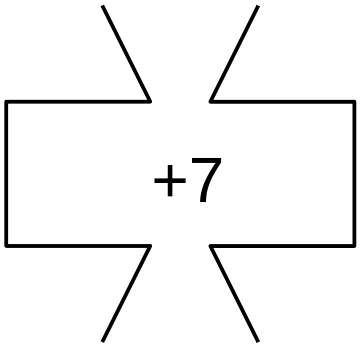
Az $f\colon A \to B$ inverze az a $g\colon B \to A$ függvény, amelyre a $g \circ f$ összetett függvény az identitás.
(És ekkor az $f \circ g$ is az.)

Vagy: $f(x)$ inverze $g(y)$, ha minden x-re $g(f(x)) = x$.
(És ekkor minden y-ra $f(g(y) = y$ is.)

f inverzét f^{-1} jelöli.

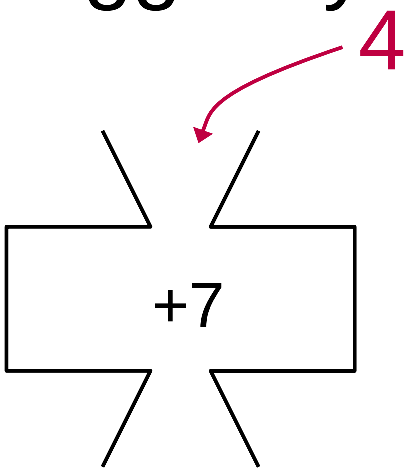
Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



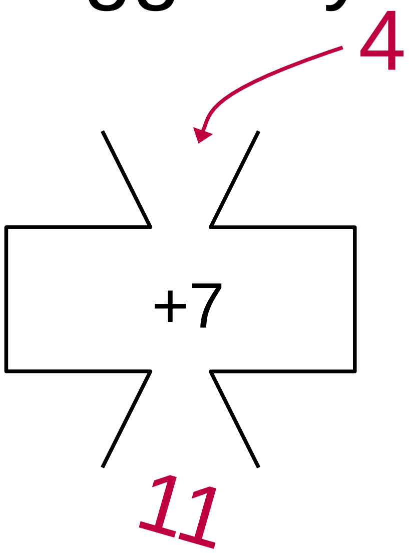
Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha
minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



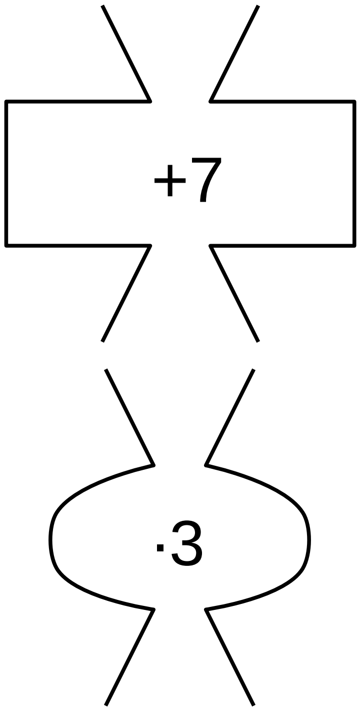
Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha
minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



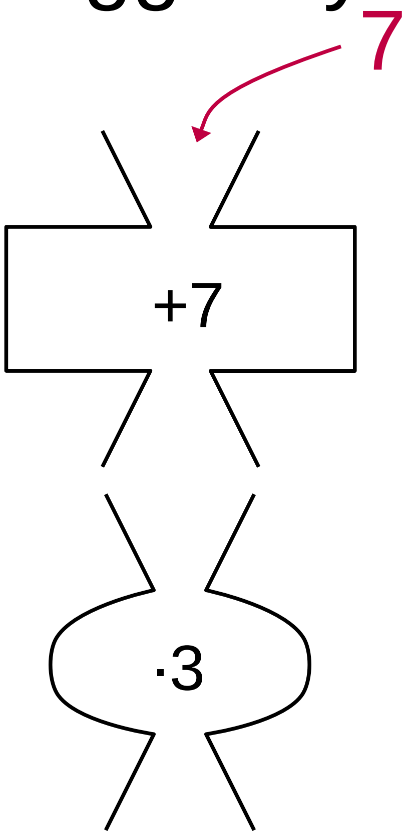
Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha
minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



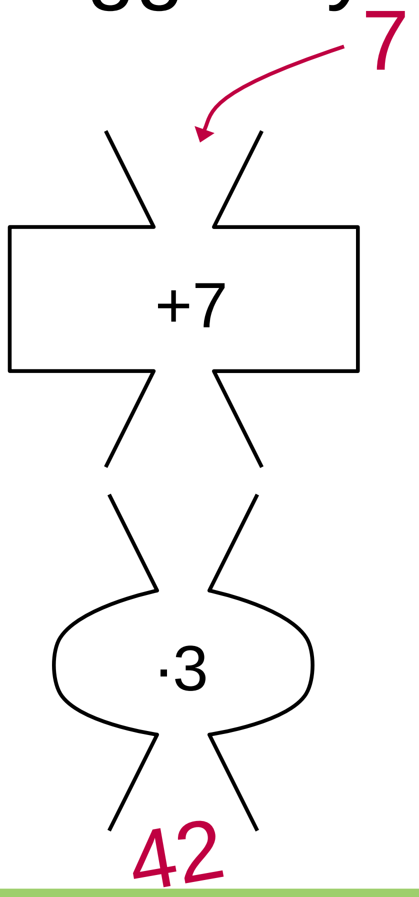
Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



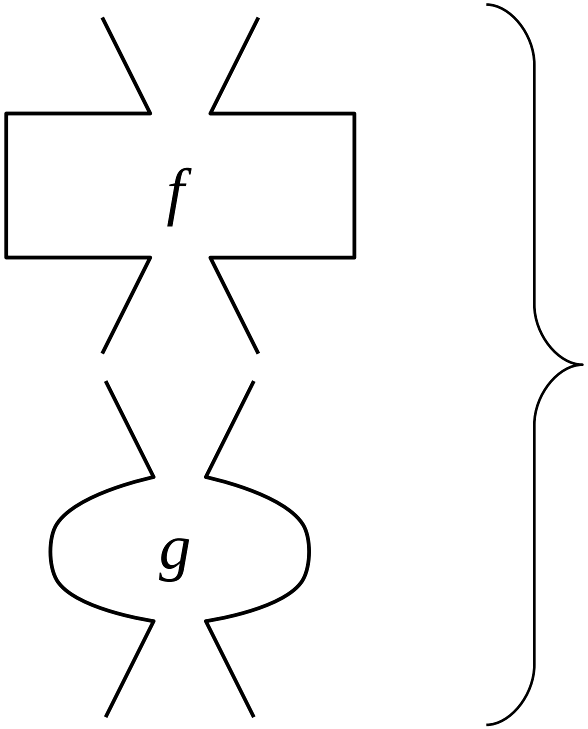
Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha
minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



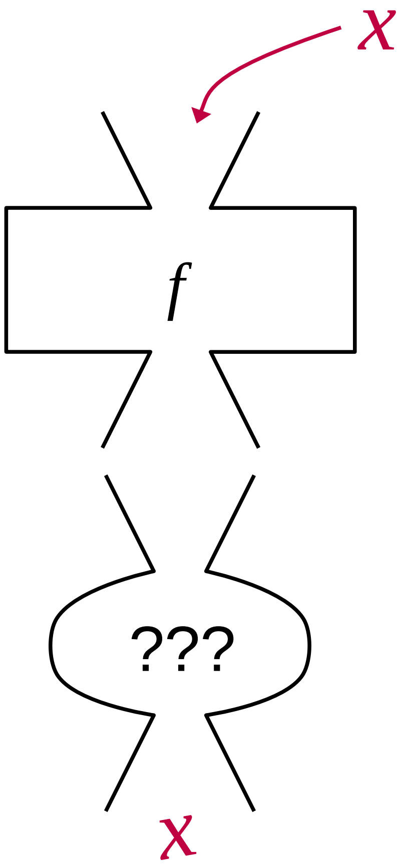
$x \mapsto g(f(x))$

vagy

$g \circ f$

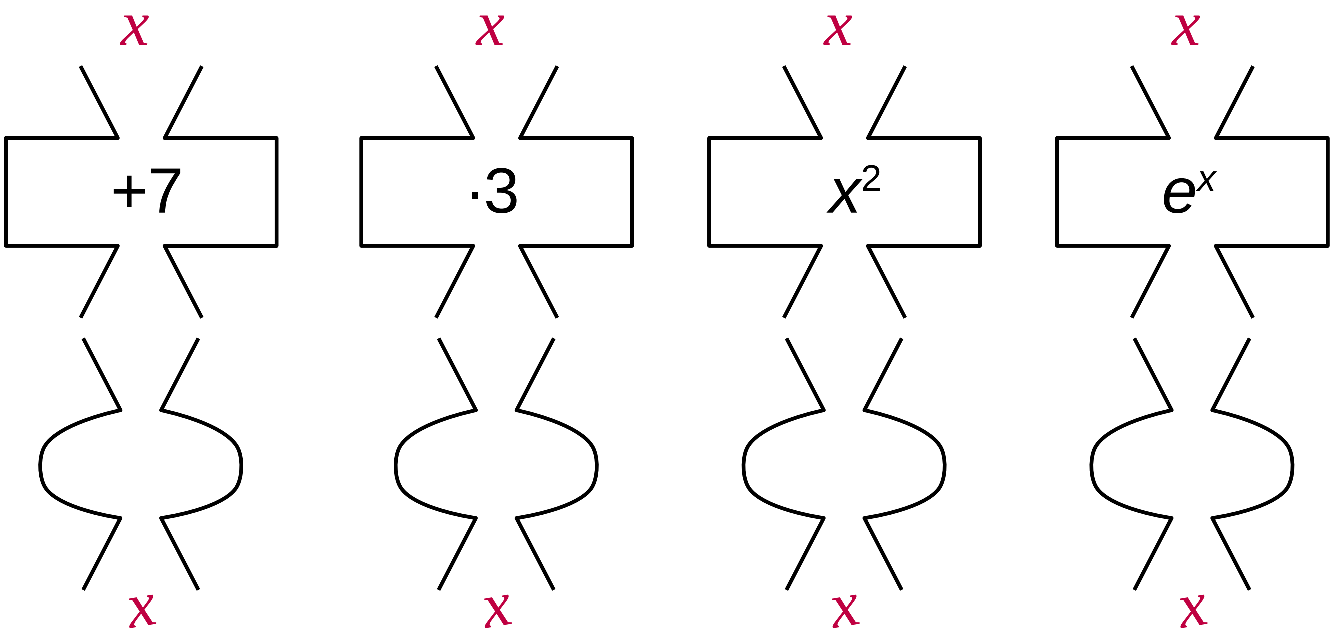
Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha
minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha
minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.



$f(x) = x+7$ inverze:

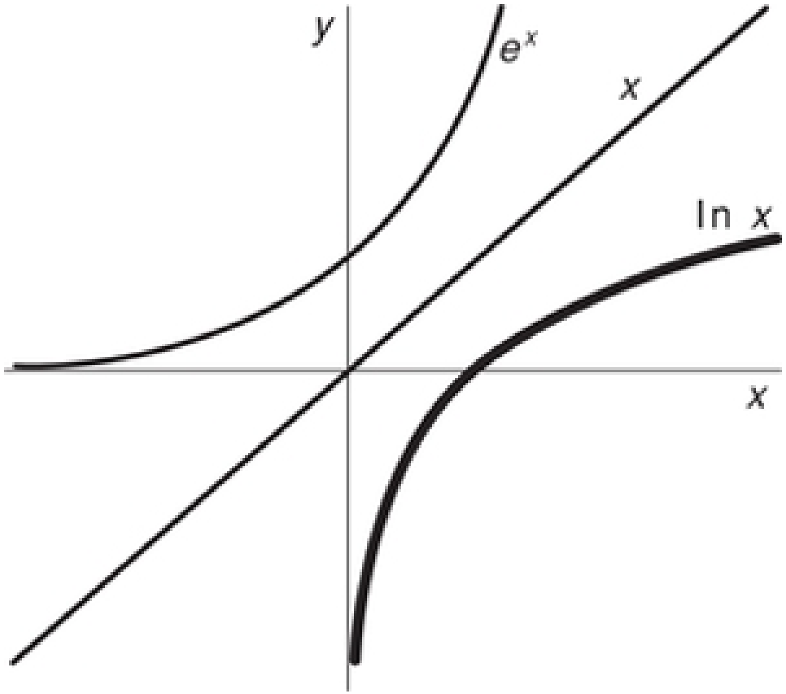
$g(x) = 3x$ inverze:

$h(x) = x^2$ inverze:

$i(x) = e^x$ inverze:

Inverz függvény

$f(x)$ inverze $f^{-1}(y)$, ha
minden x-re $f^{-1}(f(x)) = x$.

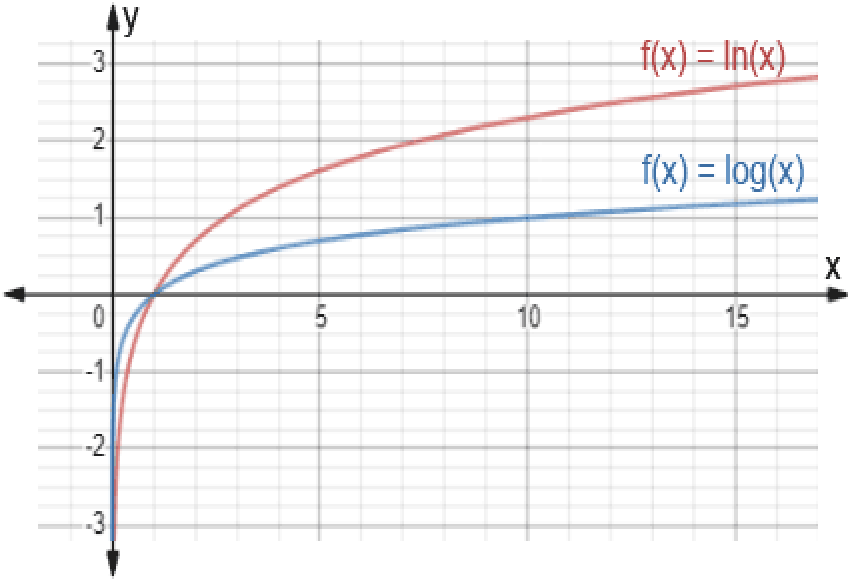


Logaritmus

- $\ln x$: az e^x inverze
- $\log_a x$: az a^x inverze

Vagy: $\log_a x$ az a c szám, amelyre $a^c = x$

- $\log_{10} x$: kb. x számjegyeinek száma
- A különböző alapú logaritmus függvények csak egy konstans szorzóban térnek el
- Azonosságok:
  - $\log (x \cdot y) = \log x + \log y$
  - $\log (x/y) = \log x - \log y$
  - $\log (x^k) = k \cdot \log x$
  - $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$



Logaritmus

- $\ln x$: az e^x inverze
- $\log_a x$: az a^x inverze

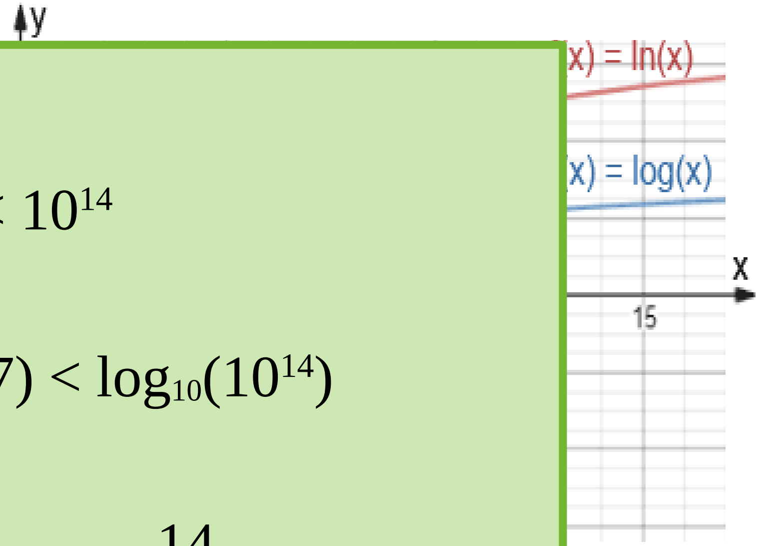
Vagy: $\log_a x$ az a c szám, amelyre $a^c = x$

- $\log_{10} x$: kb. x számjegyeinek száma
- A külön
  csak eg
- Azonos
  - log
  - log
  - log
  - $\log_a$
    $\log_b a$

$$10^{13} < \overbrace{64213875068417}^{14} < 10^{14}$$

$\log_{10}$

$$\underset{13}{\log_{10}(10^{13})} < \log_{10}(64213875068417) < \underset{14}{\log_{10}(10^{14})}$$

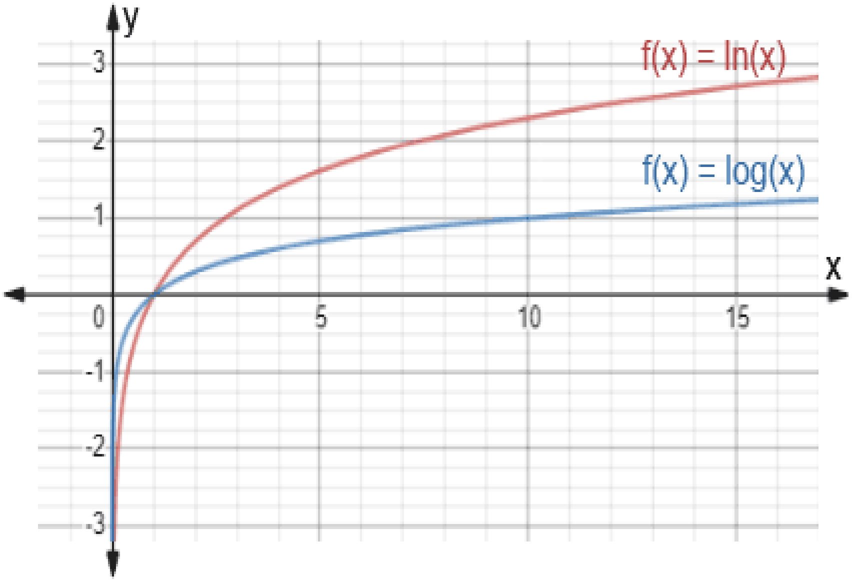


Logaritmus

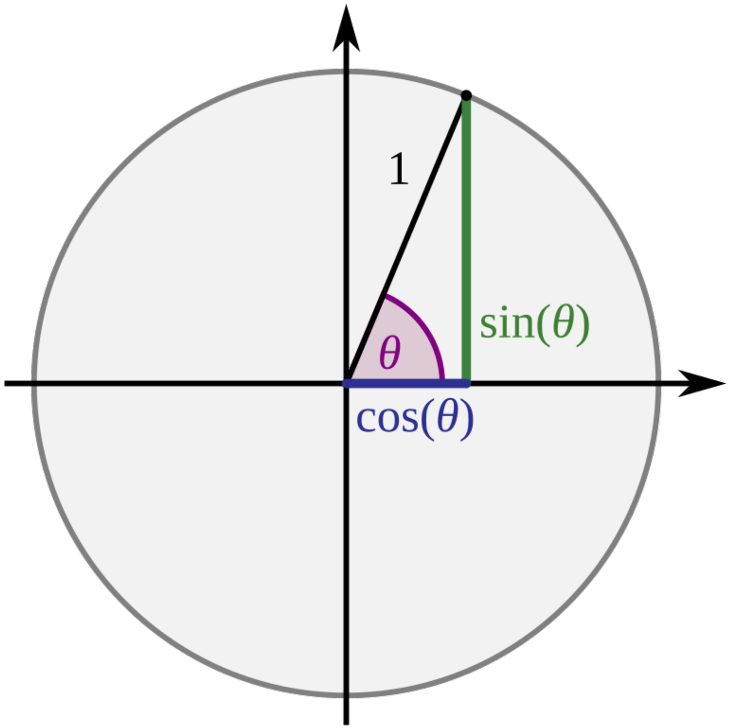
- $\ln x$: az e^x inverze
- $\log_a x$: az a^x inverze

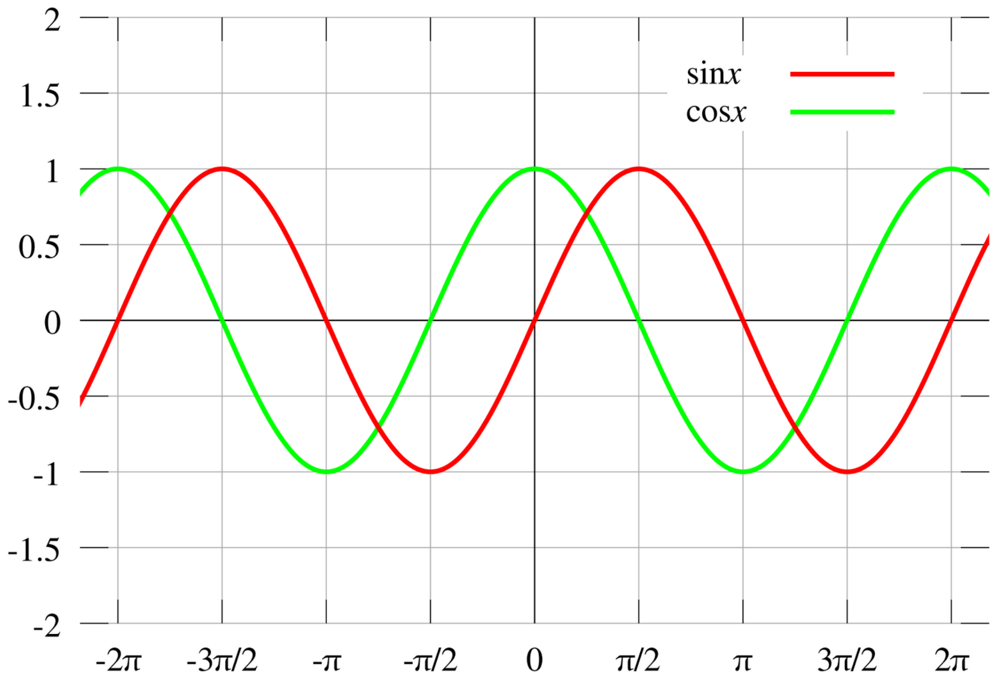
Vagy: $\log_a x$ az a c szám, amelyre $a^c = x$

- $\log_{10} x$: kb. x számjegyeinek száma
- A különböző alapú logaritmus függvények csak egy konstans szorzóban térnek el
- Azonosságok:
  - $\log (x \cdot y) = \log x + \log y$
  - $\log (x/y) = \log x - \log y$
  - $\log (x^k) = k \cdot \log x$
  - $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

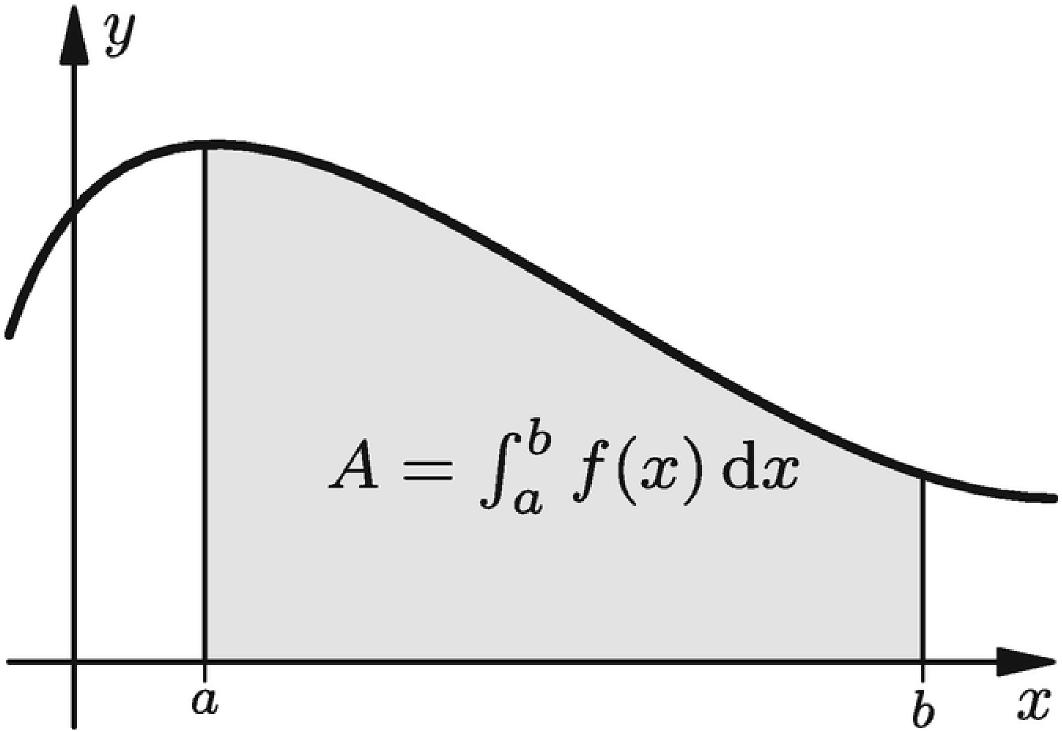


$\sin x$, $\cos x$





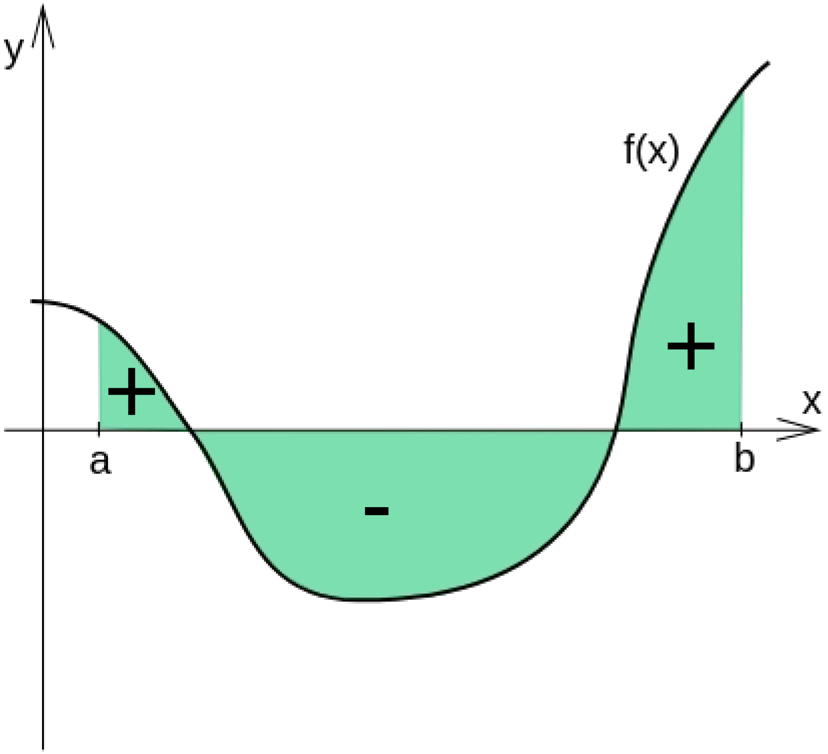
Integrálás



$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_b^a f(x)\,dx$$

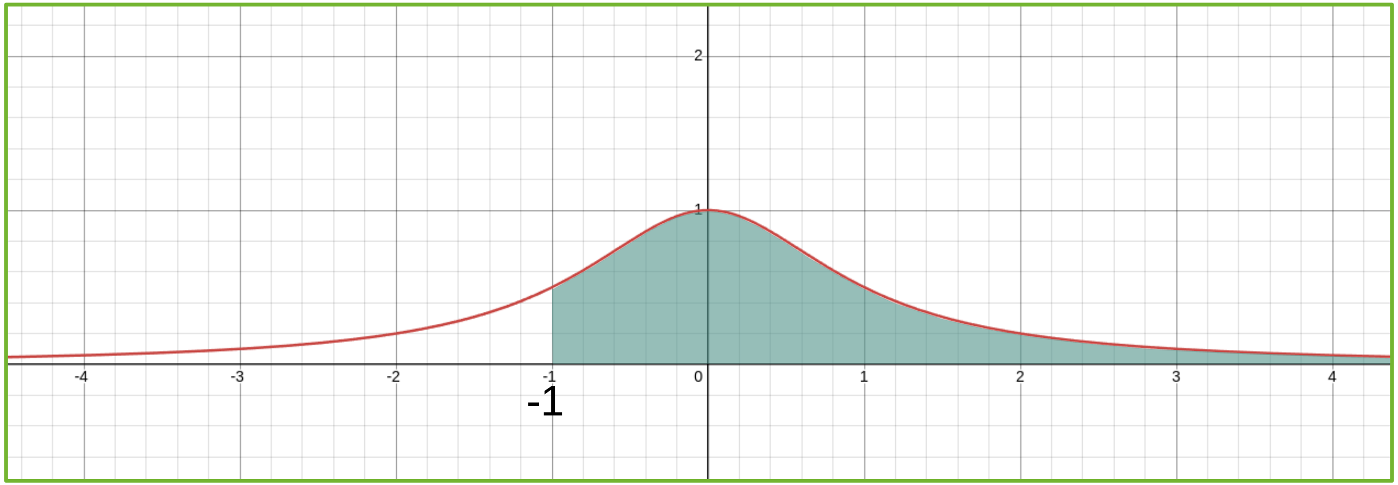
Integrálás



$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

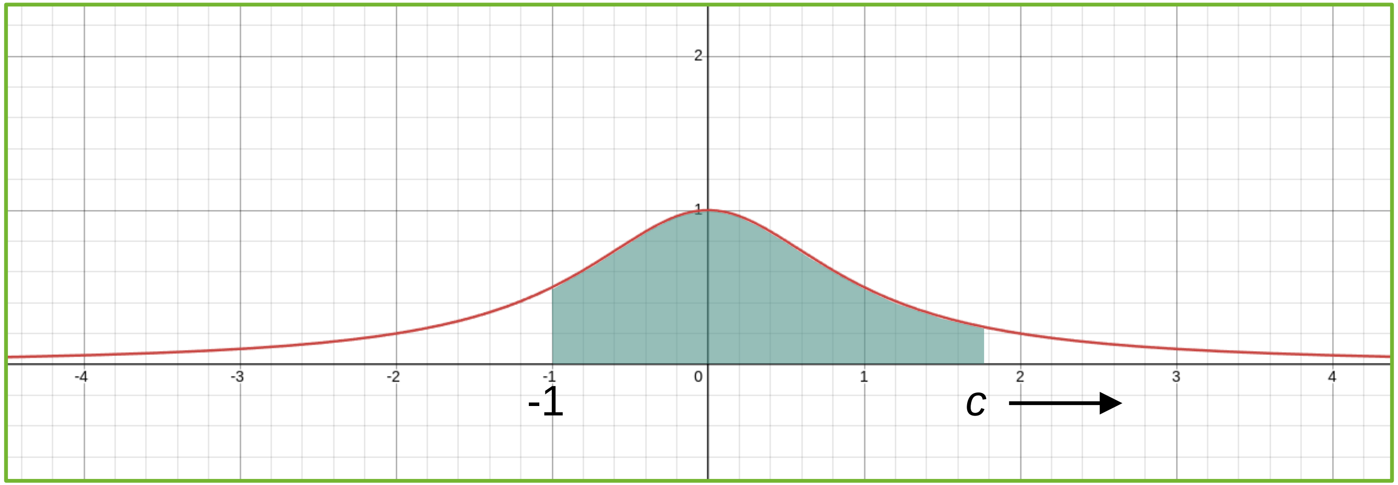
$$\int_b^a f(x)\,dx$$

Impropius integrál



$$\int_{-1}^{\infty} f(x)\,dx$$

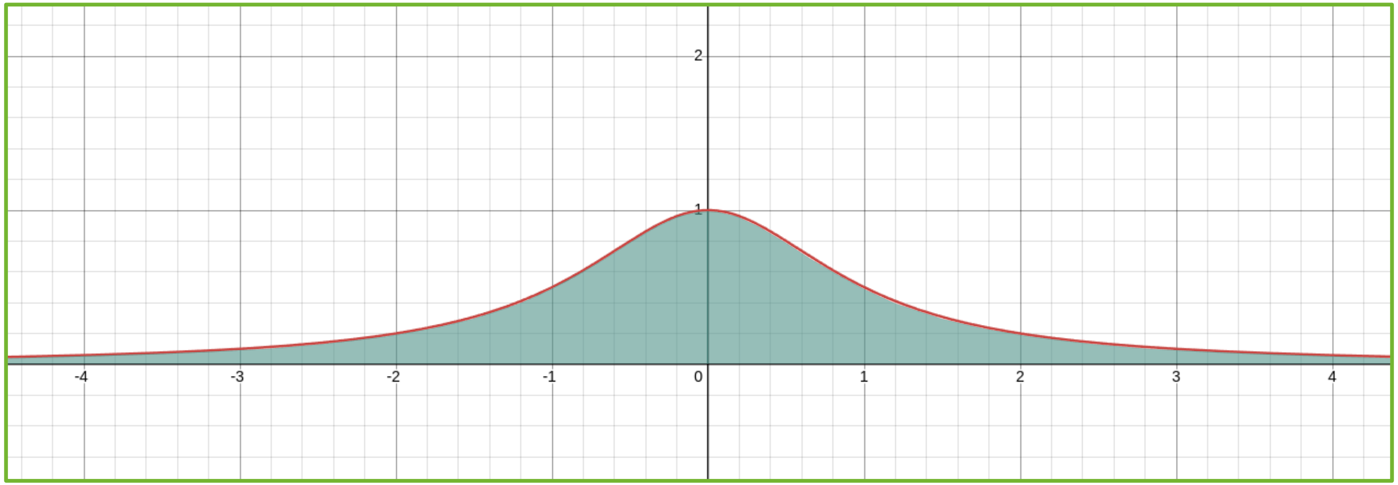
Impropius integrál



$$\int_{-1}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{c \to \infty} \int_{-1}^{c} f(x)\,dx$$

Impropius integrál



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Néhány integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx$$

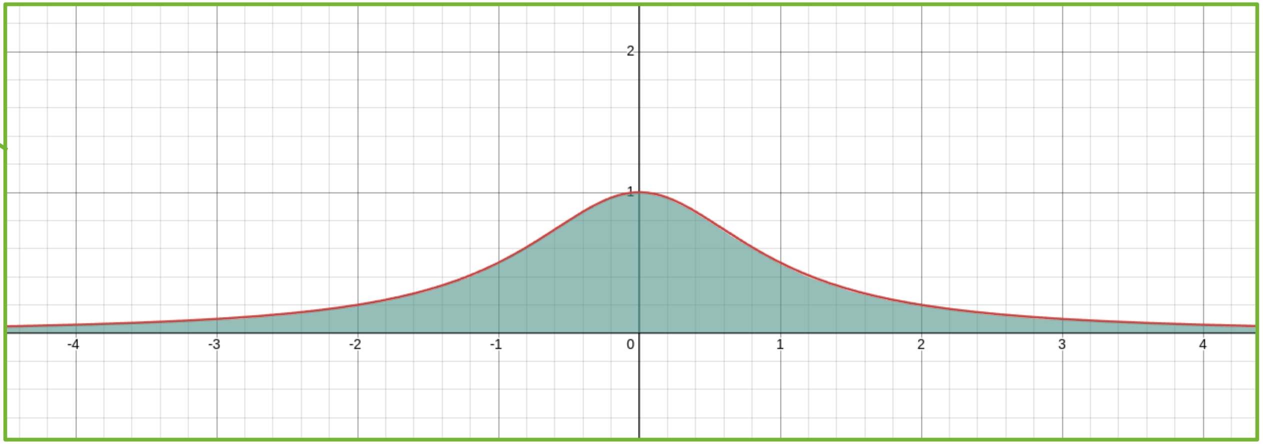
$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{c} e^x\,dx$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Néhány integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \;=$$



$$\int_{0}^{2\pi} \sin x \, dx$$

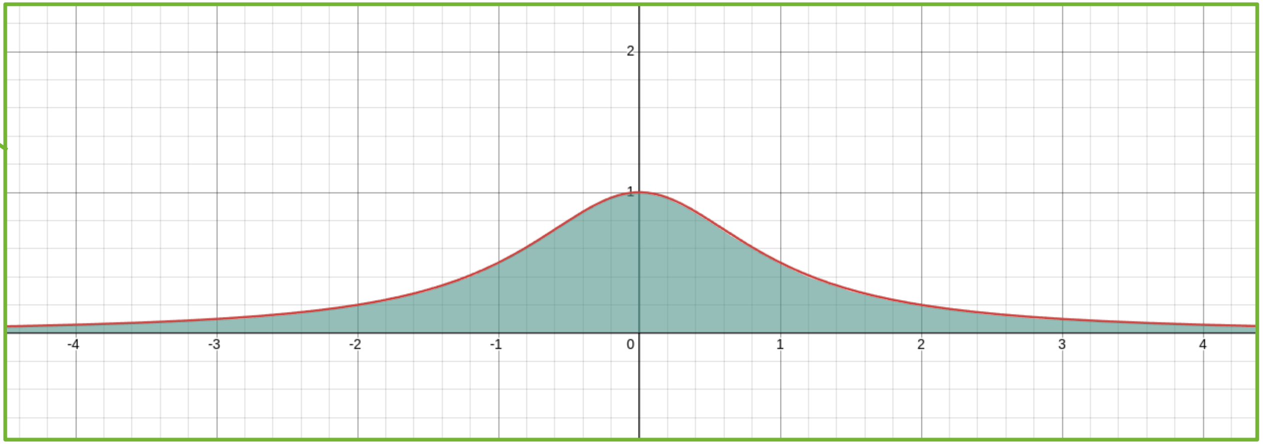
$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{c} e^{x}\, dx$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Néhány integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$$



$$\int_{0}^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$$

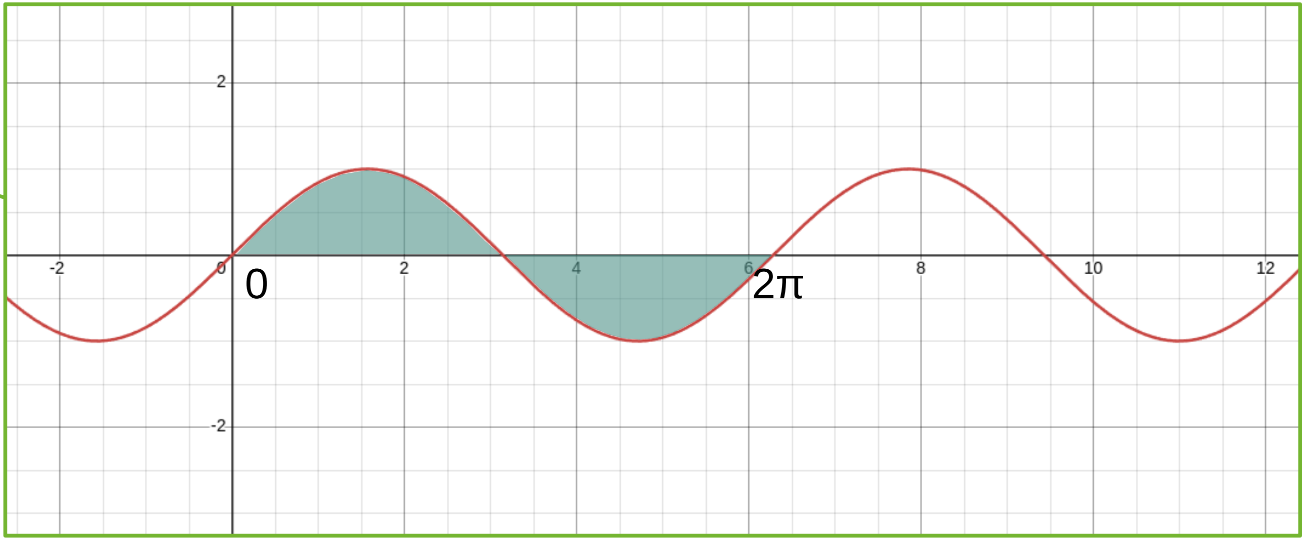
$$\int_{-\infty}^{c} e^{x}\, dx$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Néhány integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx =$$



$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$

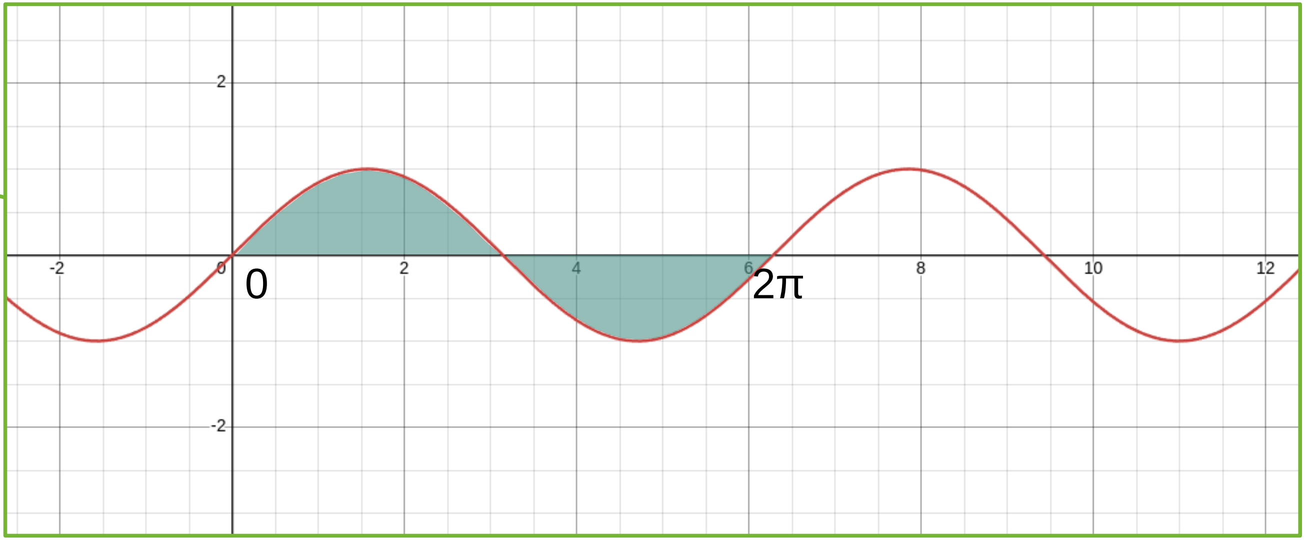
$$\int_{-\infty}^{c} e^{x}\,dx$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Néhány integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$



$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{c} e^{x}\,dx$$

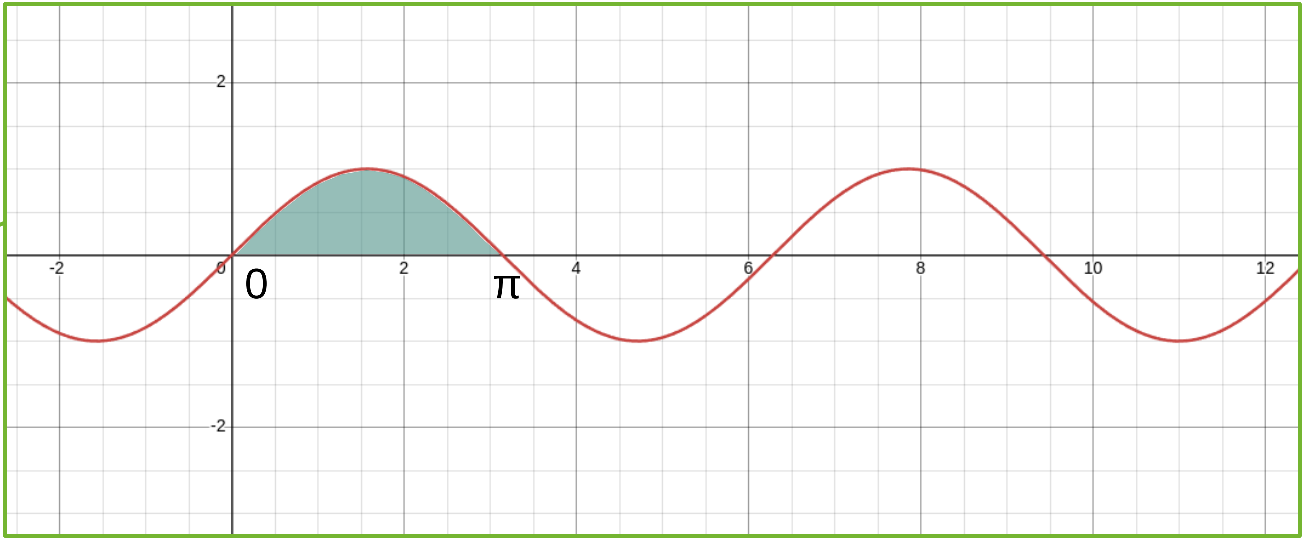
$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Néhány integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx =$$



$$\int_{-\infty}^{c} e^{x}\,dx$$

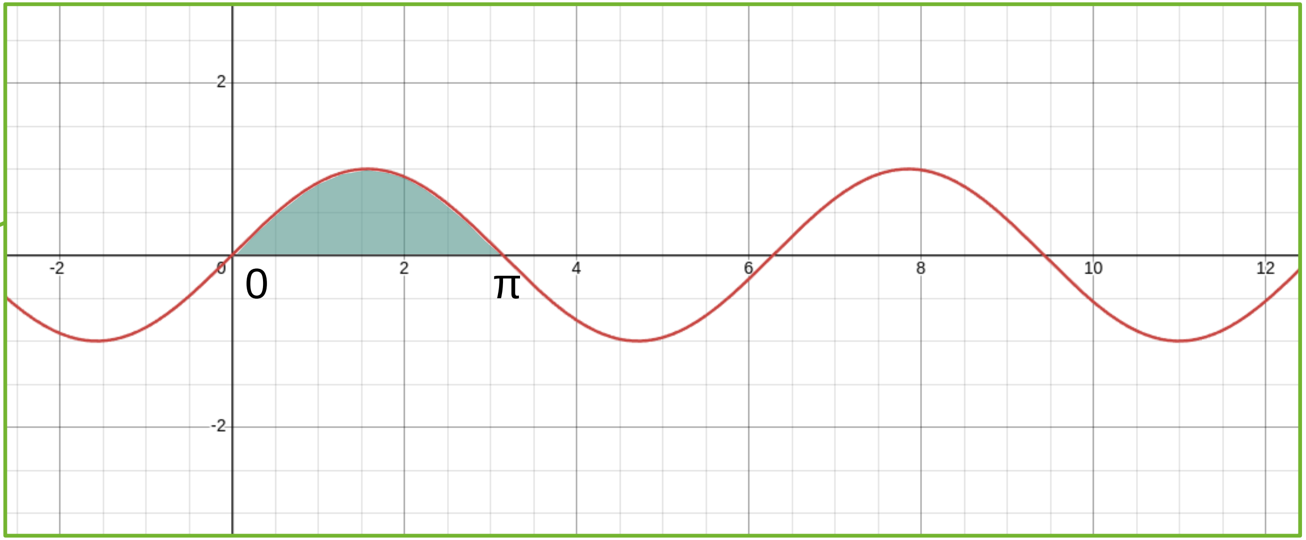
$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Néhány integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$$



$$\int_{-\infty}^{c} e^{x}\,dx$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

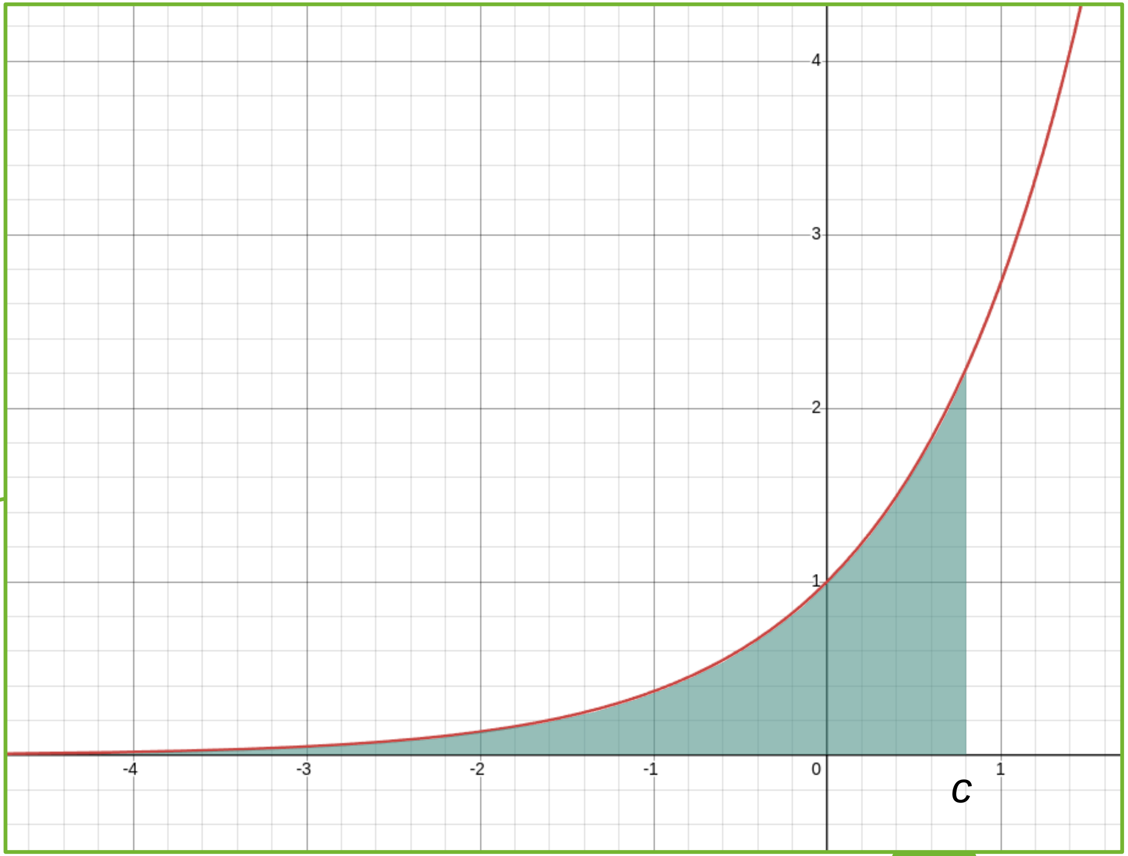
Néhány integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \;=\; \pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx \;=\; 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx \;=\; 2$$

$$\int_{-\infty}^{c} e^{x}\,dx \;=$$



$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Néhány integrál

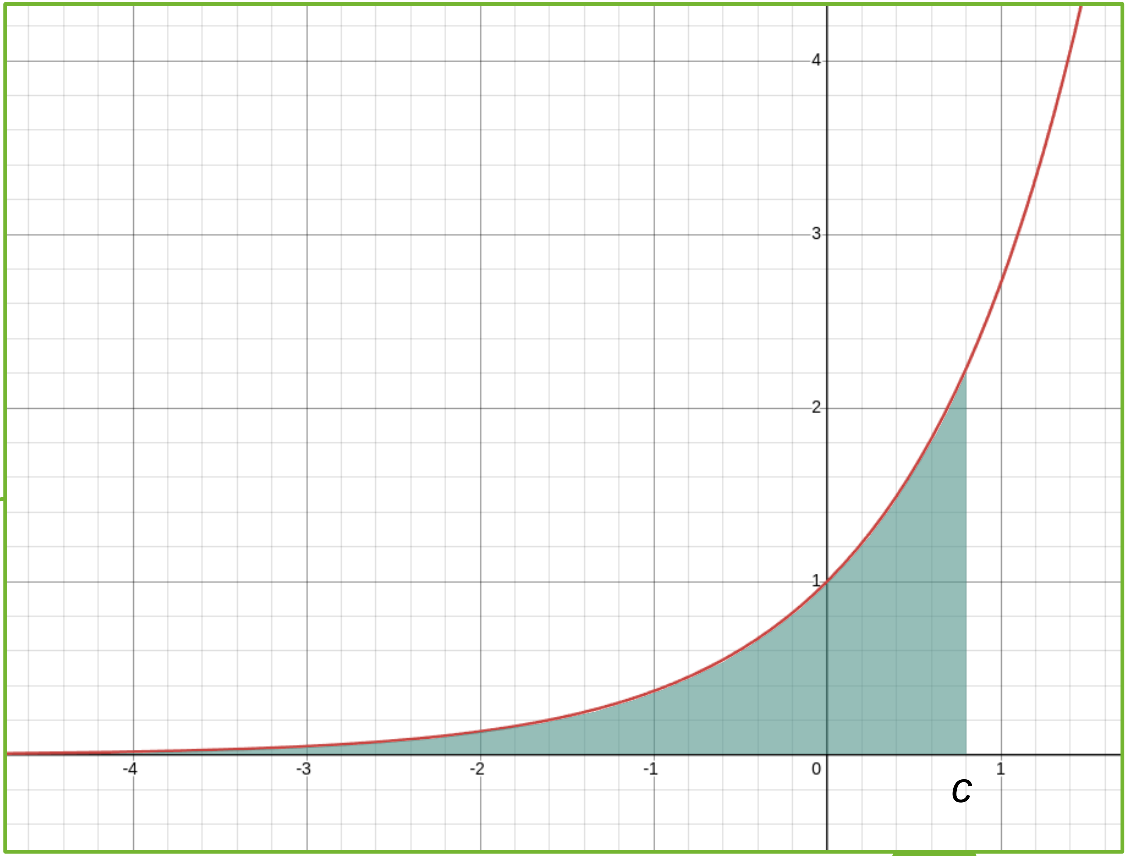
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

$$\int_{-\infty}^{c} e^x\,dx = e^c$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Néhány integrál

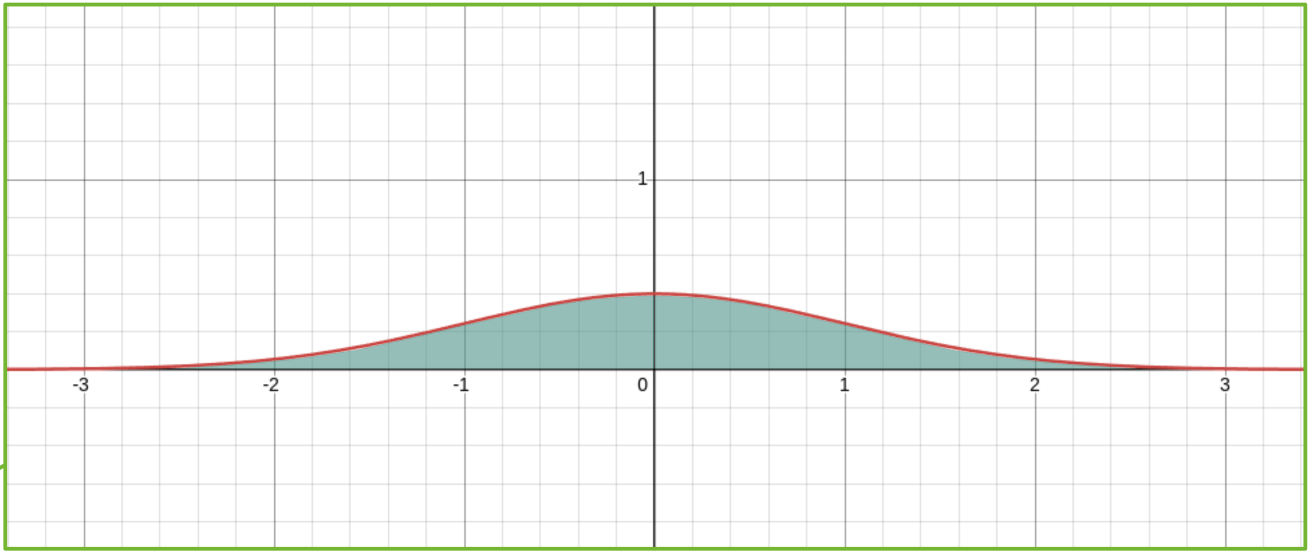
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

$$\int_{-\infty}^{c} e^x\,dx = e^c$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} =$$



Néhány integrál

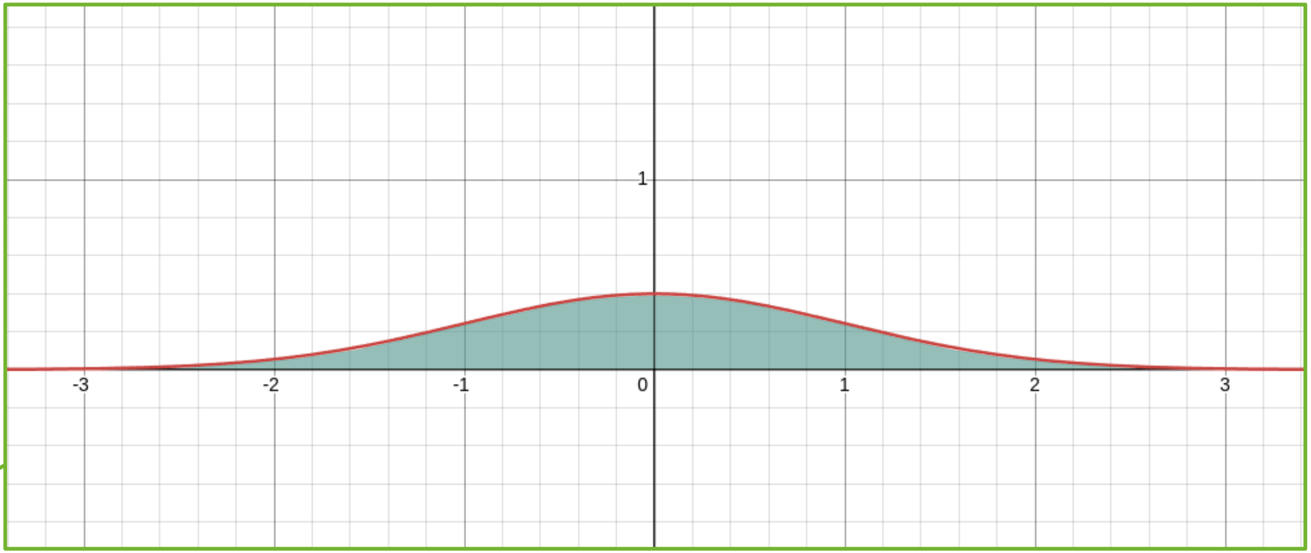
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

$$\int_{-\infty}^{c} e^x\,dx = e^c$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$



Valószínűségi változó

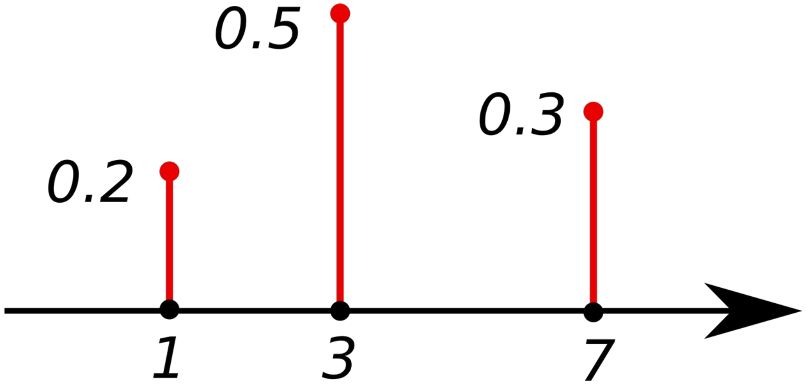
“Az eseménytéren értelmezett valós (komplex, $\mathbb{R}^n$) értékű függvény, amely a valószínűség, mint mérték szerint integrálható.”

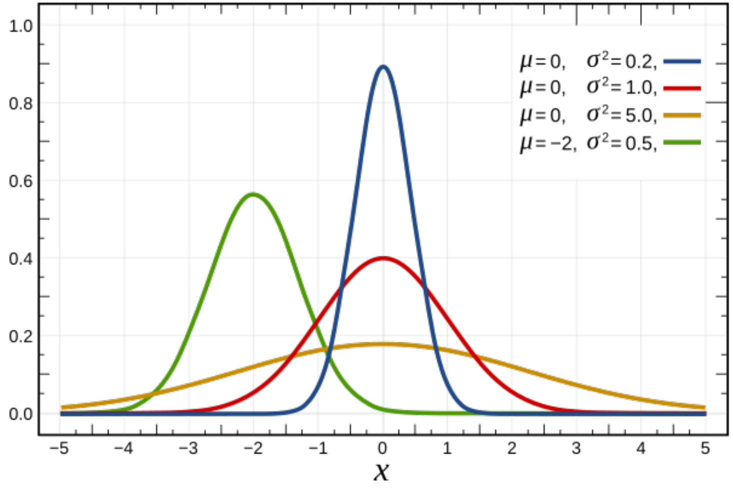
Eloszlás

Milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel egy valószínűségi változó?

diszkrét

folytonos

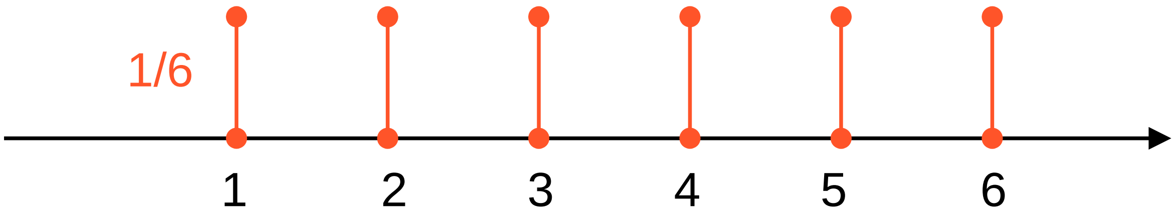




Diszkrét egyenletes eloszlás

n elemű, az $[a,b]$ intervallumon, $P(X=i) = 1/n$

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2(X)=\frac{n^2-1}{12}$$



A szabályos dobókockával dobásnak mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6} = 3.5$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\left(\underbrace{\left(X-E(X)\right)^2}_{Y}\right)}$$

$Y = (X - 3.5)^2$ értékei:

6.25, 2.25, 0.25, 0.25, 2.25, 6.25

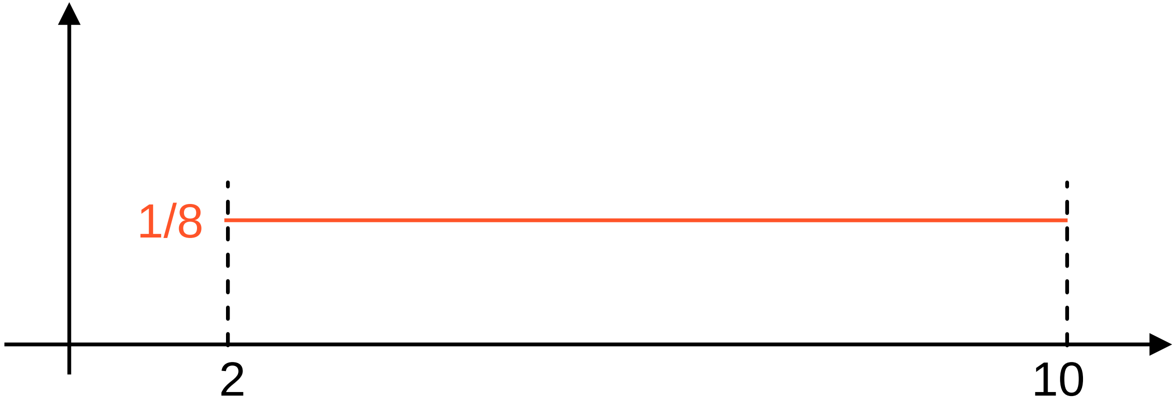
$$E(Y) = 6.25\cdot\frac{1}{6}+2.25\cdot\frac{1}{6}+0.25\cdot\frac{1}{6}+0.25\cdot\frac{1}{6}+2.25\cdot\frac{1}{6}+6.25\cdot\frac{1}{6} = 2.91666\ldots$$

$$D(X) = \sqrt{2.91666\ldots} = 1{,}7078\ldots$$

Folytonos egyenletes eloszlás

Az *[a,b]* intervallumon, sűrűségfüggvénye $f(x)=\frac{1}{b-a}$

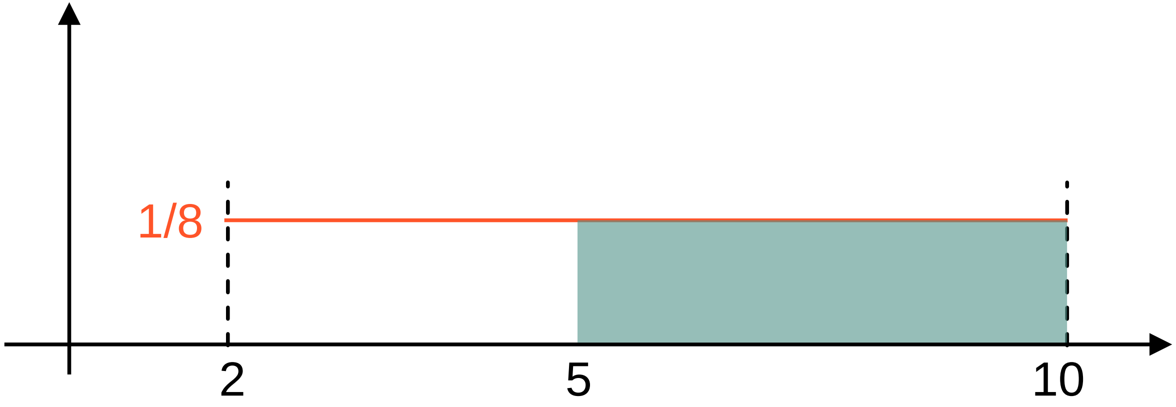
$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$



Folytonos egyenletes eloszlás

Az *[a,b]* intervallumon, sűrűségfüggvénye $f(x)=\frac{1}{b-a}$

$E(X)=\frac{a+b}{2}$ $\sigma^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$



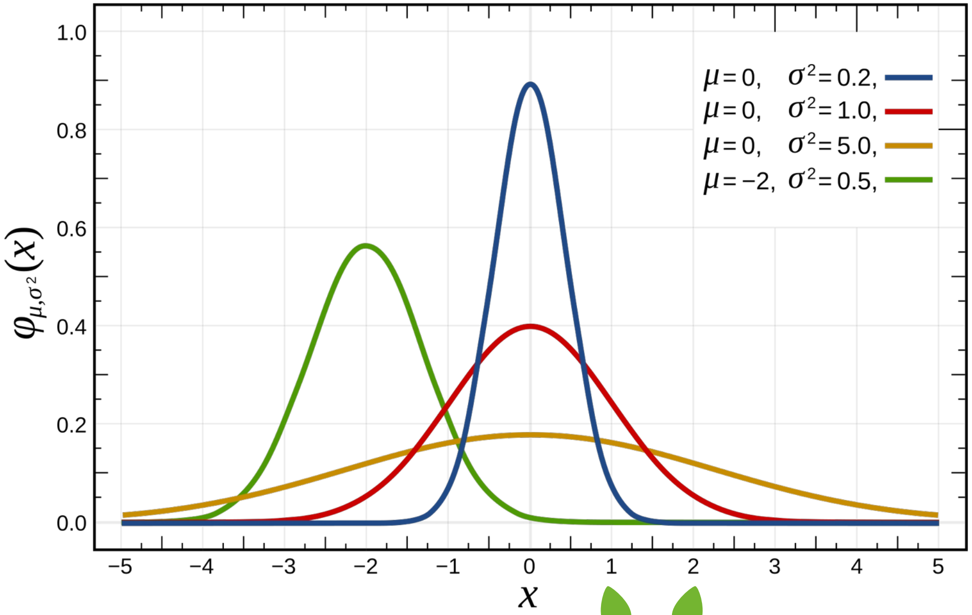
$$P(X\in[5,10]) = \int_5^{10}\frac{1}{8} = 0.625$$

Normális eloszlás

Az μ várható értékű, σ szórású normális eloszlás: $N(\mu,\sigma)$

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



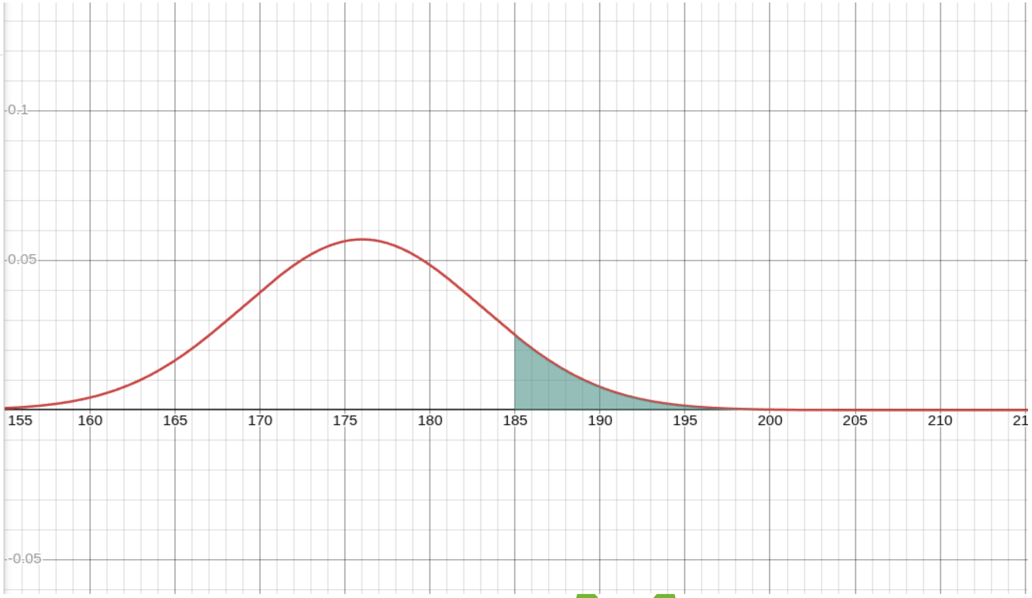
Normális eloszlás $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Magyar férfiak magasság-eloszlása: ~ $N(176,7)$

$$P(X>185) =$$

$$\int_{185}^{\infty}\frac{1}{7\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-176}{7}\right)^2} =$$

$$0.09927\ldots$$

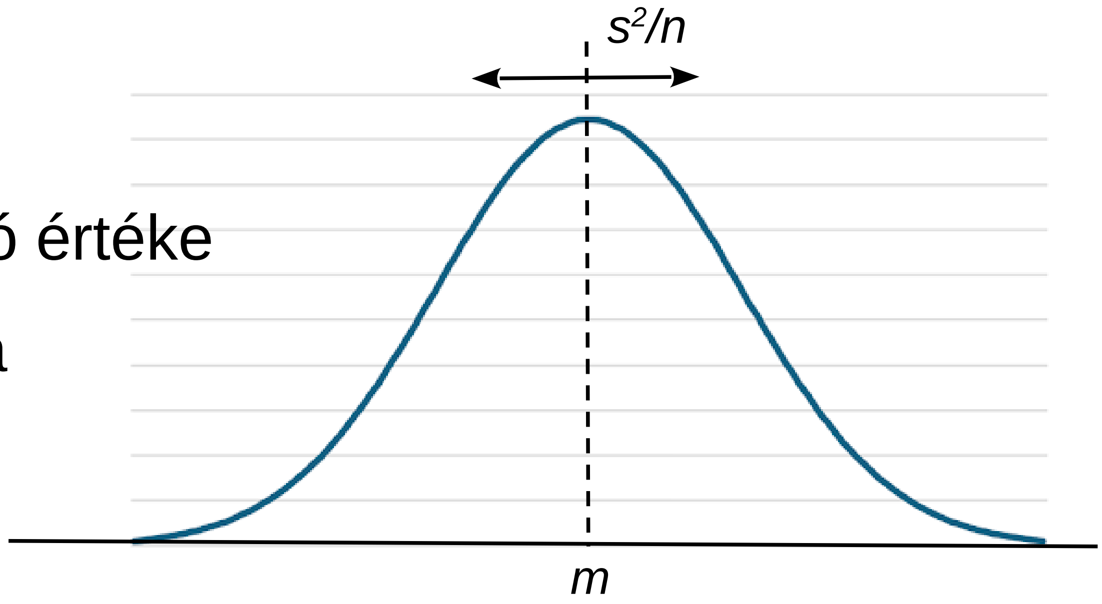


Centrális Határeloszlás Tétel

Bármilyen eloszlású valószínűségi változóból vett független minta átlaga közelítőleg normális eloszlású:

$N(m, s^2/n)$, ahol

- *m* az eredeti változó várható értéke
- *s* az eredeti változó szórása
- *n* a minta elemszáma



Centrális Határeloszlás Tétel

Bármilyen eloszlású valószínűségi változóból vett független minta átlaga közelítőleg normális eloszlású:

N(m, s²/n), ahol

- *m* az eredeti változó várható értéke
- *s* az eredeti változó szórása
- *n* a minta elemszáma


SZERENCSEKERÉK
100 000
10 000
75 000
DUPLÁZÓ
50 000
250 000
150 000

Számrendszerek

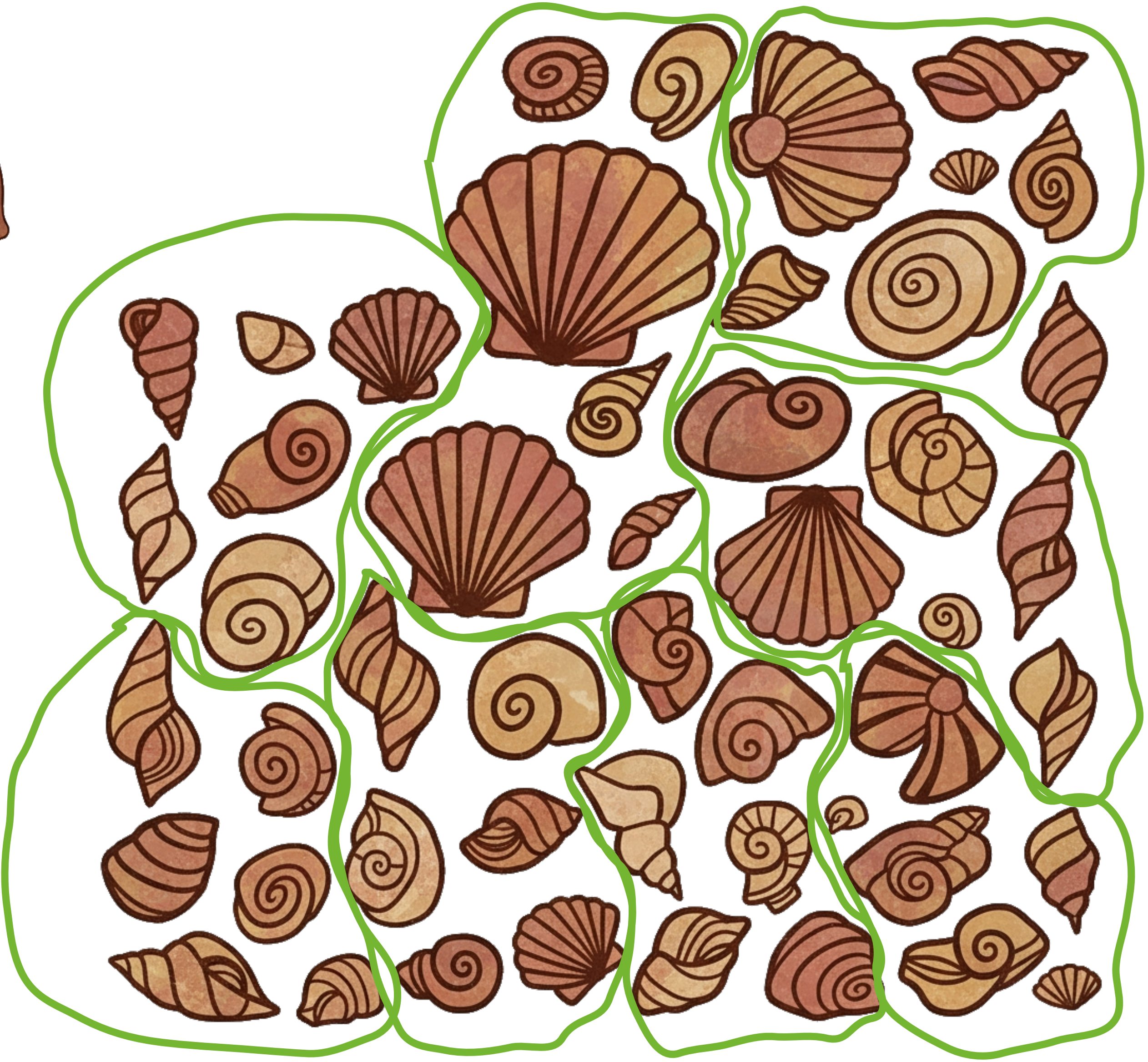
„10-féle ember létezik: aki tudja, hogy mi az a 2-es számrendszer, meg aki nem.”

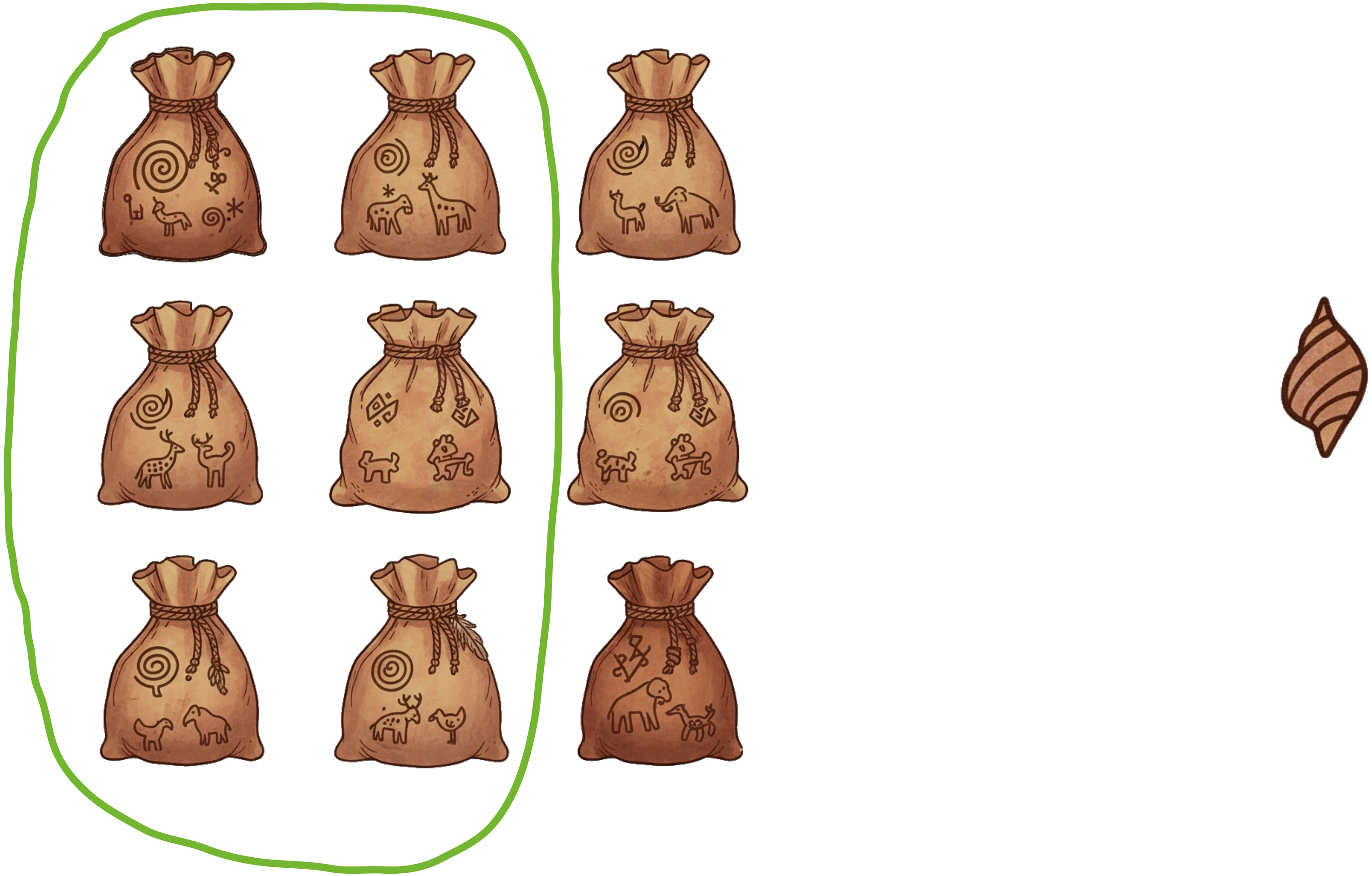
Mik a számrendszerek?

Mire jó egy számrendszer?

Miért a 10-est használjuk?











1 3 1

1 3 1

$$1 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 6$$

Műveletek

6-os számrendszerben: 131 + 235 = ?

10-es számrendszerben ez hogy néz ki?

Műveletek

6-os számrendszerben: 131 + 235 = 410

10-es számrendszerben ez hogy néz ki?

55 + 95 = 150

55 különböző számrendszerekben

6-os számrendszerben: 131_6

7-es számrendszerben:

2-es számrendszerben:

16-os számrendszerben:

32-es számrendszerben:

55 különböző számrendszerekben

6-os számrendszerben: 131_6

7-es számrendszerben: 106_7

2-es számrendszerben: 110111_2

16-os számrendszerben: 37_{16}

32-es számrendszerben: $1N_{32}$

1) Más számrendszerekben is vannak prímszámok?

2) Az UFO-knak hányas számrendszerben küldjük a prímszámokat?

3) Hány számjegyből áll a 64213875068417 szám 2-es számrendszerben?

Futtassuk le ezt a javascript programot

```
for (i=1; i<100; i++) {
    n = Math.pow(2,i);
    m=2*n + 10000 - n - n;
    console.log(i, m);
}
```

Bitek és számok a számítógépben

1947	bit: binary information digit (John W. Tukey)
1960	1 bites mikrokontrollerek
1970	4 bites processzorok (számológép)
1974	8 bit: Intel 8080
1982	16 bit: Intel 80286
1985	32 bit: Intel i386
2003	64 bit: AMD Opteron

Bitek és számok a számítógépben

011111001010010101010101010101011001100110111011110000111101100011

64 bit → 2^{64} különböző szám

Integer

pl.: 355498

Float

pl.: $355498 = 3.55498 \cdot 10^{5} = 3.55498E5$

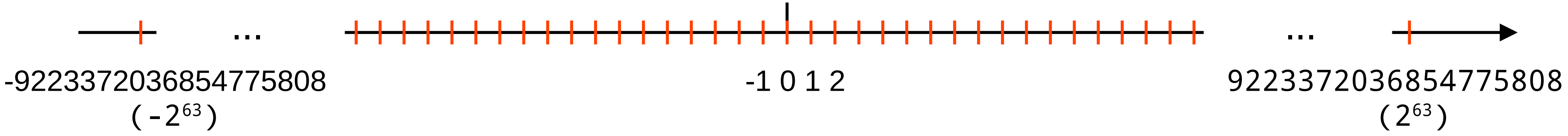
$0.00355498 = 3.55498 \cdot 10^{-3} = 3.55498E-3$

Integer

0111110010100101010101010101011001100110111011110000111101100011

+/-

$0 – 2^{63}$

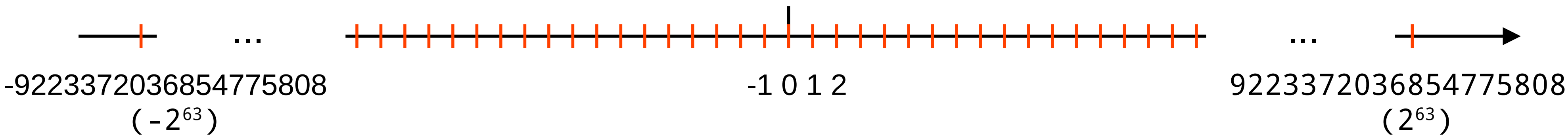


Integer

0111110010100101010101010101011001100110111011110000111101100011

+/-

$0 – 2^{63}$



= 8981678861442813795

Float

011111001010010101010101010101011001100110111011111000011 11101100011

+/- $0 - 2^{52}$ +/- $0 - 2^{10}$

$$\pm\text{bázis} \cdot 10^{\pm\text{exponens}}$$

Float

$$\underbrace{0}_{+/-}\underbrace{1111100101001010101010101010101100110011011101111100001}_{0\,-\,2^{52}}\,\Big|\,\underbrace{1}_{+/-}\underbrace{1101100011}_{0\,-\,2^{10}}$$

$$\pm 1.\text{bázis} \cdot 2^{\pm \text{exponens}}$$

Float

01111100101001010101010101010110011001101110111100001 11101100011

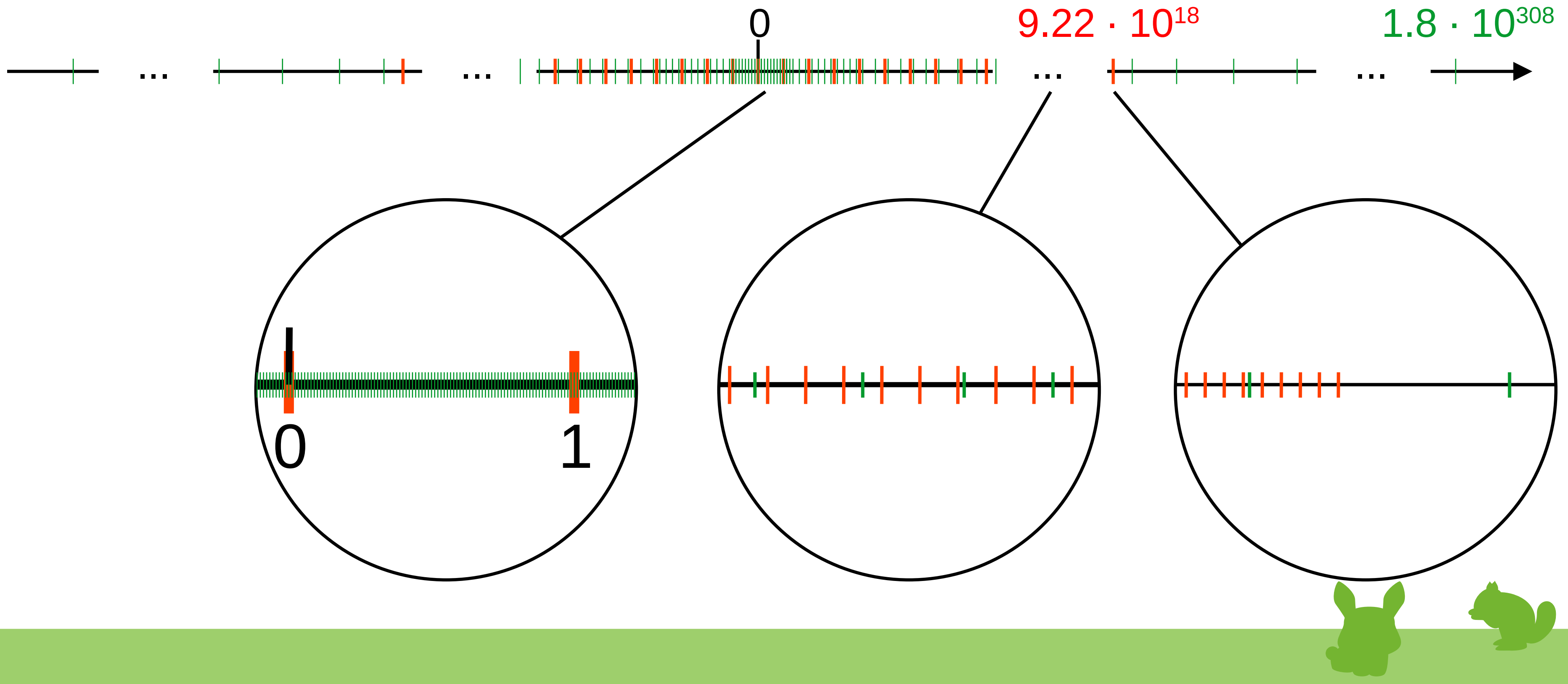
+/- $\quad 0 - 2^{52} \quad$ +/- $\quad 0 - 2^{10}$

$$\pm 1.\text{bázis} \cdot 2^{\pm\text{exponens}}$$

$+1.1111100101001010101010101010110011001101110111100001 \cdot 2^{-1101100011}$ (2)

$= 1.9737955734143428632 2 \cdot 2^{-867} = 2.00583835 \cdot 10^{-261}$ (10)

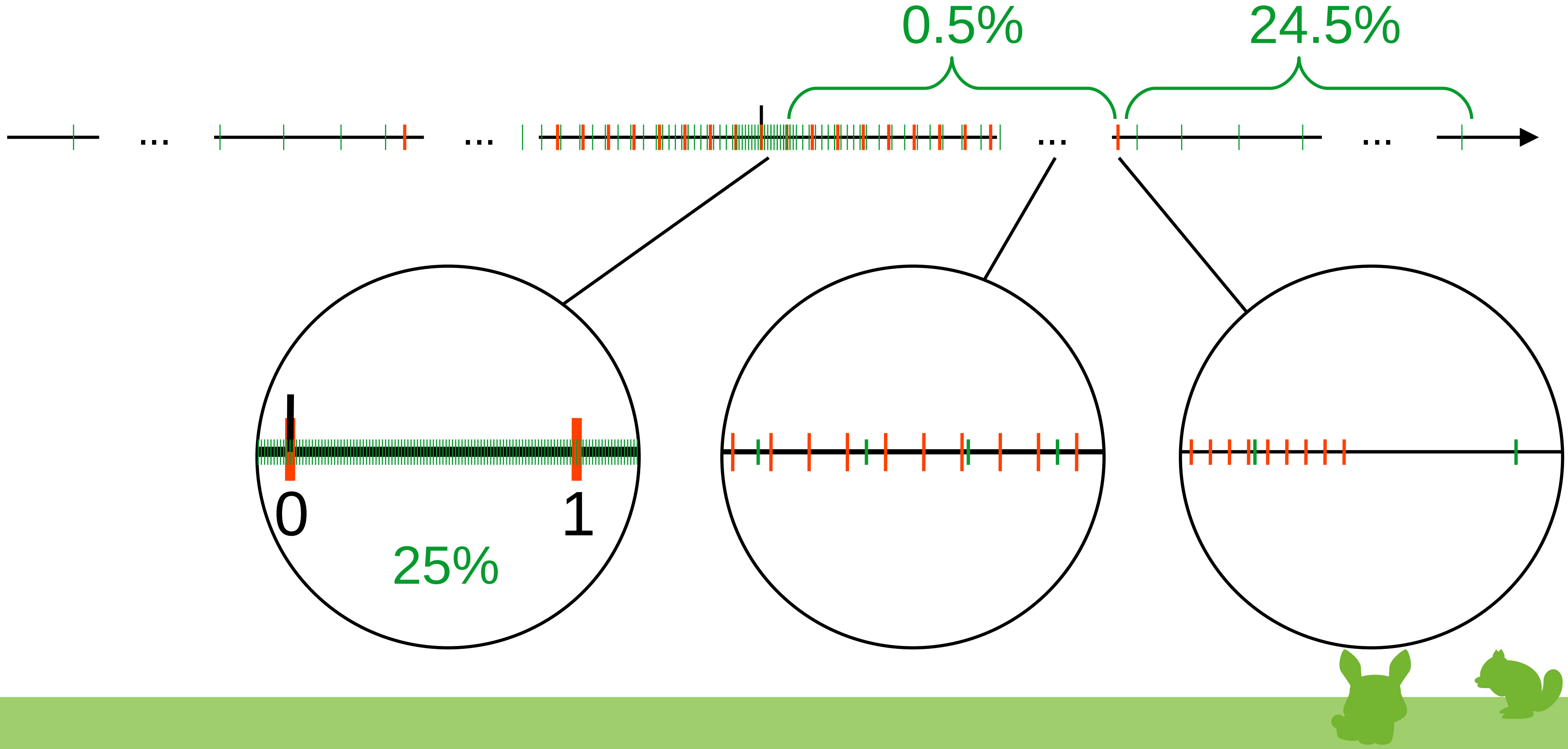
Integer - Float



2^{64} különböző szám

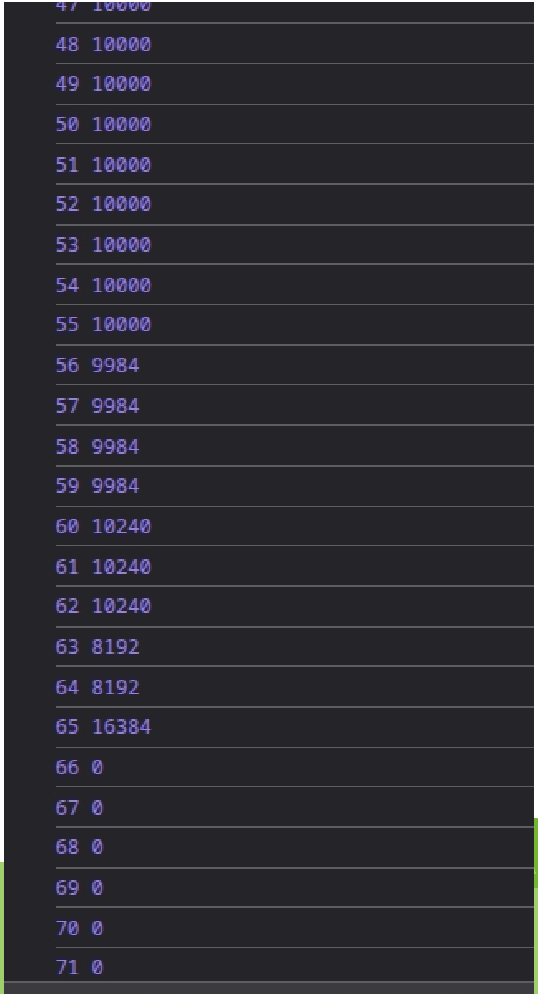
Integer - Float

2^{64} különböző szám



Futtassuk le ezt a javascript programot

```
for (i=1; i<100; i++) {
    n = Math.pow(2,i);
    m=2*n + 10000 - n - n;
    console.log(i, m);
}
```


48 10000
49 10000
50 10000
51 10000
52 10000
53 10000
54 10000
55 10000
56 9984
57 9984
58 9984
59 9984
60 10240
61 10240
62 10240
63 8192
64 8192
65 16384
66 0
67 0
68 0
69 0
70 0
71 0

Mik azok a vektorok?

Mit jelent a dimenzió?

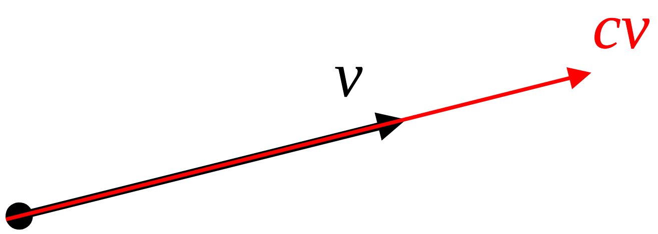
Mi a mátrix?

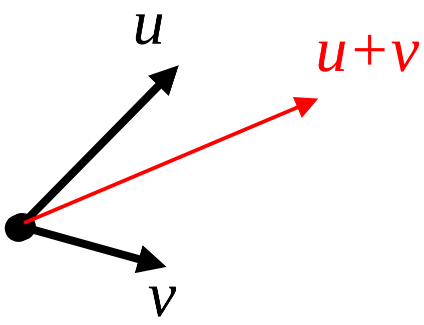
Mi a tenzor?

Vektortér

Definíció: V egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér, ha

- $v \in V,\ \ c \in \mathbb{R}$ esetén $cv \in V$ és
- $u, v \in V$ Esetén $(u+v) \in V$,
- \+ axiómák.



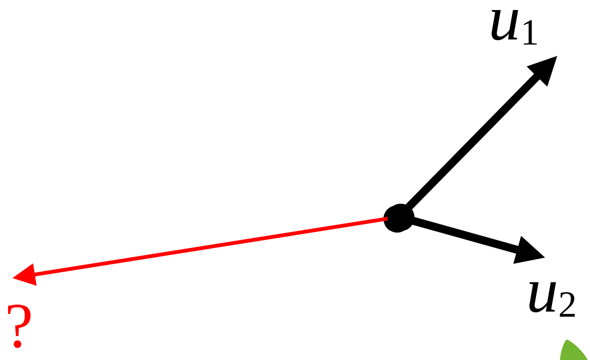


Bázis, dimenzió

Definíció: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bázis, ha

- V minden v eleme előáll $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$ alakban,
- de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ -ből már nem hagyható el egyik se, úgy hogy ez igaz maradjon.

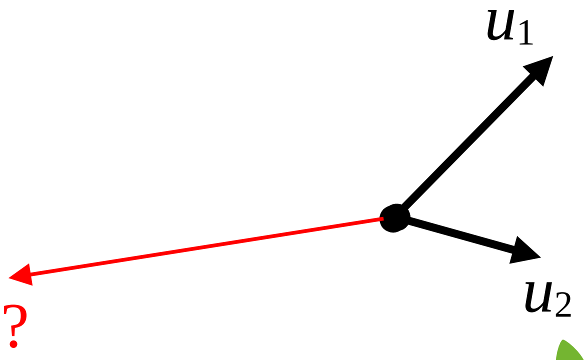
Ekkor a V vektortér n dimenziós.



Koordináták

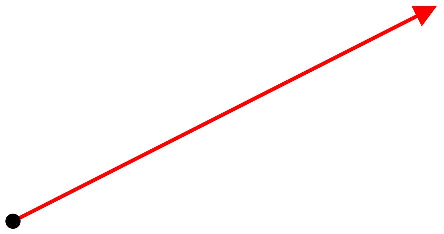
Definíció: Ha $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bázis, és $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$, akkor v koordinátái az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bázisban $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Tippeljük meg a piros vektor koordinátáit!

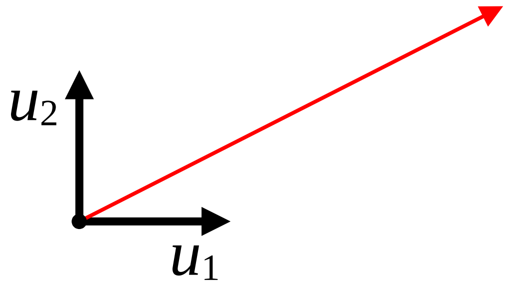


Bázis – koordináták – kockás papír

Tippeljük meg a piros vektor koordinátáit!

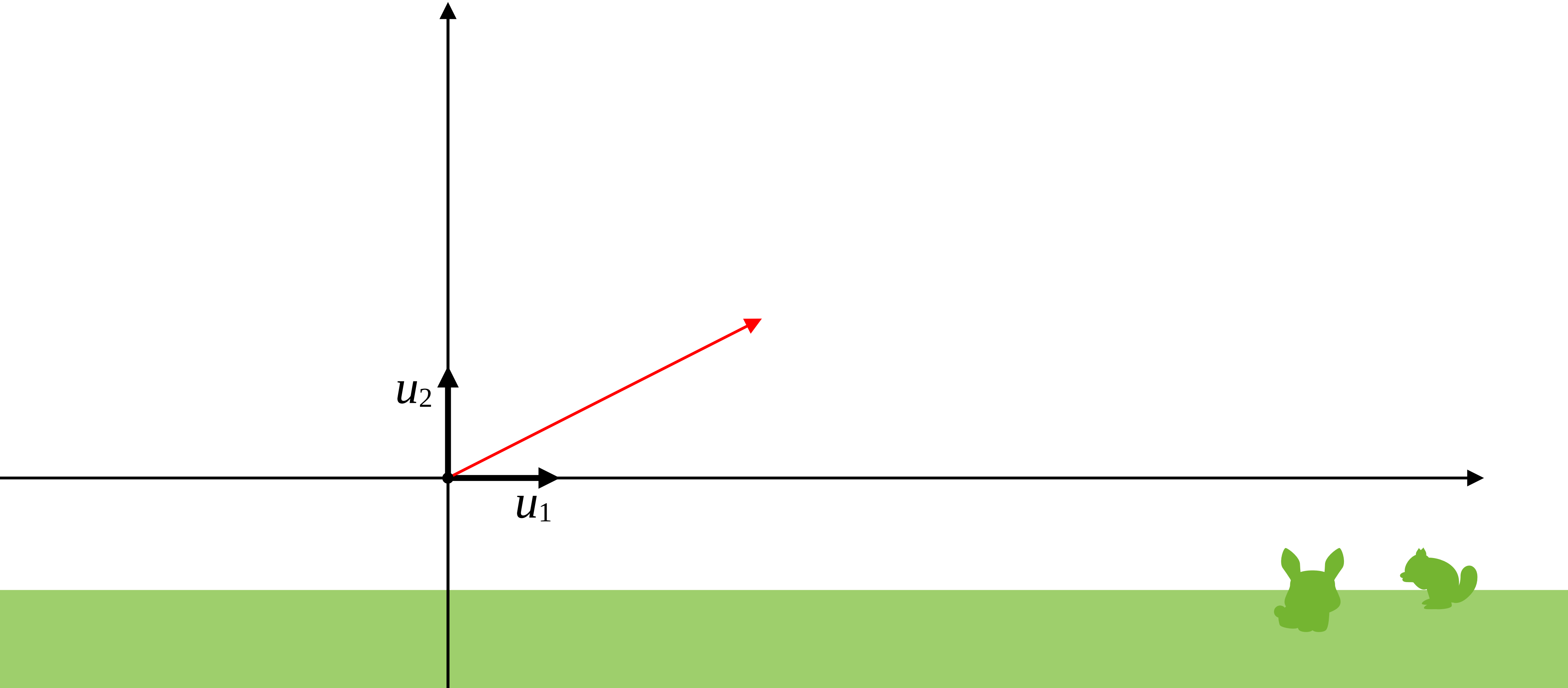


Bázis – koordináták – kockás papír

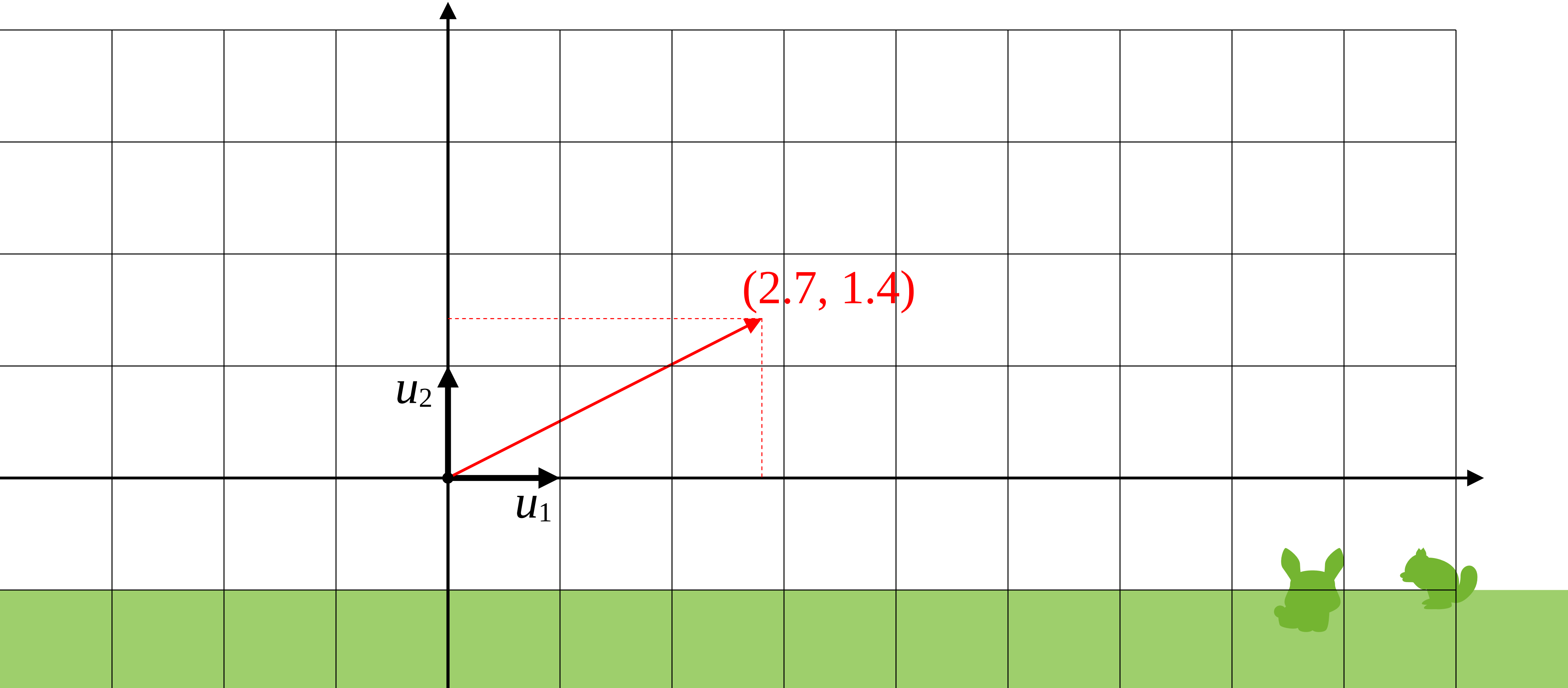


(standard bázis)

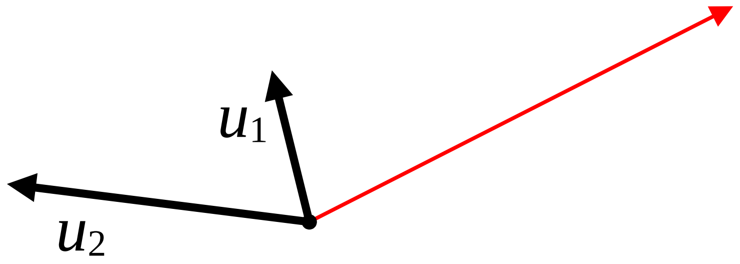
Bázis – koordináták – kockás papír



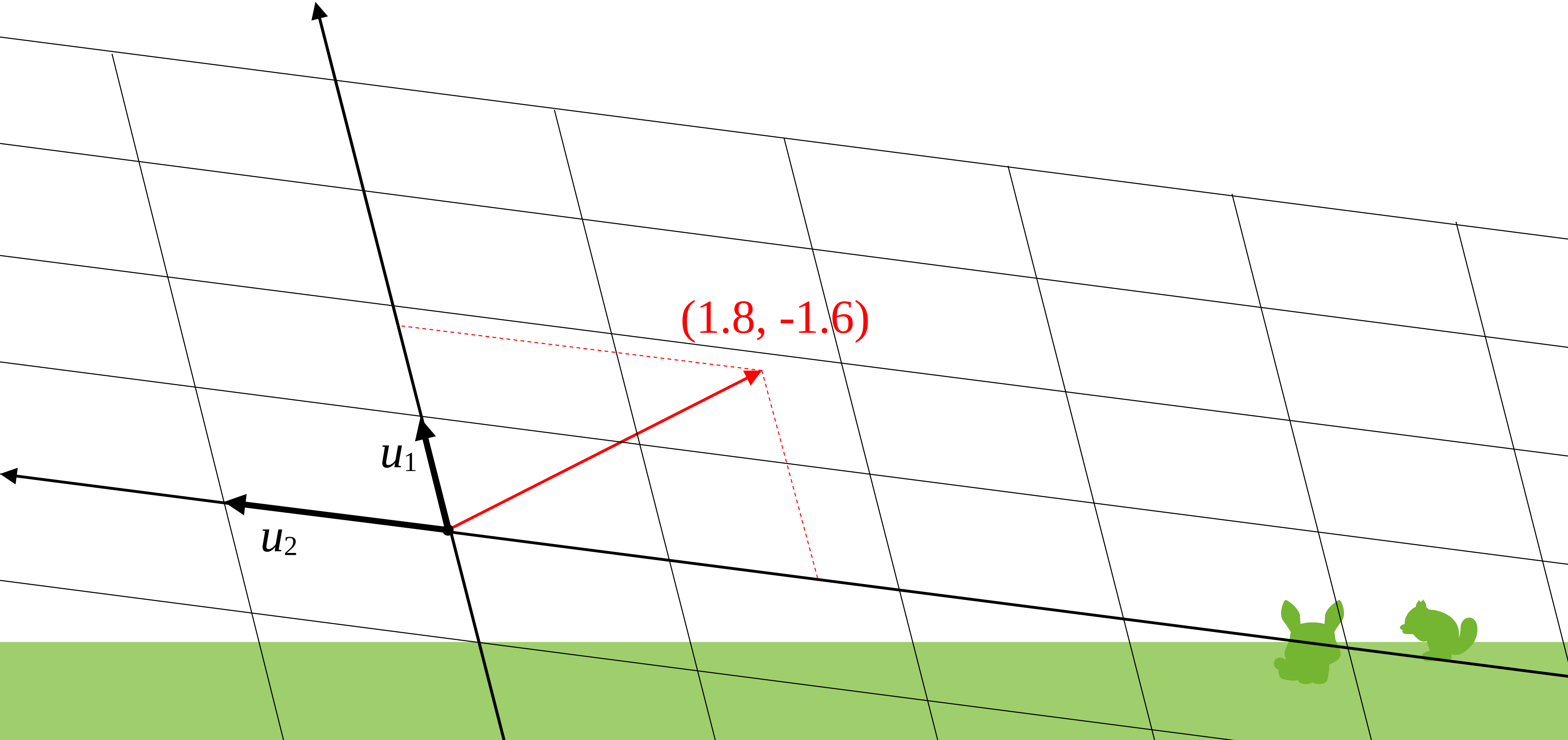
Bázis – koordináták – kockás papír



Bázis – koordináták – kockás papír



Bázis – koordináták – kockás papír



Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=?$$

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Négyzet?

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Eredmény

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AB nem létezik

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B\,A=?$$

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rc} \boxed{\text{Négyzet!}} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\ B\,A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \boxed{\text{Eredmény}} \end{array}$$

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B\,A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad\boxed{}$$

0·3 + 3·(-3) + 1·0 = -9

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B\,A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -9$$

$$0\cdot 3 + 3\cdot(-3) + 1\cdot 0 = -9$$

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B\,A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & 24 & 2 & -1 \\ -6 & 1 & & \end{bmatrix}$$

Mátrixszorzás

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B\,A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 & 24 & 2 & -1 \\ -6 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Transzponált (sor – oszlop felcserélése)

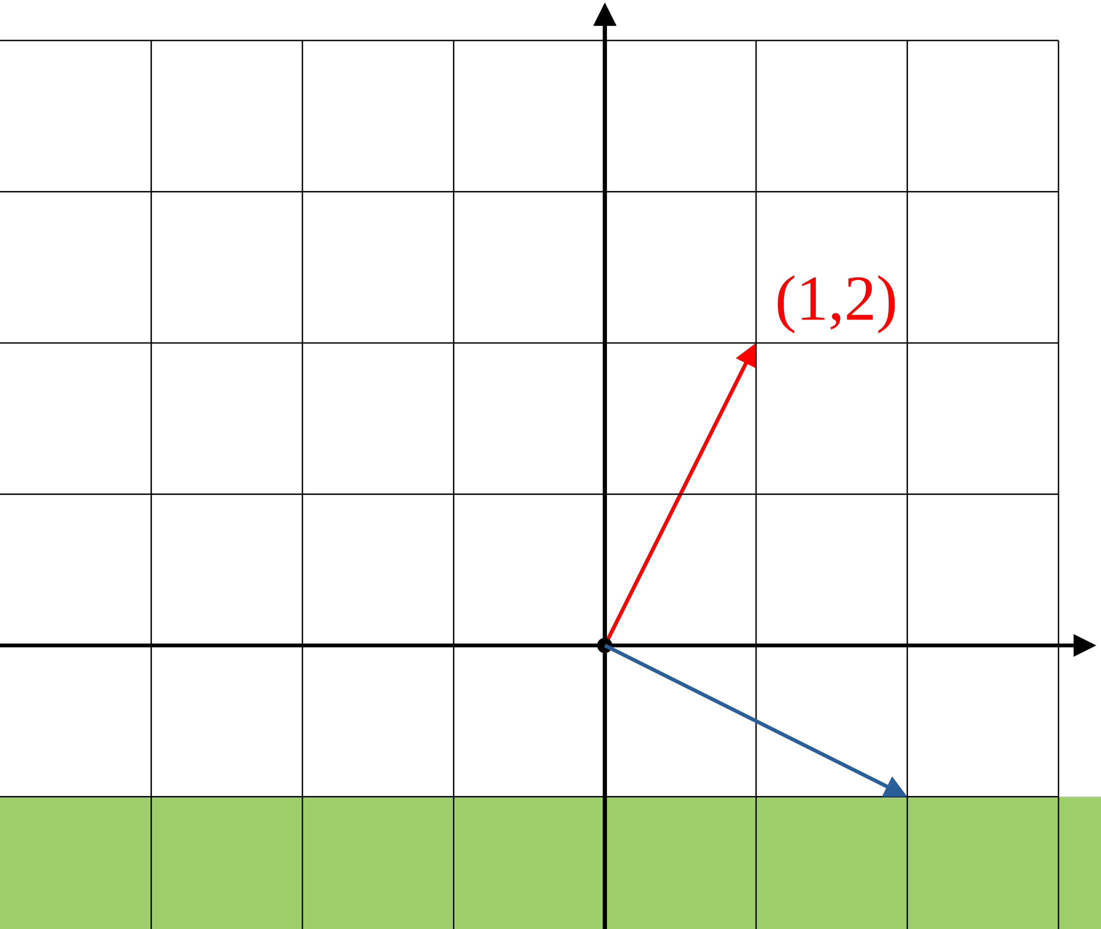
$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

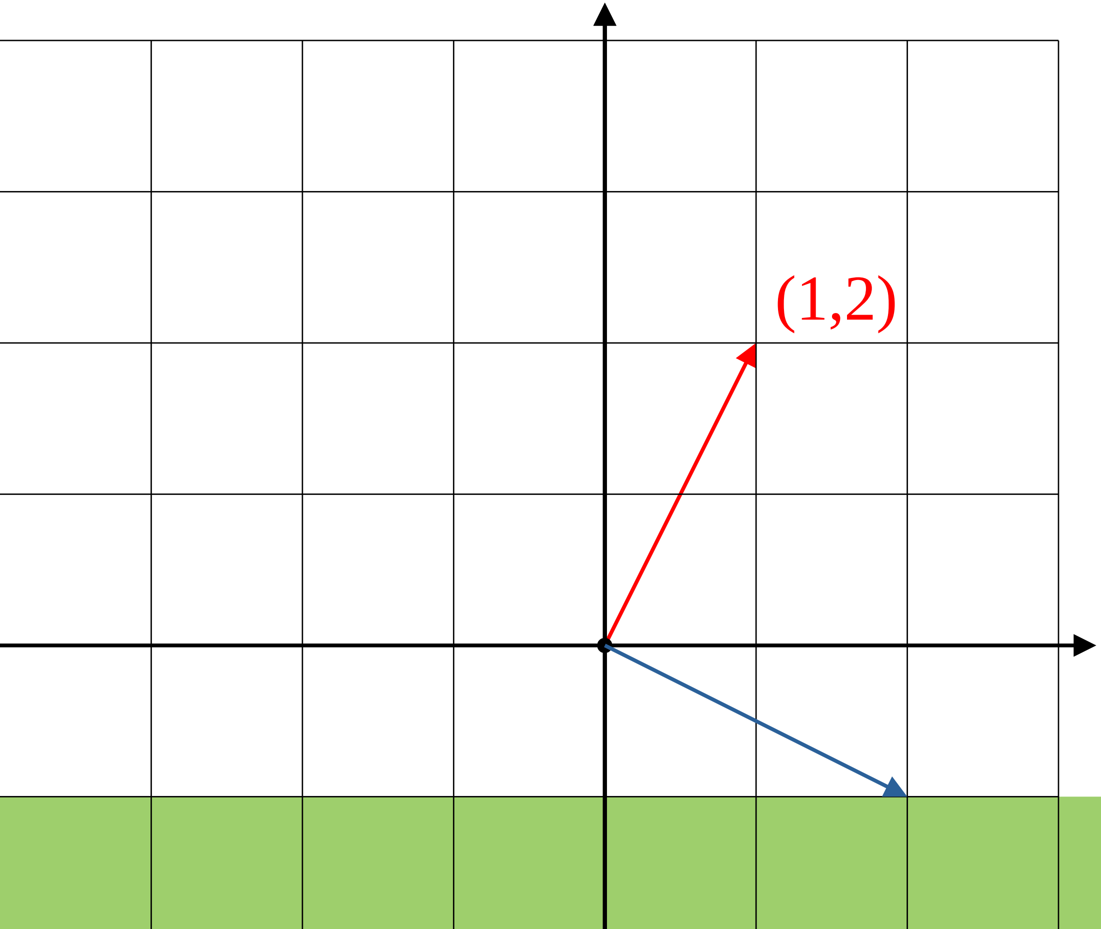
$$B^T=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrixszorzás – síktranszformáció



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Mátrixszorzás (2x2) – síktranszformáció



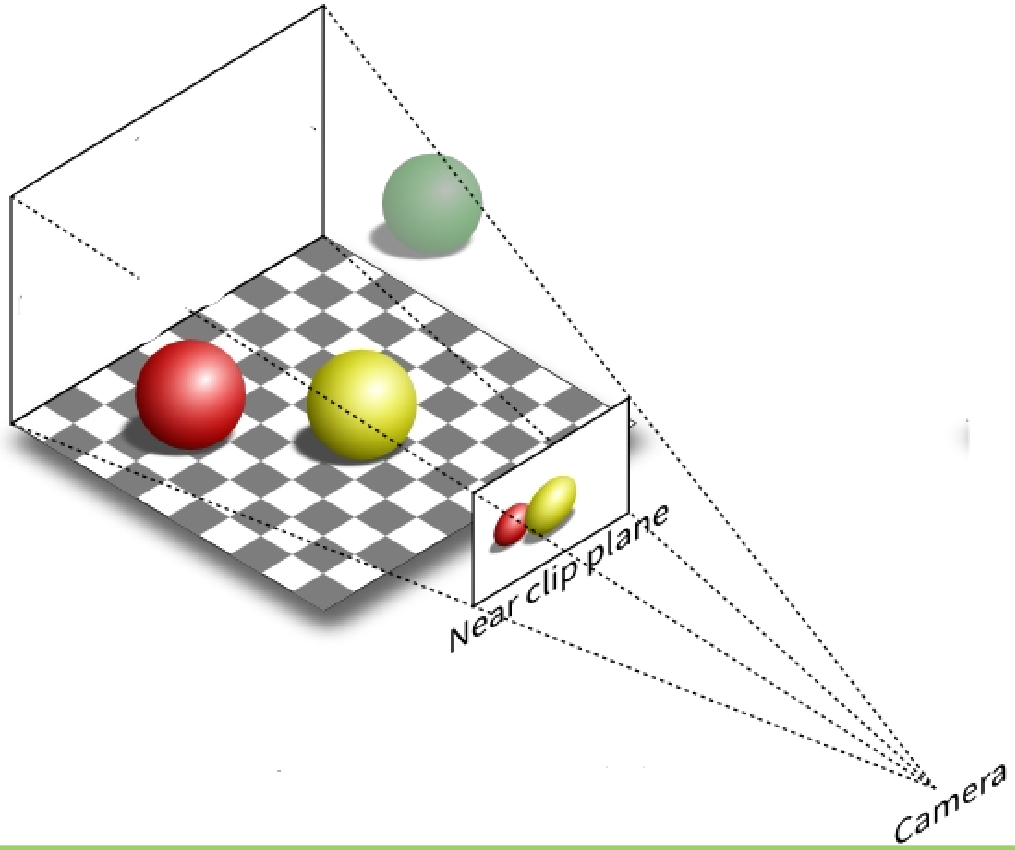
forgatás: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

origóra tükrözés: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

x-tengelyre vetítés: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$


602
AMBULANCE
H
MA 07-16

Mátrixszorzás (3x2) – $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vetítés



$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$$


POISON
POISON
POISON
POISON
POISON
177
AMMO
58%
HEALTH
2 3 4
5 6 7
ARMS
200%
ARMOR
BULL 177 / 200
SHEL 50 / 50
RCKT 50 / 50
CELL 300 / 300

Mire használnak még mátrixszorzást?

Gemini 2.5:

„Csinálj egy képet, amely megmagyarázza, hogy miért kell mátrixszorzás a mesterséges intelligenciához!”