Matematikai alapismeretek 1

Ruzsa Zoltán
ruzsa.zoltan@emk.semmelweis.hu

https://ruzsaz.github.io/mat1.pdf
(vagy Moodle)

Halmazelmélet: halmazok, számok, számosságok, halmazalgebra

Számok kezelése: számrendszerek, számábrázolások a számítógépben, műveletek

Függvények: inverz, exp, log, integrálás

Valószínűségszámítás: eseményalgebra, valószínűség, függetlenség, eloszlások, valószínűségi változók, várható érték, szórás, sűrűségfüggvény, eloszlásfüggvény

Lineáris algebra: vektortér, vektor, mátrix, műveletek

Matematika mint ~~természet~~bölcsésztutodmány

Földrajz: A Duna Európán keresztül folyik, északnyugatról délkelet irányba.

Matematika: Az *f* valós függvény folytonos, ha …

a függvénynek mindenütt létezik határértéke, és az megegyezik *f* ott felvett értélével.

vagy másképp fogalmazva

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Halmaz definíciója

Mi a halmaz definíciója?

„A semmiből egy új,
más világot teremtettem”

BOLYAI JÁNOS

(1802-1860)

Halmaz ~~definíciója~~ tulajdonságai

- Létezik az “eleme” reláció: $a \in A$
- Speciális halmaz: üreshalmaz $\emptyset$

  azaz minden a-ra $a \notin \emptyset$
- Egy halmaz akkor tekinthető adottnak, ha mindenről el tudjuk dönteni, hogy eleme-e?

Tekintsük azt a H halmazt, amely azokból a természetes számokból áll, amelyek maximum 50 karakterrel definiálhatóak.

Legyen k “A legkisebb szám, ami nincs benne H-ban.”

Kérdés: $k \in H$?

3

Mi az, hogy három?

0

0: $\emptyset$

1

0: $\varnothing$

1: $\{0\} \quad = \{\varnothing\}$

2

0: $\varnothing$

1: $\{0\} \quad = \{\varnothing\}$

2: $\{0, 1\} \quad = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

3

0: $\varnothing$

1: $\{0\} \quad = \{\varnothing\}$

2: $\{0, 1\} \quad = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

3: $\{0, 1, 2\} \quad = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Gyakori halmazok

- $\varnothing$: üreshalmaz
- $\mathbb{N}$: természetes számok (Natural numbers)
- $\mathbb{Z}$: egész számok
- $\mathbb{Q}$: racionális számok
- $\mathbb{R}$: valós számok (Real numbers)
- $\mathbb{C}$: komplex számok (Complex numbers)
- $\mathrm{P}(A)$: hatványhalmaz (A részhalmazainak halmaza)
- A^B: $B \to A$ függvények halmaza

Algebra

Algebra: A alaphalmaz és A elemein végezhető műveletek

- Az alaphalmaz “zárt a műveletekre”, azaz ha $a,b \in A$, és $\circledast$ egy művelet, akkor $a \circledast b \in A$.

Melyik algebra?

- $\mathbb{N}$ és $+$
- $\mathbb{N}$ és $\{+, -\}$
- Valós polinomok és $\{+, -, \cdot, /\}$

Halmazalgebra

- Alaphalmaz: Halmazok egy csoportja
- Műveletek:
    - $A \cup B$: unió
    - $A \cap B$: metszet
    - $A \setminus B$: különbség
- Reláció:
    - $A \subset B$ (esetleg $A \subseteq B$): részhalmaz
- $\varnothing$ is benne kell legyen ($A \setminus A$ miatt)

Halmazalgebra

- Alaphalmaz: Halmazok egy csoportja
- Műveletek:
  - $A \cup B$: unió
  - $A \cap B$: metszet
  - $A \setminus B$: különbség

(Definíció: $a \in A \cup B$, ha $a \in A$ és $a \in B$)

- Reláció:
  - $A \subset B$ (esetleg $A \subseteq B$): részhalmaz
- $\varnothing$ is benne kell legyen ($A \setminus A$ miatt)

Halmazalgebra

- Alaphalmaz: Halmazok egy csoportja
- Műveletek:
    - $A \cup B$: unió
    - $A \cap B$: metszet
    - $A \setminus B$: különbség

(Definíció: ???

(Definíció: ???

- Reláció:
    - $A \subset B$ (esetleg $A \subseteq B$): részhalmaz
- $\varnothing$ is benne kell legyen ($A \setminus A$ miatt)

Halmazalgebra

- Alaphalmaz: halmazok csoportja
- Műveletek:
  - $A \cup B$: unió
  - $A \cap B$: metszet
  - $A \setminus B$: különbség

- Reláció:
  - $A \subset B$: részhalmaz
- $\emptyset$

Eseményalgebra

- Alaphalmaz: események
- Műveletek:
  - $A \vee B$: vagy
  - $A \wedge B$: és (esetleg AB)
  - $A \setminus B$: különbség

- Reláció:
  - $A \subset B$: A maga után vonja B-t
- $\emptyset$ neve: lehetetlen esemény
- Ω az összes esemény uniója: eseménytér, illetve biztos esemény

Halmazalgebra

- Alaphalmaz: halmazok csoportja
- Műveletek:
  - $A \cup B$: unió
  - $A \cap B$: metszet
  - $A \setminus B$: különbség

- Reláció:
  - $A \subset B$: részhalmaz
- $\varnothing$

Eseményalgebra

- Alaphalmaz: események
- Műveletek:
  - $A \vee B$: vagy
  - $A \wedge B$: és (esetleg AB)
  - $A \setminus B$: különbség

- Reláció:
  - $A \subset B$: A maga után vonja B-t
- $\varnothing$ neve: lehetetlen esemény
- Ω az összes esemény uniója: eseménytér, illetve biztos esemény

Pénzfeldobás: $\Omega=\{F,I\}$

Események ($P(\Omega)$):

- $\varnothing$
- F
- I
- $F \vee I$

Dobókocka: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Néhány esemény:

- $\{6\}$
- $\{2,4,6\}$
- ...

$\Omega=\{$elkapja a koronavírust,
nem kapja el a koronavírust,
elkapja az influenzát,
nem kapja el az influenzát$\}$

Néhány esemény:

- egyiket se kapja el
- koronavírust elkapja, de az influenzát nem
- mindkettőt elkapja
- ...

Elemi események

Pénzfeldobás: $\Omega=\{F,I\}$

Események ($P(\Omega)$):

- $\emptyset$
- F
- I
- $F \vee I$

Dobókocka: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Néhány esemény:

- $\{6\}$
- $\{2,4,6\}$
- ...

$\Omega=\{$elkapja a koronavírust,
nem kapja el a koronavírust,
elkapja az influenzát,
nem kapja el az influenzát$\}$

Néhány esemény:

- egyiket se kapja el
- koronavírust elkapja, de az influenzát nem
- mindkettőt elkapja
- ...

Számosság

Definíció: A és B számossága azonos, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Számosság

Definíció: A és B számossága azonos, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

$0, 1, 2, 3, \dots \infty$

Számosság

Definíció: A és B számossága azonos, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

$$0, 1, 2, 3, \ldots \overbrace{\aleph_0, \qquad \mathfrak{c}, \qquad \ldots}^{\text{végtelen számosságok}}$$

kontinuum
pl: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

megszámlálhatóan végtelen (alef-null)
pl: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Kontinuum hipotézis

Definíció: A és B számossága azonos, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

$$0, 1, 2, 3, \dots \overbrace{\aleph_0,\ ???\ \ \mathfrak{c}, \qquad \dots}^{\text{végtelen számosságok}}$$

Mi van itt?

Végtelen műveletek

$$\sum_{i=n}^{k} a_i = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = ?$$

Végtelen műveletek

$$\sum_{i=n}^{k} a_i = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = ?$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = ?$$

Végtelen műveletek

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} [-i, i] = ?$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [0, 1/i] = ?$$

σ-algebra

- Alaphalmaz: halmazok csoportja
- Műveletek:
    - $A \cup B$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$: σ-unió,
    - $A \cap B$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$: σ-metszet,
    - $A \setminus B$: különbség

- Reláció:
    - $A \subset B$: részhalmaz
- $\emptyset$

Eseményalgebra

- Alaphalmaz: események
- Műveletek:
    - $A \vee B$: vagy, $\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$
    - $A \wedge B$: és, $\bigwedge_{i=1}^{\infty} A_i$
    - $A \setminus B$: különbség

- Reláció:
    - $A \subset B$: A maga után vonja B-t
- $\emptyset$ neve: lehetetlen esemény
- Ω az összes esemény uniója: eseménytér, illetve biztos esemény

Dobókocka, addig dobunk, amig 6-os nem lesz.

A_i: Először az i-edik dobás lesz 6-os (elemi események)

$\Omega=\{A_1, A_2, \dots A_n, \dots\}$

Néhány esemény:

- $\emptyset$
- $A_1 \vee A_2 \vee A_3$
- Párosadikra sikerül 6-ost dobni = $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$
- $A_7 \wedge A_8 = \emptyset$
- ...

A $[0,1]$ intervallumra leejtünk egy tűt.

A_H: A tű H-ba esik ($H \subset [0,1]$)

Események: $\{A_H : H \subset [0,1]\}$

Mi a valószínűség?

Pénzfeldobás: $\Omega=\{F,I\}$

Események ($P(\Omega)$):

- $\emptyset \rightarrow 0$
- $F \rightarrow 1/2$
- $I \rightarrow 1/2$
- $F \vee I \rightarrow 1$

Dobókocka: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Néhány esemény:

- $\{6\} \rightarrow 1/6$
- $\{2,4,6\} \rightarrow 1/2$
- ...

Valószínűség 2 értelmezése

Kolmogorov

Bayes

Koronavírusos vagyok?

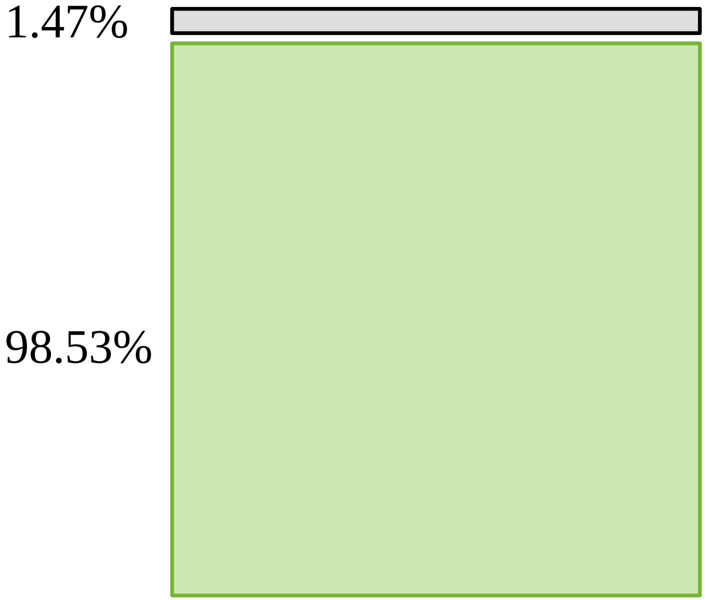
- nem köhög
- nincs láza
- Magyarországon él

1.47%

Koronavírusos vagyok?

- nem köhög
- nincs láza
- Magyarországon él

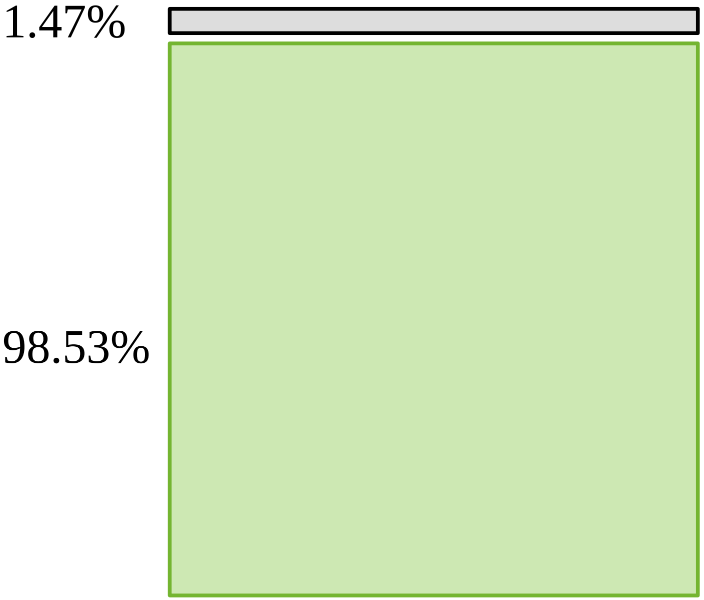
1.47%



Koronavírusos vagyok?

- nem köhög
- nincs láza
- Magyarországon él

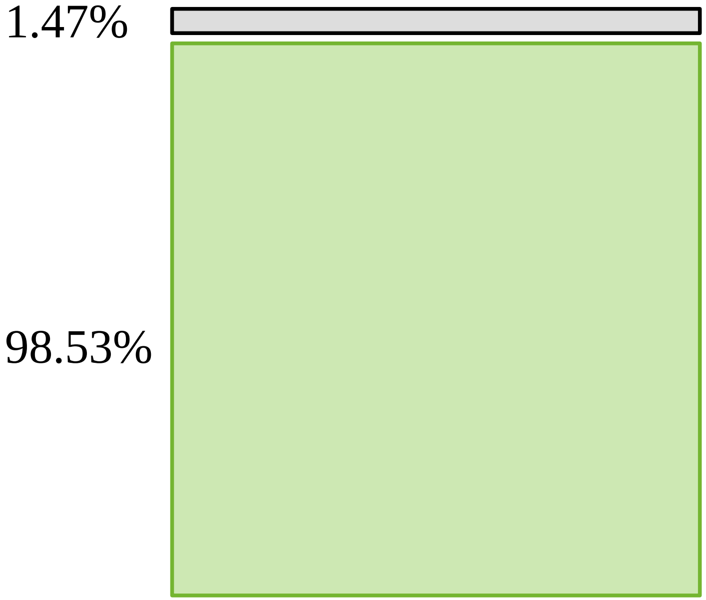
1.47%



Koronavírusos vagyok?

- nem köhög
- nincs láza
- Magyarországon él

$\Big\}$ 1.47%



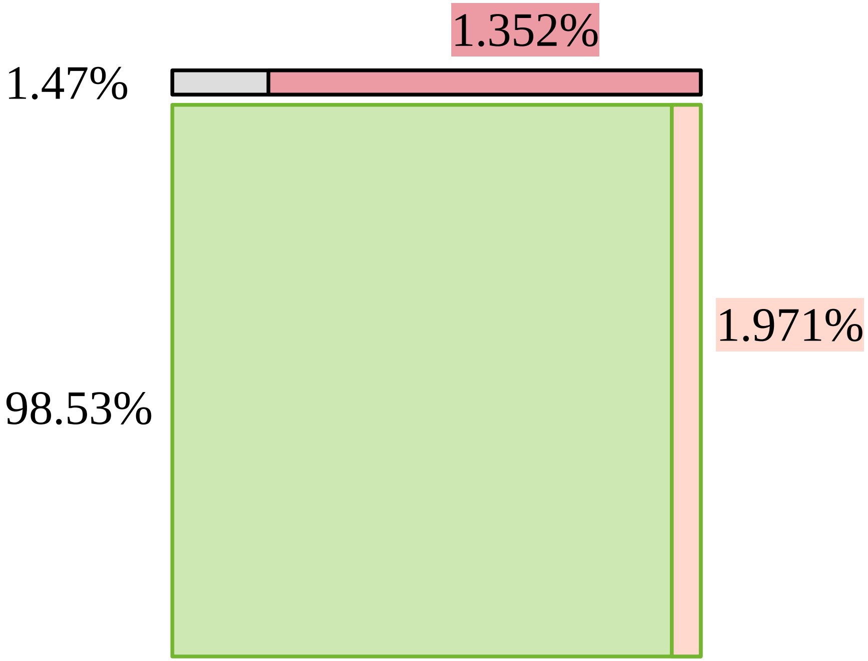
A teszt érzékenysége: 92% (pozitív teszt pozitív esetben)

Specificitás: 98% (negatív teszt negatív esetben)

Koronavírusos vagyok?

- nem köhög
- nincs láza
- Magyarországon él

1.47%

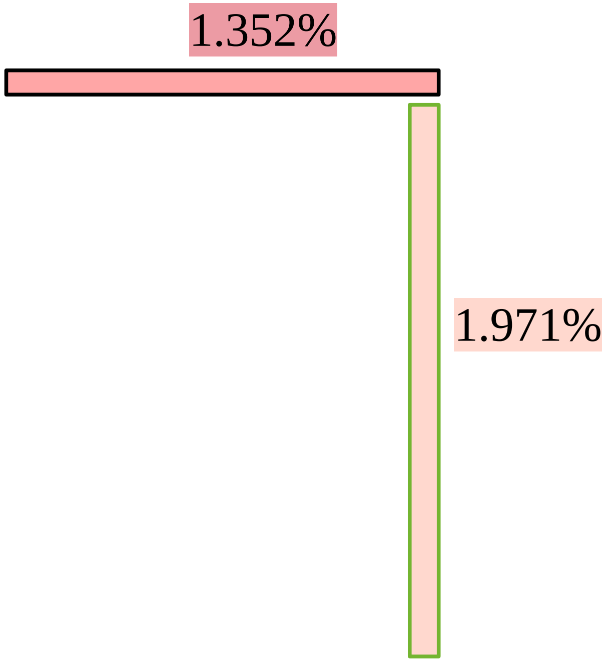


A teszt érzékenysége: 92% (pozitív teszt pozitív esetben)
Specificitás: 98% (negatív teszt negatív esetben)

Koronavírusos vagyok?

- nem köhög
- nincs láza
- Magyarországon él

1.47%



A teszt érzékenysége: 92% (pozitív teszt pozitív esetben)

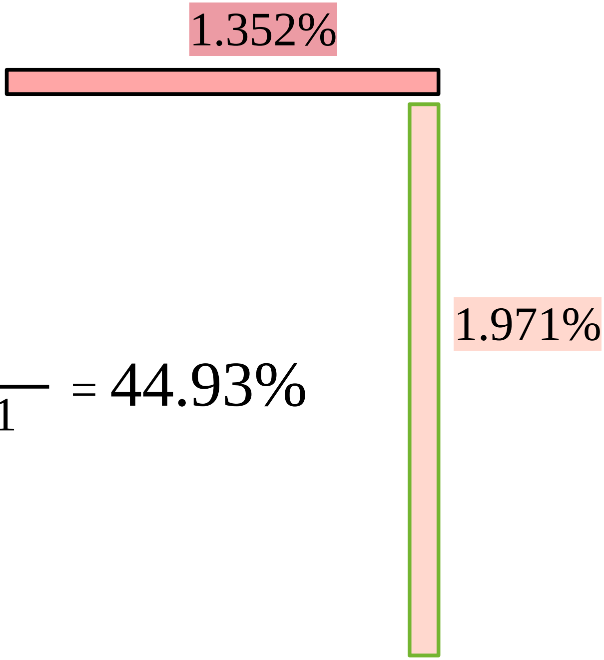
Specificitás: 98% (negatív teszt negatív esetben)

Koronavírusos vagyok?

- nem köhög
- nincs láza
- Magyarországon él

$\Big\}$ 1.47%

$$\text{Koronavírusos vagyok} = \frac{1.352}{1.352 + 1.971} = 44.93\%$$



A teszt érzékenysége: 92% (pozitív teszt pozitív esetben)

Specificitás: 98% (negatív teszt negatív esetben)

Bayes tétele

$$P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}$$

a posteriori valószínűség

a priori valószínűség

A: koronavírusos vagyok

B: pozitív a teszt

$P(B|A)$: teszt érzékenysége

Mi a valószínűség?

Pénzfeldobás: $\Omega=\{F,I\}$

Események ($\mathcal{P}(\Omega)$):

- $\emptyset \rightarrow 0$
- $F \rightarrow 1/2$
- $I \rightarrow 1/2$
- $F \vee I \rightarrow 1$

Dobókocka: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Néhány esemény:

- $\{6\} \rightarrow 1/6$
- $\{2,4,6\} \rightarrow 1/2$
- ...

Ω egy eseménytér, rajta Σ egy eseményalgebra.

Valószínűség:

$P: \Sigma \rightarrow [0,1]$ függvény

(+ tulajdonságok)

Valószínűség definíciója

Ω egy esménytér, rajta Σ egy eseményalgebra.

A valószínűség egy $P\colon \Sigma \to [0,1]$ halmazfüggvény, amelyre teljesülnek:

- $P(\Omega) = 1$ (a biztos esemény valószínűsége 1)
- $P(\emptyset) = 0$
- σ-additív: ha $A_i \in \Sigma$ diszjunkt események, akkor

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Dobókocka, addig dobunk, amig 6-os nem lesz.

A_i: Először az i-edik dobás lesz 6-os (elemi események)

$\Omega=\{A_1, A_2, \dots A_n, \dots\}$

Néhány esemény:

- $\emptyset$
- $A_1 \vee A_2 \vee A_3$
- Párosadikra sikerül 6-ost dobni = $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$
- $A_7 \wedge A_8 = \emptyset$
- ...

A $[0,1]$ intervallumra leejtünk egy tűt.

A_H: A tű H-ba esik ($H \subset [0,1]$)

Események: $\{A_H : H \subset [0,1]\}$

P(1-es) = P(2-es) = … = 1/6

Szabályos dobókocka, addig dobunk, amig 6-os nem lesz.

A_i: Először az i-edik dobás lesz 6-os (elemi események)

$\Omega=\{A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots\}$

Néhány esemény:

- $\emptyset$
- $A_1 \vee A_2 \vee A_3$
- Párosadikra sikerül 6-ost dobni = $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$
- $A_7 \wedge A_8 = \emptyset$
- ...

$P(\emptyset)=0$ $\quad$ $P(A_1)=\frac{1}{6}$ $\quad$ $P(A_2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$ $\quad$ $P(A_n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$

P(1-es) = P(2-es) = … = 1/6

Szabályos dobókocka, addig dobunk, amig 6-os nem lesz.

A_i: Először az i-edik dobás lesz 6-os (elemi események)

$\Omega=\{A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots\}$

Néhány esemény:

- $\varnothing$
- $A_1 \vee A_2 \vee A_3$
- Párosadikra sikerül 6-ost dobni = $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$
- $A_7 \wedge A_8 = \varnothing$
- ...

$P(\varnothing)=0 \qquad P(A_1)=\frac{1}{6} \qquad P(A_2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} \qquad P(A_n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$

$$P(A_1 \vee A_2 \vee A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) = \frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}^2\right)\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right) = 0.421\ldots$$

$P(\text{1-es}) = P(\text{2-es}) = \dots = 1/6$

Szabályos dobókocka, addig dobunk, amig 6-os nem lesz.

A_i: Először az i-edik dobás lesz 6-os (elemi események)

$\Omega=\{A_1, A_2, \dots A_n, \dots\}$

Néhány esemény:

- $\varnothing$
- $A_1 \vee A_2 \vee A_3$
- Párosadikra sikerül 6-ost dobni = $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$
- $A_7 \wedge A_8 = \varnothing$
- ...

$$P(\varnothing)=0 \qquad P(A_1)=\frac{1}{6} \qquad P(A_2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} \qquad P(A_n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}\right) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}+\dots = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^5+\dots\right) = \frac{1}{6}\,\frac{5/6}{1-(5/6)^2} = 0.454545\dots$$

A $[0,1]$ intervallumra leejtünk egy tűt.

A_H: A tű H-ba esik ($H \subset [0,1]$)

Események: $\{A_H : H \subset [0,1]\}$

Minden $a,b \in [0,1]$-re $P(A_{[a,b]}) = b-a$

A $[0,1]$ intervallumra leejtünk egy tűt.

A_H: A tű H-ba esik ($H \subset [0,1]$)

Események: $\cancel{\{A_H : H \subset [0,1]\}}$ Intervallumok által generált σ-algebra

Minden $a,b \in [0,1]$-re $P(A_{[a,b]}) = b-a$

$$P(\varnothing)=0$$

$$P(A_{[0,1]})=1$$

$$P(A_{\{0\}})=?$$

$$P(A_{\{x\}})=? \qquad x\in[0,1]$$

$$P(A_{\mathbb{Q}})=?$$

A [0,1] intervallumra leejtünk egy tűt.

A_H: A tű H-ba esik ($H\subset[0,1]$)

Minden $a,b\in[0,1]$-re $P(A_{[a,b]}) = b-a$

Események: $\cancel{\{A_H : H\subset[0,1]\}}$ Intervallumok által generált σ-algebra

$$P(\varnothing)=0$$

$$P(A_{[0,1]})=1$$

$$P(A_{\{0\}})=c$$

$$P(A_{\{x\}})=c \qquad x\in[0,1]$$

$$P(A_{\mathbb{Q}}) = P\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} A_{\{q\}}\right) = \underbrace{c+c+\dots}_{\infty} \le 1$$

A [0,1] intervallumra leejtünk egy tűt.

A_H: A tű H-ba esik ($H\subset[0,1]$)

Események: $\cancel{\{A_H : H\subset[0,1]\}}$ Intervallumok által generált σ-algebra

Minden $a,b\in[0,1]$-re $P(A_{[a,b]}) = b-a$

$P(\emptyset)=0$

$P(A_{[0,1]})=1$

$P(A_{\{0\}})=0$

$P(A_{\{x\}})=0 \qquad x\in[0,1]$

$P(A_{\mathbb{Q}})=0$

A [0,1] intervallumra leejtünk egy tűt.

A_H: A tű H-ba esik ($H\subset[0,1]$)

Események: $\cancel{\{A_H : H\subset[0,1]\}}$ Intervallumok által generált σ-algebra

Minden $a,b\in[0,1]$-re $P(A_{[a,b]}) = b-a$

Események függetlensége

Mit jelent az, hogy A és B független események?

Melyek függetlenek?

- Két egymásutáni pénzfeldobás
- Dobókocka: párost dobunk – 4-esnél kisebbet dobunk
- 2025-ben eltöröm a lábam – 2025-ben elkapom a koronavírust
- Holnap esni fog – holnap 25 fok felett lesz a maximális hőmérséklet
- A következő dia előtt áramszünet lesz – a következő dia előtt tűzriadó lesz

Események függetlensége

A és B függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. (Vagy: $P(AB) = P(A)P(B)$.)

Események függetlensége

A és B függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. (Vagy: $P(AB) = P(A)P(B)$.)

Szabályos dobókocka, egy dobás.

A: 6-os, B: páros szám, C: 4-nél kisebb

Függetlenek?

- A, B:
- A, C:
- B, C:

Események függetlensége

A és B függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. (Vagy: $P(AB) = P(A)P(B)$.)

Szabályos dobókocka, egy dobás.

A: 6-os, B: páros szám, C: 4-nél kisebb

1/6 1/2 1/2

Függetlenek?

- A, B: $P(AB)=1/6$
- A, C: $P(AC)=0$
- B, C: $P(BC)=1/6$

Feltételes valószínűség

A eseménynek B-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége, ha $P(B)\neq 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Feltételes valószínűség

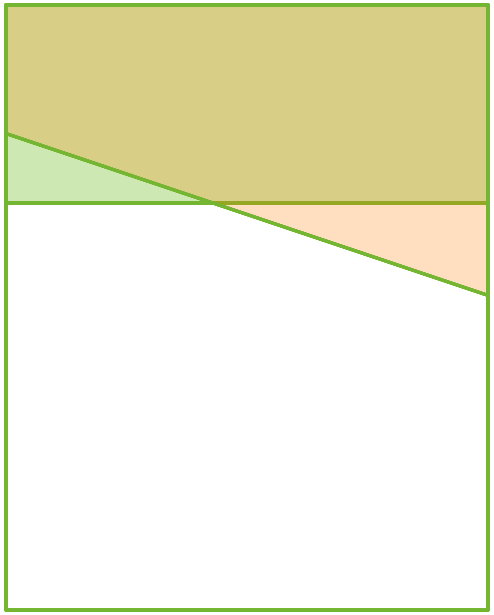
A eseménynek B-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége, ha $P(B)\neq 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Feltételes valószínűség

A eseménynek B-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége, ha $P(B) \neq 0$:

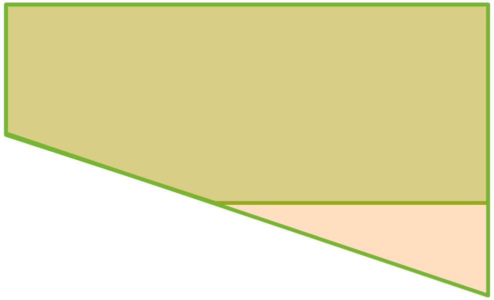
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

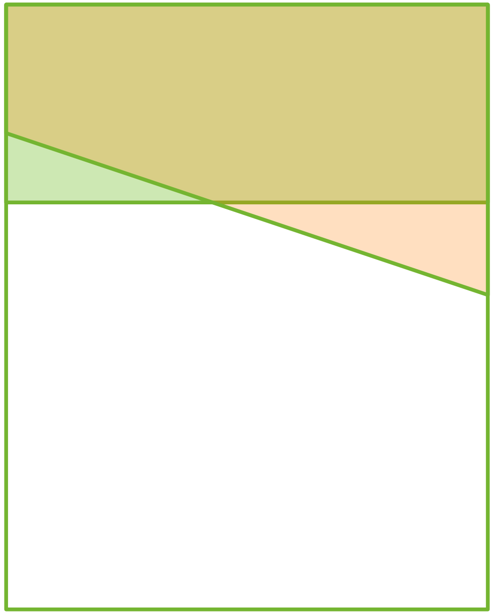


Feltételes valószínűség

A eseménynek B-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége, ha $P(B) \neq 0$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$





Feltételes valószínűség

A eseménynek B-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége, ha $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(A és B függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.)

- Ha A és B függetlenek: $P(A|B) = P(A)$
- Bayes tétel: $P(A|B) = P(A)\dfrac{P(B|A)}{P(B)}$

Valószínűségszámítás

diszkrét

folytonos

kombinatorika

mértékelmélet

Leszámolások

20 beteg vár a folyosón…

Hány különböző sorrendben hívhatjuk be őket?

Csak 12-t tudunk ma ellátni. Hányféleképp választhatjuk ki őket?

Minden beteg választhat 3 orvos közül. Hány lehetséges orvos-beteg felállás jöhet létre?

Leszámolások

20 beteg vár a folyosón…

Hány különböző sorrendben hívhatjuk be őket?

$= 20 \cdot 19 \cdot 18 \ldots \cdot 1 = 20!$

Csak 12-t tudunk ma ellátni. Hányféleképp választhatjuk ki őket?

Minden beteg választhat 3 orvos közül. Hány lehetséges orvos-beteg felállás jöhet létre?

Leszámolások

20 beteg vár a folyosón…

Hány különböző sorrendben hívhatjuk be őket?

$= 20 \cdot 19 \cdot 18 \ldots \cdot 1 = 20!$

Csak 12-t tudunk ma ellátni. Hányféleképp választhatjuk ki őket?

Minden beteg választhat 3 orvos közül. Hány lehetséges orvos-beteg felállás jöhet létre?

n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Leszámolások

20 beteg vár a folyosón…

Hány különböző sorrendben hívhatjuk be őket?

$= 20 \cdot 19 \cdot 18 \ldots \cdot 1 = 20!$

Csak 12-t tudunk ma ellátni. Hányféleképp választhatjuk ki őket?

$$= \binom{20}{12} = \frac{20!}{12! \cdot 8!}$$

n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Minden beteg választhat 3 orvos közül. Hány lehetséges orvos-beteg felállás jöhet létre?

Leszámolások

20 beteg vár a folyosón…

Hány különböző sorrendben hívhatjuk be őket?

$= 20 \cdot 19 \cdot 18 \ldots \cdot 1 = 20!$

Csak 12-t tudunk ma ellátni. Hányféleképp választhatjuk ki őket?

$$= \binom{20}{12} = \frac{20!}{12! \cdot 8!}$$

Minden beteg választhat 3 orvos közül. Hány lehetséges orvos-beteg felállás jöhet létre?

$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \ldots \cdot 3 = 3^{20}$

n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kedvező esetek száma / összes eset száma

20 beteg (köztük mi) vár a folyosón…

Véletlenszerűen hívják be őket.
Mekkora valószínűséggel leszünk az első 3-ban?

Csak 12-t tudnak ma ellátni.
Mekkora valószínűséggel leszünk mi is a 12 között?

Kedvező esetek száma / összes eset száma

20 beteg (köztük mi) vár a folyosón…

Véletlenszerűen hívják be őket.
Mekkora valószínűséggel leszünk az első 3-ban?

$$= \frac{19!+19!+19!}{20!} = \frac{3\cdot 19!}{20\cdot 19!} = \frac{3}{20}$$

Csak 12-t tudnak ma ellátni.
Mekkora valószínűséggel leszünk mi is a 12 között?

Kedvező esetek száma / összes eset száma

20 beteg (köztük mi) vár a folyosón…

Véletlenszerűen hívják be őket. Mekkora valószínűséggel leszünk az első 3-ban?

$$= \frac{19!+19!+19!}{20!} = \frac{3\cdot 19!}{20\cdot 19!} = \frac{3}{20}$$

Csak 12-t tudnak ma ellátni. Mekkora valószínűséggel leszünk mi is a 12 között?

$$= \frac{\binom{19}{11}}{\binom{20}{12}} = \frac{\frac{19!}{11!\cdot 8!}}{\frac{20!}{12!\cdot 8!}} = \frac{\frac{19!}{11!\cdot 8!}}{\frac{20\cdot 19!}{12\cdot 11!\cdot 8!}} = \frac{12}{20}$$

Valószínűségi változó

“Az eseménytéren értelmezett valós (komplex, $\mathbb{R}^n$) értékű függvény, amely a valószínűség, mint mérték szerint integrálható.”

Valószínűségi változó

“Az eseménytéren értelmezett valós értékű függvény.”

Melyik valószínűségi változó? Melyik folytonos, melyik diszkrét?

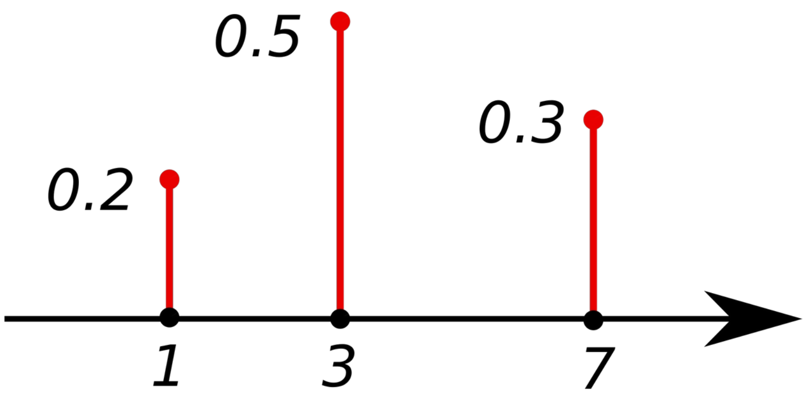
- Szabályos pénzérme, a dobás értéke. (F, I)
- Szabályos dobókocka, a dobás értéke. (1,2,3,4,5,6)
- Születendő gyermek neme. (fiú, lány)
- 2026 jan. 1.-én a forint-euró árfolyam.
- Valaki célba lő. A lövés becsapódása és a cél távolsága.
- 2100 jan. 1.-én élő emberek száma.

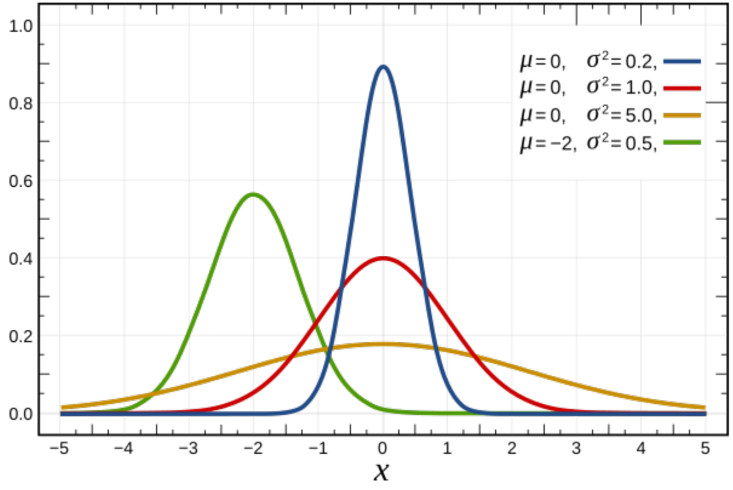
Eloszlás

Milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel egy valószínűségi változó?

diszkrét

folytonos





Várható érték (1. momentum)

“A valószínűségi változó értékeinek valószínűséggel súlyozott átlaga.”

diszkrét

folytonos

Ha X az x_1, x_2, … értékeket p_1, p_2, … valószínűséggel veszi fel, akkor

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$E(X) = \int_{\Omega} X \, dP$$

Ha X sűrűségfüggvénye f_X, akkor

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Szórás (2. momentum)

“A várható értéktől való eltérés várható mértéke.”

$$D(X) = \sqrt{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

σ^2

Egy szabályos pénzérme (f,i esélye 50-50%) feldobásának mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

Egy szabályos pénzérme (0,1 esélye 50-50%) feldobásának mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

Egy szabályos pénzérme (0,1 esélye 50-50%) feldobásának mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

Egy szabályos pénzérme (0,1 esélye 50-50%) feldobásának mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$Y = (X - 0.5)^2$ értékei:

$0.25, \quad 0.25$

Egy szabályos pénzérme (0,1 esélye 50-50%) feldobásának mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$Y = (X - 0.5)^2$ értékei:

$0.25, \quad 0.25$

$$E(Y) = 0.25 \cdot \frac{1}{2} + 0.25 \cdot \frac{1}{2} = 0.25$$

$$D(X) = \sqrt{0.25} = 0.5$$

A szabályos dobókockával dobásnak mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

A szabályos dobókockával dobásnak mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6} = 3.5$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)}$$

A szabályos dobókockával dobásnak mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6} = 3.5$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D(X) = \sqrt{E\Big(\underbrace{\left(X-E(X)\right)^2}_{Y}\Big)}$$

$Y = (X - 3.5)^2$ értékei:

6.25, 2.25, 0.25, 0.25, 2.25, 6.25

A szabályos dobókockával dobásnak mennyi a várható értéke, szórása?

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6} = 3.5$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \\ D(X) &= \sqrt{E\Big(\underbrace{(X-E(X))^2}_{Y}\Big)} \end{aligned}}$$

$Y = (X - 3.5)^2$ értékei:

$6.25, \quad 2.25, \quad 0.25, \quad 0.25, \quad 2.25, \quad 6.25$

$$E(Y) = 6.25\cdot\frac{1}{6}+2.25\cdot\frac{1}{6}+0.25\cdot\frac{1}{6}+0.25\cdot\frac{1}{6}+2.25\cdot\frac{1}{6}+6.25\cdot\frac{1}{6} = 2.91666\ldots$$

$$D(X) = \sqrt{2.91666\ldots} = 1{,}7078\ldots$$

Led izzó várható élettartama

Egy led-izzó várható élettartama *X* folytonos valószínűségi változó, amely exponenciális eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad \text{(ahol } x\geq 0\text{)}$$

Ha x-et ezer órában mérjük, akkor a λ hibaarány-paraméter értéke 0.2. Mennyi az izzó élettartamának várható értéke? (és szórása?)

Led izzó várható élettartama

Egy led-izzó várható élettartama *X* folytonos valószínűségi változó, amely exponenciális eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye

$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ (ahol $x \geq 0$)

Ha x-et ezer órában mérjük, akkor a λ hibaarány-paraméter értéke 0.2. Mennyi az izzó élettartamának várható értéke? (és szórása?)

$$E(X) = \int_0^\infty x\left(0.2e^{-0.2x}\right) = 5$$

Led izzó várható élettartama

Egy led-izzó várható élettartama *X* folytonos valószínűségi változó, amely exponenciális eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye

$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ (ahol $x \geq 0$)

Ha x-et ezer órában mérjük, akkor a λ hibaarány-paraméter értéke 0.2. Mennyi az izzó élettartamának várható értéke? (és szórása?)

$$E(X) = \int_0^\infty x\left(0.2e^{-0.2x}\right) = 5$$

$$D(X) = \sqrt{\int_0^\infty (x-5)^2\left(0.2e^{-0.2x}\right)} = 5$$

Normális eloszlás

Az μ várható értékű, σ szórású normális eloszlás: N(μ,σ)

Sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$