Practica 2: Sistemas de ecuaciones diferenciales, alumnos

Sistemas de ecuaciones diferenciales

- **Sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneos con coeficientes constantes**

De cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales obtenga:

a) Los valores de estado estacionario.
b) El análisis de estabilidad.
c) El diagrama de fases.

1. $\dot{x}$=-3x+y+3
   $\dot{y}$= x-3y+3

a) Valores de estado estacionario

```
<< VectorFieldPlots`
```

General::obspkg :
VectorFieldPlots` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current Mathematica functionality. See the Compatibility Guide for updating information. ≫

```
A1 = {{-3, 1}, {1, -3}}; MatrixForm[A1]
(* Matriz A de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

```
b1 = {{3}, {3}}; MatrixForm[b1]
(* Vector b de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[LinearSolve[-A1, b1]](* Esto equivale a $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$=-$A^{-1}$b *)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b) Análisis de estabilidad

```
traA1 = Tr[A1](*Traza de la matriz A*)
```

-6

```
detA1 = Det[A1](*Determinante de la matriz A*)
```

8

```
(traA1)^2 - 4 detA1(* (TrazaA)^2-4det|A| *)
```

4

```
ec1 = CharacteristicPolynomial[A1, λ] (* Polinomio caracteristico de la matriz A *)
```

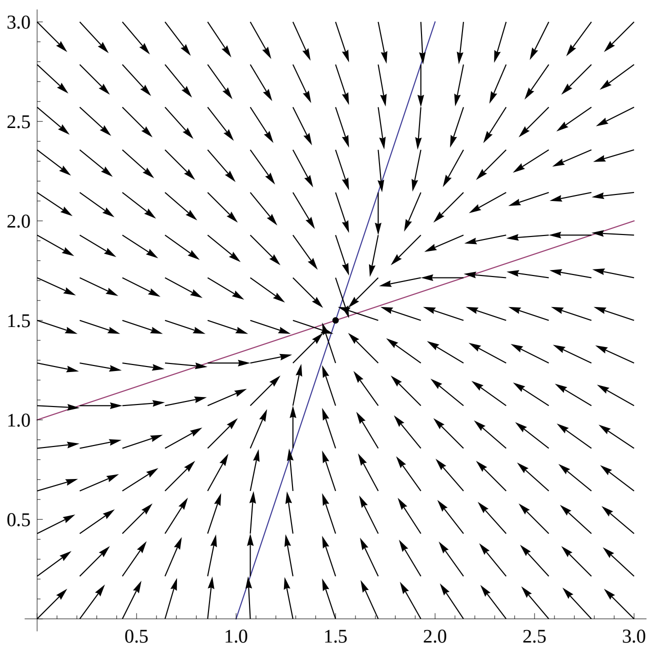
$8 + 6\lambda + \lambda^2$

```
Solve[ec1 == 0, λ](* Obteniendo los valores propios *)
```

{{λ → -4}, {λ → -2}}

c) Diagrama de fases

```
eq1 = {x'[t] == -3 x[t] + y[t] + 3, y'[t] == x[t] - 3 y[t] + 3};
var1 = {x[t], y[t]};
sol1 = DSolve[eq1, var1, t];
p1 = ContourPlot[{-3 x + y + 3 == 0, x - 3 y + 3 == 0},
    {x, 0, 3}, {y, 0, 3}, Axes → True, Frame → False];
p2 = VectorFieldPlot[{-3 x + y + 3, x - 3 y + 3},
    {x, 0, 3}, {y, 0, 3}, ScaleFunction → (1 &), AspectRatio → 1];
Show[p1, p2]
```



```
Clear[A1, b1, ec1, eq1, var1, sol1, p1, p2]
```

2. $\dot{x}= \quad x+\ y-4$
$\dot{y}=-2x+4y-4$

a) Valores de estado estacionario

```
A2 = {{1, 1}, {-2, 4}}; MatrixForm[A2]
(* Matriz A de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
b2 = {{-4}, {-4}}; MatrixForm[b2]
(* Vector b de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[LinearSolve[-A2, b2]](* Esto equivale a $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}=-A^{-1}b$ *)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Análisis de estabilidad

```
traA2 = Tr[A2](*Traza de la matriz A*)
```

5

```
detA2 = Det[A2](*Determinante de la matriz A*)
```

6

(traA2)^2 - 4 detA2(* $(\text{TrazaA})^2-4\det|A|$ *)

1

```
ec2 = CharacteristicPolynomial[A2, λ] (* Polinomio caracteristico de la matriz A *)
```

$6-5\lambda+\lambda^2$

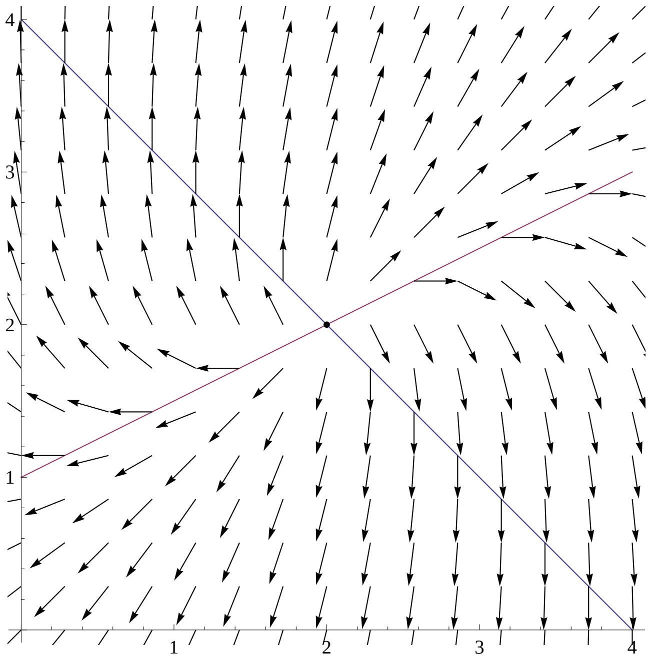
```
Solve[ec2 == 0, λ](* Obteniendo los valores propios *)
```

$\{\{\lambda\to 2\}, \{\lambda\to 3\}\}$

c) Diagrama de fases

```
eq2 = {x'[t] == x[t] + y[t] - 4, y'[t] == -2 x[t] + 4 y[t] - 4};
var2 = {x[t], y[t]};
sol2 = DSolve[eq2, var2, t];
p3 = ContourPlot[{x + y - 4 == 0, -2 x + 4 y - 4 == 0},
    {x, 0, 4}, {y, 0, 4}, Axes → True, Frame → False];
```

```
p4 = VectorFieldPlot[{x + y - 4, -2 x + 4 y - 4},
    {x, 0, 4}, {y, 0, 4}, ScaleFunction → (1 &), AspectRatio → 1];
Show[p3, p4]
```




```
Clear[A2, b2, ec2, eq2, var2, sol2, p3, p4]
```

3. $\dot{x}$= x+12y-25
   $\dot{y}$=3x+ y-5

a) Valores de estado estacionario

```
A3 = {{1, 12}, {3, 1}}; MatrixForm[A3]
(* Matriz A de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
b3 = {{-25}, {-5}}; MatrixForm[b3]
(* Vector b de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} -25 \\ -5 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[LinearSolve[-A3, b3]](* Esto equivale a $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$=-$A^{-1}$b *)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Análisis de estabilidad

```
traA3 = Tr[A3](*Traza de la matriz A*)
```

2

```
detA3 = Det[A3](*Determinante de la matriz A*)
```

−35

```
(traA3)^2 − 4 detA3(* (TrazaA)^2−4det|A| *)
```

144

```
ec3 = CharacteristicPolynomial[A3, λ] (* Polinomio caracteristico de la matriz A *)
```

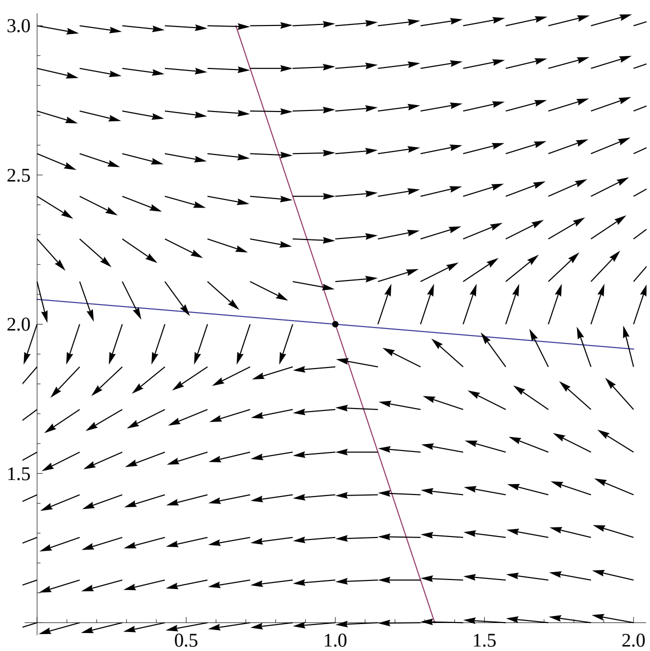
$-35 - 2\lambda + \lambda^2$

```
Solve[ec3 == 0, λ](* Obteniendo los valores propios *)
```

$\{\{\lambda \to -5\}, \{\lambda \to 7\}\}$

c) Diagrama de fases

```
eq3 = {x'[t] == x[t] + 12 y[t] − 25, y'[t] == 3 x[t] + y[t] − 5};
var3 = {x[t], y[t]};
sol3 = DSolve[eq3, var3, t];
p5 = ContourPlot[{x + 12 y − 25 == 0, 3 x + y − 5 == 0},
    {x, 0, 2}, {y, 1, 3}, Axes → True, Frame → False];
p6 = VectorFieldPlot[{x + 12 y − 25, 3 x + y − 5},
    {x, 0, 2}, {y, 1, 3}, ScaleFunction → (1 &), AspectRatio → 1];
Show[p5, p6]
```




```
Clear[A3, b3, ec3, eq3, var3, sol3, p5, p6]
```

4. $\dot{x}$=-3x+4y-4 c.i. x(0)=2
$\dot{y}$=-2x+ y+9 y(0)=3

```
A4 = {{-3, 4}, {-2, 1}}; MatrixForm[A4]
(* Matriz A de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
b4 = {{-4}, {9}}; MatrixForm[b4]
(* Vector b de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[LinearSolve[-A4, b4]](* Esto equivale a $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}=-A^{-1}b$ *)

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Análisis de estabilidad

```
traA4 = Tr[A4](*Traza de la matriz A*)
```

-2

```
detA4 = Det[A4](*Determinante de la matriz A*)
```

5

(traA4)^2 - 4 detA4(* $(\text{TrazaA})^2$-4det|A| *)

-16

```
ec4 = CharacteristicPolynomial[A4, λ] (* Polinomio caracteristico de la matriz A *)
```

$5+2\lambda+\lambda^2$

```
Solve[ec4 == 0, λ](* Obteniendo los valores propios *)
```

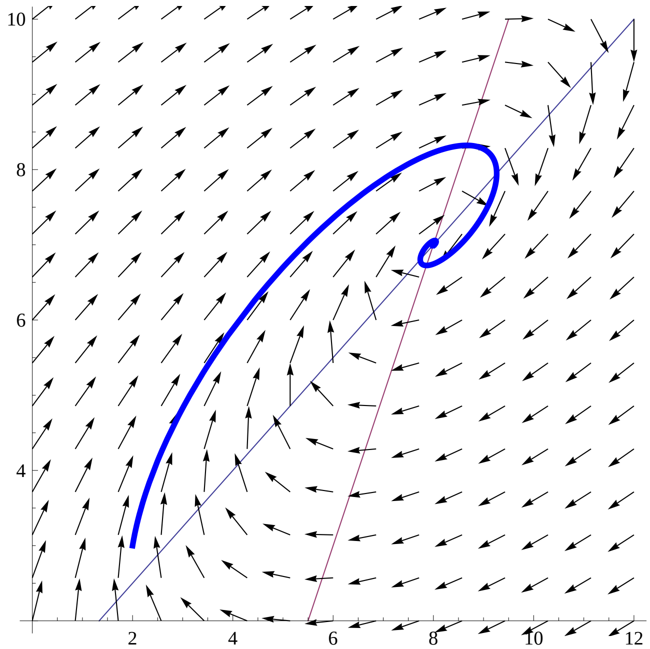
{{λ → -1 - 2 ⅈ}, {λ → -1 + 2 ⅈ}}

c) Diagrama de fases

```
eq4 = {x'[t] == -3 x[t] + 4 y[t] - 4, y'[t] == -2 x[t] + y[t] + 9, x[0] == 2, y[0] == 3};

var4 = {x[t], y[t]};

sol4 = DSolve[eq4, var4, t];

p7 = ContourPlot[{-3 x + 4 y - 4 == 0, -2 x + y + 9 == 0},
    {x, 0, 12}, {y, 2, 10}, Axes → True, Frame → False];

p8 = VectorFieldPlot[{-3 x + 4 y - 4, -2 x + y + 9},
    {x, 0, 12}, {y, 2, 10}, ScaleFunction → (1 &), AspectRatio → 1];
```

p9 = ParametricPlot[Evaluate[var4 /. sol4],
{*t*, 0, 7}, PlotStyle → {Thickness[0.009], RGBColor[0, 0, 1]}];

Show[p7, p8, p9]



Clear[A4, b4, ec4, eq4, var4, sol4, p7, p8, p9]

5. $\dot{x}$= x+3y-12 c.i. x(0)= 3
$\dot{y}$=-3x+ y+ 6 y(0)= 2

```
A5 = {{1, 3}, {-3, 1}}; MatrixForm[A5]
(* Matriz A de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
b5 = {{-12}, {6}}; MatrixForm[b5]
(* Vector b de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[LinearSolve[-A5, b5]] (* Esto equivale a $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = -A^{-1}b$ ***)**

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Análisis de estabilidad

```
traA5 = Tr[A5] (*Traza de la matriz A*)
```

2

```
detA5 = Det[A5] (*Determinante de la matriz A*)
```

```
10
```

```
(traA5)^2 - 4 detA5 (* (TrazaA)^2-4det|A| *)
```

```
-36
```

```
ec5 = CharacteristicPolynomial[A5, λ] (* Polinomio caracteristico de la matriz A *)
```

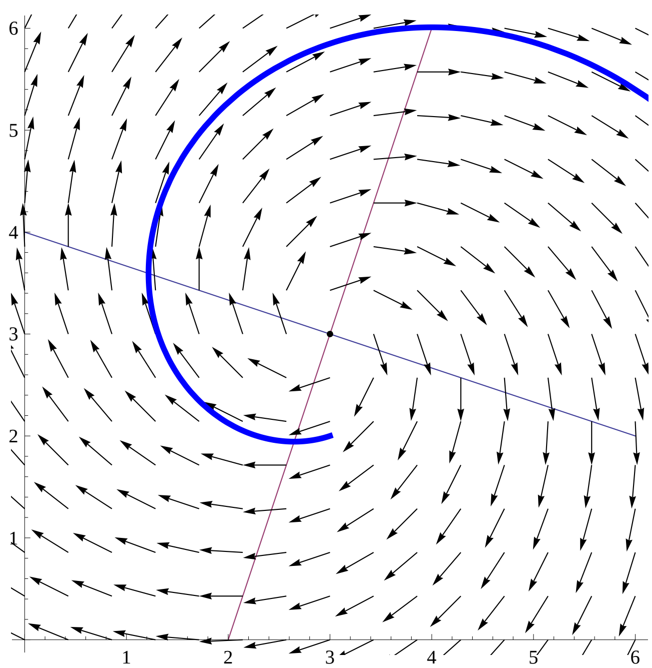
$10 - 2\lambda + \lambda^2$

```
Solve[ec5 == 0, λ] (* Obteniendo los valores propios *)
```

$\{\{\lambda \to 1 - 3 i\}, \{\lambda \to 1 + 3 i\}\}$

c) Diagrama de fases

```
eq5 = {x'[t] == x[t] + 3 y[t] - 12, y'[t] == -3 x[t] + y[t] + 6, x[0] == 3, y[0] == 2};

var5 = {x[t], y[t]};

sol5 = DSolve[eq5, var5, t];

p10 = ContourPlot[{x + 3 y - 12 == 0, -3 x + y + 6 == 0},
    {x, 0, 6}, {y, 0, 6}, Axes → True, Frame → False];

p11 = VectorFieldPlot[{x + 3 y - 12, -3 x + y + 6},
    {x, 0, 6}, {y, 0, 6}, ScaleFunction → (1 &), AspectRatio → 1];

p12 = ParametricPlot[Evaluate[var5 /. sol5],
    {t, 0, 7}, PlotStyle → {Thickness[0.009], RGBColor[0, 0, 1]}];

Show[p10, p11, p12]
```



Clear[A5, b5, ec5, eq5, var5, sol5, p10, p11, p12]

6. $\dot{x}$= x+3y-7 c.i. x(0)= 2
$\dot{y}$= -6x - y+8 y(0)= 2

```
A6 = {{1, 3}, {-6, -1}}; MatrixForm[A6]
(* Matriz A de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

```
b6 = {{-7}, {8}}; MatrixForm[b6]
(* Vector b de coeficientes constantes del sistema de ecuaciones diferenciales *)
```

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[LinearSolve[-A6, b6]](* Esto equivale a $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = -A^{-1}b$ *)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Análisis de estabilidad

```
traA6 = Tr[A6](*Traza de la matriz A*)
```

0

```
detA6 = Det[A6](*Determinante de la matriz A*)
```

17

(traA6)^2 - 4 detA6(* (TrazaA)^2-4det|A| *)

-68

```
ec6 = CharacteristicPolynomial[A6, λ] (* Polinomio caracteristico de la matriz A *)
```

$17 + \lambda^2$

```
Solve[ec6 == 0, λ](* Obteniendo los valores propios *)
```

$\{\{\lambda \to -i\sqrt{17}\}, \{\lambda \to i\sqrt{17}\}\}$

c) Diagrama de fases

eq6 = {*x*'[*t*] == *x*[*t*] + 3 *y*[*t*] − 7, *y*'[*t*] == −6 *x*[*t*] − *y*[*t*] + 8, *x*[0] == 2, *y*[0] == 2};

var6 = {*x*[*t*], *y*[*t*]};

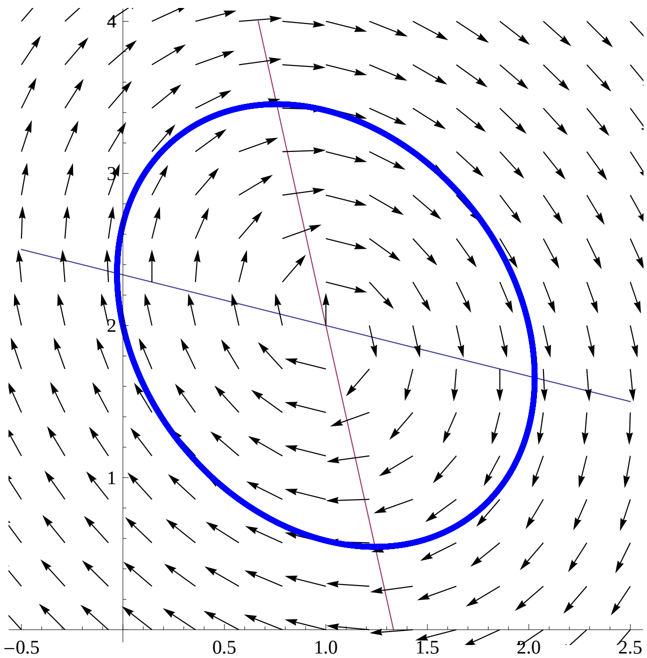
sol6 = DSolve[eq6, var6, *t*];

**p13 = ContourPlot[{*x* + 3 *y* − 7 == 0, −6 *x* − *y* + 8 == 0},
{*x*, −0.5, 2.5}, {*y*, 0, 4}, Axes → True, Frame → False];**

**p14 = VectorFieldPlot[{*x* + 3 *y* − 7, −6 *x* − *y* + 8},
{*x*, −0.5, 2.5}, {*y*, 0, 4}, ScaleFunction → (1 &), AspectRatio → 1];**

```
p15 = ParametricPlot[Evaluate[var6 /. sol6],
    {t, 0, 5}, PlotStyle → {Thickness[0.009], RGBColor[0, 0, 1]}];
```

```
Show[p13, p14, p15]
```




```
Clear[A6, b6, ec6, eq6, var6, sol6, p13, p14, p15]
```