EJERCICIOS

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMIA

México, D.F., junio de 2012

Métodos Cuantitativos 2012

Contenido

1. Ecuaciones en diferencia

El movimiento de las variables no solo es continuo, en economía, por ejemplo, variables como el tipo de cambio, la inflación, deuda pública, entre otras, se contabilizan en periodos discretos: un día, mes, trimestre o años.

Considerar al tiempo como variable discreta, motiva el análisis de ecuaciones en diferencia, cualquier variable se relaciona consigo misma k periodos atrás de la siguiente forma

$$x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-k}) \tag{1}$$

La función $f(\cdot)$ puede ser lineal o no lineal, el objetivo es encontrar x_t^* que satisfaga (1).

1.1. Ecuaciones en diferencia de primer orden

El estudio inicia con el caso de ecuaciones en diferencia de primer orden,

$$x_t = f(t, x_{t-1}) \tag{2}$$

Con el fin de hacer el análisis mas evidente, suponer que la ecuación en diferencia es lineal y toma la forma

$$x_t = ax_{t-1} + b_t \tag{3}$$

donde a es una constante y b_t es una función discreta, x_0 es conocido, entonces la solución a la ecuación 3 es:

$$x_t = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^t + \frac{b}{1-a} \quad \text{si} \quad a \neq 1 \tag{4}$$

Observaciones de comportamiento a la ecuación (4).

1) El comportamiento de la solución depende enteramente de a
   Si $-1 < a < 1$ el
   $$\lim_{t\to\infty} x_t = 0$$
   y la solución converge a
   $$\frac{b}{1-a}$$

Métodos Cuantitativos 2012

Si $0 < a < 1$ entonces la ecuación presenta convergencia monótona

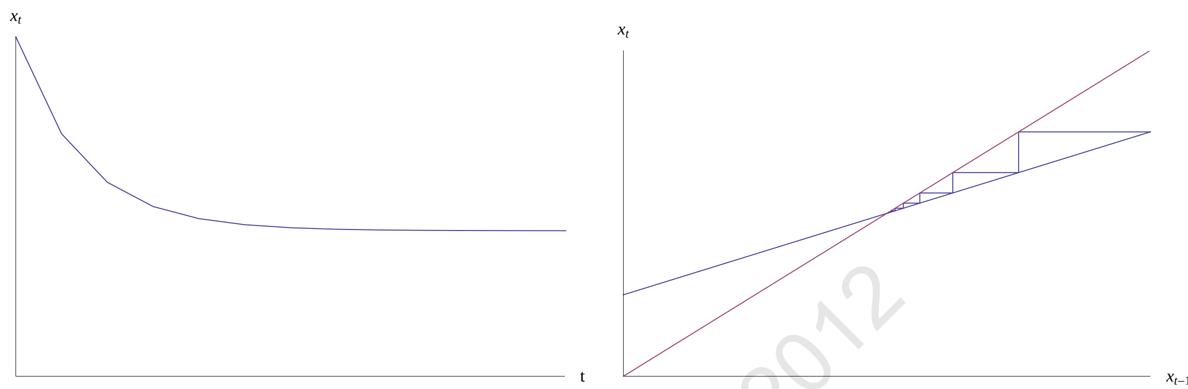

Figura 1: Convergencia monótona

Métodos Cuantitativos 2012

Si $-1 < a < 0$ entonces la ecuación presenta convergencia oscilatoria

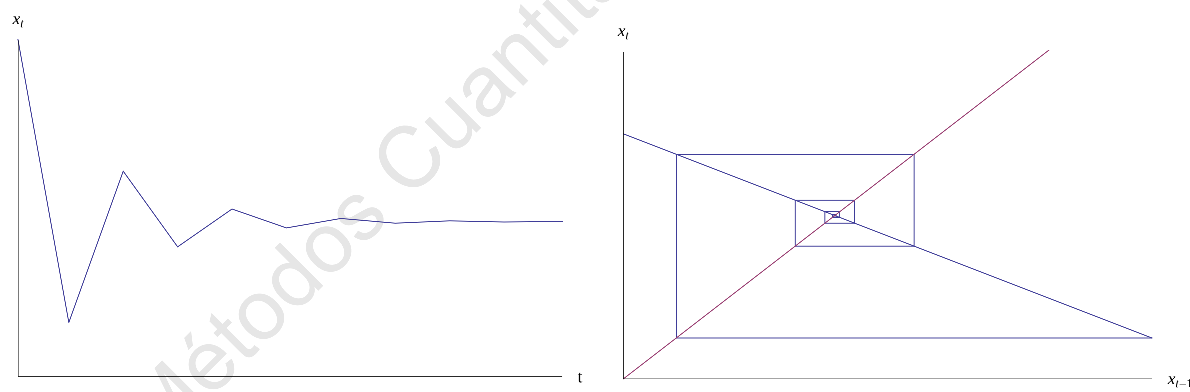

Figura 2: Convergencia oscilatoria

Si $|a| > 1$ entonces

$$\lim_{t \to \infty} x_t = \infty$$

2) Si $a = 1$ la solución es

$$x_t = x_0 + bt$$

3) Adelantar un periodo la ecuación no modifica la solución.

1.1.1. Ecuaciones en diferencia de primer orden aplicadas a la economía

1. La población de un país crece de acuerdo con la ecuación $x_t = 2x_{t-1}+3$, donde el tamaño de la población en millones en el período inicial es $x_0 = 5$. Encontrar la trayectoria temporal de la población. ¿Cuál es la población del país en el tercer período?

   Solución:

   La ecuación anterior tiene la forma $x_t = ax_{t-1} + b_t$, cuya solución es la ecuación (4), para este ejemplo $a = 2$ y $b = 3$, sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned}
x_t &= \left(5 - \frac{3}{1-2}\right)2^t + \frac{3}{1-2} \\
x_t &= (5+3)2^t - 3 \\
x_t &= 8(2)^t - 3
\end{aligned}$$

   Vemos que la población crece con el tiempo exponencialmente. Su tamaño en el tercer período es $x_3 = 8(2)^3-3 = 61$ millones de personas.

2. El crecimiento de la población de un país está dada por la ecuación $x_t = 3x_{t-1}+4$, donde el tamaño de la población en el período inicial es $x_0 = 10$. Expresar la trayectoria temporal de la población y encontrar su tamaño en el cuarto periodo.

   Solución:

   Resolviendo la ecuación en diferencia con la fórmula estandar

$$\begin{aligned}
x_t &= \left(10 - \frac{4}{1-3}\right)3^t + \frac{4}{1-3} \\
x_t &= (10+2)3^t - 2 \\
x_t &= 12(3)^t - 2 \\
x_4 &= 12(3)^4 - 2 = 970 \quad \text{tamaño de la población en el cuarto período.}
\end{aligned}$$

   Ver figura 3.

Métodos Cuantitativos 2012

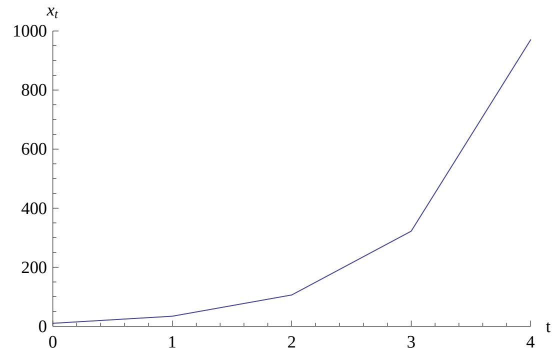

Figura 3: Divergencia monótona

3. El PIB de un país crece de acuerdo a la ecuación $2Y_t = Y_{t-1} + 6$, a partir del nivel inicial $Y_0 = 7$. Encontrar la trayectoria temporal del PIB. ¿El PIB del país aumenta o disminuye con el tiempo?

   Solución:

   Primero normalizaremos la ecuación en diferencias:

   $$Y_t = \frac{1}{2}Y_{t-1} + 3$$

   A través de la conocida fórmula,

   $$Y_t = \left(7 - \frac{3}{1-1/2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{3}{1-1/2}$$
   $$Y_t = (7-6)\left(\frac{1}{2}\right)^t + 6$$
   $$Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t + 6$$

   La trayectoria temporal del PIB es estable, pero con el tiempo va en declive, convergiendo hacia el valor 6. Ver figura 4.

Métodos Cuantitativos 2012

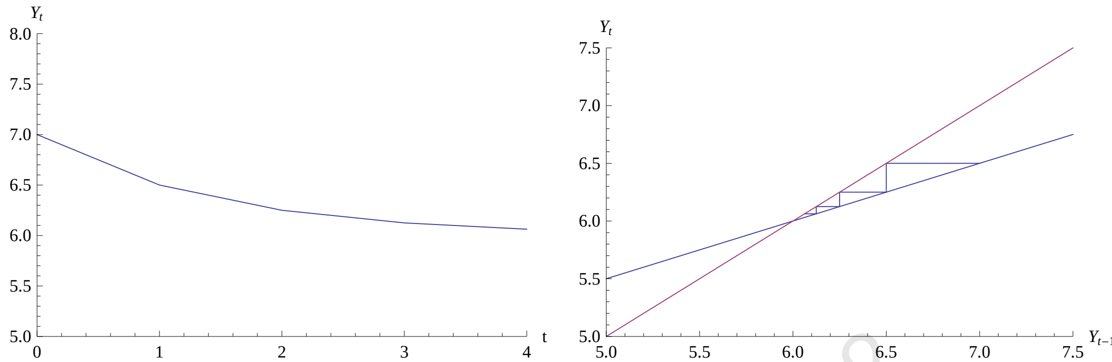

Figura 4: Convergencia monótona

4. La siguiente ecuación describe el patrón de cambio del precio de mercado de un producto. Determinar la trayectoria temporal de los precios y si el equilibrio intertemporal es dinámicamente estable:

$$x_t = -\frac{1}{3}x_{t-1} + 6 \quad x_0 = \frac{11}{2}$$

Solución:

Directamente se puede resolver la ecuación sustituyendo en la fórmula para encontrar la trayectoria temporal del precio de mercado

$$\begin{aligned}
x_t &= \left(\frac{11}{2} - \frac{6}{1+1/3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{6}{1+1/3} \\
x_t &= \left(\frac{11}{2} - \frac{18}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{18}{4} \\
x_t &= \left(\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{9}{2} \\
x_t &= \left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{3} < 1$, el crecimiento se amortigua, y el precio de mercado converge hacia el precio de equilibrio $\frac{9}{2}$ cuando $t \to \infty$. Al mismo tiempo, como $-\frac{1}{3}$, la trayectoria en el tiempo es oscilatoria. Ver figura 5.

Métodos Cuantitativos 2012

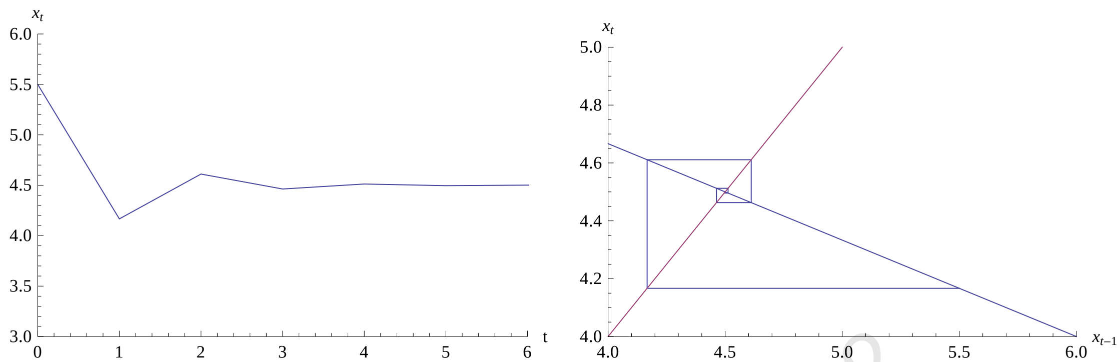

Figura 5: Convergencia oscilatoria

5. La siguiente ecuación de equilibrio describe el patrón de cambio del precio de mercado de un producto. Determinar la trayectoria temporal de los precios y comprobar si el equilibrio intertemporal es dinámicamente estable:

$$x_t = -2x_{t-1} + 6 \quad x_0 = 5$$

Solución:

Resolviendo la ecuación en diferencias con la ayuda de la condición inicial,

$$x_t = \left(5 - \frac{6}{1+2}\right)(-2)^t + \frac{6}{1+2}$$
$$x_t = (5-2)(-2)^t + 2$$
$$x_t = 3(-2)^t + 2$$

Como $2 > 1$, el crecimiento es explosivo, y el precio de mercado diverge del precio de equilibrio 2 con el paso del tiempo. Al mismo tiempo, como $-2 < 0$, la trayectoria en el tiempo es oscilatoria. Ver figura 6.

Métodos Cuantitativos 2012

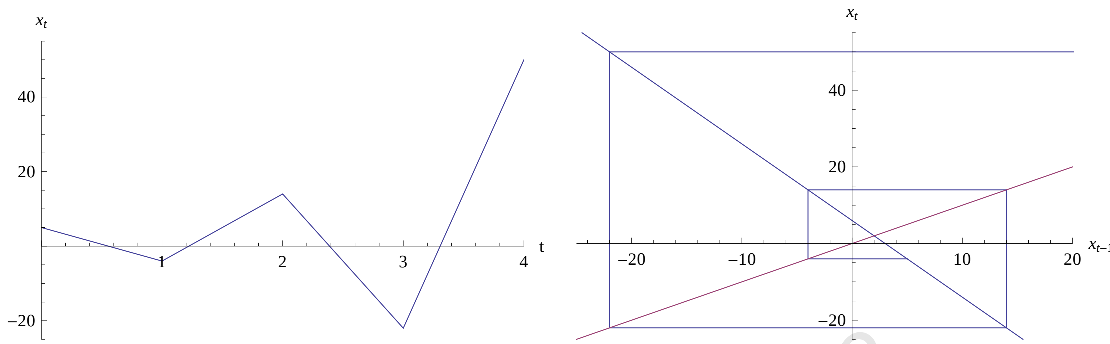

Figura 6: Divergencia oscilatoria

6. La siguiente ecuación muestra el patrón de cambio del precio de mercado de un bien. Determinar la trayectoria del precio y encontrar si el equilibrio intertemporal es dinámicamente estable:

$$x_t = -\frac{1}{4}x_{t-1} + 5 \quad x_0 = 6$$

Solución:

Sustituyendo directamente en la fórmula para la ecuación en diferencias de primer orden

$$x_t = \left(6 - \frac{5}{1+1/4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{5}{1+1/4}$$
$$x_t = (6-4)\left(-\frac{1}{4}\right)^t + 4$$
$$x_t = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^t + 4$$

Como $\frac{1}{4} < 1$, el crecimiento se amortigua, y el precio de mercado converge hacia el precio de equilibrio cuando $t \to \infty$. Al mismo tiempo, como $-\frac{1}{4} < 0$, la trayectoria en el tiempo es oscilatoria. Ver figura 7.

Métodos Cuantitativos 2012

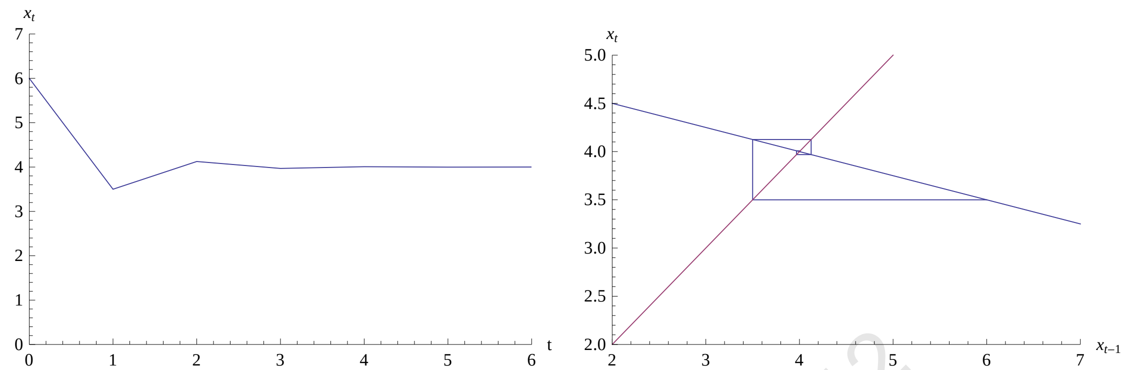

Figura 7: Convergencia oscilatoria

7. Dada la demanda y la oferta para el modelo de la telaraña, encontrar el precio de equilibrio intertemporal y describir el tipo de trayectoria en el tiempo del precio de mercado si el precio inicial $p_0 = 10$, donde

$$\begin{aligned} q_t^d &= 20 - 3p_t \\ q_t^s &= -4 + p_{t-1} \end{aligned}$$

Solución:

Con el fin de encontrar el precio de equilibrio intertemporal, fijamos la demanda igual a la oferta

$$\begin{aligned} 20 - 3\bar{p} &= -4 + \bar{p} \\ 4\bar{p} &= 24 \\ \bar{p} &= 6 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación en diferencias para encontrar la trayectoria temporal del precio,

$$\begin{aligned} 20 - 3p_t &= -4 + p_{t-1} \\ p_t &= -\frac{1}{3}p_{t-1} + 8 \\ p_t &= \left(10 - \frac{8}{1+1/3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{8}{1+1/3} \\ p_t &= 4\left(-\frac{1}{3}\right)^t + 6 \end{aligned}$$

Métodos Cuantitativos 2012

la trayectoria en el tiempo es oscilatoria amortiguada, ya que $1/3 < 1$, y el precio de mercado converge al equilibrio 6. Ver figura 8.

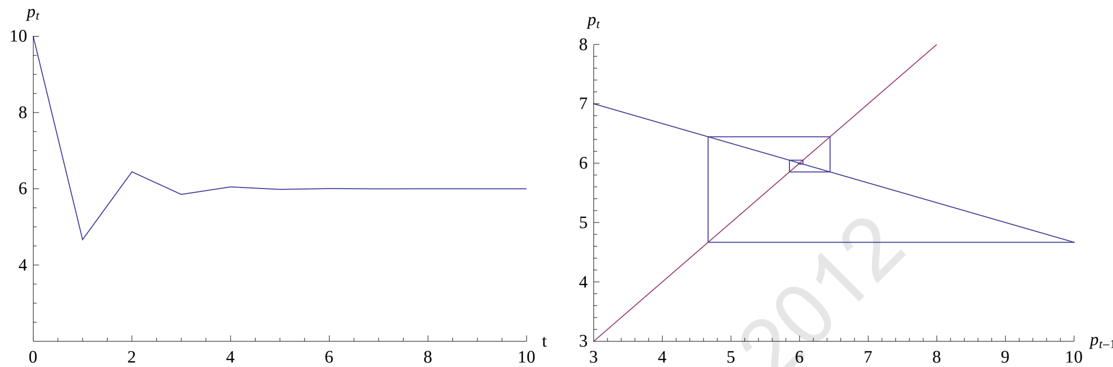

Figura 8: Convergencia oscilatoria

8. Dada la demanda y la oferta para el modelo de la telaraña, encontrar el precio de equilibrio intertemporal y describir el tipo de trayectoria en el tiempo del precio de mercado si el precio inicial $p_0 = 2$, donde

$$q_t^d = 30 - 5p_t$$
$$q_t^s = -5 + 2p_{t-1}$$

Solución:

Encontremos el precio de equilibrio intertemporal

$$30 - 5\bar{p} = -5 + 2\bar{p}$$
$$7\bar{p} = 35$$
$$\bar{p} = 5$$

Métodos Cuantitativos 2012

Resolviendo la ecuación en diferencias para encontrar la trayectoria temporal del precio,

$$
\begin{aligned}
30 - 5p_t &= -5 + 2p_{t-1} \\
5p_t + 2p_{t-1} &= 35 \\
p_t &= -\frac{2}{5}p_{t-1} + 7 \\
p_t &= \left(2 - \frac{7}{1+2/5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)^t + \frac{7}{1+2/5} \\
p_t &= -3\left(-\frac{2}{5}\right)^t + 5
\end{aligned}
$$

La trayectoria en el tiempo es oscilatoria amortiguada, ya que la base es $\frac{2}{5} < 1$. Así, con el tiempo, el precio de mercado convergerá al nivel de equilibrio 5. Ver figura 9

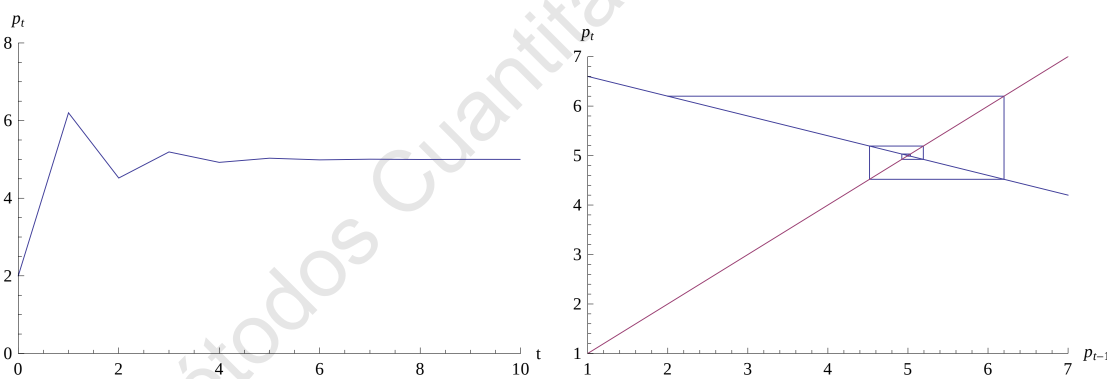

Figura 9: Convergencia oscilatoria

Métodos Cuantitativos 2012

9. Una economía simple se da cuando

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ C_t &= 300 + 0.5Y_{t-1} \\ I_t &= 200 \end{aligned}$$

Analizar la trayectoria temporal de la función del ingreso nacional Y_t, si se sabe que $Y_o = 1,300$

Solución:

Sustituyendo para el consumo y la inversión en la ecuación de ingreso nacional

$$Y_t = 300 + 0.5Y_{t-1} + 200$$

Reordenando esta ecuación en diferencias

$$Y_t - 0.5Y_{t-1} = 500$$

Para el equilibrio intertemporal, se debe tener $Y_t = Y_{t-1} = \bar{Y}$, como ingreso corriente real debe ser igual al esperado. Estos cambian la ecuación a

$$\begin{aligned} \bar{Y} - 0.5\bar{Y} &= 500 \\ 0.5\bar{Y} &= 500 \\ \bar{Y} &= 1,000 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación en diferencias da la trayectoria temporal del ingreso nacional:

$$\begin{aligned} Y_t &= \left(1,300 - \frac{500}{1-0.5}\right)(0.5)^t + \frac{500}{1-0.5} \\ Y_t &= \left(1,300 - \frac{500}{1-0.5}\right)(0.5)^t + \frac{500}{0.5} \\ Y_t &= (1,300 - 1000)(0.5)^t + 1,000 \\ Y_t &= 300(0.5)^t + 1,000 \end{aligned}$$

Como 0.5 es una pequeña fracción, el primer término desaparece con el paso del tiempo. Por lo tanto, el ingreso nacional converge al nivel de equilibrio 1000. Al mismo tiempo, su trayectoria es monótona, ya que 0.5 es un número positivo. Ver figura 10

Métodos Cuantitativos 2012

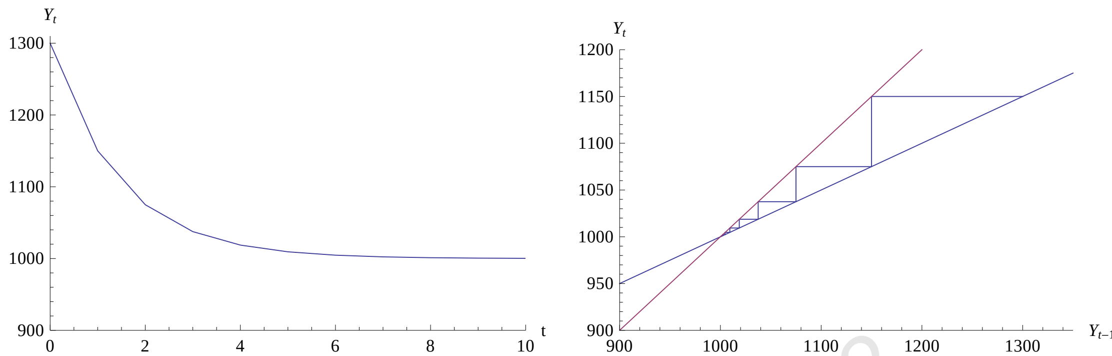

Figura 10: Convergencia monótona

10. Una economía simple se da cuando

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ C_t &= 200 + 0.4Y_{t-1} \\ I_t &= 100 + 0.2Y_{t-1} \end{aligned}$$

Analizar la trayectoria temporal de la función del ingreso nacional Y_t, si se sabe que $Y_o = 950$

Solución:

Sustituyendo en las repectivas expresiones para el consumo y la inversión en la ecuación de ingreso nacional

$$\begin{aligned} Y_t &= 200 + 0.4Y_{t-1} + 100 + 0.2Y_{t-1} \\ Y_t - 0.6Y_{t-1} &= 300 \end{aligned}$$

Para el equilibrio intertemporal, se debe tener $Y_t = Y_{t-1} = \bar{Y}$, como ingreso corriente real debe ser igual al esperado:

$$\begin{aligned} \bar{Y} - 0.6\bar{Y} &= 300 \\ 0.4\bar{Y} &= 300 \\ \bar{Y} &= 750 \end{aligned}$$

Métodos Cuantitativos 2012

Resolviendo la ecuación en diferencias da la trayectoria temporal del ingreso nacional:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \left(950 - \frac{300}{1-0.6}\right)(0.6)^t + \frac{300}{1-0.6} \\
Y_t &= \left(950 - \frac{300}{0.4}\right)(0.6)^t + \frac{300}{0.4} \\
Y_t &= (950 - 750)(0.6)^t + 750 \\
Y_t &= 200(0.6)^t + 750
\end{aligned}$$

Como 0.6 es una pequeña fracción, el primer término desaparece con el paso del tiempo. Por lo tanto, el ingreso nacional converges al nivel de equilibrio 750. Al mismo tiempo, su trayectoria es monótona, ya que 0.6 es un número positivo.

11. Una economía simple se da cuando

$$\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t \\
C_t &= 400 + 0.72Y_{t-1} \\
I_t &= 0.2Y_t
\end{aligned}$$

Expresar y analizar la trayectoria temporal de la función del ingreso nacional Y_t, si $Y_o = 5,500$

Solución:

Sustituyendo directamente en las repectivas funciones en la ecuación de ingreso nacional

$$\begin{aligned}
Y_t &= 400 + 0.72Y_{t-1} + 0.2Y_t \\
0.8Y_t - 0.72Y_{t-1} &= 400 \\
Y_t - 0.9Y_{t-1} &= 500
\end{aligned}$$

Para el equilibrio intertemporal, no debe cambiar el ingreso nacional. Así,

$$\begin{aligned}
\bar{Y} - 0.9\bar{Y} &= 500 \\
0.1\bar{Y} &= 500 \\
\bar{Y} &= 5,000 \text{ dando el equilibrio intertemporal del ingreso nacional.}
\end{aligned}$$

Métodos Cuantitativos 2012

Se resuelve la ecuación en diferencias:

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \left(5,500 - \frac{500}{1-0.9}\right)(0.9)^t + \frac{500}{1-0.9} \\
Y(t) &= (5,500 - 5,000)(0.9)^t + 5,000 \\
Y(t) &= (5,500 - 5,000)(0.9)^t + 5,000 \\
Y(t) &= 500(0.9)^t + 5,000
\end{aligned}
$$

Como 0.9 es una pequeña fracción, el primer término desaparece cuando t tiende a infinito y el ingreso nacional converges al nivel de equilibrio, 5,000. Como 0.9 es ma grande que cero, la trayectoria temporal es monótona.

12. Una economía simple se da cuando

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t \\
C_t &= 1200 + 0.3Y_{t-1} \\
I_t &= 0.4Y_t
\end{aligned}
$$

Expresar y analizar la trayectoria temporal de la función del ingreso nacional Y_t, si $Y_o = 5,000$

Solución:

Sustituyendo el consumo agregado y la inversión agregada en el ingreso nacional

$$
\begin{aligned}
Y_t &= 1200 + 0.3Y_{t-1} + 0.4Y_t \\
0.6Y_t - 0.3Y_{t-1} &= 1,200 \\
Y_t - 0.5Y_{t-1} &= 2,000
\end{aligned}
$$

Para dar el equilibrio intertemporal del ingreso nacional

$$
\begin{aligned}
\bar{Y} - 0.5\bar{Y} &= 2,000 \\
0.5\bar{Y} &= 2,000 \\
\bar{Y} &= 4,000 \quad \text{equilibrio intertemporal del ingreso nacional.}
\end{aligned}
$$

Métodos Cuantitativos 2012

Luego resolveremos la trayectoria temporal del ingreso:

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \left(5,000 - \frac{2,000}{1-0.5}\right)(0.5)^t + \frac{2,000}{1-0.5} \\
Y(t) &= (5,000 - 4,000)(0.5)^t + 4,000 \\
Y(t) &= 1,000(0.5)^t + 4,000
\end{aligned}
$$

Como 0.5 es una pequeña fracción, el primer término desaparece cuando t tiende a infinito y el ingreso nacional converges al nivel de equilibrio, 4,000. La trayectoria temporal es monótona.

13. Una economía simple se da cuando

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t \\
C_t &= \alpha + \beta Y_t \\
I_t &= sY_{t-1}
\end{aligned}
$$

Expresar la trayectoria temporal de la función de ingreso nacional Y_t. Determine el equilibrio intertemporal. ¿Bajo qué condiciones el equilibrio intertemporal es dinámicamente estable?. Es la trayectoria temporal oscilante o monótona?

Solución:

Sustituyendo el consumo y la inversión en la ecuación del ingreso nacional

$$Y_t = \alpha + \beta Y_t + sY_{t-1}$$

Reordenando la ecuación en diferencias en Y

$$
\begin{aligned}
Y_t - \beta Y_t - sY_{t-1} &= \alpha \\
(1-\beta)Y_t - s\beta Y_{t-1} &= \alpha
\end{aligned}
$$

Para el equilibrio intertemporal, tenemos $Y_t = Y_{t-1} = \bar{Y}$, como el ingreso corriente real debe ser igual al esperado. Por lo tanto, tenemos

$$
\begin{aligned}
(1-\beta)\bar{Y} - s\bar{Y} &= \alpha \\
(1-\beta-s)\bar{Y} &= \alpha
\end{aligned}
$$

Métodos Cuantitativos 2012

$\bar{Y} = \frac{\alpha}{1-\beta-s}$, dando el equilibrio intertemporal. Para obtener el ingreso nacional sustentable, necesitamos tener el denominador positivo, es decir, $1-\beta-s>0$ o $\beta+s<1$. Normalizando y resolviendo la ecuación en diferencias,

$$\begin{aligned}
Y_t - \frac{s}{1-\beta}Y_{t-1} &= \frac{\alpha}{1-\beta} \\
Y_t &= \left[Y_o - \frac{\alpha}{(1-\beta)\left(1-\frac{s}{1-\beta}\right)}\right]\left(\frac{s}{1-\beta}\right)^t + \frac{\alpha}{(1-\beta)\left(1-\frac{s}{1-\beta}\right)} \\
Y_t &= \left(Y_o - \frac{\alpha}{1-\beta-s}\right)\left(\frac{s}{1-\beta}\right)^t + \frac{\alpha}{1-\beta-s}
\end{aligned}$$

Como s y $1-\beta$ son positivos, la razón $\frac{s}{1-\beta}$ también es positiva, así que la trayectoria temporal del ingreso nacional es amortiguada. Para asegurar la estabilidad dinámica o convergencia del ingreso nacional al nivel de equilibrio, debemos tener $s<1-\beta$, es decir, $\beta+s<1$ que es igual a la condición necesaria para la validez del ingreso nacional.

14. Las importaciones de un país son un porcentaje del ingreso nacional actual. Por otra parte, las exportaciones dependen tanto de los ingresos corrientes y los ingresos del período anterior de tal manera que

$$\begin{aligned}
M_t &= mY_t & 0<m<1 \\
X_t &= \alpha Y_t + \beta Y_{t-1} & 0<\alpha,\beta<1
\end{aligned}$$

Encontrar la trayectoria temporal de la renta nacional total que asegura el comercio exterior equilibrado.

Solución:

Para el comercio exterior equilibrado, debemos igualar las exportaciones con las importaciones:

$$\begin{aligned}
X_t &= M_t \\
\alpha Y_t + \beta Y_{t-1} &= mY_t \\
(\alpha - m)Y_t + \beta Y_{t-1} &= 0 \\
(\alpha - m)Y_t &= -\beta Y_{t-1}
\end{aligned}$$

Métodos Cuantitativos 2012

Resolviendo la ecuación en diferencias, se obtiene que el ingreso nacional se relaciona positivamente con la propensión marginal al consumo y negativamente a la propensión marginal a importar m:

$$Y_t = Y_o \left(\frac{\beta}{m - \alpha} \right)^t$$

15. En el mercado de dinero, el gobierno fija la oferta de dinero como un porcentaje de incidencia de la renta nacional desde el período anterior. Además, la demanda de transacciones de dinero depende de los ingresos corrientes de tal manera que

$$\begin{aligned} M_t &= sY_{t-1} & \qquad 0 < \beta < s < 1 \\ L_t &= \alpha + \beta Y_t & \alpha > 0 \end{aligned}$$

Dar del ingreso nacional global que garantice el equilibrio en el mercado de dinero, y comprobar si la trayectoria en el tiempo de la renta nacional es dinámicamente estable y oscilante.

Solución:

Para que haya equilibrio en el mercado monetario, debemos tener la demanda de dinero igual a la oferta de dinero:

$$\begin{aligned} M_t &= L_t \\ sY_{t-1} &= \alpha + \beta Y_t \\ \beta Y_t - sY_{t-1} &= -\alpha \\ Y_t - \frac{s}{\beta} Y_{t-1} &= -\frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Para el equilibrio intertemporal, necesitamos que $Y_t = Y_{t-1} = \bar{Y}$. Así,

$$\begin{aligned} \beta \bar{Y} - s\bar{Y} &= -\alpha \\ \bar{Y} &= \frac{\alpha}{s - \beta} \end{aligned}$$

Métodos Cuantitativos 2012

Resolviendo la ecuación en diferencias que da la trayectoria temporal del ingreso nacional,

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \left[Y_o + \frac{\alpha}{\beta\left(1-\frac{s}{\beta}\right)}\right]\left(\frac{s}{\beta}\right)^t - \frac{-\alpha}{\beta\left(1-\frac{s}{\beta}\right)} \\
Y_t &= \left(Y_o + \frac{\alpha}{\beta - s}\right)\left(\frac{s}{\beta}\right)^t - \frac{-\alpha}{\beta - s} \\
Y_t &= \left(Y_o - \frac{\alpha}{s-\beta}\right)\left(\frac{s}{\beta}\right)^t + \frac{-\alpha}{s-\beta}
\end{aligned}
$$

Dado que $0 < \beta < s < 1$, la trayectoria temporal de los ingresos es monótona y divergente, ya que $\frac{s}{\beta} > 1$.

16. El ahorro en una economía representan un porcentaje de la renta actual, determinada por la propensión marginal a ahorrar s, mientras que las empresas deciden invertir una parte de los ingresos obtenidos en el período previo. Así,

$$
\begin{aligned}
S_t &= sY_t \qquad\qquad 0 < s, \beta < 1 \\
I_t &= \beta Y_{t-1}
\end{aligned}
$$

Determinar la trayectoria temporal del ingreso nacional que garantice el equilibrio en el mercado de capitales. ¿Es la trayectoria en el tiempo oscilatoria?

Solución:

Para el equilibrio, debemos tener el ahorro igual a la inversión. Por lo tanto, sustituimos

$$
\begin{aligned}
S_t &= I_t \\
sY_t &= \beta Y_{t-1} \\
sY_t - \beta Y_{t-1} &= 0
\end{aligned}
$$

Normalizando la ecuación en Y que obtenemos

$$Y_t - \frac{\beta}{s} Y_{t-1} = 0$$

Métodos Cuantitativos 2012

La trayectoria temporal del ingreso nacional es

$$Y_t = (Y_o - 0)\left(\frac{\beta}{s}\right)^t + 0$$

$$Y_t = Y_o\left(\frac{\beta}{s}\right)^t$$

Como $\frac{\beta}{s} > 0$ y $s > \beta$, la trayectoria temporal del ingreso nacional es monótona.

17. El ahorro en una economía depende de los ingresos corrientes, mientras que las empresas deciden invertir una parte de los ingresos obtenidos en el período anterior, así como en el período actual. Así

$$S_t = sY_t \qquad\qquad 0 < \alpha, \beta, s < 1$$
$$I_t = \alpha Y_t + \beta Y_{t-1}$$

¿Bajo qué condiciones es la trayectoria temporal de los ingresos nacionales oscilatoria?

Solución:

Para el equilibrio, igualamos el ahorro con la inversión:

$$S_t = I_t$$
$$sY_t = \alpha Y_t + \beta Y_{t-1}$$
$$(s-\alpha)Y_t - \beta Y_{t-1} = 0$$

La normalización de la ecuación para el ingreso nacional es

$$Y_t - \frac{\beta}{s-\alpha}Y_{t-1} = 0$$

La trayectoria temporal del ingreso nacional es

$$Y_t = (Y_o - 0)\left(\frac{\beta}{s-\alpha}\right)^t + 0$$

$$Y_t = Y_o\left(\frac{\beta}{s-\alpha}\right)^t$$

Como $\frac{\beta}{s-\alpha} < 0$, la trayectoria temporal del ingreso nacional es oscilatoria si $\alpha > s$.

Métodos Cuantitativos 2012