# 5. Integral definida e indefinida

**Introducción**

Hemos analizado como encontrar la derivada de una función. Sin embargo, muchos problemas exigen como recuperar una función a partir de su derivada conocida. Por ejemplo, supongamos que una función de costo marginal $C'(x)$ se da, es decir, se sabe cómo el costo está cambiando de acuerdo a la cantidad producida $x$, y estamos en busca de la correspondiente función de costos $C(x)$. Esta función se puede encontrar por medio de la integración, que es lo contrario al proceso de diferenciación. De manera más general, queremos encontrar una función $F$ a partir de su derivada $f$. Si tal función $F$ existe, se llama una antiderivada de $f$ y al conjunto de todas las antiderivadas de $f$ se le llama la integral indefinida de $f$.

**Antiderivadas**

**Definición 5.1.** Sea $f$ una función. Una antiderivada de $f$ es una función $F$ diferenciable tal que $F'(x) = f(x)$.

Si $F$ y $G$ son primitivas de $f$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$, tal que:

$$F(x) = G(x) + c.$$

## 5.1. Integral indefinida.

Las antiderivas de una función $f$ se les llama integrales indefinidas de la función $f$ y se denotan: Si $F$ es una primitiva de $f$,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

### 5.1.1. Reglas de integración.

1. $\int (c \cdot f(x))\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$

2. $\int dx = x + c$

3. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$

4. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$

5. $\int e^x dx = e^x + c$

6. $\int sen\, x dx = -cos\, x + c$

7. $\int cos\, x dx = sen\, x + c$

8. $\int tg\, x\, dx = -\ln(cos\, x) + c$

9. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int\ f(x)dx + \int g(x)\, dx$

10. $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int\ f(x)dx - \int g(x)\, dx$

**Ejemplo 48.**

$$\begin{aligned}
\int (x^2 - 2x + 5)\, dx &= \int x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx \\
&= \int x^2\, dx - 2\int x\, dx + 5\int 1\, dx \\
&= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.
\end{aligned}$$



## 5.2. Técnicas de integración.

- **Sustitución o Cambio de Variable**:

$$\int f(\mu)\, d\mu = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt,$$

donde $\mu = \varphi(x)$.

**Ejemplo 49.** Evaluar:

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx.$$

**Solución:**

Sean:

$$u = x^2 - 9x + 1,$$
$$du = (2x-9)\,dx.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}}\\ &= \int u^{-\frac{1}{2}}\,du\\ &= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C\\ &= 2u^{1/2} + C\\ &= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C.\end{aligned}$$

**Ejemplo 50.** Evaluar:

$$\int \frac{2}{2x+1}\,dx.$$

**Solución**

Sean:

$$u = 2x+1$$
$$du = 2\,dx.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{2x+1}\,dx &= \int \frac{du}{u}\\ &= \ln u\\ &= \ln(2x+1) + C\end{aligned}$$

**Ejemplo 51.** Evaluar:

$$\int e^{3x}\,dx.$$

**Solución**

Sean:

$$u = 3x$$
$$du = 3\,dx.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\,dx &= \frac{1}{3}\int e^{u}\,du\\ &= \frac{e^{u}}{3}\\ &= \frac{e^{3x}}{3}+C\end{aligned}$$

**Ejemplo 52.** Evaluar:

$$\int sen(5x)\,dx.$$

**Solución**

Sean:

$$u = 5x$$
$$du = 5\,dx.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int sen(5x)\,dx &= \frac{1}{5}\int sen\,u\,du\\ &= -\frac{\cos u}{5}\\ &= -\frac{\cos(5x)}{5}+C\end{aligned}$$

**Ejemplo 53.** Evaluar:

$$\int 3\cos(4x)\,dx.$$

**Solución**

Sean:

$$\begin{aligned} u &= 4x \\ du &= 4\,dx. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int 3\cos(4x)\,dx &= \frac{3}{4}\int \cos u\,du \\ &= \frac{3}{4}\cos u \\ &= \frac{3}{4}\cos(4x) + C \end{aligned}$$

- **Por Partes**: Sean $f, g$ funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

En ocasiones es más fácil recordar la fórmula si la escribimos en forma diferencial. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$. Utilizando la regla de sustitución, la fórmula de integración por partes se transforma en:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

**Ejemplo 54.** Evaluar la integral:

$$\int xe^x\,dx.$$

Hacemos:

$$\begin{aligned} u &= x, & dv &= e^x\,dx, \\ du &= dx, & v &= e^x\,dx. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x + e^x = e^x(x-1) + C$$

**Ejemplo 55.** Evaluar la integral:

$$\int x\cos x\,dx.$$

Hacemos:

$$\begin{aligned} u &= x, & dv &= \cos x\,dx, \\ du &= dx, & v &= \operatorname{sen} x\,dx. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

**Problema 14.** El costo marginal, como la función de las unidades producidas $x$, esta dado por $C' = 10 + 40x - 12x^2$. Hallar la función de costo total, sabiendo que \$100 es el costo fijo.

**Solución al problema 14**

Para determinar la función de costo total se calcula la integral indefinida siguiente:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (10 + 40x - 12x^2)\,dx \Rightarrow \\ C(x) &= 10\int dx + 40\int x\,dx - 12\int x^2\,dx \Rightarrow \\ C(x) &= 10x + 40\frac{x^2}{2} - 12\frac{x^3}{3} + k \Rightarrow \\ C(x) &= 10x + 20x^2 - 4x^3 + k \end{aligned}$$

Para determinar $k$ se utiliza el dato del costo fijo, vale decir: si $x = 0$, entonces $C(0) = 100$.

Por lo tanto: $C(0) = 10\cdot 0 + 20\cdot 0^2 - 4\cdot 0^3 + k \Rightarrow \quad 100 = k$

Luego: $C(x) = 10x + 20x^2 - 4x^3 + 100$.

**Problema 15.** Una empresa advierte que un incremento en el precio de \$1 provoca una caída en las ventas de 5 unidades. Además, la empresa puede vender \$100 unidades a un precio de \$10 cada una. Encontrar la función de demanda de la empresa.

**Solución al problema 15**

Sea $q$ es la cantidad demandada con respecto al precio, entonces la función de demanda es

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dp} &= -5 \\ dq &= -5\,dp \\ \int dq &= -5\int dp \\ q &= -5p + k \end{aligned}$$

Entonces, para encontrar el valor de $k$, tenemos que

$$\begin{aligned} 100 &= -5(10) + k \\ 100 &= -50 + k \\ k &= 100 + 50 = 150 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de demanda es $q = -5p + 150$.

**Problema 16.** La propensión marginal al consumo para México está dada por:

$$\frac{dC}{dY} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3Y}},$$

donde el consumo $C$ es una función del ingreso nacional $Y$. En esta caso $Y$ se expresa en miles de millones de pesos. Determinar la función de consumo para México si se sabe que el consumo es de 10 mil millones de pesos ($C = 10$) cuando $Y = 12$.

**Solución al problema 16:** Como la propensión marginal al consumo es $\frac{dC}{dY}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
C &= \int \frac{dC}{dY} dY \\
&= \int \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3Y}} \right) dY \\
&= \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2} \int (3Y)^{-\frac{1}{2}}\, dY \\
&= \frac{3}{4}Y - \left( \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \int (3Y)^{-\frac{1}{2}} [3\, dY] \\
&= \frac{3}{4}Y - \frac{\sqrt{3Y}}{3} + C_1
\end{aligned}$$

Como $C = 10$ cuando $Y = 12$, de la última ecuación se sigue que $C_1 = 3$, por tanto la función de consumo es:

$$C = \frac{3}{4}Y - \frac{\sqrt{3Y}}{3} + 3.$$