ÁLGEBRA LINEAL

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMIA

México, D.F., 10 de marzo de 2010

Contenido

1. Espacios vectoriales

1.1. Espacio y subespacio vectorial

Definición 1.1 *Sea K un campo. Un espacio vectorial sobre K, o también llamado un K- espacio vectorial, consta de lo siguiente:*

1. *Un conjunto V, cuyos elementos se llaman vectores.*
2. *Una operación binaria en V, llamada suma de vectores, denotada por $+$, y que cumple lo siguiente:*
   a) *Para todos $x, y \in V$, se cumple que $x+y = y+x$ (conmutatividad).*
   b) *Para todos x, y y $z \in V$, se cumple que $(x+y)+z = x+(y+z)$ (asociatividad).*
   c) *Existe un elemento en V llamado cero y denotado por 0 tal que $0 + x = x$, pata todo $x \in V$ (existencia del neutro aditivo).*
   d) *Para todo $x \in V$ existe un elemento $-x$ tal que $x + (-x) = 0$ (existencia de elementos inversos).*
3. *Una operación binaria en V, llamada producto de vectores, denotada por $\cdot$, y que cumple lo siguiente:*
   a) *Para todo $x \in V$, se tiene que $1\,x = x$, con $1 \in K$.*
   b) *Para todo $x \in V$ y para todo λ y $\mu \in k$, se tiene que $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.*
   c) *El producto por escalar es distributivo, es decir,*

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$
$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

   para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$

Definición 1.2 *Al conjunto V con la suma y el producto por escalar se le llama* ***espacio vectorial sobre*** *K.*

Ejemplo 1 *La operación de suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^3$ se formulan como:*

1. *Dados* (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, *se define:*

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

2. *Dados* $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *y* $c \in \mathbb{R}$, *se define:*

$$c\ (x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$$

Entonces $\mathbb{R}^3$ *con la suma y producto definidos anteriormente es un espacio vectorial. Para esto verifiquemos que* $\mathbb{R}^3$ *con la operación* $+$ *cumple las siguientes propiedades*

a) *Para todos* $x, y \in \mathbb{R}^3$, *se cumple que* $x + y = y + x$ *(conmutatividad). Sean* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *y* $y = (y_1, y_2, y_3)$, *entonces*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = y + x$$

b) *Para todos* $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, *se cumple que* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(asociatividad). Sean* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, *y* $z = (z_1, z_2, z_3)$, *entonces*

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)) \\
&= (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)) \\
&= x + (y + z)
\end{aligned}$$

c) *Existe un elemento en* $\mathbb{R}^3$ *llamado cero y denotado por 0 tal que* $0 + x = x$, *pata todo* $x \in \mathbb{R}^3$ *(existencia del neutro aditivo). Sea* $0 = (0, 0, 0)$ *entonces si* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *tenemos*

$$0 + x = (0, 0, 0) + (x_1, x_2, x_3) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$$

d) *Para todo* $x \in \mathbb{R}^3$ *existe un elemento* $-x$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(existencia de elementos inversos). Sea* $x \in \mathbb{R}^3$, *con* $x = (x_1, x_2, x_3)$, *definimos el inverso de* x *por* $-x = (-x_1, -x_2, -x_3)$, *entonces tenemos*

$$\begin{aligned}
x + (-x) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) \\
&= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3)) \\
&= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) = (0, 0, 0) = 0
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\mathbb{R}^3$ con la operación producto $\cdot$ cumple

a) Para todo $x \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $1\,x = x$, con $1 \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}^3$,

$$1 \cdot x = 1 \cdot (x_1, x_2, x_3) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$$

b) Para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y para todo λ y $\mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$. Sea $x \in \mathbb{R}^3$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}\lambda(\mu x) &= \lambda(\mu(x_1, x_2, x_3)) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \lambda(\mu x_3)) \\ &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, (\lambda\mu)x_3) = (\lambda\mu)x\end{aligned}$$

c) El producto por escalar es distributivo, es decir,

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x, \\ \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y,\end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$.

Sea $x \in \mathbb{R}^3$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2, x_3) &= ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, (\lambda + \mu)x_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \lambda x_3 + \mu x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = \\ &= \lambda x + \mu x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = \lambda \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \lambda(x_3 + y_3)) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3) = \\ &= \lambda x + \lambda y.\end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$

Definición 1.3 *Sea W un subconjunto no vacío de V, se dice que W es un* ***subespacio vectorial*** *de V, si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todos x y $y \in W$, se tiene que $x + y \in W$, es decir, W es cerrado bajo la suma.*

2. *Para todo $x \in W$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in W$, es decir W es cerrado bajo producto por escalar.*

Ejemplo 2 *Sea*

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$$

es decir, $x \in W$, entonces $x = (x_1, x_2, 0)$. Entonces W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Para esto verifiquemos que si $x, y \in W$, entonces $x + y \in W$. Como $x, y \in W$, $x = (x_1, x_2, 0)$ y $y = (y_1, y_2, 0)$, luego $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$. Ahora veamos que si $x \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in W$, lo cual se sigue de que si $x = (x_1, x_2, 0)$, entonces $\lambda x = \lambda(x_1, x_2, 0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) \in W$.

Ejemplo 3 *Sea A una matriz 3 por 2. Entonces*

a) *el espacio columna de A, el cual es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A y se le denota por $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$*

b) *el espacio nulo de A, que consta de todos los vectores x tales que $Ax = 0$ y se le denota por $N(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$*

c) *el espacio renglón de A, generado por los renglones de A, el cual es el espacio columna de A^T y se le denota por $C(A^T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$*

d) *el espacio nulo izquierdo de A el cual es espacio nulo de A^T, denotado por $N(A^T)$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.*

TAREA: ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

1. *Demostrar que el conjunto* V *de matrices* 3×3*, es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *con las operaciones suma y producto por escalar usuales, es decir:*

   Si $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ *matrices 3 por 3. La operación* ***suma*** *de* A *con* B *es:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

   y producto de una matriz por un escalar:

$$\lambda \cdot A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$$

2. *Una matriz (cuadrada) 3* $\times 3$ $[a_{ij}]$ *sobre* $\mathbb{R}$ *es simétrica si* $a_{ij} = a_{ji}$ *para todo* i, j*. Demostrar que las matrices simétricas forman un subespacio del espacio de las matrices* 3×3*.*

3. *Sea* V *el conjunto de todas las matrices* 2×2 *sobre* $\mathbb{R}$*. Demostrar que* V *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *con las operaciones usuales de suma y producto por escalar usuales. Sea* W *el subconjunto de* V *que consta de las matrices de la forma*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix}$$

   con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$*. Demostrar que* W *es un subespacio vectorial de* V*.*

4. *Demostrar que los siguientes conjuntos de vectores* $\alpha = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *son subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$

   a) *Todos los* α*, tales que* $x_1 \geq 0$*.*

   b) *Todos los* α*, tales que* $x_1 + 3x_2 = x_3$*.*

1.2. Combinacion lineal de vectores, dependencia e independencia lineal

5. ***Definición 1.4*** *Un vector $\beta \in V$, se dice* ***combinación lineal*** *de los vectores $\alpha_1, ..., \alpha_n \in V$, si existen escalares $a_1, ..., a_n \in K$, tales que:*

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i.$$

Ejemplo 4 *El vector* $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ *en* $\mathbb{R}^2$ *es combinación lineal de los vectores*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ya que:

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Definición 1.5 *Sea S es cualquier colección de vectores de V.* ***El subespacio generado*** *por S se define como*

$$L(S) = \{\sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i \mid a_i \in K, \alpha_i \in S \ y \ k = 1, 2, 3, ...\}$$

Cuando $L(S) = V$, decimos que S genera a V

Definición 1.6 *Un subconjunto S de V se dice* ***linealmente dependiente****, si existen vectores distintos $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de S y escalares $a_1, ..., a_n \in K$, no todos cero, tales que:*

$$a_1 \alpha_1 + \cdots + a_n \alpha_n = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice ***linealmente independiente****. Si el conjunto S solo tiene un número finito de vectores $\alpha_1, ..., \alpha_n$, se dice a veces que los $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son dependientes (o independientes), en vez de decir que S es dependiente (o independiente).*

Ejemplo 5 *Los siguientes vectores en* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$

son linealmente independientes.

Solución*: Sea*

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

de lo anterior obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_2 &= 0 \\ 3a_1 + 5a_2 &= 0 \end{aligned}$$

el cual tiene como solución: $a_1 = 0$ *y* $a_2 = 0$.

Ejemplo 6 *Los vectores*

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes. Esto se sigue de

$$-2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Ejemplo 7 *Los vectores* $(1,2,3)$ *y* $(1,1,0)$ *son linealmente independientes en* $\mathbb{R}^3$.

Sea:

$$a_1 \cdot (1,2,3) + a_2 \cdot (1,1,0) = (0,0,0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 &= 0 \\ 3a_1 &= 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que el sistema de ecuaciones anterior tiene como única solución $a_1 = a_2 = 0$.

Ejemplo 8 *Demostrar*

(a) *Sí* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ *son linealmente dependientes.*

(b) *Sí* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *son linealmente independientes.*

Solución:

(a) *Se ve que* $\alpha_2 = 2\alpha_1$*, luego* $2\alpha_1 - \alpha_2 = 0$*. Tomando* $a_1 = 2$ *y* $a_2 = -1$ *se obtiene* $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$*, lo cual prueba que* a_1 *y* a_2 *son linealmente dependientes.*

(b) *La ecuación* $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$*, da lugar al sistema*

$$\begin{aligned} 3a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución única $a_1 = a_2 = 0$*. Por tanto* α_1 *y* α_2 *son linealmente independientes.*

1.3. Base y dimensión

Definición 1.7 *Una **base** de* $\mathbb{R}^n$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes de* $\mathbb{R}^n$ *y que genera el espacio* $\mathbb{R}^n$*.*

Teorema 1.8 *Sea* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es una base.*
2. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es linealmente independiente.*
3. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *genera a* $\mathbb{R}^n$*.*

Ejemplo 9 *Los vectores*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son una base de $\mathbb{R}^2$. *Si*

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces de la combinación lineal anterior, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

El cual tiene como única solución: $a_1 = a_2 = 0$. *Ahora, sea* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *veamos que existen* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *tales que* $a_1 \cdot (1, 1) + a_2 \cdot (-1, 1) = (x, y)$. *Es fácil ver que* $a_1 = \frac{x+y}{2}$ *y* $a_2 = \frac{y-x}{2}$. *De lo anterior se sigue que los vectores* $(1, 1)$ *y* $(-1, 1)$ *son linealmente independientes y que generan a* $\mathbb{R}^2$, *por lo tanto son una base de* $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.9 *Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial* V *contiene el mismo número de vectores. Este número que es compartido por todas las bases y expresa el número de grados de libertad del espacio, es la dimensión de* V.

Ejemplo 10 *En* $\mathbb{R}^n$, *sean* $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ *donde el 1 aparece en el i-ésimo lugar y todas las otras coordenadas son cero. El conjunto* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *es una base de* $\mathbb{R}^n$ *llamada la **base canónica**, por lo tanto la dimensión del espacio* $\mathbb{R}^n$ *es* n.

Ejemplo 11 *Si* A *es una matriz 3 por 2 con rango* r, *entonces:*

a) La dimensión del espacio columna $C(A)$ *es el rango* r.

b) La dimensión del espacio nulo de A *es* $2 - r$.

c) La dimensión del espacio renglón $C(A^T)$ *es también* r.

d) La dimensión del espacio nulo izquierdo $N(A^T) = 3 - r$.

TAREA: BASES DE ESPACIOS VECTORIALES

1. *Decida la dependencia o independencia en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *de*
    a) *los vectores* $(1,1)$ *y* $(1,-2)$.
    b) *los vectores* $(1,-3,2),(2,1,-3)$ *y* $(-3,2,1)$.
    c) *los vectores* $(1,3,2),(2,1,3)$ *y* $(3,2,1)$.
2. *Demuestre que el siguiente subconjunto de las matrices* 2×2
$$\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$
es linealmente independiente
3. *Demostrar que los siguientes vectores forman una base para* $\mathbb{R}^2$.
    a)
    $$\alpha_1=(1,1),\quad \alpha_2=(1,-1)$$
    b)
    $$\alpha_1=(-1,1),\quad \alpha_2=(-1,0)$$
4. *Demostrar que los siguientes vectores forman una base para* $\mathbb{R}^3$.

a)
$$\alpha_1=(1,0,1),\quad \alpha_2=(1,1,0),\quad \alpha_3=(0,1,1)$$
b)
$$\alpha_1=(1,0,-1),\quad \alpha_2=(1,2,1),\quad \alpha_3=(0,3,-2)$$
c)
$$\alpha_1=(1,0,-1),\quad \alpha_2=(1,1,1),\quad \alpha_3=(1,0,0)$$

5. *Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios de* $\mathbb{R}^4$
    a) *Todos los vectores cuyas componentes son iguales.*
    b) *Todos los vectores tales que la suma de sus componentes es cero.*
6. *Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios de matrices 3 por 3:*

a) Todas las matrices diagonales

b) Todas las matrices simétrica

c) Todas las matrices sesgadas simétricas ($A^T = -A$)

7. *Encontrar la dimensión y una base para la siguiente matriz.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. *Encontrar la dimensión y una base para la siguiente matriz.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

9. *Sea V el espacio vectorial de las matrices 2×2 sobre el campo $\mathbb{R}$. Demuestre que V tiene dimensión 4 encontrando una base de V que tenga cuatro elementos.*

1.4. Transformación lineal

Definición 1.10 *Sean V y W dos espacios vectoriales. Una transformación lineal es una función $T : V \to W$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$, para todos $\alpha, \beta \in V$.*

2. *$T(r\alpha) = rT(\alpha)$, para todo escalar $r \in \mathbb{R}$ y para todo $\alpha \in V$.*

Un operador lineal sobre V es una transformación lineal de V en si mismo.

Ejemplo 12 *La función $0 : V \to W$ definida por $0(v) = 0$ que mapea todos los elementos del espacio vectorial V al elemento cero del espacio W, es claramente una función lineal, llamada la transformación cero.*

Ejemplo 13 *La función $1V : V \to V$ dada por $1V(v) = v$ es un operador lineal denominado operador identidad sobre V.*

Ejemplo 14 *Si $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$ las trasformaciones lineales entre V y W corresponden a las matrices A de $m \times n$. En particular, si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \textit{entonces}$$

$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_A(x) = Ax$ es lineal, dada por:

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + z \end{pmatrix}$$

Teorema 1.11 *Si $T : V \to W$ es una tranformación lineal, y si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son vectores de V, entonces dados los escalares $a_1, a_2, ..., a_n$,*

$$T(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n) = a_1T(\alpha_1) + \cdots + a_nT(\alpha_n).$$

Teorema 1.12 *Sea $T : V \to W$ una tranformación lineal, si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es una base para V, y si $T(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, 2, ...n$ entonces para cualquier vector $\alpha \in V$, $T(\alpha)$ está determinada y $T(\alpha) = a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son escalares tales que $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$.*

Teorema 1.13 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, sea $\alpha_1, ..., \alpha_n$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial y $\beta_1, ..., \beta_n$ vectores cualesquiera en W. Entonces existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que*

$$T(\alpha_j) = \beta_j. \quad j = 1, ..., n.$$

Ejemplo 15 *Consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ formada por lo vectores $\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (3, 4)$. Por el Teorema 1.13 existe una transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$\begin{aligned} T(\alpha_1) &= (3, 2, 1) \\ T(\alpha_2) &= (6, 5, 4) \end{aligned}$$

Encontremos $T(1, 0)$. Si $(1, 0) = c_1(1, 2) + c_2(3, 4)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces $c_1 = -2$ y $c_2 = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} T((1, 0)) &= T(c_1(1, 2) + c_2(3, 4)) \\ &= c_1 T(1, 2) + c_2 T(3, 4) \\ &= -2(3, 2, 1) + (6, 5, 4) \\ &= (0, 1, 2). \end{aligned}$$

1.5. Nucleo e imagen

Definición 1.14 *Sea $T : V \to W$ una tranformación lineal. Definimos el núcleo de T como el conjunto $N_T = \{\, \alpha \in V \mid T(\alpha) = 0\}$. La imagen de T, denotada R_T, se define como $R_T = \{\beta \in W \mid \text{existe un}\, \alpha \in V\, \text{y satisface}\, T(\alpha) = \beta\}$.*

Ejemplo 16 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (-x + 3y + z, y + 2z)$. Entonces $(x, y, z) \in N_T$ si y solo si*

$$\begin{aligned} -x + 3y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

La forma escalonada reducida de la matriz de los coeficientes de este sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el núcleo de T, $N_T = \{(-5z, -2z, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en la teoría de espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema 1.15 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, $T : V \to W$ una tranformación lineal, entonces la siguiente ecuación se cumple:*

$$dim(V) = dim(N_T) + dim(R_T)$$

1.6. Matriz de una tranformación lineal

Sabemos que una tranformación lineal queda completamente determinada en una base. Si $T : V \to W$ es una tranformación lineal, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ son bases de V y W respectivamente, entonces para cada $j = 1, ..., n$, $T(\alpha_j)$ se representa como combinación linel de los elementos de la base $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$, es decir. existen escalares $a_{1j}, ..., a_{mj}$, únicos, tales que:

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$$

Los escalares a_{ij} solamente dependen de la tranformación lineal y de las bases elegidas, con ellos formamos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 17 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$. Entonces la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas es*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 18 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x + y, x - y)$. Entonces la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas es*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.7. Cambio de base

Teorema 1.16 *Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F, y W un espacio vectorial de dimensión n sobre F. Sean B una base ordenada de V y B' una base ordenada de W. Para cada transformación lineal T de V en W, existe una matriz $m \times n$, A, cuyos elementos pertenecen a F, tal que*

$$[T\alpha]_{B'} = A[\alpha]_B$$

Para todo vector $\alpha \in V$.

Definición 1.17 *La matriz A se llama* ***la matriz asociada a la transformación T respecto a las bases $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$.***

Ejemplo 19 *Sea B la base de $\mathbb{R}^2$ formada por lo vectores $\alpha_1 = (1,1)$ y $\alpha_2 = (3,-2)$. Por el Teorema 1.13, existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\alpha_1) = (4,5)$ y $T(\alpha_2) = (6,-1)$. Encontremos la matriz A asociada a T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Para determinar A, debemos determinar $T(e_1) = (a,b)$ y $T(e_2) = (c,d)$. De las ecuaciones*

$$\begin{aligned} T(1,1) &= T(e_1) + T(e_2) \text{ y} \\ T(3,-2) &= 3T(e_1) - 2T(e_2) \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} (4,5) &= (a+c, b+d) \\ (6,-1) &= (3a-2c, 3b-2d) \end{aligned}$$

de donde se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+c &= 4 \\ b+d &= 5 \\ 3a-2c &= 6 \\ 3b-2d &= -1 \end{aligned}$$

de cuya solución se sigue que $T(e_1) = \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)$ y $T(e_2) = \left(\frac{6}{5}, \frac{16}{5}\right)$, por lo tanto la matriz asociada a T respecto a la base canónica es:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la expresión que define a $T(x,y)$ se obtiene del siguiente producto de matrices:

$$AX = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{16}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5}x + \frac{6}{5}y \\ \frac{9}{5}x + \frac{16}{5}y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $T(x,y) = (\frac{14}{5}x + \frac{6}{5}y, \frac{9}{5}x + \frac{16}{5}y)$.

Teorema 1.18 *(Cambio de base). Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que A es la matriz asociada a T respecto a bases dadas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ en V y $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ en W. Si las bases anteriores se cambian a nuevas bases $\{\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n\}$ y $\{\beta'_1, ..., \beta'_n\}$, con matrices de cambio de base P y Q respectivamente y B es la matriz asociada a T en estas nuevas bases, entonces se tiene:*

$$B = Q^{-1}AP.$$

Corolario 1.19 *Si $T : V \to V$ es una transformación lineal, $\alpha_i = \beta_i$ y $\alpha'_i = \beta'_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Entonces la matriz asociada a T respecto a la nueva base es $P^{-1}AP$, P la matriz de cambio de base.*

Ejemplo 20 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x+y-z, 2x-y+3z, x-z)$. Para encontrar la matriz asociada a T respecto a la base $\{(1,2,0), (1,-1,0), (1,1,1)\}$, primero encontramos la matriz asociada a T respecto a la base canónica, la cual se obtiene evaluando a T en los vectores canónicos. Tenemos que $T(1,0,0) = (1,2,1)$, $T(0,1,0) = (1,-1-0)$ y $T(0,0,1) = (-1,3,-1)$, por lo que la matriz asociada a T respecto de la base canónica es:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aplicando el Teorema anterior obtenemos que la matriz asociada a T respecto de la base $\{(1,2,0),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ es:

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 5 & -4 & -2\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

TAREA: TRANSFORMACIONES LINEALES

1. *¿Cuáles de las siguientes funciones T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son tranformaciones lineales?*

   (a) $T(x, y) = (1 + x, y)$

   (b) $T(x, y) = (y, x)$

   (c) $T(x, y) = (x^2, y)$

   (d) $T(x, y) = (x - y, 0)$

2. *¿ Existe una tranformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?*

3. *Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, encuentre su núcleo y rango*

   a) *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x - y, 3x + 2y)$*

   b) *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$*

   c) *Sea $T_A : V \to V$, dada por $T_A(X) = AX$, con V el espacio vectorial de las matrices 2×2, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$*

4. *Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por*

$$T(x, y) = (-y, x)$$

   a) *¿ Cuál es la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.*

   b) *¿Cuál es la matriz de T respecto de la base ordenada en $\mathbb{R}^2$ formada por los vectores $\alpha_1 = (1, 2)$ y $\alpha_2 = (1, -1)$?*

5. *Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x, y, z) = (x + y, 2z - x).$$

   Si B es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$ y B' es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^2$, ¿ cuál es la matriz de T respecto al par de bases B, B'.

6. *Sea* T *el operador lineal en* $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$$

   a) *¿ Cuál es la matriz de* T *en la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

   b) *¿Cuál es la matriz de* T *respecto de la base ordenada en* $\mathbb{R}^3$ *formada por los vectores* $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (-1, 2, 1)$ *y* $\alpha_3 = (2, 1, 1)$*?.*

Referencias

[1] *Gilbert Strang, 2007. Algebra Lineal y sus aplicaciones, Thomson. 4a edición.*

[2] *Darell A. Turkington, 2007. Mathematical Tools for Economics, Blackwell Publishing.*

[3] *Mike Rosser, 2003. Basic Mathematics for Economicsts, Routledge. Routledge. 2da. edición.*

[4] *Nakos George, 2004. Algebra Lineal con aplicaciones. Internacional Thomson Editores. 2a Ed, México.*