2.4. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un conjunto de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el administrador de una fábrica establece un plan de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas de tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II. De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Suponga que hacemos que x igual al número de artículos del modelo A fabricados cada día, y igual al número de artículos del modelo B. Entonces éstos requieren de $4x + 5y$ piezas del tipo I y $9x + 14y$ piezas del tipo II. Como están disponibles 335 y 850 piezas del tipo I y II, respectivamente tenemos:

$$4x + 5y = 335$$
$$9x + 14y = 850$$

A este conjunto de ecuaciones le llamamos **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales ambas ecuaciones sean verdaderas de manera simultánea. Estos valores se llaman soluciones del sistema.

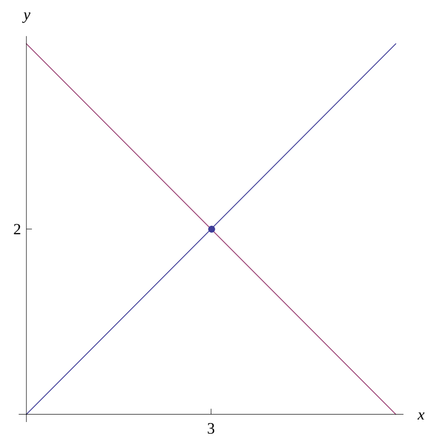
Como las ecuaciones son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamemoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen las ecuaciones de esa línea; esto es, hacen la ecuación verdadera, Por tanto, las coordendas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Estos significa que un punto de intersección da una solución del sistema.

Si L_1 y L_2 se dibujan en el mismo plano, existen tres posibles situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en exactamente un punto, digamos (x_0, y_0). Por tanto, el sistema tiene solución $x = x_0$ y $y = y_0$.

   Ejemplo 28 *El sistema de ecuaciones tiene solución unica*

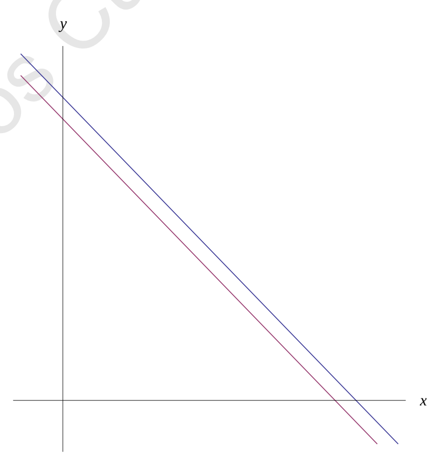
$$x - y = 1$$
$$x + y = 5$$



2. L_1 y L_2 pueden ser parelelas y no tener puntos en común. En este caso no existe solución.

Ejemplo 29 *Sistema de ecuaciones sin solución*

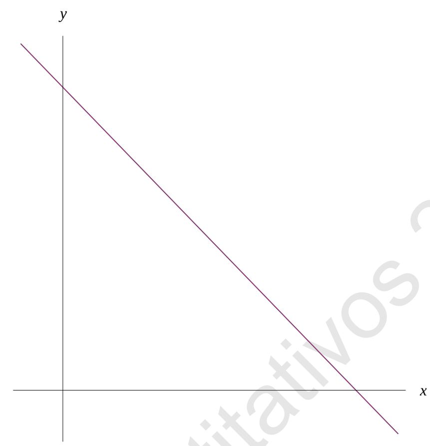
$$x + y = 7$$
$$2x + 2y = 13$$



3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta. Por tanto las coordenadas de cualquier punto sobre la recta son una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

Ejemplo 30 *Sistema de ecuaciones con un número infinito de soluciones*

$$x + y = 7$$
$$2x + 2y = 14$$



Métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones en dos variables:

1. Método de eliminación por adición.
2. Método de eliminación por sustitución.
3. Método de eliminación por igualación.

Ejemplo 31 *Encontrar el punto de equilibio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son* $p = \frac{1}{300}q + 8$ *y* $p = -\frac{1}{180}q + 12$ *respectivamente.*

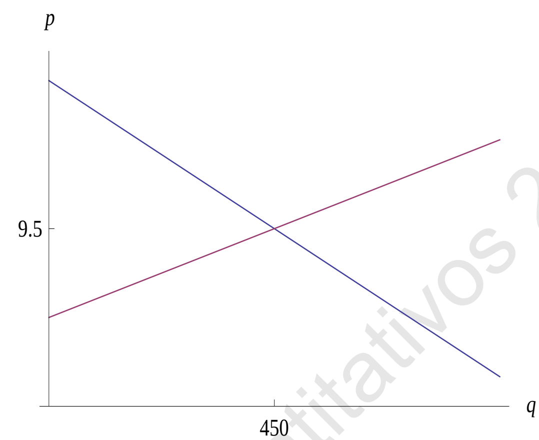
Solución:
Sustituyendo p *por* $\frac{1}{300}q + 8$ *en la ecuación de demanda, obtenemos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{300}q + 8 &= -\frac{1}{180}q + 12, \\ \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right) q &= 4, \\ q &= 450. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p = \frac{1}{300}(450) + 8$$
$$= 9.50$$

y el punto de equilibrio es $(450, 9.50)$.



2.4.1. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Definición 2.19 *Una ecuación lineal en las variables* $x_1, x_2, ..., x_n$ *es una ecuación de la forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Definición 2.20 *Un sistema de ecuaciones de* m *ecuaciones lineales en las incognitas* $x_1, ..., x_n$ *es un colección de ecuaciones de la forma:*

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

Dado el sistema, este se puede representar en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 32 *El sistema de ecuaciones*

$$4x + 5y = 335$$
$$9x + 14y = 850$$

se representa matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 335 \\ 850 \end{bmatrix}$$

Definición 2.21 *Una solución del sistema es una n-ada* $(c_1, ..., c_n)$ *tal que* $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b$ *para cada* $i = 1, ..., n$. *Cuando el sistema tiene solución se dice consistente, de otra forma es inconsistente.*

2.4.2. Métodos de solución: Forma escalonada, el método de Gauss-Jordan, inversa de una matriz, regla de Cramer.

Forma escalonada y el método de Gauss-Jordan

Una técnica adecuada para resolver sistema de ecuaciones lineales de gran tamaño es el **método de eliminación** de Gauss-Jordan. Este método comprende una serie de operaciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para obtener en cada paso un **sistema equivalente**. La reducción concluye cuando el sistema original ha sido transformado de modo que aparezca en cierta forma canónica de la pueda leerse la solución con facilidad.

Definición 2.22 *Una matriz se le llama* ***reducida por renglones****, si:*

1. *Cada renglón compuesto completamente de ceros se encuentra bajo los renglones con algún valor distinto de cero.*

2. *El primer valor distinto de cero en cada renglón es 1 (llamado el 1 principal)*

3. *En cualesquiera dos renglones sucesivos (distintos de cero), el 1 principal en el renglón inferior se encuentra a la derecha en el renglón superior.*

4. Si una columna contiene un 1 principal, entonces los demás valores en esas columnas son ceros.

Definición 2.23 *Un sistema de ecuaciones de m ecuaciones lineales en las incognitas $x_1, ..., x_n$*

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

se puede representar mediante la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

A la representación matricial anterior se le llama ***matriz aumentada del sistema de ecuaciones.***

El método de eliminación de Gauss-Jordan

1. Se escribe la matriz aumentada correspondiente al sistema lineal.

2. En caso necesario, se intercambian renglones para obtener una matriz aumentada donde el primer valor en el primer renglón sea distinto de cero. Luego se pivotea la matriz con respecto a este valor.

3. En caso necesario, se intercambia el segundo renglón con otro para obtener una matriz aumentada donde el segundo valor del segundo renglón sea distinto de cero. Luego se pivotea con respecto de este valor.

4. Se continúa hasta que la última matriz tenga una forma reducida por renglones.

El siguiente teorema nos permite determinar si un sistema homogéneo tiene una solución única (la solución trivial) o un número infinito de soluciones.

Teorema 2.24 *Sea A la matriz reducida de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si A tiene exactamente k renglones diferentes de cero, entonces $k \leq n$. Además:*

1. *Si $k \leq n$, el sistema tiene un número infinito de soluciones.*
2. *Si $k = n$, el sistema tiene una única solución (la solución trivial).*

Inversa de una matriz

Si A es inversible, el sistema de ecuaciones:

$$AX = B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

tiene como única solución

$$X = A^{-1}B \tag{6}$$

Ejemplo 33 *Por (6) se tiene que la solución del sistema de ecuaciones:*

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$
$$4x_1 + 3x_2 = 5$$

es:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la solución es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

es decir, $x_1 = -7$ y $x_2 = 11$.

Ejemplo 34 ***Equilibrio entre oferta y demanda***

El equilibrio del mercado de bienes (el equilibrio del mercado) se produce cuando la cantidad demandada por los consumidores (Q_d) y la cantidad ofrecida (Q_s) por los productores de los bienes de servicio son iguales. De manera equivalente, el equilibrio del mercado se produce cuando el precio que un consumidor está dispuesto a pagar (P_d) es igual al precio que un productor está dispuesto a aceptar (P_s). La condición de equilibrio, por lo tanto, se expresa como

$$Q_d = Q_s = Q \quad y \quad P_d = P_s = P$$

Las funciones de demanda y la oferta de un producto son dadas por:

$$\text{Función de demanda:} \quad P = 100 - \frac{1}{2}Q$$

$$\text{Función de oferta:} \quad P = 10 + \frac{1}{2}Q$$

Calcular el precio de equilibrio y la cantidad algebraicamente y gráficamente.

Solución:

De las funciones de demanda y oferta obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$P + \frac{1}{2}Q = 100$$
$$P - \frac{1}{2}Q = 10$$

Este sistema escritó con matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Como la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el precio de equilibrio es $P = 55$ y la cantidad de equilibrio es $Q = 90$.

La siguiente figura ilustra el equilibrio del mercado, en el punto cuando la cantidad es 90, y precio de equilibrio \$55. El consumidor paga \$55 por la mercancía que es también el precio que recibe el productor por las mercancías.

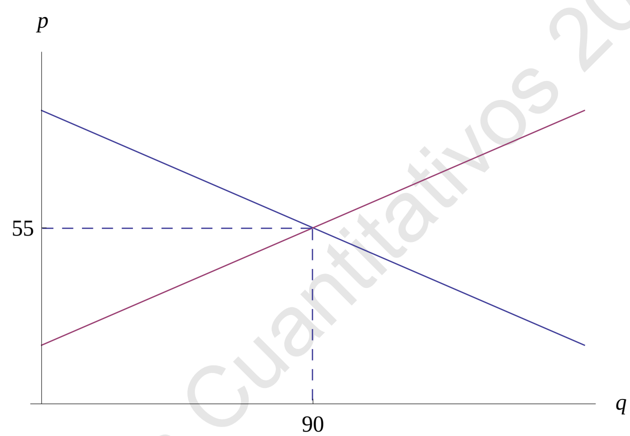


Figura 2: Equilibrio de mercado

Ejemplo 35 ***(Equilibrio en el mercado de trabajo)*** *El equilibrio del mercado de trabajo se produce cuando la mano de obra demandada por las empresas (L_d) es igual a la de la mano de obra ofrecida por los trabajadores (L_s) o, equivalentemente, cuando el salario que las empresas está dispuesto a ofrecer (w_s) es igual al salario que los trabajadores están dispuestos a aceptar (w_d). El Equilibrio del mercado de trabajo, por lo tanto, se expresa como*

$$L_d = L_s = L \quad y \quad w_d = w_s = w$$

de nuevo, en la solución para el equilibrio del mercado de trabajo, L y w se refieren al número de unidades de trabajo y el salario de equilibrio, respectivamente.

La función de demanda de trabajo y la funciones de oferta se dan como

$$\begin{aligned} \textit{Función de demanda:} &\quad w = 9 - .6L \\ \textit{Función de oferta:} &\quad w = 2 + .4L \end{aligned}$$

Solución:

De las funciones de demanda y oferta obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} w + 0.6L &= 9 \\ w - 0.4L &= 2 \end{aligned}$$

Este sistema escritó con matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} w \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

La siguiente figura ilustra el punto de equilibrio del mercado laboral, con número de equilibrio de trabajadores, 7 y $4.80 el salario de equilibrio. Cada trabajador recibe $4.80 por hora de sus servicios laborados que también el salario que la empresa está dispuesta a pagar.

Ejemplo 36 *Una economía cerrada es descrita por el sistema de ecuaciones que da el equilibrio entre el mercado de bienes y el mercado de dinero, la*

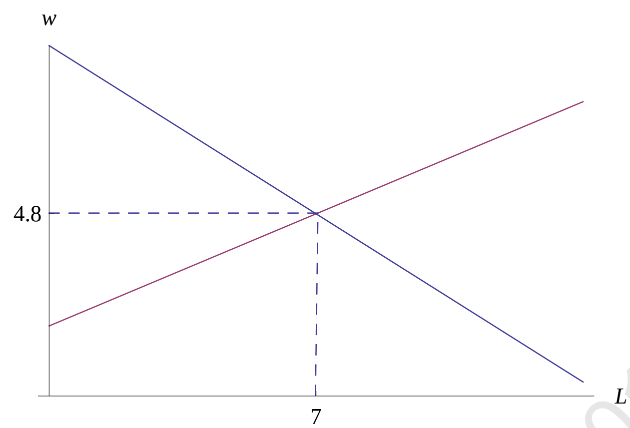


Figura 3: Equilibrio en el mercado de trabajo

relación entre la IS y la LM. El mercado de bienes (la parte IS del modelo) es descrito por:

$$
\begin{aligned}
Y &= C + I + G \\
C &= 15 + 0.8(Y - T) \\
T &= -25 + 0.25Y \\
I &= 65 - R \\
G &= 94
\end{aligned}
$$

donde C es el gasto de consumo, T es el impuesto sobre los ingresos , Y es la producción total, I es el gasto de inversión, R es la tasa de interes y G es el gasto del gobierno.

$$
\begin{aligned}
L &= 5Y - 50R \\
M &= 1,500
\end{aligned}
$$

donde L es la demanda de dinero y M es la oferta de dinero fija. Encontrar el nivel de equilibrio de Y y R.

Solución:

Expresamos el sistema de ecuaciones anterior en la forma

$$AX = B$$

donde A es una matriz 2×2 de coeficientes, $\boldsymbol{X}$ es el vector de variables 2×1 con entradas Y y R, y $\boldsymbol{B}$ es el vector de constantes 2×1. Primero resolveremos el equilibrio en el mercado de bienes y dinero, obteniendo las funciones IS y LM y luego ponemos las dos juntas. La función IS se obtiene de $Y = C + I + G$, como sigue:

$$\begin{aligned} Y &= 15 + 0.8Y + -0.8(-25 + 0.25Y) + 65 - R - 94 \\ Y(1 - 0.8 + 0.2) &= 15 + 20 + 65 + 94 - R \\ Y &= 485 - 2.5R \end{aligned}$$

La función LM es entonces dada de $M = L$:

$$1,500 = 5Y - 50R \quad o \quad Y = 300 + 10R$$

buscando entre las relaciones IS y LM como sistema de ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} Y + 2.5R &= 485 \\ Y - 10R &= 300 \end{aligned}$$

El cual se representa matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para Y y R tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.08 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 448 \\ 14.8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El nivel de equilibrio de producción de esta economiía es 448 y la tasa de interes 14.8 %. Notemos que como el nivel de ingresos, impuesto sobre los ingresos es $T = -25 + 0.25(448) = 87$, mientras que el gasto público es $G = 94$. El déficit público corriente es por lo tanto $T - G = -7$.

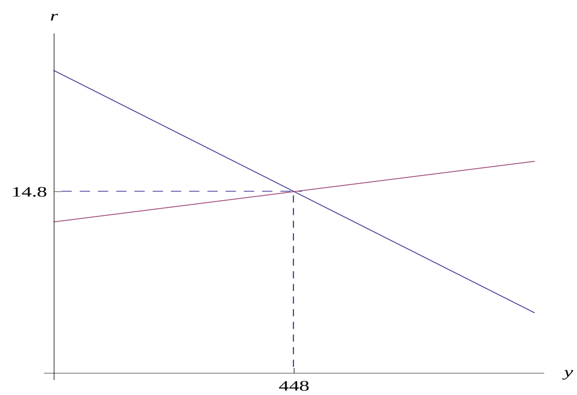


Figura 4: Modelo IS-LM de una economía cerrada

Regla de Cramer

Una de las aplicaciones más importantes de los determinantes es resolver ciertos tipos de sistemas de ecuaciones lineales.

Se va a estudiar el siguiente método, conocido como la **regla de Cramer** para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas dado por:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n & =c_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \cdots & +a_{nn}x_n & =c_n \end{array}$$

Si el determinante Δ de la matriz de los coeficientes A es diferente de cero, entonces el sistema tiene una única solución. Además, la solución esta dada por:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ ...,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

donde Δ_k, es el determinante de la matriz obtenida al remplazar la k-ésima columna de A por la columna de constantes.

Ejemplo 37 *Usar la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2&=1\\ 4x_1+4x_2&=20 \end{aligned}$$

Solución:

La matriz de coeficientes y el vector columna son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix},$$

así que

$$\det A = 8 - (-4) = 12$$

por tanto

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 20 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{24}{12} = 2 \quad y \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{36}{12} = 3$$

Ejemplo 38 *En el modelo Keynesiano $IS - LM$*

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= 100 + 0.8Y \\ I &= 1000 - 20i \\ M^s &= M^d \\ M^s &= 2350 \\ M^d &= 0.5Y - 30i \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones anteriores obtener los valores de equilibrio del ingreso(Y) y la tasa de interes (i).

Solución:

Dadas las condiciones de equilibrio obtenemos:

$$\begin{aligned} Y &= 100{+}0.8Y + 1000 - 20i \\ 0.5Y - 30i &= 2350 \\ 0.2Y + 20i &= 1100 \\ 0.5Y - 30i &= 2350 \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 20 \\ 0.5 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 2350 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 10 = -16.$$

Usando la Regla de Cramer,

$$\bar{Y} = \frac{\begin{vmatrix} 1100 & 20 \\ 2350 & -30 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{-33000 - 47000}{-16} = 5000$$

$$\bar{i} = \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 1100 \\ 0.5 & 2350 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{470 - 550}{-16} = 5\,\%$$

Estatica comparativa

Para ilustrar el uso de las derivadas parciales, se recurre al modelo keynesiano simple de ingreso nacional Y, el nivel de consumo C, el nivel de inversión I_0 y el gasto del gobierno está dado por G_0. Por otra parte, la notación detrás de las dos últimas variables muestra que la inversión y el gasto público son variables exógenas. En el contexto de los modelos económicos, esto significa que dependen de factores externos al modelo y por lo tanto sus valores no pueden ser influenciados en el modelo y se deben tomar por sentados, es decir, ya estan dadas. Al mismo tiempo, las otras variables se suponen que son endógenas y, por tanto, dependen de factores internos del modelo. De hecho, las variables endógenas en el modelo depende de las exógenas, así como en los parámetros. Aquí C_0 es el nivel de consumo autónomo. El parámetro c es conocido como la propensión marginal a consumir. Queremos resolver el modelo a partir de las variables endógenas $\bar{Y}$ y $\bar{C}$ en equilibrio:

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= C_0 + cY \qquad\qquad C_0 > 0 \quad c \in (0,1) \end{aligned}$$

Así formuladas, las ecuaciones dadas forman la así llamada forma estructural del modelo. Cuando se resuelve por $\bar{Y}$ o $\bar{C}$, se obtiene la forma reducida del modelo. Tenemos la solución en forma reducida cuando la variable endógena se expresa en términos de las variables exógenas o parámetros en el modelo. Reescribiendo las ecuaciones,

$$\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -cY + C &= C_0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ C_0 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 - c > 0$

El determinante es claramente positivo, ya que la propensión marginal a consumir es menor que 1, calculando el valor de $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\begin{bmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ C_0 & 1 \end{bmatrix}}{1 - c} = \frac{I_0 + G_0 + C_0}{1 - c}$$

A partir de este modelo de ingreso, vemos que el equilibrio en el ingreso es positivo y se relaciona positivamente con la variable exógena inversión, el gasto gubernamental, y el consumo autónomo. Por otro lado, se relaciona positivamente con la propensión marginal a consumir.

La estática comparativa nos ayuda a estudiar la forma en que el ingreso $\bar{Y}$ responde ante cambios de las variables exógenas o de cualquier otro parámetro. Por ejemplo, podemos ver que el ingreso aumenta cuando la inversión aumenta en la economía simplemente diferenciando el ingreso con respecto a la inversión:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - c} > 0$$

Igualmente el efecto del gasto del gobierno en el ingreso. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresado por la derivada parcial

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - c} > 0$$

Vemos que el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el multiplicador de la inversión. Para el consumo tenemos

$$\bar{C} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -c & C_0 \end{bmatrix}}{1 - c} = \frac{C_0 + c(I_0 + G_0)}{1 - c} = \frac{C_0 + c(I_0 + G_0)}{1 - c} > 0$$

El equilibrio de consumo también es positivo. Podemos ver que el consumo se relaciona positivamente con el ingreso, el nivel de inversión y el gasto público.

Al igual que el ingreso el consumo aumenta con el nivel de inversión en la economía simplemente diferenciando el consumo con respecto a la inversión:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial I_0} = \frac{c}{1-c} > 0$$

Nuevamente el efecto del gasto del gobierno aumenta el consumo. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresada por la derivada parcial

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial G_0} = \frac{c}{1-c} > 0$$

Observemos que en en el caso del consumo, también el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el del multiplicador de la inversión.

Problema 1 *En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I_0 + G_0$, donde $C = 50 + 0.75Y$, $I = 100$ y $G_0 = 50$ ¿calcule el efecto de un incremento de 20 unidades en la inversión?.*

Solución

$$Y - C = 100 + 50$$
$$-0.75Y + C = 50$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 - 0.75 = 0.25$

El determinante es positivo, calculando el valor de $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\begin{bmatrix} 150 & -1 \\ 50 & 1 \end{bmatrix}}{0.25} = 1000$$

Calculando el valor de $\bar{C}$

$$\bar{C} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 150 \\ -0.75 & 50 \end{bmatrix}}{0.25} = 1000$$

Ahora vamos obtener el multiplicador de la inversión

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1-0.75} = 4$$

Este multiplicador indica que por cada unidad que aumenta la inversión el ingreso se incrementará en 4 unidades. Luego, si la inversión aumenta en 20, entonces el ingreso aumentará en 80.

$$\begin{aligned} \partial \bar{Y} &= 4 * \partial I_0 \\ &= 4 * 20 \\ \partial \bar{Y} &= 80 \end{aligned}$$

Ejemplo 39 *El mercado de bienes es descrito por:*

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= C_0 + c(1-t)Y \\ I &= I_0 - bR \\ G &= \bar{G} \end{aligned}$$

El mercado de dinero es descrito por:

$$\begin{aligned} L &= kY - hR \\ M &= \bar{M} \end{aligned}$$

La economía en equilibrio es entonces caracterizada por:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + \bar{G} \\ C &= C_0 + c(1-t)Y \\ I &= I_0 - bR \\ \bar{M} &= kY - hR \end{aligned}$$

Estas son cuatro variables endógenas en el sistema Y, C, I y R y cuatro variables exogenas, $\bar{G}, C_0, I_0,$ y $\bar{M}$. El sistema se puede escribir en la forma:

$$A\boldsymbol{x} = B$$

donde A es una matriz 4×4 de parámetros, x es el vector de variables endogenas, y $\boldsymbol{B}$ es un vector de constantes y variables exógenas.

Supongamos que nos interesa determinar R. Lo haremos por la regla de Cramer. El sistema es dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -c(1-t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ k & 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G} \\ C_0 \\ I_0 \\ \bar{M} \end{bmatrix}$$

Obtenemos $\mid A \mid$ desarrollandolo a lo largo de la tercer fila de A:

$$\begin{aligned} \mid A \mid &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & -h \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -h \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 \end{vmatrix} - b \left(-1 \begin{vmatrix} -c(1-t) & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= -h[1 - b(1-t)] - bk \end{aligned}$$

Resolviendo para $R = \mid A_4 \mid / \mid A \mid$, donde $\mid A_4 \mid$ se obtiene remplazando la cuarta columna de A por $\mathbf{B}$:

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \bar{G} \\ -c(1-t) & 1 & 0 & C_0 \\ 0 & 0 & 1 & I_0 \\ k & 0 & 0 & \tilde{M} \end{vmatrix}$$

Entonces $\mid A_4 \mid$ se obtiene expandiendo a lo largo de la tercer fila de A_4:

$$\begin{aligned} \mid A_4 \mid &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & \tilde{G} \\ -c(1-t) & 1 & C_0 \\ k & 0 & \tilde{M} \end{vmatrix} - I_0 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= k \begin{vmatrix} -1 & \tilde{G} \\ 1 & C_0 \end{vmatrix} + \tilde{M} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 \end{vmatrix} - I_0 \left(k \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= -k(C_0 + \tilde{G}) + \tilde{M}\,[1 - c(1-t)] - I_0 k. \end{aligned}$$

Por tanto R es dado por:

$$R = \frac{k(C_0 + I_0 + \tilde{G}) - \tilde{M}\,[1 - c(1-t)]}{h\,[1 - c(1-t)] + bk}.$$