4. Diagonalización de matrices

La obtención de valores y vectores propios es fundamental para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, que seran tema principal en el curso de sistemas dinamicos. En el análisis de series de tiempo la diagonalización de matrices juega un papel fundamental en los vectores autorregresivos.

4.1. Valores y vectores propios

4.1.1. Obtención de los valores y vectores propios de una matriz y sus propiedades

Definición 4.1 *Si A es una matriz $n \times n$, un vector columna X, $n \times 1$, se llama* ***vector propio*** *de A si y solo si $AX = \lambda X$ para algún escalar λ. λ se llama* ***valor propio*** *de A que corresponde al vector X.*

Ejemplo 60 *a) Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$.

b) Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

c) Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son complejos.

d) Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Métodos Cuantitativos 2012

Teorema 4.2 *Sea A una matriz $n \times n$ y sea X un vector columna $n \times 1$ no nulo.*

1. *X es un vector propio de A perteneciente a λ_0 si y solo si $(A - \lambda_0 I_n) = 0$*

2. *Un escalar λ_0 es un valor propio de A si y solo si λ_0 es una raíz real de la ecuación polinómica $\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$.*

Definición 4.3 *Sea A una matriz $n \times n$. El polinomio $\det(A - \lambda I_n)$ de grado n se llama **polinomio característico** de A y se le denota por $p_A(\lambda)$. A la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se llama la **ecuación característica** de A. Las raíces reales de la ecuación característia de A son los valores propios reales o los valores característicos de A.*

Un pregunta natural es si existe una manera simple de encontrar el polinomio característico de una matriz. Para el caso de una matriz 2×2 la respuesta es afirmativa y el polinomio característico puede ser calculado con base en la traza y el determinante.

Si A una matrix 2×2, entonces

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema 4.4 *Si A es una matriz 2×2 Entonces*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A).$$

además, si λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 61 *Sea*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación $Ax = \lambda x$ aplicando los siguientes pasos:

Métodos Cuantitativos 2012

1. *Calcular el determinante de $A - \lambda I$:*

$$det(A - \lambda I) = det \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

o sea, el polinomio característico de la matriz A es:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6$$

Otra forma de calcularlo es usando el teorema anterior:

$$\begin{aligned} tr(A) &= 4 + 3 = 7 \\ \det(A) &= 12 - 6 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \end{aligned}$$

2. *Encontrar las raíces del polinomio característico:*

$$\begin{aligned} p(\lambda) = det(A - \lambda I) &= 0 \\ (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 6 &= 0 \\ (\lambda - 6)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

entonces las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda)$ son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$ las cuales cumplen

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= tr(A) \\ 7 = 6 + 1 &= tr(A) \\ \lambda_1\lambda_2 &= \det(A) \\ 6 = 6 \cdot 1 &= \det(A) \end{aligned}$$

3. *Para cada valor característico, resolvemos la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$. Buscamos ahora los correspondientes vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$ respectivamente.*

   Para $\lambda_1 = 1$

Métodos Cuantitativos 2012

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciónes son de la forma $x_1 = -2/3x_2$.

Por lo tanto , para $\lambda_1 = 1$, *los vectores propios son de la forma* $v_1 = \alpha \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

cuya solución es $x_1 = x_2 = 1$.

Por lo tanto , para $\lambda_2 = 6$, *el vector propio es* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teorema 4.5 *Si* A *es una matriz* 3×3, *entonces su polinomio característico es de la forma*

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(tr(A^2) - tr(A)^2\right)\lambda + det(A).$$

Los vectores propios también poseen una representación sencilla en el caso de una matriz A *de* 2×2 *como la anterior. Para encontrar el vector propio* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *asociado al valor propio* λ, *se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda_1 x_1, \\ ax_1 + dx_2 &= \lambda_1 x_2. \end{aligned}$$

Métodos Cuantitativos 2012

Por construcción, las ecuaciones son dependientes, y el sistema no es originalmente diagonal. Tenemos que alguno de los coeficientes b o c es diferente de cero. Supongamos que $b \neq 0$; suponiendo que $x_1 = b$ en la primera ecuación, es fácil ver que $x_2 = \lambda - a$, de manera que $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$ es un vector propio con valor propio λ. En el caso en que $b = 0$ y $c \neq 0$, utilizamos la segunda ecuación y obtenemos que $\begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$ es el vector propio buscado.

Ejemplo 62 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

notemos que la matriz es singular y que por lo tanto $\lambda = 0$ es una raíz del polinomio característico. El polinomio esta dado por

$$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 3),$$

con raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 0$. es fácil ver que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 3$ y que $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector no nulo que satisface la ecuación $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, o sea un vector propio con valor propio $\lambda = 0$.

Ejemplo 63 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propio de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$. Ahora encontraremos los vectores propios correspondientes a estos valores propios.

Métodos Cuantitativos 2012

Si $\lambda_1 = 1$, resolvemos el sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Estos es, si $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver estas ecuaciones y escoger $a = -1$, obtenemos $b = 4$ y $c = 1$. En concluisión,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es vector propio con valor propio $\lambda_1 = 1$. Para verificarlo consideramos

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

De modo semejante se obtiene que el vector $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de $\lambda_2 = 3$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_3 = -2$.

En el caso de raíces repetidas, es que no tiene una base de vectores propios y por lo tanto la matriz no puede ser diagonalizada. Sin embargo puede obtenerse una matriz triangular de la forma

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{7}$$

Para obtener la matriz T, lo que se necesita es el vector propio $\boldsymbol{v}$ correspondiente al valor propio y otro vector $\boldsymbol{w}$ tal que la matriz

$$P = [\ \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}\ ]$$

cumpla $P^{-1}AP = T$, donde T es la matriz triangular dada en 7. Para obtener el vector $\boldsymbol{w}$ se procede como sigue.

Métodos Cuantitativos 2012

Definición 4.6 *Sea* $\boldsymbol{v}$ *un vector propio con valor propio* λ*. Se dice que* $\boldsymbol{w}$ ***es un vector propio generalizado*** *si satisface*

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}.$$

Si la matriz A *está dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y $b \neq 0$*, entonces un vector propio asociado al valor propio* λ *está dado por*

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}.$$

El valor propio es una raíz del polinomio $\lambda^2 - \lambda tr(A) + det(A)$ *y si es una raíz doble debe ser de la forma* $\lambda = \frac{tr(A)}{2} = \frac{a+d}{2}$*. Resolvamos ahora el sistema* $(A - \lambda I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$*, con estos valores específicos de* $\boldsymbol{v}$ *y* λ*. Si* $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

se tiene que

$$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto es fácil ver que $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *siempre es solución. Si en la matriz* A*,* $b = 0$ *pero* $c \neq 0$*, entonces se utiliza* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$ *como vector propio y procediendo de manera análoga tenemos que* $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

es un vector propio generalizado.

Ejemplo 64 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 2$$

Métodos Cuantitativos 2012

entonces:

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= (3-\lambda)(-1-\lambda)+2=0 \\ &= -3-3\lambda+\lambda+\lambda^2+4=0 \\ &= \lambda^2-2\lambda+1=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación característica de la matriz A es $\lambda^2-2\lambda+1=0$, cuya única raíz es $\lambda=1$. El los vectores propios correspondientes son

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} 2x_1-2x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

es decir, los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1=1$ son de la forma $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces escogemos al vector propio $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y el vector propio generalizado, que se encuentra resolviendo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

es simplemente

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.7 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

Entonces la ecuación característica de la matriz A es:

$$p(\lambda)_A = (-1)^m\left(\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) = 0$$

Métodos Cuantitativos 2012

y para cada valor propio λ_k, *el vector*

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ (\lambda_k)^2 \\ \vdots \\ (\lambda_k)^{m-1} \end{pmatrix}$$

es un vector propio.

Ejemplo 65 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema (4.7), la ecuación característica es $\lambda^3 - \lambda = 0$, *los valores propios son* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ *y* $\lambda_3 = -1$ *y para* $\lambda_1 = 0$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ (\lambda_1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es vector propio. Del mismo modo,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ (\lambda_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es vector propio con valor propio $\lambda_2 = 1$. *Finalmente,*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ (\lambda_3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es vector propio con valor propio $\lambda_3 = -1$.

Ejemplo 66 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Métodos Cuantitativos 2012

El polinomio característico de la ecuación es $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, por lo que los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i,$$

Es decir,

$$\lambda_1 = \lambda = 1 + i, \lambda_2 = \bar{\lambda} = 1 - i.$$

Tomemos $\lambda = 1+i$. Encontraremos vectores propios de la manera usual; esto es, si

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

entonces,

$$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si escogemos $a = 1$ obtenemos que $b = 1 + i$, y por lo tanto

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

es vector propio con valor propio $1 + i$.

Ejemplo 67 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Las raíces de p_A son $\lambda = i$ y $\bar{\lambda} = -i$. Encontraremos un vector propio v para el valor propio $\lambda = i$ usando el teorema (4.7). Así

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

es un vector propio con valor propio λ.

Métodos Cuantitativos 2012