Ejercicios para el profesor.

Dado los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales se pide:

a) Obtener el valor de las variables en estado estacionario.

b) Análisis de estabilidad.

c) Realizar el diagrama de fases.

Ejercicio 1

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + 3$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 3$$

Solución:

a) **Estado estacionario**. Se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{o}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + b$$

Donde A es la matriz de coeficientes asociados a las variables x_1 y x_2 y b es un vector de coeficientes constantes.

El estado estacionario se define como aquella situación en la cual todas las variables del sistema son constantes, es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para tal situación tenemos $\dot{x}_1 = \bar{x}_1$ y $\dot{x}_2 = \bar{x}_2$. Por tanto, para calcular el valor de la variables en estado estacionario tenemos que calcular el siguiente vector:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + b \\
A \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= -b \\
\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= -A^{-1} b
\end{aligned}$$

por lo que en nuestro caso tendríamos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{x}_1 = 3$ y $\bar{x}_2 = 3$ son los valores de estado estacionario.

b) **Análisis de estabilidad**. Para analizar la estabilidad del sistema, tenemos que calcular los valores propios asociados al mismo y en concreto, en su signo (positivo o negativo) que es lo que nos interesa. Para calcular el signo de los valores propios procedemos como sigue. En primer lugar calculamos el siguiente determiante y lo igualamos a cero:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}[A - \lambda I] = 0 \\
\mathrm{Det} \left[\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

a partir del cual obtendriamos la siguiente ecuación de segundo grado.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \tag{1}$$

Una forma alternativa de obtener a la ecuación característica es:

$$\lambda^2 - (\mathrm{Traza} A)\lambda + \det|A| = 0 \tag{2}$$

En nuestro caso la traza y el determinante de la matriz A es:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) &= -2 - 2 = -4 \\ \det(A) &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Se observa que son los mismos resultados en la ec. (1) y ec. (2).

Las raíces de la ec. (1) son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -1$.

Se verifica que

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \mathrm{tr}(A) \\ -3 - 1 &= \mathrm{tr}(A) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \det(A) \\ (-3)(-1) &= \det(A) \end{aligned}$$

De esta manera se dispone de información relevante sobre la matriz A. Primero, la traza de la matriz es la suma de los valores propios; segundo, el determinante de la matriz es igual al producto de los valores propios.

Para determimar la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales se tienen los siguientes casos:

$$\text{Caso } A : (\text{traza}A)^2 > 4|A|$$

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Matriz A	tr(A)<0 det(A) > 0	tr(A)> 0 det(A) < 0	tr(A) ≥ 0 det(A) < 0
Valores propios reales	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$
	Estabilidad Global	Inestabilidad Global	Punto Silla

$$\text{Caso } B : (\text{traza}A)^2 < 4|A|$$

$$\begin{array}{ll} \text{Valores propios} & \lambda_1 = h + vi \\ \text{Completos} & \lambda_2 = h - vi \end{array}$$

Caso 1	Caso 2	Caso 3
tr(A)<0 det(A) > 0	tr(A)$>$ 0 det(A) > 0	tr(A) $= 0$ det(A) > 0
$h < 0$	$h > 0$	$h = 0$
Convergencia Cíclica	Divergencia Cíclica	Oscilaciones Cíclicas

En nuestro ejemplo la traza $A = -4$ y el $\det(A) = 3$, dado que la $(\text{traza}A)^2 = 16$ y es mayor que $4|A| = 12$, estamos en el caso A y dado que ambas raices son negativas, concluimos que el sistema es globalmente estable (Caso 1).

c) **Diagrama de fase**. Para realizar la representación gráfica unicamente debemos calcular la pendiente de cada condición en equilibrio parcial, aquella para la cual el sistema esta en equlibrio o en estado estacionario, esto es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + 3 = 0 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + 3 = 0 \end{aligned}$$

Vamos a representar a x_2 en el eje vertical y x_1 en el eje horizontal, por lo que tendríamos que despejar x_2 con respecto a x_1, calculando la pendiente para la primera ecuación tenemos:

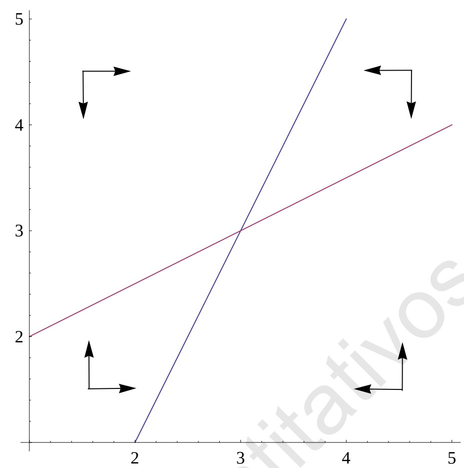
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3 &= 0 \\ x_2 &= 2x_1 - 3 \text{ cuando } \dot{x}_1 = 0 \end{aligned}$$

Se observa que la pendiente es positiva. A continuación realizamos el mismo procedimiento con la segunda ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3 &= 0 \\ 2x_2 &= x_1 + 3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} \text{ cuando } \dot{x}_2 = 0 \end{aligned}$$

es decir, la pendiente es positiva.

Una vez que tenemos representadas las dos isoclinas $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ obtendremos el diagrama de fase, que nos indica el comportamiento de nuestras variables en cada situación, a la vez que podemos definir el estado estacionario en términos gráficos.



Ahora determinemos el movimiento temporal de las variables, para la isoclina $\dot{x}_1$ derivamos con respecto a x_1 en el sistema de ecuaciones diferenciales originales

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -2$$

Un aumento de x_1 produce que $\dot{x}_1$ disminuya. A la derecha de $\dot{x}_1$ disminuye y a la izquierda aumenta. Para la isoclina $\dot{x}_2$ tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = 1$$

Un aumento de x_1 produce que $\dot{x}_2$ aumente. A la derecha de $\dot{x}_2 = 0$ aumenta y a la izquierda disminuye.

Para terminar el diagrama de fase se establecen flechas horizontales con respecto a x_1 y verticales con respecto a x_2, estableciendo que a la derecha y hacia arriba crecen y a la izquierda y hacia abajo decrecen respectivamente.

Ejercicio 2

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - 6 \end{aligned}$$

Solución:

a) **Estado estacionario**. Planteando el sistema en forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \\ \dot{x} &= Ax + b \end{aligned}$$

Obteniendo los valores de estado estacionario

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto $\bar{x}_1 = 1$ y $\bar{x}_2 = 4$ son los valores de estado estacionario.

b) **Análisis de estabilidad**. La traza y el determinante de la matriz A son

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A) &= 4 + 1 = 5 > 0 \\ \det(A) &= 4 + 2 = 6 > 0 \end{aligned}$$

El polinomio característico asociado es

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Las raíces son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$.

Se verifica que

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \operatorname{tr}(A) \\ 2 + 3 &= \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \det(A) \\ (2)(3) &= \det(A) \end{aligned}$$

Dado que la $(\text{traza} A)^2 = 25$ y que es mayor que $4|A| = 24$, estamos en el caso A y dado que ambas raíces son positivas, concluimos que el sistema es globalmente inestable (Caso 2).

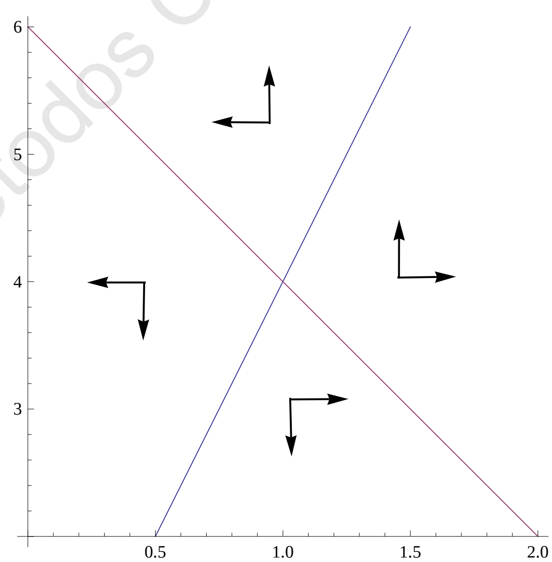
c) **Diagrama de fase**. Calculando la pendiente de la isoclina $\dot{x}_1 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 &= 4x_1 \text{ para } \dot{x}_1 = 0 \end{aligned}$$

Se observa que la pendiente es positiva, para $\dot{x}_2 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 6 &= 0 \\ x_2 &= -2x_1 + 6 \text{ para } \dot{x}_2 = 0 \end{aligned}$$

es decir, la pendiente es negativa. Por lo tanto el diagrama de fase es



Para determinar los movimientos temporales de la isoclina $\dot{x}_1$ tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = 4$$

Un aumento en x_1 produce que $\dot{x}_1$ aumente. A la derecha de $\dot{x}_1$ disminuye y a la izquierda aumenta. Para la isoclina $\dot{x}_2$ tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = 2$$

Un aumento de x_1 produce que $\dot{x}_2$ aumente.

Ejercicio 3

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 - 6\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 - 6\end{aligned}$$

Solución:

a) **Estado estacionario**. Planteando el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6\\ -6\end{bmatrix}$$

Obteniendo los valores de estado estacionario

$$\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$$

Por tanto $\bar{x}_1 = 2$ y $\bar{x}_2 = 2$ son los valores de estado estacionario.

b) **Análisis de estabilidad**. La traza y el determinante de la matriz A son

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &= 2\\ \det(A) &= -3\end{aligned}$$

El polinomio característico asociado es

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Las raíces son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$.

Se verifica que

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \mathrm{tr}(A) \\ -1 + 3 &= \mathrm{tr}(A) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \det(A) \\ (-1)(3) &= \det(A) \end{aligned}$$

Dado que la $(\text{traza}A)^2 = 4$ y que es mayor que $4|A| = -12$, estamos en el caso A y dado que una raíz es positiva y otra negativa concluimos que el sistema es punto silla (Caso 3).

c) **Diagrama de fase**. Calculando la pendiente de la isoclina $\dot{x}_1 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 6 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_1 + 3 \text{ para } \dot{x}_1 = 0 \end{aligned}$$

Se observa que la pendiente es negativa. Para $\dot{x}_2 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 6 &= 0 \\ x_2 &= -2x_1 + 6 \text{ para } \dot{x}_2 = 0 \end{aligned}$$

es decir, la pendiente es negativa. Por lo tanto el diagrama de fase es

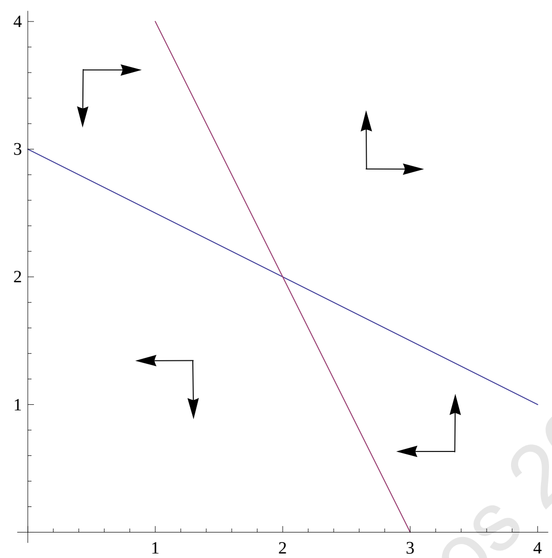
Para determinar los movimientos temporales de la isoclina $\dot{x}_1$ tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = 1$$

Un aumento en x_1 produce que $\dot{x}_1$ aumente. Para la isoclina x_2 tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = 2$$

Un aumento de x_1 produce que $\dot{x}_2$ aumente.



Ejercicio 4

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2 - 16$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + 1$$
$$x_1(0) = 2 \qquad x_2(0) = 3$$

Solución:

a) **Estado estacionario**. Planteando el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo los valores de estado estacionario

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Por tanto $\bar{x}_1 = 4$ y $\bar{x}_2 = 7$ son los valores de estado estacionario.

b) **Análisis de estabilidad**. La traza y el determinante de la matriz A son

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) &= -2 \\ \det(A) &= 5 \end{aligned}$$

El polinomio característico asociado es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Las raíces son $\lambda_1 = -1 - 2i$ y $\lambda_2 = -1 + 2i$.

Se verifica que

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \mathrm{tr}(A) \\ -1 - 2i - 1 + 2i &= \mathrm{tr}(A) \\ -2 &= \mathrm{tr}(A) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \det(A) \\ (-1 - 2i)(-1 + 2i) &= \det(A) \\ 1 - 2i + 2i - 4i^2 &= \det(A) \\ 1 - 4(-1) &= \det(A) \\ 5 &= \det(A) \end{aligned}$$

Dado que la $(\text{traza} A)^2 = 4$ y que es menor que $4|A| = 20$, estamos en el caso B y dado que las raíces son complejas y la traza(A) es negativa y el $\det(A)$ es positivo, el sistema presenta convergencia cíclica (Caso 1).

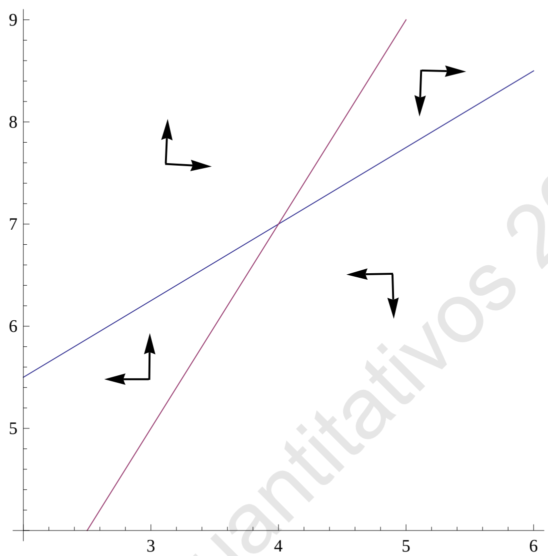
c) **Diagrama de fase**. Calculando la pendiente de la isoclina $\dot{x}_1 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 - 16 &= 0 \\ 4x_2 &= 3x_1 + 16 \\ x_2 &= \frac{3}{4}x_1 + 4 \text{ para } \dot{x}_1 = 0 \end{aligned}$$

Se observa que la pendiente es positiva. Para $\dot{x}_2 = 0$ tenemos

$$-2x_1 + x_2 + 1 = 0$$
$$x_2 = 2x_1 - 1 \text{ para } \dot{x}_2 = 0$$

es decir, la pendiente es positiva. Por lo tanto el diagrama de fase es



Para determinar los movimientos temporales de la isoclina $\dot{x}_1$ tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -3$$

Un aumento en x_1 produce que $\dot{x}_1$ disminuya. Para la isoclina $\dot{x}_2$ tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = -2$$

Un aumento de x_1 produce que $\dot{x}_2$ disminuya.

Los ejercicios 5 y 6 se dejan al profesor.

Ejercicio 5

$$\dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 - 10$$
$$\dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 + 6$$
$$x_1(0) = 2 \qquad x_2(0) = 1$$

Ejercicio 6

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 8x_2 - 24$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + 8$$
$$x_1(0) = 3 \qquad x_2(0) = 2$$