ÁLGEBRA LINEAL

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMIA

México, D.F., 10 de marzo de 2010

Contenido

1. Álgebra lineal

Introducción

En la presente unidad de aprendizaje introduciremos una serie de técnicas matemáticas encuadradas dentro de lo que se conoce como el **Álgebra lineal**, que nos proporcionarán un lenguaje eficiente para el tratamiento de una gran cantidad de fenómenos económicos.

1.1. Vectores

1.1.1. Definición

Definición 1.1 *Para cada entero positivo* n*, definimos el espacio Euclidiano* n*-dimensional como:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

Un elemento particular de $\mathbb{R}^n$*, digamos* $x = (x_1, ..., x_n)$ *también pueden denotarse como vector columna*

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se le llama ***vector (o vector columna)****. Las cantidades* x_i *se le llaman componentes (o elementos de* x*), a* n *se le llama el orden de* x*. Los vectores de orden 1 se les llaman* ***escalares****.*

1.1.2. Operaciónes de vectores

La operación de suma entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

y el producto de un escalar λ por un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1 *Sea*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $x + y, 3x, -y,$ *y* $5x - 2y$.

Solución:

$$x + y = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 3x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad -y = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 5x - 2y = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -19 \end{pmatrix}$$

1.1.3. Representación gráfica.

La suma y multiplicación por escalar definidas anteriormente tienen un significado geométrico. La representación geométrica en $\mathbb{R}^3$ de la suma de vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$ se obtiene trasladando a uno de ellos al extremo del otro, formando un paralelogramo, una de cuyas diagonales representa el vector resultante $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. A esta representación de la suma de vectores es a lo que se le llama **la ley del paralelogramo**.

El producto de un escalar por un vector se interpreta de la siguiente manera: sí el escalar λ es positivo y diferente de uno, al multiplicar el escalar λ por el vector $x = (x_1, x_2, x_3)$, el vector resultante es $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, el cual se obtiene del vector x multiplicando su magnitud por λ; si el escalar es negativo y diferente de menos uno, el vector cambia su magnitud y sentido ; si el escalar es cero, el vector se hace cero.

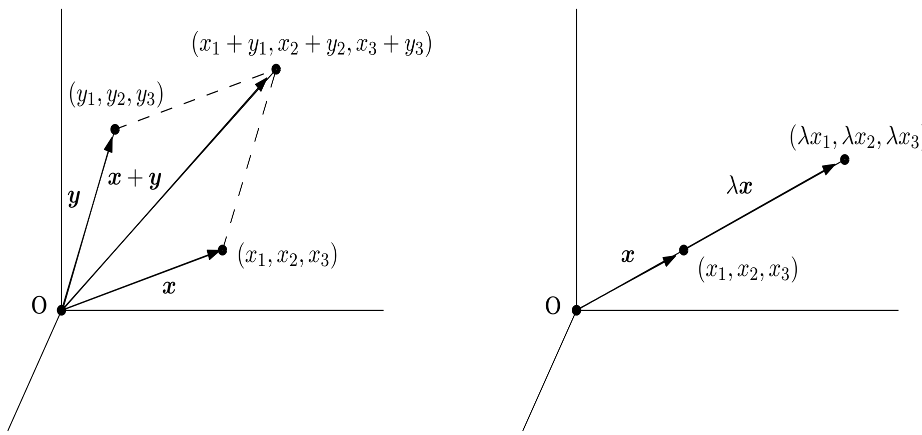


Figura 1: Paralelogramo

1.2. Producto punto

Una aplicación del Teorema de Pitágoras en el espacio permite definir la distancia del origen de coordenadas al punto que determina un vector α.

Definición 1.2 *Dados los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define su producto punto como:*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

El producto punto satisface las siguientes propiedades:

- El producto interno de dos vectores en $\mathbb{R}^n$ es un escalar único.
- $x \cdot y = y \cdot x$
- $\lambda x \cdot y = x \cdot \lambda y = \lambda(x \cdot y)$
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + x \cdot z$
- $x \cdot x > 0$ si $x \neq 0$. $x \cdot x = 0$ si $\alpha = 0$.

Ejemplo 2 *Si*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $x \cdot y$:

Solución:

$$x \cdot y = (1)(4) + (2)(-5) + (-3)(1) = -9.$$

1.2.1. Norma de un vector

Definición 1.3 *Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, se define su norma o longitud como*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Ejemplo 3 *Calcule la norma del vector $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$*

Solución:

$$\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

La norma de cualesquirera vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0$. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.2.2. Ángulo entre vectores

El ángulo entre dos vectores x y y se puede obtener a través de la ecuación:

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Notemos que la ecuación anterior estable que los vectores x y y son perpendiculares si y solo si $x \cdot y = 0$, pues para $0 \leq \theta \leq \pi$, $\cos(\theta) = 0$ si y solo si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 4 *Calcular el ángulo entre los vectores:*

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El producto escalar de los vectores es

$$x \cdot y = -10 - 3 + 6 = -7$$

entonces como

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{-7}{22.7} = -0.31$$

de lo cual se sigue que el ángulo θ entre los vectores x y y es

$$\theta = 108.31^o$$

1.2.3. Vectores ortogonales

Definición 1.4 *Dos vectores no nulos x y y en $\mathbb{R}^n$ son llamados ortogonales o perpendiculares si y solo si $x \cdot y = 0$, y se escribe $x \perp y$.*

Ejemplo 5 *Determine todos los vectores que son ortogonales a:*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:
Todos los vectores $y \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales a x cumplen $x \cdot y = 0$, es decir, si $y = (y_1, y_2)$, entonces

$$x \cdot y = (1, 2) \cdot (y_1, y_2) = y_1 + 2y_2 = 0,$$

de lo cual se sigue que

$$y = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

La norma $\|x\|$ también se usa para definir la función distancia d en $\mathbb{R}^n$ como sigue:

Definición 1.5 *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$,*

$$d(x, y) = \|x - y\| \, .$$

La función distancia d satisface las siguientes propiedades:

- $d(x, y) \geq 0$. Además, $d(\alpha, \beta) = 0$ si y solo si $\alpha = \beta$.
- $d(x, y) = d(\beta, \alpha)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ejemplo 6 *Si*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcule la distancia entre los vectores x y y:

Solución:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 8.48.$$

1.3. Producto cruz

Definición 1.6 *Para cualquier par de vectores:*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

en $\mathbb{R}^3$, el ***producto cruz*** *se define como:*

$$x \times y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - y_2x_3)\vec{i} - (x_1y_3 - y_1x_3)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k},$$

en donde

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7 *Dados*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calcule $x \times y$,

Solución:

De acuerdo con la definición del producto cruz tenemos:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (2 \cdot 0 - 3 \cdot 0)\vec{i} + (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\vec{j} + (3 - 2)\vec{k} = \vec{k}.$$

Por tanto

$$x \times y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar que:

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \operatorname{sen}(\theta)$$

donde θ es el ángulo formado por $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$.

La ecuación (1.3) proporciona una forma de calcular **el área del paralelogramo** determinado por los vectores x y y. También proporciona una alternativa para calcular el ángulo entre dos vectores.

1.3.1. Propiedades del producto cruz

Si x, y y z son vectores y λ es un escalar, entonces:

- $x \times y = -(y \times x)$
- $\lambda(x \times y) = (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y)$
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

1.3.2. Ecuación del plano

La ecuación del plano que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) y cuyo vector normal es (a, b, c) es :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{1}$$

Ejemplo 8 *Determinar la ecuación del plano perpendicular al vector* $(1, 1, 1)$ *que contiene al punto* $(1, 0, 0)$.

Solución: De la ecuación (1), la ecuación del plano es

$$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0;$$

esto es,

$$x + y + z = 1.$$

TAREA1: VECTORES

Trabajo en individual.

1. Sean los vectores $v = (1, -3, 2)$ y $w = (4, 2, 1)$ calcule:

   a) $v + w$

   b) $2v$

   c) $v - w$

2. Encuente el producto escalar $x \cdot y$ donde:

   a) $x = (-1, 3),\ y = (-1, 5)$

   b) $x = (-6, 12),\ y = (15, -10)$

3. Calcule la norma del vector $x = (4, 2, 1)$

4. Hallar el ángulo que forman los vectores $x = (2, 10, 3)$ y $y = (10, 8, 12)$

5. Demuestre que los vectores $v = (1, -1, 1)$ y $w = (2, 3, 1)$ son ortogonales.

6. Encuentre un vector ortogonal a:

   a) $x = (1, 2)$

   b) $y = (-3, -4)$

7. Calcule la distancia entre los siguientes vectores:

   a) $x = (2, 3),\ y = (4, 7)$

   b) $x = (-1, 1),\ y = (4, 0)$

8. Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores:

   a) $x = (1, -1, 2),\ y = (-2, 0, 3)$.

   b) $x = (1, 0, -1),\ y = (-3, -1, 2)$

9. Calcule $x \times y$ dados Dados

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Encontrar un plano π que pasa por el punto $(2, 5, 1)$ y cuyo vector normal es $(1, -2, 3)$

2. Matrices y sistemas de ecuaciones

2.1. Matrices

Introducción

En econometría estamos preocupados con el modelado de los datos observados. En muchos casos el número de datos numéricos es grande (varios cientos o miles) de las observaciones de una serie de posibles variables de interés y todos los datos deben ser manejados de una manera organizada. Muchos conjuntos de datos se almacenan en una hoja de cálculo, donde cada columna es igual al número de observaciones de esa variable. Por ejemplo, los datos sobre las calificaciones de Cálculo, Inglés e Historia de cinco estudiantes se puede representar por la siguiente tabla.

Estudiantes	Cálculo	Inglés	Historia
1	1.8	4	8
2	2.4	6	9
3	2.9	6	7
4	3.0	7	6
5	3.5	8	7

Matriz de datos

La información consiste en datos reales de las cinco puntuaciones en Cálculo, Inglés e Historia y podemos resumir estos datos en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1.8 & 4 & 8 \\ 2.4 & 6 & 9 \\ 2.9 & 6 & 7 \\ 3.0 & 7 & 6 \\ 3.5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Este bloque rectangular de números se llama matriz. La matriz anterior tiene cinco filas y tres columnas. En econometría trabajamos con las matrices, y por supuesto siempre debemos recordarnos el significado de las columnas y filas (en el caso, la correspondencia entre columnas y variables y entre las filas y los estudiantes, por lo que el número 2.9 en la columna 1 y la fila 3 se sabe que corresponden a la calificación de Cálculo del tercer estudiante).

2.1.1. Definición

Definición 2.1 *Sean m, n números naturales. Una matriz de orden m filas por n columnas con coeficientes o entradas en los números reales, es un arreglo rectangular:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

por simplicidad a la matriz anterior simplemente se representa por: $[a_{ij}]$.

2.1.2. Tipos de matrices: Cuadrada, diagonal, identidad, simétrica

Definición 2.2 *Sea $[a_{ij}]$ una matriz m por n. Si $m = n$, al conjunto de matrices de orden n por n se le llama* ***matrices cuadradas de orden*** *n.*

Ejemplo 9 *La siguiente matriz es una matriz de orden 2 por 2:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definición 2.3 *La matriz cuadrada $[a_{ij}]$ de orden n, tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, es decir, a la matriz*

$$diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se le llama ***matriz diagonal de orden n****. En particular si además $a_{ii} = 1$ es decir,a la matriz*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

se le llama la ***matriz identidad de orden n****.*

Definición 2.4 *Si A es una matriz cuadrada puede ocurrir que $A^T = A$, en este caso a la matriz A se le llama* ***matriz simétrica.***

Ejemplo 10 *Si $A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, entones $A = A^T$, es decir, A es una matriz simétrica.*

Ejemplo 11 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces A es una matriz simétrica.

2.1.3. Aritmética de matrices

Propiedades de la suma y multiplicación

Sean $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ matrices m por n. Se define la **suma** de A con B por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

la cual también es una matriz m por n.

Ejemplo 12 *La suma de las matrices A y B donde:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 17 & 9 \end{bmatrix}$$

Sea A una matrix m por n, $A = [a_{ij}]$ y B una matriz n por k con $B = [b_{jr}]$, se define el **producto** de A por B como sigue: $AB = [c_{ir}]$ es una matriz m por k donde para todo $1 \leq i \leq m$, para todo $1 \leq r \leq k$:

$$c_{ir} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr}$$

En el siguiente ejemplo usaremos la notación $A_{m,n}$ para denotar la matriz A de orden $m \times n$.

Ejemplo 13 *Calcular* $C_{2,2} = A_{2,2} \cdot B_{2,2}$ *donde*

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \;\; y \;\; B_{2,2} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto

$$A_{2,2} \cdot B_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 56 & 32 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$C_{2,2} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 56 & 32 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 14 *Calcular* $C_{3,3} = A_{3,2} \cdot B_{2,3}$ *donde*

$$A_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \;\; y \;\; B_{2,3} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto

$$A_{3,2} \cdot B_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 10 & 20 & 7 \\ 13 & 26 & 7 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$C_{3,3} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 3 \\ 10 & 20 & 7 \\ 13 & 26 & 7 \end{bmatrix}$$

En álgebra matricial se dice que dos matrices son iguales si todos los elementos correspondientes son iguales. Si A es cualquier matriz, una matriz B será una matriz identidad para la suma si:

$$A + B = A \qquad \text{y} \qquad B + A = A$$

Se puede verificar fácilmente que la matriz identidad para la suma es una matriz en la cual cada elemento es igual a cero.

De manera similar, Si A es cualquier matriz, la matriz identidad para la multiplicación es la matriz identidad I_n que satisface la relación:

$$AI = A \qquad \text{y} \qquad IA = A$$

Ejemplo 15 ***El beneficio de una Firma***

Suponer que una firma produce tres tipos de productos, usando dos tipos de insumos, las cantidades de cada producto están dadas por los vectores columna q:

$$q = \begin{bmatrix} 15,000 \\ 27,000 \\ 13,000 \end{bmatrix}$$

y los precios unitarios están dadas por el vector de precios $\begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix}$.

Las cantidades de insumos empleados en la producción están dadas por el vector columna z:

$$z = \begin{bmatrix} 11,000 \\ 30,000 \end{bmatrix}$$

Y los precios de esos insumos por el vector $w = \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix}$. *El beneficio de la empresa se encuentra dada por:*

$$\begin{aligned} \prod &= pq - wz \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15,000 \\ 27,000 \\ 13,000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11,000 \\ 30,000 \end{bmatrix} \\ &= (150,000 + 324,000 + 65,000) - (220,000 + 240,000) = 79,000 \end{aligned}$$

Potencia de matrices y matriz idempotente

Definición 2.5 *Si A es una matriz cuadrada y n es un entero positivo, entonces* ***la n-ésima potencia de*** *A, la cual se escribe como A^n, es el producto de n factores de A:*

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n}$$

Si A es una matriz de orden n, se define $A^0 = I_n$.

Ejemplo 16 *Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:*

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil demostrar por inducción que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.6 *Una matriz A tal que $A^2 = A$ se le llama* ***matriz idempotente****.*

Ejemplo 17 *La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ es idempotente.*

2.1.4. Transpuesta y sus propiedades

Definición 2.7 *Dada una matriz $A = [a_{ij}]$, se define la matriz $A^T = [b_{ij}]$ donde $b_{ij} = a_{ji}$. A la matriz A^T se le llama la* ***matriz traspuesta de*** *A.*

Ejemplo 18 *La traspuesta de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

es dada por:

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta:

- $A = (A^T)^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Ejemplo 19 *Si*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

así

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

Ejemplo 20 *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la suma tenemos que

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A^T + B^T$$

ya que

$$
\begin{aligned}
A^T + B^T &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para la multiplicación tenemos

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = B^T A^T
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
B^T A^T &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Traza y sus propiedades

La traza de una matriz es una operación definida sólo para matrices cuadradas.

Definición 2.8 *Si* $\boldsymbol{A}$ *es una matriz* $n \times n$*, la* ***traza de la matriz*** A*, denotada como* $tr(A)$*, se define como*

$$
tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.
$$

- $tr(I_n) = n$
- $tr(A^T) = tr(A)$

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$, *para todo escalar* α
- $tr(AB) = tr(BA)$, *donde* A *es una matriz* $m \times n$ *y* B *es una matriz* $n \times m$.

Ejemplo 21 *Si*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$tr(A) = 2 + 4 = 6$$

2.2. Determinantes

En esta sección introducimos una función, la función determinante. Si A es una matriz cuadrada, entonces la función determinante asocia a A exactamente un número real llamado el determinante de A, el determinante de A el cual se le denota por $\mid A \mid$.

2.2.1. Definición

Definición 2.9 *Si* $A = [a_{ij}]$ *es una matriz cuadrada de orden 1, entonces* $\mid A \mid = a_{11}$.

Definición 2.10 *Si* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *es una matriz cuadrada de orden 2, entonces* $\mid A \mid = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Ejemplo 22

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

Definición 2.11 *Determinante de* 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. *Entonces*

$$\det A = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 23 *Cálculo de un determinante* 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Calcule* $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 19 + 2 \cdot 10 = -69$$

Definición 2.12 *(**Menor**) Sea* A *una matriz de* $n \times n$ *y sea* M_{ij} *la matriz de* $(n-1) \times (n-1)$ *que se obtiene de* A *eliminando el renglón* i *y la columna* j. M_{ij} *se llama el **menor ij** de* A.

Ejemplo 24 *Cálculo de dos menores de una matriz* 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. *Encuentre* M_{13} *y* M_{32}.

Solución: *Eliminando el primer renglón y la tercer columna de* A *se obtiene* $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Definición 2.13 *Sea* A *una matriz de* $n \times n$. *El **cofactor ij** de* A, *denotado por* A_{ij}, *está dado por*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \tag{2}$$

Estos es, el cofactor ij *de* A *se obtiene tomando el determinante del menor* ij *y multiplicándolo por* $(-1)^{i+j}$. *Observe que*

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & si\ i+j\ es\ par \\ -1 & si\ i+j\ es\ impar \end{cases}$$

Ejemplo 25 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Del ejemplo anterior tenemos que $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. *Entonces los cofactores* A_{13} *y* A_{32} *de la matriz* A *se obtienen usando formula* 2 *como sigue*

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^4(0 \cdot 3 - 1 \cdot 6) = -6 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^5(2 \cdot 5 - 0 \cdot 4) = -10 \end{aligned}$$

Definición 2.14 *(**Determinante** $n \times n$) Sea A una matriz $n \times n$. Entonces el determinante de A, denotado por* $\det A$ *o* $|A|$, *está dado por*

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \end{aligned} \tag{3}$$

La expresión al lado derecho de (3) *se llama **expansión por cofactores.***

Definición 2.15 *(**La adjunta**). Sea A una matriz de $n \times n$, y sea B, dada por*

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

*es decir, la matriz de sus cofactores. Entonces la **adjunta** de A, escrito adj A, es la transpuesta de la matriz B de $n \times n$; es decir*

$$adj\ A = B^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 26 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. *Calcule adj A.*

Solución:

Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = -3,\ A_{21} = -13,\ A_{22} = 5,\ A_{23} = 2,\ A_{31} = -7,\ A_{32} = 2$ *y* $A_{33} = 2$. *Así,*

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \ y \quad adj\ A = B^T = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Regla de Sarrus

Hay una forma alternativa de calcular determinantes de orden 3. Se añaden a la derecha sus dos primeras columnas de una matriz A dada, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Primero se multiplican las tres líneas que van de arriba a la izquireda a abajo a la derecha, poniendo el signo + a los productos.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \tag{4}$$

Luego se multiplican las tres líneas que van de abajo a la izquierda a arriba a la derecha, poniendo el signo − a a los productos.

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \tag{5}$$

La suma de los términos de (4) y (5) es igual a A.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces para calcular el determinante de la matriz A consideremos el siguiente arreglo

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus tenemos que

$$\begin{aligned} |\ A\ | &= 1\cdot 5\cdot(-3) + 2\cdot 1\cdot(-2) + 3\cdot(-4)\cdot 1 - (-2)\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 1 - (-3)\cdot(-4)\cdot 2 \\ &= -15 - 4 - 12 + 30 - 1 - 24 \\ &= -26 \end{aligned}$$

Por tanto $|\ A\ |= -26$

2.2.2. Propiedades de los determinantes

El cálculo de los determinantes se simplifica utilizando varias propiedades. En lo siguiente A denota una matriz cuadrada.

Propiedades de los determinantes:

1. Si cada una de las entradas de un renglón (o columna) de A es 0, entonces $|\ A\ |= 0$.
2. Si dos renglones (o columnas) de A son idénticos, $|\ A\ |= 0$.
3. Si A es triangular superior (o inferior), entonces $|\ A\ |$ es igual al producto de las entradas de la diagonal principal.
4. Si B es la matriz que se obtiene sumando un múltiplo de un renglón (o columna) de A a otro renglón (columna), entonces $|\ A\ |=|\ B\ |$.
5. Si B es la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de un renglón (o columna) de A por el mismo número k, entonces $|\ B\ |= k\ |\ A\ |$.

2.3. Matriz inversa

2.3.1. Definición

Definición 2.16 *Sea A una matriz n por n, una matriz B n por n que tiene la propiedad de que $AB = BA = I_n$ se le llama la **matriz inversa** de A y se le denota por $B = A^{-1}$. Más aún, se dice que A es **matriz invertible** en este caso.*

Teorema 2.17 *Una matriz cuadrada tiene inversa $\Longleftrightarrow |\ A\ |\neq 0$.*

Definición 2.18 *Una matriz A se llama* ***matriz singular*** *si $\mid A \mid = 0$ y* ***matriz no singular*** *si $\mid A \mid \neq 0$. Entonces una matriz tiene inversa si y sólo si es no singular.*

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si $\mid A \mid = ad - bc \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 27 *La matriz inversa de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es dada por:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puesto que

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$
$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

2.3.2. Propiedades

Propiedades de la matriz inversa: Sea A y B matrices invertibles $n \times n$. Entonces:

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- La traspuesta de A es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- $(\lambda A)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$, si $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

En una matriz A m por n se tienen tres operaciones elementales de filas:

1. Multiplicación de una fila de A por un número c distinto de cero.
2. Remplazo de la r-ésima fila de A por la fila r más c veces la fila s, donde c es cualquier número y r es distinto de s.
3. Intercambio de dos filas de A.

Si A y B son dos matrices m por n sobre los números reales, se dice que B es equivalente por filas a A si B se obtiene de A por una sucesión finita de operaciones elementales de filas.

Se puede ver que si A es inversible, entonces A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n. Mas aún, al reducir la matriz A a la matriz identidad I_n por medio de una sucesión de operaciones elementales de filas, la inversa de A se obtiene al aplicar la misma sucesión de operaciones a la matriz identidad.

TAREA 2: MATRICES

Tarea en equipo.

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\alpha = 3$, $\beta = 4$ calcular:

   a) $\alpha A + \beta B$

   b) $\alpha(B)$

   c) $(\alpha - \beta)(A - B)$

2. Obtener las matrices A + B, A - B y AB si:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Sean las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

   Calcular $AB,\ BA,\ CD,\ DA,\ C'B$

4. Cierto o falso: $(AB)^2 = A^2B^2$, demuestra tu respuesta.

5. Verificar que las matrices A y B satisfaces $(AB)^T = B^T A^T$, si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ realizar:

a) $A \cdot A^T$

b) $B(I + B)$

c) B^2

7. Dar los valores de x y y si:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x - y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

9. Calcule $\mid A^3 \mid$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Obtener la inversa de las siguientes matrices:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

TAREA 3: MATRICES EN EXCEL

Trabajo en equipo con dos o tres integrantes.

Realicen en excel o en mathematica las siguientes operaciones matriciales.

1. Considerar las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

   calcular las operaciones matriciales,

   a) AB
   b) 3C
   c) C+D
   d) E-C
   e) -7C+3D
   f) 2C-3D+4E

2. Sea la siguiente matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Encontrar la matriz $P = X(X'X)^{-1}X'$
   b) Encontrar P' y calcular $P'X$
   c) Calcular PP, P^3, P^4
   d) Obtener $M = I - P$

e) Calcular MM, M^2, M^3

f) Calcular MX

3. Encontrar en cada caso el determinante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Calcular la inversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Sean las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcular AB y obtener su inversa, $(AB)^{-1}$

b) Verificar que $(AB)^{-1} = (A)^{-1}(B)^{-1}$

2.4. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un conjunto de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el administrador de una fábrica establece un plan de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas de tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II. De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Suponga que hacemos que x igual al número de artículos del modelo A fabricados cada día, y igual al número de artículos del modelo B. Entonces éstos requieren de $4x + 5y$ piezas del tipo I y $9x + 14y$ piezas del tipo II. Como están disponibles 335 y 850 piezas del tipo I y II, respectivamente tenemos:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 335 \\ 9x + 14y &= 850 \end{aligned}$$

A este conjunto de ecuaciones le llamamos **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales ambas ecuaciones sean verdaderas de manera simultánea. Estos valores se llaman soluciones del sistema.

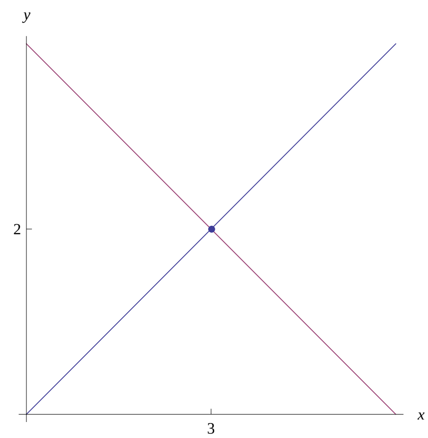
Como las ecuaciones son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamemoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen las ecuaciones de esa línea; esto es, hacen la ecuación verdadera, Por tanto, las coordendas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Estos significa que un punto de intersección da una solución del sistema.

Si L_1 y L_2 se dibujan en el mismo plano, existen tres posibles situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en exactamente un punto, digamos (x_0, y_0). Por tanto, el sistema tiene solución $x = x_0$ y $y = y_0$.

   Ejemplo 28 *El sistema de ecuaciones tiene solución unica*

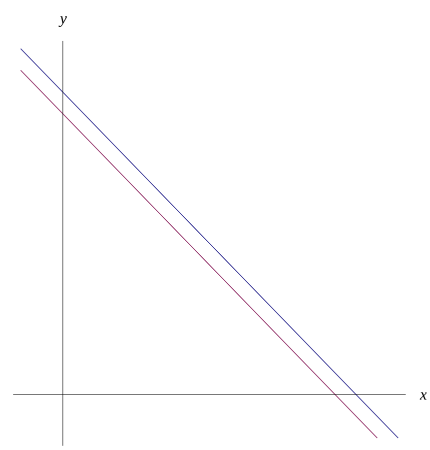
$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$



2. L_1 y L_2 pueden ser parelelas y no tener puntos en común. En este caso no existe solución.

   Ejemplo 29 *Sistema de ecuaciones sin solución*

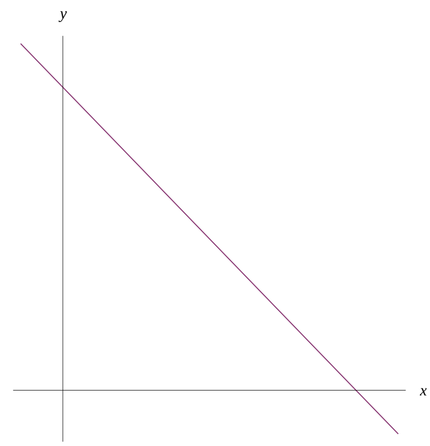
$$x + y = 7$$
$$2x + 2y = 13$$



3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta. Por tanto las coordenadas de cualquier punto sobre la recta son una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

Ejemplo 30 *Sistema de ecuaciones con un número infinito de soluciones*

$$x + y = 7$$
$$2x + 2y = 14$$



Métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones en dos variables:

1. Método de eliminación por adición.

2. Método de eliminación por sustitución.

3. Método de eliminación por igualación.

Ejemplo 31 *Encontrar el punto de equilibio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son* $p = \frac{1}{300}q + 8$ *y* $p = -\frac{1}{180}q + 12$ *respectivamente.*

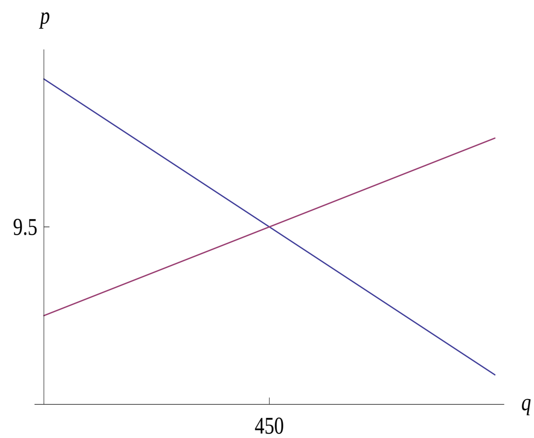
Solución:
Sustituyendo p por $\frac{1}{300}q + 8$ *en la ecuación de demanda, obtenemos*

$$\frac{1}{300}q + 8 = -\frac{1}{180}q + 12,$$
$$\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right) q = 4,$$
$$q = 450.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{300}(450) + 8 \\ &= 9.50 \end{aligned}$$

y el punto de equilibrio es $(450, 9.50)$.



2.4.1. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Definición 2.19 *Una ecuación lineal en las variables* $x_1, x_2, ..., x_n$ *es una ecuación de la forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Definición 2.20 *Un sistema de ecuaciones de* m *ecuaciones lineales en las incognitas* $x_1, ..., x_n$ *es un colección de ecuaciones de la forma:*

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

Dado el sistema, este se puede representar en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 32 *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 335 \\ 9x + 14y &= 850 \end{aligned}$$

se representa matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 335 \\ 850 \end{bmatrix}$$

Definición 2.21 *Una solución del sistema es una n-ada* $(c_1, ..., c_n)$ *tal que* $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b$ *para cada* $i = 1, ..., n$. *Cuando el sistema tiene solución se dice consistente, de otra forma es inconsistente.*

2.4.2. Métodos de solución: Forma escalonada, el método de Gauss-Jordan, inversa de una matriz, regla de Cramer.

Forma escalonada y el método de Gauss-Jordan

Una técnica adecuada para resolver sistema de ecuaciones lineales de gran tamaño es el **método de eliminación** de Gauss-Jordan. Este método comprende una serie de operaciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para obtener en cada paso un **sistema equivalente**. La reducción concluye cuando el sistema original ha sido transformado de modo que aparezca en cierta forma canónica de la pueda leerse la solución con facilidad.

Definición 2.22 *Una matriz se le llama* ***reducida por renglones****, si:*

1. *Cada renglón compuesto completamente de ceros se encuentra bajo los renglones con algún valor distinto de cero.*

2. *El primer valor distinto de cero en cada renglón es 1 (llamado el 1 principal)*

3. *En cualesquiera dos renglones sucesivos (distintos de cero), el 1 principal en el renglón inferior se encuentra a la derecha en el renglón superior.*

4. Si una columna contiene un 1 principal, entonces los demás valores en esas columnas son ceros.

Definición 2.23 *Un sistema de ecuaciones de m ecuaciones lineales en las incognitas $x_1, ..., x_n$*

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

se puede representar mediante la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

A la representación matricial anterior se le llama ***matriz aumentada del sistema de ecuaciones.***

El método de eliminación de Gauss-Jordan

1. Se escribe la matriz aumentada correspondiente al sistema lineal.
2. En caso necesario, se intercambian renglones para obtener una matriz aumentada donde el primer valor en el primer renglón sea distinto de cero. Luego se pivotea la matriz con respecto a este valor.
3. En caso necesario, se intercambia el segundo renglón con otro para obtener una matriz aumentada donde el segundo valor del segundo renglón sea distinto de cero. Luego se pivotea con respecto de este valor.
4. Se continúa hasta que la última matriz tenga una forma reducida por renglones.

El siguiente teorema nos permite determinar si un sistema homogéneo tiene una solución única (la solución trivial) o un número infinito de soluciones.

Teorema 2.24 *Sea A la matriz reducida de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si A tiene exactamente k renglones diferentes de cero, entonces $k \leq n$. Además:*

1. *Si $k \leq n$, el sistema tiene un número infinito de soluciones.*
2. *Si $k = n$, el sistema tiene una única solución (la solución trivial).*

Inversa de una matriz

Si A es inversible, el sistema de ecuaciones:

$$AX = B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

tiene como única solución

$$X = A^{-1}B \tag{6}$$

Ejemplo 33 *Por (6) se tiene que la solución del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

es:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la solución es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

es decir, $x_1 = -7$ y $x_2 = 11$.

Ejemplo 34 ***Equilibrio entre oferta y demanda***

El equilibrio del mercado de bienes (el equilibrio del mercado) se produce cuando la cantidad demandada por los consumidores (Q_d) y la cantidad ofrecida (Q_s) por los productores de los bienes de servicio son iguales. De manera equivalente, el equilibrio del mercado se produce cuando el precio que un consumidor está dispuesto a pagar (P_d) es igual al precio que un productor está dispuesto a aceptar (P_s). La condición de equilibrio, por lo tanto, se expresa como

$$Q_d = Q_s = Q \quad y \quad P_d = P_s = P$$

Las funciones de demanda y la oferta de un producto son dadas por:

$$\text{Función de demanda:} \quad P = 100 - \frac{1}{2}Q$$
$$\text{Función de oferta:} \quad P = 10 + \frac{1}{2}Q$$

Calcular el precio de equilibrio y la cantidad algebraicamente y gráficamente.

Solución:

De las funciones de demanda y oferta obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$P + \frac{1}{2}Q = 100$$
$$P - \frac{1}{2}Q = 10$$

Este sistema escritó con matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Como la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el precio de equilibrio es $P = 55$ y la cantidad de equilibrio es $Q = 90$.

La siguiente figura ilustra el equilibrio del mercado, en el punto cuando la cantidad es 90, y precio de equilibrio \$55. El consumidor paga \$55 por la mercancía que es también el precio que recibe el productor por las mercancías.

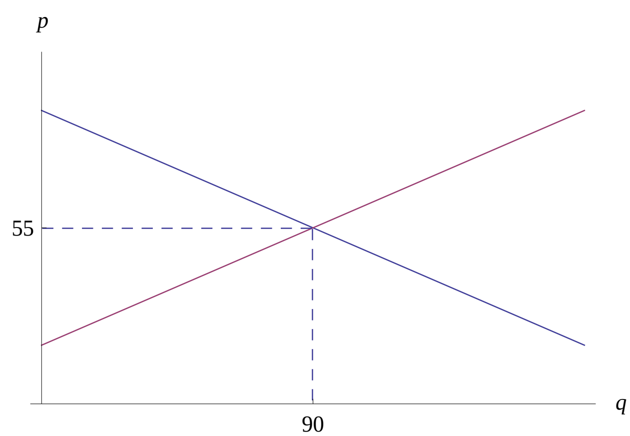


Figura 2: Equilibrio de mercado

Ejemplo 35 *(**Equilibrio en el mercado de trabajo**) El equilibrio del mercado de trabajo se produce cuando la mano de obra demandada por las empresas (L_d) es igual a la de la mano de obra ofrecida por los trabajadores (L_s) o, equivalentemente, cuando el salario que las empresas está dispuesto a ofrecer (w_s) es igual al salario que los trabajadores están dispuestos a aceptar (w_d). El Equilibrio del mercado de trabajo, por lo tanto, se expresa como*

$$L_d = L_s = L \quad y \quad w_d = w_s = w$$

de nuevo, en la solución para el equilibrio del mercado de trabajo, L y w se refieren al número de unidades de trabajo y el salario de equilibrio, respectivamente.

La función de demanda de trabajo y la funciones de oferta se dan como

$$\begin{aligned} \textit{Función de demanda:} \quad & w = 9 - .6L \\ \textit{Función de oferta:} \quad & w = 2 + .4L \end{aligned}$$

Solución:

De las funciones de demanda y oferta obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} w + 0.6L &= 9 \\ w - 0.4L &= 2 \end{aligned}$$

Este sistema escritó con matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} w \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

La siguiente figura ilustra el punto de equilibrio del mercado laboral, con número de equilibrio de trabajadores, 7 y \$4.80 el salario de equilibrio. Cada trabajador recibe \$4.80 por hora de sus servicios laborados que también el salario que la empresa está dispuesta a pagar.

Ejemplo 36 *Una economía cerrada es descrita por el sistema de ecuaciones que da el equilibrio entre el mercado de bienes y el mercado de dinero, la*

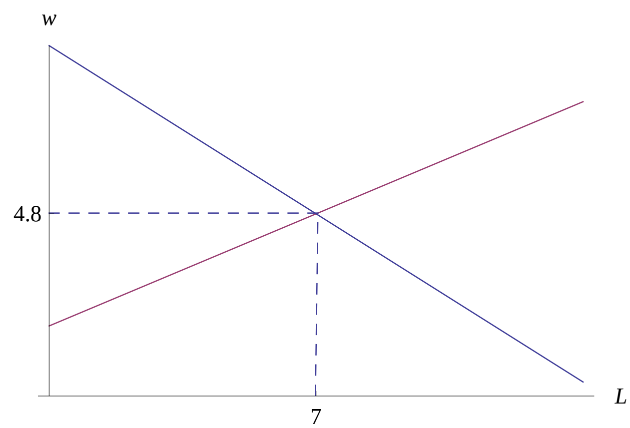


Figura 3: Equilibrio en el mercado de trabajo

relación entre la IS y la LM. El mercado de bienes (la parte IS del modelo) es descrito por:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= 15 + 0.8(Y - T) \\ T &= -25 + 0.25Y \\ I &= 65 - R \\ G &= 94 \end{aligned}$$

donde C es el gasto de consumo, T es el impuesto sobre los ingresos , Y es la producción total, I es el gasto de inversión, R es la tasa de interes y G es el gasto del gobierno.

$$\begin{aligned} L &= 5Y - 50R \\ M &= 1,500 \end{aligned}$$

donde L es la demanda de dinero y M es la oferta de dinero fija. Encontrar el nivel de equilibrio de Y y R.

Solución:

Expresamos el sistema de ecuaciones anterior en la forma

$$AX = B$$

donde A es una matriz 2×2 de coeficientes, $\boldsymbol{X}$ es el vector de variables 2×1 con entradas Y y R, y $\boldsymbol{B}$ es el vector de constantes 2×1. Primero resolveremos el equilibrio en el mercado de bienes y dinero, obteniendo las funciones IS y LM y luego ponemos las dos juntas. La función IS se obtiene de $Y = C + I + G$, como sigue:

$$\begin{aligned} Y &= 15 + 0.8Y + -0.8(-25 + 0.25Y) + 65 - R - 94 \\ Y(1 - 0.8 + 0.2) &= 15 + 20 + 65 + 94 - R \\ Y &= 485 - 2.5R \end{aligned}$$

La función LM es entonces dada de $M = L$:

$$1,500 = 5Y - 50R \quad o \quad Y = 300 + 10R$$

buscando entre las relaciones IS y LM como sistema de ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} Y + 2.5R &= 485 \\ Y - 10R &= 300 \end{aligned}$$

El cual se representa matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para Y y R tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.08 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 448 \\ 14.8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El nivel de equilibrio de producción de esta economiía es 448 y la tasa de interes 14.8 %. Notemos que como el nivel de ingresos, impuesto sobre los ingresos es $T = -25 + 0.25(448) = 87$, mientras que el gasto público es $G = 94$. El déficit público corriente es por lo tanto $T - G = -7$.

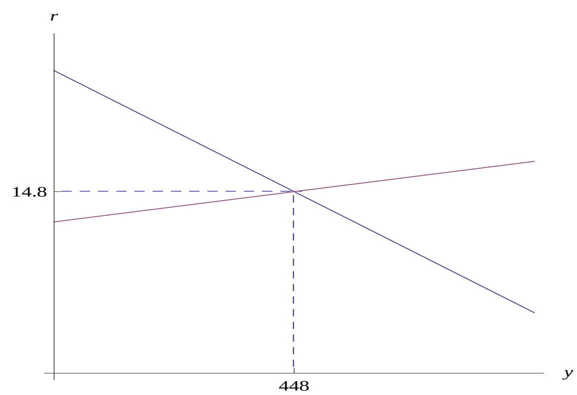


Figura 4: Modelo IS-LM de una economía cerrada

Regla de Cramer

Una de las aplicaciones más importantes de los determinantes es resolver ciertos tipos de sistemas de ecuaciones lineales.

Se va a estudiar el siguiente método, conocido como la **regla de Cramer** para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas dado por:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \cdots & + a_{nn}x_n = c_n \end{array}$$

Si el determinante Δ de la matriz de los coeficientes A es diferente de cero, entonces el sistema tiene una única solución. Además, la solución esta dada por:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

donde Δ_k, es el determinante de la matriz obtenida al remplazar la k-ésima columna de A por la columna de constantes.

Ejemplo 37 *Usar la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones*

$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$4x_1 + 4x_2 = 20$$

Solución:

La matriz de coeficientes y el vector columna son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix},$$

así que

$$\det A = 8 - (-4) = 12$$

por tanto

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 20 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{24}{12} = 2 \quad y \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{36}{12} = 3$$

Ejemplo 38 *En el modelo Keynesiano $IS - LM$*

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= 100 + 0.8Y \\ I &= 1000 - 20i \\ M^s &= M^d \\ M^s &= 2350 \\ M^d &= 0.5Y - 30i \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones anteriores obtener los valores de equilibrio del ingreso(Y) y la tasa de interes (i).

Solución:

Dadas las condiciones de equilibrio obtenemos:

$$\begin{aligned} Y &= 100{+}0.8Y + 1000 - 20i \\ 0.5Y - 30i &= 2350 \\ 0.2Y + 20i &= 1100 \\ 0.5Y - 30i &= 2350 \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 20 \\ 0.5 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 2350 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 10 = -16.$$

Usando la Regla de Cramer,

$$\bar{Y} = \frac{\begin{vmatrix} 1100 & 20 \\ 2350 & -30 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{-33000 - 47000}{-16} = 5000$$

$$\bar{i} = \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 1100 \\ 0.5 & 2350 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{470 - 550}{-16} = 5\,\%$$

Estatica comparativa

Para ilustrar el uso de las derivadas parciales, se recurre al modelo keynesiano simple de ingreso nacional Y, el nivel de consumo C, el nivel de inversión I_0 y el gasto del gobierno está dado por G_0. Por otra parte, la notación detrás de las dos últimas variables muestra que la inversión y el gasto público son variables exógenas. En el contexto de los modelos económicos, esto significa que dependen de factores externos al modelo y por lo tanto sus valores no pueden ser influenciados en el modelo y se deben tomar por sentados, es decir, ya estan dadas. Al mismo tiempo, las otras variables se suponen que son endógenas y, por tanto, dependen de factores internos del modelo. De hecho, las variables endógenas en el modelo depende de las exógenas, así como en los parámetros. Aquí C_0 es el nivel de consumo autónomo. El parámetro c es conocido como la propensión marginal a consumir. Queremos resolver el modelo a partir de las variables endógenas $\bar{Y}$ y $\bar{C}$ en equilibrio:

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= C_0 + cY \qquad\qquad C_0 > 0 \quad c \in (0,1) \end{aligned}$$

Así formuladas, las ecuaciones dadas forman la así llamada forma estructural del modelo. Cuando se resuelve por $\bar{Y}$ o $\bar{C}$, se obtiene la forma reducida del modelo. Tenemos la solución en forma reducida cuando la variable endógena se expresa en términos de las variables exógenas o parámetros en el modelo. Reescribiendo las ecuaciones,

$$\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -cY + C &= C_0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ C_0 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 - c > 0$

El determinante es claramente positivo, ya que la propensión marginal a consumir es menor que 1, calculando el valor de $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\begin{bmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ C_0 & 1 \end{bmatrix}}{1 - c} = \frac{I_0 + G_0 + C_0}{1 - c}$$

A partir de este modelo de ingreso, vemos que el equilibrio en el ingreso es positivo y se relaciona positivamente con la variable exógena inversión, el gasto gubernamental, y el consumo autónomo. Por otro lado, se relaciona positivamente con la propensión marginal a consumir.

La estática comparativa nos ayuda a estudiar la forma en que el ingreso $\bar{Y}$ responde ante cambios de las variables exógenas o de cualquier otro parámetro. Por ejemplo, podemos ver que el ingreso aumenta cuando la inversión aumenta en la economía simplemente diferenciando el ingreso con respecto a la inversión:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - c} > 0$$

Igualmente el efecto del gasto del gobierno en el ingreso. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresado por la derivada parcial

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - c} > 0$$

Vemos que el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el multiplicador de la inversión. Para el consumo tenemos

$$\bar{C} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -c & C_0 \end{bmatrix}}{1 - c} = \frac{C_0 + c(I_0 + G_0)}{1 - c} = \frac{C_0 + c(I_0 + G_0)}{1 - c} > 0$$

El equilibrio de consumo también es positivo. Podemos ver que el consumo se relaciona positivamente con el ingreso, el nivel de inversión y el gasto público.

Al igual que el ingreso el consumo aumenta con el nivel de inversión en la economía simplemente diferenciando el consumo con respecto a la inversión:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial I_0} = \frac{c}{1-c} > 0$$

Nuevamente el efecto del gasto del gobierno aumenta el consumo. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresada por la derivada parcial

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial G_0} = \frac{c}{1-c} > 0$$

Observemos que en en el caso del consumo, también el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el del multiplicador de la inversión.

Problema 1 *En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I_0 + G_0$, donde $C = 50 + 0.75Y$, $I = 100$ y $G_0 = 50$ ¿calcule el efecto de un incremento de 20 unidades en la inversión?.*

Solución

$$\begin{aligned} Y - C &= 100 + 50 \\ -0.75Y + C &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 - 0.75 = 0.25$

El determinante es positivo, calculando el valor de $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\begin{bmatrix} 150 & -1 \\ 50 & 1 \end{bmatrix}}{0.25} = 1000$$

Calculando el valor de $\bar{C}$

$$\bar{C} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 150 \\ -0.75 & 50 \end{bmatrix}}{0.25} = 1000$$

Ahora vamos obtener el multiplicador de la inversión

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1-0.75} = 4$$

Este multiplicador indica que por cada unidad que aumenta la inversión el ingreso se incrementará en 4 unidades. Luego, si la inversión aumenta en 20, entonces el ingreso aumentará en 80.

$$\begin{aligned} \partial \bar{Y} &= 4 * \partial I_0 \\ &= 4 * 20 \\ \partial \bar{Y} &= 80 \end{aligned}$$

Ejemplo 39 *El mercado de bienes es descrito por:*

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= C_0 + c(1-t)Y \\ I &= I_0 - bR \\ G &= \bar{G} \end{aligned}$$

El mercado de dinero es descrito por:

$$\begin{aligned} L &= kY - hR \\ M &= \bar{M} \end{aligned}$$

La economía en equilibrio es entonces caracterizada por:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + \bar{G} \\ C &= C_0 + c(1-t)Y \\ I &= I_0 - bR \\ \bar{M} &= kY - hR \end{aligned}$$

Estas son cuatro variables endógenas en el sistema Y, C, I y R y cuatro variables exogenas, $\bar{G}, C_0, I_0,$ y $\bar{M}$. El sistema se puede escribir en la forma:

$$A\boldsymbol{x} = B$$

donde A es una matriz 4×4 de parámetros, x es el vector de variables endogenas, y $\boldsymbol{B}$ es un vector de constantes y variables exógenas.

Supongamos que nos interesa determinar R. Lo haremos por la regla de Cramer. El sistema es dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -c(1-t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ k & 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G} \\ C_0 \\ I_0 \\ \bar{M} \end{bmatrix}$$

Obtenemos $\mid A \mid$ desarrollandolo a lo largo de la tercer fila de A:

$$\begin{aligned} \mid A \mid &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & -h \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -h \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 \end{vmatrix} - b \left(-1 \begin{vmatrix} -c(1-t) & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= -h[1-b(1-t)] - bk \end{aligned}$$

Resolviendo para $R = \mid A_4 \mid / \mid A \mid$, donde $\mid A_4 \mid$ se obtiene remplazando la cuarta columna de A por $\mathbf{B}$:

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \bar{G} \\ -c(1-t) & 1 & 0 & C_0 \\ 0 & 0 & 1 & I_0 \\ k & 0 & 0 & \tilde{M} \end{vmatrix}$$

Entonces $\mid A_4 \mid$ se obtiene expandiendo a lo largo de la tercer fila de A_4:

$$\begin{aligned} \mid A_4 \mid &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & \tilde{G} \\ -c(1-t) & 1 & C_0 \\ k & 0 & \tilde{M} \end{vmatrix} - I_0 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= k \begin{vmatrix} -1 & \tilde{G} \\ 1 & C_0 \end{vmatrix} + \tilde{M} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 \end{vmatrix} - I_0 \left(k \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= -k(C_0 + \tilde{G}) + \tilde{M}\,[1 - c(1-t)] - I_0 k. \end{aligned}$$

Por tanto R es dado por:

$$R = \frac{k(C_0 + I_0 + \tilde{G}) - \tilde{M}\,[1 - c(1-t)]}{h\,[1 - c(1-t)] + bk}.$$

TAREA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES

Tarea en equipo.

1. Resolver las siguientes pares de ecuaciones por el método de igualación:

   a)

   $$\begin{aligned} y &= 22 - x \\ 2y &= 4 + 8x \end{aligned}$$

   b)

   $$\begin{aligned} q &= 25 - p \\ q &= 4 + 2p \end{aligned}$$

2. Cuales de los siguientes sistemas son consistentes y cuales son inconsistentes:

   a)

   $$\begin{aligned} 5x - 8y &= 4 \\ -x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

   b)

   $$\begin{aligned} x - 4y &= 3 \\ -3x + 12y &= -14 \end{aligned}$$

   c)

   $$\begin{aligned} x - 4y &= 3 \\ -3x + 12y &= -9 \end{aligned}$$

   d)

   $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 10 \\ 4y + 2z &= 4 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

   a)

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ -7x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

4. Usar la regla de Cramer para calcular las soluciones del sistema de ecuaciones:

   a)

$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 8 \\ -3x + 14y &= 8 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 \qquad + 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5. Las funciónes de demanda y oferta para un producto (pantalones) son dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Función de demanda:} \quad & P = 50 - 3Q \\ \text{Función de oferta:} \quad & P = 14 + 1.5Q \end{aligned}$$

   donde P es el precio de un par de pantalones; Q es el número de pares de pantalones. Calcular a través de la matriz inversa el precio y la cantidad de equilibrio.

6. Las funciónes de demanda y oferta para el trabajo son dadas por:

$$\begin{aligned}\text{Función de demanda de trabajo:}\quad & w = 70 - 4L\\ \text{Función de oferta de trabajo:}\quad & w = 10 + 2L\end{aligned}$$

   Calcular con el método de Cramer el número de trabajadores empleados y el salario de equilibrio por hora.

7. Considere la siguiente economía cerrada:

$$\begin{aligned}C &= 15 + 0.8(Y - T)\\ T &= 25 + 0.25Y\\ I &= 65 - R\\ G &= 80\\ L &= 5Y - 50R\\ M &= 1,500\end{aligned}$$

   Resolver para el nivel de equilibrio de la renta y de la tasa de ínteres por cualquier método visto anteriormente.

8. El modelo de ingreso nacional es

$$\begin{aligned}Y &= C + I_0 + G_0 & &\\ C &= C_0 + c(Y - T) & C_0 > 0 &\quad c \in (0,1)\\ T &= T_0 + \beta Y & T_0 > 0 &\quad \beta \in (0,1)\end{aligned}$$

   Encontrar las derivadas parciales $\frac{\partial Y}{\partial G_0}$ y $\frac{\partial C}{\partial G_0}$. Determinar sus signos e interpretar su significado económico.

DERIVANDO LAS CURVAS IS Y LM

Practica en equipo con dos o tres integrantes en el aula de cómputo.

De la siguiente información acerca de las ecuaciones estructurales de una economía cerrada, derivar las curvas IS $(Y = C + I)$ y LM $(M/P = L)$, donde supondremos que $P = 1$. Resolver la renta de equilibrio y la tasa de interés a través de matrices con Excel

Ejercicio 1.

$$C = 50 + 0.8Y$$
$$I = 20 - 5R$$
$$L = 100 - R + 0.5Y$$
$$M = 200$$

Ejercicio 2

$$C = 15 + 3/4Y$$
$$I = 10 - 1.5R$$
$$L = 0.25Y - 0.5R$$
$$M = 8$$

Ejercicio 3

$$C = 20 + 0.8Y$$
$$I = 20 - 2R$$
$$L = 10 + 0.25Y - 0.5R$$
$$M = 55$$

Referencias

[1] Gilbert Strang, 2007. Algebra Lineal y sus aplicaciones, Thomson. 4a edición.

[2] Darell A. Turkington, 2007. Mathematical Tools for Economics, Blackwell Publishing.

[3] Mike Rosser, 2003. Basic Mathematics for Economicsts, Routledge. Routledge. 2da. edición.

[4] Nakos George, 2004. Algebra Lineal con aplicaciones. Internacional Thomson Editores. 2a Ed, México.