3. Espacios vectoriales

3.1. Espacio y subespacio vectorial

Definición 3.1 *Sea K un campo. Un espacio vectorial sobre K, o también llamado un K- espacio vectorial, consta de lo siguiente:*

1. *Un conjunto V, cuyos elementos se llaman vectores.*

2. *Una operación binaria en V, llamada suma de vectores, denotada por $+$, y que cumple lo siguiente:*

   a) *Para todos $x, y \in V$, se cumple que $x+y = y+x$ (conmutatividad).*

   b) *Para todos x, y y $z \in V$, se cumple que $(x+y)+z = x+(y+z)$ (asociatividad).*

   c) *Existe un elemento en V llamado cero y denotado por 0 tal que $0+x = x$, pata todo $x \in V$ (existencia del neutro aditivo).*

   d) *Para todo $x \in V$ existe un elemento $-x$ tal que $x+(-x) = 0$ (existencia de elementos inversos).*

3. *Una operación binaria en V, llamada producto de vectores, denotada por $\cdot$, y que cumple lo siguiente:*

   a) *Para todo $x \in V$, se tiene que $1\,x = x$, con $1 \in K$.*

   b) *Para todo $x \in V$ y para todo λ y $\mu \in k$, se tiene que $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.*

   c) *El producto por escalar es distributivo, es decir,*

   $$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$
   $$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,$$

   para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$

Definición 3.2 *Al conjunto V con la suma y el producto por escalar se le llama* ***espacio vectorial sobre*** *K.*

Ejemplo 40 *La operación de suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^3$ se formulan como:*

1. *Dados* (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, *se define:*

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

2. *Dados* $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *y* $c \in \mathbb{R}$, *se define:*

$$c\ (x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$$

Entonces $\mathbb{R}^3$ *con la suma y producto definidos anteriormente es un espacio vectorial. Para esto verifiquemos que* $\mathbb{R}^3$ *con la operación* $+$ *cumple las siguientes propiedades*

a) *Para todos* $x, y \in \mathbb{R}^3$, *se cumple que* $x + y = y + x$ *(conmutatividad). Sean* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *y* $y = (y_1, y_2, y_3)$, *entonces*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = y + x$$

b) *Para todos* $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, *se cumple que* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(asociatividad). Sean* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, *y* $z = (z_1, z_2, z_3)$, *entonces*

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3)\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3)\\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3)\\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3))\\ &= (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3))\\ &= x + (y + z)\end{aligned}$$

c) *Existe un elemento en* $\mathbb{R}^3$ *llamado cero y denotado por 0 tal que* $0 + x = x$, *pata todo* $x \in \mathbb{R}^3$ *(existencia del neutro aditivo). Sea* $0 = (0, 0, 0)$ *entonces si* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *tenemos*

$$0 + x = (0, 0, 0) + (x_1, x_2, x_3) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$$

d) *Para todo* $x \in \mathbb{R}^3$ *existe un elemento* $-x$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(existencia de elementos inversos). Sea* $x \in \mathbb{R}^3$, *con* $x = (x_1, x_2, x_3)$, *definimos el inverso de* x *por* $-x = (-x_1, -x_2, -x_3)$, *entonces tenemos*

$$\begin{aligned}x + (-x) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3)\\ &= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3))\\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) = (0, 0, 0) = 0\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\mathbb{R}^3$ con la operación producto $\cdot$ cumple

a) *Para todo $x \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $1\,x = x$, con $1 \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}^3$,*

$$1 \cdot x = 1 \cdot (x_1, x_2, x_3) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$$

b) *Para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y para todo λ y $\mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$. Sea $x \in \mathbb{R}^3$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos*

$$\begin{aligned}\lambda(\mu x) &= \lambda(\mu(x_1, x_2, x_3)) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \lambda(\mu x_3)) \\ &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, (\lambda\mu)x_3) = (\lambda\mu)x\end{aligned}$$

c) *El producto por escalar es distributivo, es decir,*

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x, \\ \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y,\end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$.

Sea $x \in \mathbb{R}^3$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot x &= (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2, x_3) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, (\lambda + \mu)x_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \lambda x_3 + \mu x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = \\ &= \lambda x + \mu x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = \lambda \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \lambda(x_3 + y_3)) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3) = \\ &= \lambda x + \lambda y.\end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$

Definición 3.3 *Sea W un subconjunto no vacío de V, se dice que W es un* ***subespacio vectorial*** *de V, si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todos x y $y \in W$, se tiene que $x + y \in W$, es decir, W es cerrado bajo la suma.*

2. *Para todo $x \in W$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in W$, es decir W es cerrado bajo producto por escalar.*

Ejemplo 41 *Sea*

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$$

es decir, $x \in W$, entonces $x = (x_1, x_2, 0)$. Entonces W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Para esto verifiquemos que si $x, y \in W$, entonces $x + y \in W$. Como $x, y \in W$, $x = (x_1, x_2, 0)$ y $y = (y_1, y_2, 0)$, luego $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$. Ahora veamos que si $x \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in W$, lo cual se sigue de que si $x = (x_1, x_2, 0)$, entonces $\lambda x = \lambda(x_1, x_2, 0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) \in W$.

Ejemplo 42 *Sea A una matriz 3 por 2. Entonces*

a) el espacio columna de A, el cual es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A y se le denota por $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

b) el espacio nulo de A, que consta de todos los vectores x tales que $Ax = 0$ y se le denota por $N(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

c) el espacio renglón de A, generado por los renglones de A, el cual es el espacio columna de A^T y se le denota por $C(A^T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

d) el espacio nulo izquierdo de A el cual es espacio nulo de A^T, denotado por $N(A^T)$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.