1.4. Variables separables.

Hasta el momento, el estudio se ha limitado a resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma: $x' = f(t,x)$, donde $f(t,x)$ es una función lineal. Aunque, para ser precisos, también se han estudiado funciones que aparentemente no son lineales, pero bajo una artificio algebraico se transformaban rápidamente en lineales, el caso de la ecuación de Bernoulli. Ahora se considera una situación más general, cuando $f(t,x) = -\frac{N(t,x)}{M(t,x)}$, donde $N(t,x)$ y $M(t,x) \neq 0$ son funciones continuas de variable real que pueden ser no lineales. De esta manera, se escribe $x' = \frac{dx}{dt}$ como:

$$M(x,t)dx + N(x,t)dt = 0 \tag{1.5}$$

bajo ciertas condiciones, la ecuación adopta formas que son posibles de resolver mediante el método de variables separables, ecuaciones homogéneas y ecuaciones exactas. Aquí solo se analizan los dos primeros casos y se invita al lector el aprendizaje del tercer método en cualquiera de los libros de ecuaciones diferenciales citados en la referencia bibliográfica.

Suponer que M solo depende de x y N de t; es decir, $M(x,t) = m(x)$ y $N(x,t) = n(t)$, entonces la ecuación (1.5) se reduce a:

$$m(x)dx + n(t)dt = 0$$

Es un par de ecuaciones separables, y si sucede que $g(x) = 1$, la solución es fácil de obtener mediante integración directa: $\int \frac{dx}{dt} = -\int n(t)$. De no ser el caso, asumir que ambas funciones son integrables, por lo que existe una constante arbitraria c tal que:

$$\int m(x)dx + \int n(t)dt = c \tag{1.6}$$

La ecuación expresa la solución general al problema, sea de manera explícita al despejar a x en función de t; o bien, de manera implícita mediante el *teorema de la función implícita.*

Ejemplo 1.12. *Resolver la ecuación diferencial de primer orden*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x+1}{t}$$

Primero reescribir la ecuación en forma separable, $\frac{dx}{x+1} = \frac{dt}{t}$ y proceder a integrar ambos términos:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dt}{t}$$
$$\log(x+1) = \log(t) + c$$

Despejar a x en términos de t, requiere utilizar la función exponencial,

$$e^{\log(x+1)} = e^{\log(t)+c}$$
$$x+1 = e^{\log(t)}e^{c}$$
$$x(t) = kt - 1$$

Ejemplo 1.13. *Resolver la ecuación diferencial de primer orden*

$$\frac{dx}{dt} - x^2 = -9$$

Igual que el problema anterior, expresar la ecuación en forma separable, $\frac{dx}{x^2-9} = dt$, y obtener la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \int dt$$
$$\int \frac{dx}{(x+3)(x-3)} = t + c$$

La integral del lado izquierdo de la ecuación se obtiene por fracciones parciales,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+3)(x-3)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} \\ 1 &= A(x-3) + B(x+3) \\ 1 &= (A+B)x + (3B - 3A) \end{aligned}$$

Dado que $A + B = 0$ y $3B - 3A = 1$, entonces $A = -\frac{1}{6}$ y $B = \frac{1}{6}$. La integral es,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+3)(x-3)} &= -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-3} \\ &= -\frac{1}{6}\log(x+3) + \frac{1}{6}\log(x-3) \\ &= \frac{1}{6}\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right) \end{aligned}$$

la solución es:

$$\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{\frac{1}{6}} = t + c$$
$$ke^t = \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{\frac{1}{6}}$$

Despejar a $x(t)$ en función de t,

$$x(t) = \frac{-3(1 + ke^{6t})}{ke^{6t} - 1}$$

Tal vez la ecuación (1.5) no puede separarse de manera directa y aplicar así el método de ecuaciones separables. Sin embargo, si las funciones $N(t,x)$ y $M(t,x)$ son homogéneas de grado r, entonces es posible realizar la sustitución $x = vt$ y obtener una ecuación separable.

Para ver como funciona el método, recordar que una función homogénea se define como:

Definición 1.1. *Una función continua $f(x,y)$ es homogénea de grado r, si para todo número real λ,*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f(x,y)$$

Por ejemplo, si la función $f(x,y)$ es homogénea de grado r, es posible escribir $f(x,y) = x^r(1, \frac{y}{x})$. En este sentido, dado que las funciones M y N son homogéneas de grado r y debido a que $dx = vdt + tdv$ entonces la ecuación (1.5) se reescribe como:

$$t^r M(v,1)(vdt + tdv) + t^r N(v,1)dt = 0$$

O bien,

$$m(v,1)(vdt + tdv) + n(v,1)dt = 0$$

donde m y n son funciones únicamente de v, que pueden reagruparse en la forma:

$$\frac{dt}{t} + \frac{m(v,1)}{m(v,1) + vn(v,1)}dv = 0 \tag{1.7}$$

Es una ecuación diferencial que se resuelve por variables separables.

Ejemplo 1.14. *Resolver la ecuación diferencial de primer orden*

$$(x^2 + tx)dt - t^2 dx = 0$$

La ecuación es homogénea de grado 2 en x y t. A continuación, realizar el cambio de variable $x = tv$ con $dx = vdt + tdv$,

$$(t^2v^2 + t^2v)dt - t^2(vdt + tdv) = 0$$

simplificar términos,

$$t^2v^2dt - t^3dv = 0$$

La integral a resolver es:

$$\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dv}{v^2}$$

la solución se obtiene de inmediato, $\log(t) = -\frac{1}{v} + c$. Por último, expresar la solución en términos de $x = tv$ es,

$$x = \frac{t}{c - \log(t)}$$

1.5. Estabilidad

Hasta el momento el análisis se ha centrado principalmente en ecuaciones diferenciales lineales, y en lo que respecta a las ecuaciones diferenciales no lineales que se han presentado han sido resueltas fácilmente con la ayuda de la ecuación de Bernoulli, el método de variables separables y homogéneas. Sin embargo, en muchos casos, es complicado ofrecer una solución cuantitativa a una ecuación diferencial no lineal, debido a no disponer de métodos numéricos apropiados. O incluso, por algunas razones válidas no es de interés ofrecer una respuesta cuantitativa a la ecuación diferencial de primer orden estudiada, ya que solo interesa comprobar si la trayectoria temporal de la variable es estable. En otras palabras, solo interesa el análisis cualitativo de una ecuación diferencial: si un punto estable es convergente (conforme pase el tiempo nos acercamos a dicho punto) o divergente (nos alejamos del punto).

Mas adelante se estudia a mayor detalle la teoría de la estabilidad de los sistemas diferenciales. Por el momento, se ofrece una introducción a la teoría de la estabilidad en el caso de una ecuación diferencial de primer orden no lineal. Sea,

$$x' = g(x) \tag{1.8}$$

una ecuación diferencial no lineal.

Un punto crítico o de equilibrio se define como el conjunto de puntos que satisfacen $x' = g(x^e) = 0$. Además, si la función $g(x)$ acepta derivada de primer orden, entonces es posible emplear la *expansión de Taylor* para linealizar la función (1.8) alrededor del punto crítico,

$$x' = g(x^e) + g'(x^e)(x - x^e) + R$$

donde R es el residuo. Sin pérdida de generalidad asumir que $R = \frac{g''(x^e)}{2!}(x - x^e) \to 0$, de forma tal,

$$x' = g'(x^e)x + g(x^e) - g'(x^e)x^e$$

Definir $a = g'(x^e)$ y $b = g(x^e) - g'(x^e)x^e$ conduce a la ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$x' = ax + b$$

La solución es $x(t) = ke^{at} - \frac{b}{a}$ y la estabilidad depende del coeficiente a. Por lo tanto, la ecuación (1.8) tiene un punto de equilibrio estable si y solo si $g'(x^e) < 0$ e inestable si $g'(x^e) > 0$.

La figura (1) muestra en el eje de la abscisa a la variable temporal x y en eje de la ordenada su derivada en el tiempo x'. Existen dos equilibrios, el primero x_1^e es inestable, debido a que $\frac{\delta k'}{\delta k} > 0$ por lo que k' se mueve en el mismo sentido de k. Es decir, si k aumenta (disminuye) en el tiempo k' también aumenta (disminuye). Mientras que el punto de equilibrio x_2^e es estable, porque k' se mueve en sentido inverso a k.

Ejemplo 1.15. *Analizar la estabilidad de las siguientes ecuaciones diferenciales.*

a) $x' = 2x - 4$

b) $x' = x^2 - 1$

En el ejemplo (a) el único punto crítico es $x = 2$. Dado que $g(x) = 2x$ y su derivada es 2, entonces la trayectoria de x diverge alrededor del punto de equilibrio.

En el ejemplo (b) existen dos puntos críticos: $x_1^e = 1$ y $x_2^e = -1$. El primer punto crítico es inestable porque $g'(1) = 2$, mientras que el segundo punto crítico es estable debido a que $g'(1) = -2$.

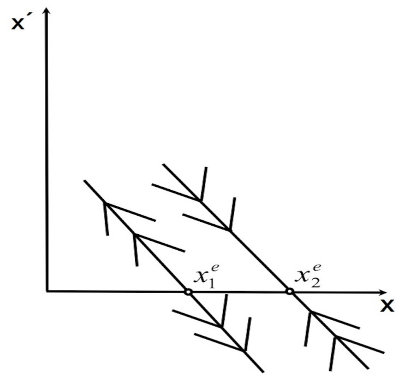

Figura 1: Estabilidad de una ecuación no lineal

1.6. Aplicaciones

1.6.1. El modelo de crecimiento económico de Solow

El modelo de Solow constituye un claro ejemplo de la utilización de las ecuaciones diferenciales de primer orden. La idea de Solow es construir un modelo que explique como las economías pueden lograr tasas de crecimiento permanentes. La acumulación de capital no era la solución, porque las economías exhiben una función de producción con producto marginal decreciente aunado a los rendimientos decrecientes a escala de los factores de la producción. De la misma manera, no es posible mantener tasas de crecimiento permanentes aumentando la tasa de ahorro, primero porque dicha tasa está limitada, no se puede ahorrar más allá del ingreso ($0 \leq s \leq 1$), y segundo va en detrimento de los niveles de consumo: un mayor ahorro significa menores recursos para el consumo. Tampoco la utilización de políticas de control natal es la respuesta, porque el factor trabajo es indispensable para el proceso productivo; y resulta moralmente inaceptable incurrir en políticas que eliminen a la población. Entonces, solo el avance tecnológico permite lograr el crecimiento sostenido. Toda política orientada a la innovación tecnológica induce a un mayor nivel de producción e ingresos y, por ende, en un mayor bienestar económico.

Supuestos:

i) Es una economía cerrada.

ii) $Y = F(K, L, T)$

iii) La función de producción es neoclásica:
a) Rendimientos constantes a escala, $F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda F(K, L, T)$.
b) Producto marginal positivo y decreciente, $F_K, F_L > 0$ y $F_{KK}, F_{LL} < 0$.
c) Condiciones de Inada: $\lim_{i \to 0} F_i(\cdot) = \infty$ y $\lim_{i \to \infty} F_i(\cdot) = 0$, para todo $i = K, L$.

iv) Tasa de ahorro exógena: $S = sY \quad 0 \leq s \leq 1$.

v) Las tasas de crecimiento de la tecnología y el trabajo son constantes: $T = T(0)e^{gt}$ y $L = L(0)e^{nt}$.

En una economía cerrada el ahorro agregado es igual a la inversión.

$$sY = K' + \delta K$$

δ es la tasa de depreciación y asumir que la función de producción es aumentadora de trabajo: $F(K, L, T) = F(K, TL)$. Por lo tanto,

$$sF(K, TL) = K' + \delta K$$

El análisis debe realizarse en términos per-cápita, de otra manera economías con poblaciones numerosas y con una gran producción serían mas ricas que de menor población. Por ejemplo, México, Brasil y otras serían más ricas que Holanda, Japón, etc., lo cual es inverosímil. Al dividir entre el trabajo aumentador la última ecuación

$$\begin{aligned} s\frac{F(K,TL)}{TL} &= \frac{K'}{TL} + \delta\frac{K}{TL} \\ sf\left(\frac{K}{TL}, 1\right) &= \frac{K'}{TL} + \delta\frac{K}{TL} \\ sf(k) &= \frac{K'}{TL} + \delta k \end{aligned}$$

donde

$$k = \frac{K}{TL}$$

derivando k respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} k' &= \frac{(TL)K' - K(TL' + LT')}{(TL)^2} \\ k' &= \frac{K'}{TL} - \frac{K}{(TL)}\frac{(TL' + LT')}{(TL)} \\ k' &= \frac{K'}{TL} - k(\frac{L'}{L} + \frac{T'}{T}) \\ k' &= \frac{K'}{TL} - (n+g)k \end{aligned}$$

Recordar que

$$sf(k) = \frac{K'}{TL} + \delta k$$

entonces

$$sf(k) = k' + (n + g + \delta)k$$

despejando

$$k' = sf(k) - (n + g + \delta)k$$

es una ecuación diferencial no lineal de primer orden que depende únicamente de k. Se conoce como la *Ecuación fundamental de Solow*. Con el propósito de encontrar una solución cuantitativa al problema, considerar la función de producción Cobb-Douglas,

$$Y = F(K, TL) = K^{\frac{1}{2}}(TL)^{\frac{1}{2}}$$

La función de producción es neoclásica, ya que satisface los supuestos enumerados anteriormente.

a)
$$F(\lambda K, T\lambda L) = (\lambda K)^{\frac{1}{2}}(T\lambda L)^{\frac{1}{2}} = \lambda F(K, TL)$$

b)
$$F_K = \frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}(TL)^{\frac{1}{2}} > 0$$
$$F_L = \frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}(TL)^{-\frac{1}{2}} > 0$$

c)
$$F_{KK} = -\frac{1}{4}K^{-\frac{3}{2}}(TL)^{\frac{1}{2}} < 0$$
$$F_{LL} = -\frac{1}{4}K^{\frac{1}{2}}(TL)^{-\frac{3}{2}} < 0$$

d)
$$F(0, TL) = 0 = F(K, T0)$$

e)
$$\lim_{K \to 0} \frac{(TL)^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} = \infty$$
$$\lim_{L \to 0} \frac{1}{2}\frac{K^{\frac{1}{2}}}{(TL)^{\frac{1}{2}}} = \infty$$

y

$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{2}\frac{(TL)^{\frac{1}{2}}}{(K)^{\frac{1}{2}}} = 0$$
$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{2}\frac{K^{\frac{1}{2}}}{(TL)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Expresando la función de producción en términos per-cápita,

$$y = f(k) = \frac{K^{\frac{1}{2}}(TL)^{\frac{1}{2}}}{TL} = (\frac{K}{TL})^{\frac{1}{2}}$$

entonces

$$f(k) = k^{\frac{1}{2}}$$

La ecuación fundamental de Solow es,

$$k' = sk^{\frac{1}{2}} - (n+g+\delta)k$$

desde luego, es una ecuación diferencial no lineal, pero se observa que es de la forma de una ecuación de Bernoulli. Por ende, multiplicar ambos lados de la ecuación por $k^{-\frac{1}{2}}$,

$$k'k^{-\frac{1}{2}} = s - (n+g+\delta)k^{\frac{1}{2}}$$

Sea $z = k^{\frac{1}{2}}$ tal que,

$$z' = \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}k'$$

$$2z' = k'k^{-\frac{1}{2}}$$

La ecuación de Solow es,

$$2z' = s - (n+g+\delta)z$$

$$z' + \frac{(n+g+\delta)}{2} = \frac{s}{2}$$

Es una ecuación diferencial lineal y la solución es:

$$z(t) = Ae^{-\frac{(n+g+\delta)}{2}t} + \frac{\frac{2}{s}}{\frac{n+g+\delta}{2}} z(t) = Ae^{-\frac{(n+g+\delta)}{2}t} + \frac{s}{n+g+\delta}$$

La trayectoria de $k(t)$ se deduce a partir de elevar al cuadrado $z(t)$,

$$k(t) = \left[Ae^{-\frac{(n+g+\delta)}{2}t} + \frac{s}{n+g+\delta}\right]^2$$

Se comprueba fácilmente que el capital converge al estado estable

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^2 = k^*$$

Ejemplo 1.16. *Analizar la estabilidad del modelo de Solow.*

La ecuación fundamental de Solow es:

$$k' = sf(k) - (n + g + \delta)k$$

El punto crítico a partir de igualar $k' = 0$ es,

$$\frac{sf(k^e)}{k^e} = (n + g + \delta)$$

Obtener la derivada de k' respecto a k y evaluar en el punto crítico genera,

$$\begin{aligned}\frac{\delta k'}{\delta k} &= sf'(k^e) - (n + g + \delta)\\ &= sf'(k^e) - \frac{sf(k^e)}{k^e}\\ &= s\left(f'(k^e) - \frac{f(k^e)}{k^e}\right)\end{aligned}$$

El supuesto que $f(k)$ es una función de producción neoclásica garantiza que el producto marginal es menor al producto medio, por lo que el término entre paréntesis es negativo y el equilibrio es estable. Por ejemplo, si $f(k) = k^{\frac{1}{2}}$ es fácil comprobar la aseveración anterior.

1.6.2. El gasto gubernamental

Suponer una economía cerrada donde el gasto gubernamental es financiado con deuda que coloca en el sector privado. La tasa de interés que paga el gobierno es constante y es la misma que obtienen los prestatarios en su portafolio de activos. La restricción del gobierno es:

$$B'(t) = rB(t) + G(t) - T(t)$$

El cambio en la deuda gubernamental obedece al pago de intereses y al desequilibrio presupuestal. Si el gobierno incurre en un déficit (un gasto superior a los ingresos por impuestos) el cambio en la deuda será positivo; en caso de un superávit, habrá una disminución de deuda. En términos per-cápita, y asumiendo que el impuesto es de suma fija y la población crece a la tasa constante $n > r$, se tiene:

$$\frac{B'(t)}{L(t)} = r\frac{B(t)}{L(t)}B(t) + \frac{G(t) - T(t)}{L(t)}$$

Sea $b(t) = \frac{B(t)}{L(t)}$, de modo tal que $\frac{B'(t)}{L(t)} = b' + nb$, por lo que,

$$b'(t) = (r - n)b(t) + g(t) - \tau(t)$$

Es una ecuación diferencial de primero orden de coeficiente y término variable, la solución es:

$$b(t) = e^{(n-r)t}\left(b(0) + \int e^{-(n-r)}(g(t) - \tau(t))\right)$$

O bien,

$$\frac{b(t)}{e^{(n-r)t}} = b(0) + \int e^{-(n-r)t}(g(t) - \tau(t))$$

La condición de solvencia del gobierno requiere que no exista un *juego Ponzi*, es decir, el gobierno no debe endeudarse permanente.

$$lim_{t\to\infty}\frac{b(t)}{e^{(n-r)t}} = 0$$

De forma que el valor presente de los ingresos fiscales debe ser igual al valor inicial de la deuda y el valor presente de los gastos.

$$\int e^{-(n-r)t}\tau(t) = b(0) + \int e^{-(n-r)}g(t)$$

El gobierno puede incurrir en desequilibrios presupuestales pero que deberán compensarse con superávit en sus finanzas, para así lograr un equilibrio intertemporal.