Algebra Lineal

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMIA

México, D.F., marzo de 2012

Contenido

1. Espacios Vectoriales

Una colección de objetos se llama conjunto, un miembro del conjunto se le conoce como elemento del conjunto; en matemáticas existen varios tipo de objetos que se pueden sumar y multiplicar por números, por ejemplo las funciones y los vectores, una definición en general que los incluye como un caso especial es:

Definición 1.1 *Un espacio vectorial V es un conjunto de objetos que se pueden sumar y multiplicar por números, de tal manera que la suma de dos elementos de V es un nuevo elemento de V, el producto de un elemento de V por un número es un elemento de V, y satisface las siguientes propiedades.*

Dados los elementos x, y y $z \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- *Existencia del elemento neutro en V, que se denota como **0**, tal que $0 + x = x + 0 = x$.*
- *Existencia del inverso aditivo, (-1), tal que $x + (-1)x = 0$.*
- *Conmutatividad: $x + y = y + x$*
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- $1 \cdot x = x$.

Ejemplo 1 *Las matrices simétricas son un espacio vectorial.*

Solución: Sea A_{ij} y A'_{ji} dos matrices de $n \times n$, donde $A = A'$ entonces, la suma se define por

$$(A + A')_{ij} = A_{ij} + A'_{ij}$$

El múltiplo escalar se define por

$$\alpha(A)_{ij} = \alpha A_{ij}$$

Ejemplo 2 *Ejemplo numérico.*

Solución: Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

la matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A y B pertenecen a las matrices simétricas.

Al verificar las propiedades

- $A + B$
- αA

Se concluye que $A + B$ es simétrica.

Sea $\alpha = -2$, entonces $-2A$ es simétrica

Se concluye que las matrices simétricas son un espacio vectorial.

Ejemplo 3 *Las matrices $m \times n$ son un espacio vectorial.*

Solución: Sea A y B dos matrices de $m \times n$, donde m y n son enteros. La suma está definida por:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

El producto de un escalar α y de la matriz A está definido por

$$\alpha(A)_{ij} = \alpha A_{ij}$$

Ejemplo 4 *Ejemplo numérico.*

Solución: Si $m = 2$ y $n = 3$

La matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices A y B pertenecen a las matrices $m \times n$.

Propiedades de espacio vectorial.

$A + B$ es de orden $m = 2$ y $n = 3$.
Si $\alpha = -5$, entonces αA es de orden $m \times n$

Por tanto las matrices $m \times n$ son un espacio vectorial.

2. Combinaciones lineales

Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, \ldots, v_n$ elementos de V. Se dice que $v_1, \ldots, v_n$ **generan** a V si, dado cualquier elemento $v \in V$, existen números $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

o bien

Sea V un espacio vectorial arbitrario y sean $v_1, \ldots, v_n$ elementos de V, y sean $x_1, \ldots, x_n$ números. A una expresión del tipo

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

se le conoce como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$. A los números $x_1, \ldots, x_n$ se les llama coeficientes de la combinación lineal.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_n$ es un subespacio de V.

Ejemplo 5 *Demostrar si el vector b es una combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.*

Sean los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

y el vector $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$,

Solución: Se plantea la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & -12 \end{array}\right]$$

Se resuelve a través del método de Gauss- Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} = 3/2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 5/2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se observa que los coeficientes de la combinación lineal son $x_1 = 3/2$, $x_2 = 5/2$ y $x_3 = 1$, entonces el vector b se expresa como la combinación lineal de v_1, v_2 y v_3

$$b = \frac{3}{2}v_1 - \frac{5}{2}v_2 + v_3$$

3. Independencia lineal

Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, \ldots, v_n$ elementos de V, entonces $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si existen números $x_1, \ldots, x_n$ todos iguales a 0, tales que

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$$

Los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si, y solo si, se satisface la siguiente condición.

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números tales que

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$$

entonces $a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$

Ejemplo 6 *Demostrar que los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 son linealmente independientes*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución: Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 &= 0 \\ c_1 + 4c_3 - 2c_4 &= 0 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Resolviendo por Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

El resultado es

$$\begin{aligned} c_1 &= -2c_4 \\ c_2 &= -c_4 \\ c_3 &= c_4 \\ c_4 &= c_4 \end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 son diferentes de cero, entonces v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente dependientes.

Ejemplo 7 *Demostrar que los vectores, v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Solución:La matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Se resuelve a través de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$
entonces $v_1,\ v_2$ y v_3 son linealmente independientes.

Teorema 3.1 *Sea V un espacio vectorial. Sean $v_1, \ldots, v_n$ elementos linealmente independientes de V. Sean $x_1, \ldots, x_n$ y $y_1, \ldots, y_n$ números tales que*

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$$

se tiene que $x_i = y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$

El teorema expresa el echo de que, cuando un elemento se escribe como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$ entonces sus coeficientes $x_1, \ldots, x_n$ están determinados en forma única. Esto es cierto cuando $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

Ejemplo 8 *Encontrar las coordenadas de $(1,0)$ son respecto a los vectores $(1,1)$ y $(-1,2)$*

Solución:
Se plantea el sistema

$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 = 0 \qquad (2)$$

La matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Se resuelve el sistema, las soluciones son $x_1 = 2/3$ y $x_2 = -1/3$, Por tanto las coordenadas de $(1, 0)$, con respecto a $(1, 1)$ y $(-1, 2)$ son $(2/3, -1/3)$.

Conjunto Generador

Si un espacio vectorial V consta de todas las combinaciones lineales $w_1, \ldots, w_l$, entonces estos vectores generan el espacio. Todo vector v en V es alguna combinación lineal de las $w's$.
Todo v proviene de $w's$ $v = c_1 w_1 + \cdots + c_l w_l$ para algunos coeficientes c_i

Ejemplo 9 *Sean los vectores w_1, w_2, w_3 demostrar que generan a $\mathbb{R}^3$.*

Sean $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, y $w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución: Se utiliza un vector arbitrario

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Se plantea la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a \\ 1 & 3 & 4 & b \\ 1 & 4 & 3 & c \end{array}\right)$$

Utilizando Gauss-Jordan se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7a - 3b - 3c \\ 0 & 1 & 0 & c - a \\ 0 & 0 & 1 & b - a \end{array}\right)$$

se toma un vector cualquiera en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo
$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $v = 12w_1 - 2w_2 - w_3$, es decir, w_1, w_2 y w_3 generan a $\mathbb{R}^3$.

4. Base

Si los elementos $v_1, \ldots, v_n$ de V generan V y además son linealmente independientes, entonces $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, o bien que constituyen o forman una base de V.

Ejemplo 10 *Demostrar que las columnas de A constituyen una base de* $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:
a) Se comprueba que los vectores sean linealmente independientes

Se forma la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se resuelve mediante Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

entonces las columnas son linealmente independientes.

b) Se comprueba la segunda propiedad, es decir si es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.

Se toma un vector arbitrario $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 2 & 2 & 8 & b \\ 2 & 1 & 0 & c \end{array}\right)$$

Aplicando Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12}a + \frac{1}{8}b - \frac{1}{6}c \end{array}\right)$$

Los columnas de A son linealmente independiente y conjunto generador entonces A es una base para el espacio $\mathbb{R}^3$.

5. Cambio de base

Ejemplo 11 *Sea* $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *y* $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *dos bases en* $\mathbb{R}^2$*.Si* $(x)_{B_1} = (b_1, b_2)$ *expresar este vector en términos de* B_2

Solución: Observar que la base no es canónica. Se deben expresar los vectores de B_1 como una combinación lineal de los vectores en B_2, es decir deben encontrarse constantes $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ tales que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva a los siguientes sistemas

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= -1 \\ x_{21} &= 2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{22} &= 2 \\ x_{22} &= -1 \end{aligned}$$

la solución es

$$
\begin{aligned}
x_{11} &= -3\\
x_{12} &= 3\\
x_{21} &= 2\\
x_{22} &= -1
\end{aligned}
$$

Se forma la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b_1 + 3b_2 \\ -2b_1 - b_2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo,

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

observar que x está en base canónica.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$
\begin{aligned}
-b_1 + 2b_2 &= 7\\
2b_1 - b_1 &= 4
\end{aligned}
$$

Se tiene $b_1 = 5$ y $b_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix}-3 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Se expresa el vector en función de la base B_2

$$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ejemplo 12 *Sea* $V = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ *y* $W = \left\{ \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix} \right\}$ *dado que V es la base canónica, se observa que la matriz de transición es*

$$A = \begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\4 & 5 & 6\\3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

entonces $(x)_W$ es la inversa de A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-8/3 & 7/3 & -1\\13/3 & -11/3 & 2\\-11/6 & 5/3 & -1\end{pmatrix}$$

Se toma un vector arbitrario, en este caso $(x)_V = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$$(x)_W = \begin{pmatrix}-8/3 & 7/3 & -1\\13/3 & -11/3 & 2\\-11/6 & 5/3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13/3\\23/3\\-19/6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = -\frac{13}{3}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + \frac{23}{3}\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} - \frac{19}{6}\begin{pmatrix}6\\6\\-2\end{pmatrix}$$

6. Dimensión

En $\mathbb{R}^n$ no se pueden encontrar más de n vectores linealmente independientes, más aún cualesquiera n elementos de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes deben generar a $\mathbb{R}^n$ y, en consecuencia, deben de formar una base. Si una base de un espacio vectorial tiene n elementos y otra base tiene m elementos, entonces $m = n$, es decir dos bases deben tener el mismo número de elementos, esta propiedad permite definir la dimensión de un espacio vectorial como el número de elementos de cualquier base.

Ejemplo 13 *¿ Cual es la dimensión de las matrices* 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dimensión es 4.

Ejemplo 14 *¿ Cual es la dimensión de las matrices simétricas* 3×3

La dimensión es 6, como es simétrica se repiten 3 elementos.

7. Rango

El rango de una matriz es igual a la dimensión del espacio generado por los renglones.

Hallar el rango de la matriz. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

Se calcula la forma reducida de la matriz A

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se observa que solo se tienen dos pivotes, uno en la primera columna y otro en la segunda, o bién en el primer renglon y segundo renglón, la cual significa que el rango de la matriz es 2, esto es, el primer y segundo reglón son linealmente independientes, el tercer renglón es una combinación lineal del renglón uno y dos, también se observa que la tercera o cuarta columna es una combinación lineal de la primera y segunda columna.

8. Transformaciones lineales

Transformación

Sean S y S', dos conjuntos. Una aplicación de S en S' es una asociación tal que a todo elemento de S le asocia un elemento de S'.
Una función es un tipo especial de aplicación, a saber, es una aplicación de un conjunto en el conjunto de números, es decir en $\mathbb{R}$.
Si $T : S \to S'$ es una aplicación, y si u es un elemento de S, entonces se denota con $T(u)$, el elemento de S' asociado a u mediante T. $T(u)$ es el valor de T en u, o también que es la imagen de u bajo T. El símbolo $T(u)$ se lee como "T de u". Al conjunto de todos los elementos $T(u)$, cuando u varía sobre todos los elementos de S, se le conoce como imagen de T. Si W es un subconjunto de S, entonces el conjunto de elementos $T(w)$, cuando w varía sobre todos los elementos de W, recibe el nombre de imagen de W bajo T y se denota con $T(W)$.
Sea $F : S \to S'$ una aplicación de un conjunto S en un conjunto S'. Si x es un elemento de S, se escribe como:

$$x \mapsto F(x)$$

con una flecha especial $\mapsto$ para denotar la imagen de x bajo F. Así por ejemplo, la aplicación F tal que $F(x) = x^2$ como la aplicación

$$x \mapsto x^2$$

Transformaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales. Una aplicación lineal
$L : V \to W$
Es una aplicación que satisface las siguientes dos propiedades. Para cuales-

quiera elementos de u y v de V, y cualquier escalar c, se tiene

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

y

$$L(cu) = cL(u)$$

Ejemplo 15 *Sea $A = (a_1, \ldots, a_n)$ un vector fijo, y se define*

$$L_A(X) = A.X$$

entonces L_A es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ debido a
$A.(X+Y) = A.X + A.Y \qquad A.(cX) = c(A.X)$

Ejemplo 16 *Sea D el operador diferencial $D : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ definido por $D(f) = f'$, demostrar que D es una transformación lineal.*
Solución: Sean f y g funciones diferenciables y c un escalar, entonces

$$\begin{aligned} D(f+g) &= (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g) \\ D(cf) &= (cf)' = cf' = cD(f) \end{aligned}$$

Ejemplo 17 *Sea $s : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ por $s(f) = \int_a^b f(x)\ dx$, demostrar que s es una transformación lineal.*
Solución: Sean f y g en $\mathcal{C}[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} s(f+g) &= \int_a^b (f+g)(x)\ dx \\ &= \int_a^b (f(x)+g(x))\ dx \\ &= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \\ &= s(f) + s(g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(cf) &= \int_a^b (cf)(x)\ dx \\ &= \int_a^b cf(x)\ dx \\ &= c\int_a^b f(x)\ dx \\ &= cs(f). \end{aligned}$$

Ejemplo 18 *Suponer que T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tal que*

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2-3x+x^2 \quad y \quad T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 1-x^2$$

Encontrar

$$T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \quad y \quad T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Solución:

La base es $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \right\}$, *resolviendo*

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema con el método de Gauss- Jordan y se tiene que $c_1 = -7$ y $c_2 = 3$. Entonces

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} &= T\left(-7\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)\\
&= \left(-7T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)\\
&= -7(2-3x+x^2) + 3(1-x^2)\\
&= -11 + 21x - 10x^2
\end{aligned}$$

Ahora se resuelve para $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned}
c_1 &= 3a - 2b\\
c_2 &= b - a
\end{aligned}$$

de manera que

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= T\left((3a-2b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\
&= (3a-2b)T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a)T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= (3a-2b)(2-3x+x^2) + (b-a)(1-x^2) \\
&= (5a-3b) + (-9a+6b) + (4a-3b)x^2
\end{aligned}
$$

observar que cuando $a=-1$ y $b=2$ se obtiene

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -11 + 21x - 10x^2.$$

Ejemplo 19 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y-3z \end{pmatrix}$$

y sean $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $C = \{e_2, e_1\}$ bases para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Encontrar la matriz de T con respecto a B y C.

Solución:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Se necesitan los vectores coordenados con respecto a la base C. Se plantea el sistema para obtener las coordenadas

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas son

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\alpha_5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\alpha_6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de transformación es

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

Si se toma a $v=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y\\x+y-3z\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\10\end{pmatrix}$$

y al utilizar

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$$

Se retoma la matriz de transformación, se forma el sistema homogéneo para encontrar el núcleo.

$$\begin{aligned}x_1+x_2-3x_3&=0\\x_1-2x_2&=0\end{aligned}$$

Se plantea la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

se resuelve

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

la solución es

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Rango &= 2 \\ Nulidad &= 1 \\ Nucleo &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ejemplo 20 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de transformación, el núcleo, imagen , nulidad y rango.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \; T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \; y \; T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de transformación es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Se obtiene la forma escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango es 3, nulidad= 0, el núcleo es $\{0\}$

$$La\ imagen = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

9. Valores y vectores propios

Los valores y vectores propios asociados a matrices simétricas son de gran utilidad en la ciencia económica. Dos ejemplos, la matriz Hesssiana y la matriz de varianza y covarianza de un conjunto de variables aleatorias, son matrices simétricas.

La siguiente matriz simétrica de 2×2 ejemplifica todas las propiedades que surge de la aplicación de los valores y vectores propios.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$p(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$
$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

Los valores propios son: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$.. Los respectivos vectores propios,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $v_2 = (1, 1)$.

La primera propiedad es que los valores propios asociados a una matriz simétrica son reales, por ende, los vectores también son reales.

Si los valores propios son distintos, no solo los vectores propios serán independientes, sino que formarán una base ortogonal: $v_1 v_2 = 0$.

$$(-1, 1)(1, 1) = 1 + 1 = 0.$$

Mas aún, es posible formar una base ortonormal. Sea

$$\begin{aligned} \|v_1\| &= \sqrt{-1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \|v_2\| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\bar{v_1} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad \bar{v_2} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Observar que $\bar{v_1}\bar{v_1} = \bar{v_2}\bar{v_2} = 1$ y $\bar{v_1}\bar{v_2} = \bar{v_2}\bar{v_1} = 0$.

La matriz ortonormal es,

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La ventaja de calcular la matriz ortonormal es facilitar el cálculo de la inversa de la misma, ya que

$$N = (\bar{v_1}, \bar{v_2}) \ \text{ y } \ N' = \begin{pmatrix} \bar{v_1}' \\ \bar{v_1}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} N'N &= \begin{pmatrix} \bar{v_1}'\bar{v_1} & \bar{v_1}'\bar{v_2} \\ \bar{v_2}'\bar{v_1} & \bar{v_2}'\bar{v_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N'N = I$, es una matriz unitaria y se deduce que $N' = N^{-1}$.

$$\begin{aligned} N^{-1} &= \left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right) \\ &= N' \end{aligned}$$

Este resultado hace más fácil la diagonalización de una matriz. Recordar que $AN = N\Lambda$ o bien,

$$\Lambda = N^{-1}AN$$
$$\Lambda = N'AN$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$