4. Estabilidad

4.1. Introducción

En esta sección se estudia la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales. En particular, dado un punto inicial cercano a la solución del sistema ¿Es posible encontrar trayectorias que mantengan o acerquen a la solución? Si este es el caso, el sistema es estable, en caso de que alejen, el sistema es inestable.

Estudiar la teoría de la estabilidad permite analizar sistemas no lineales, que son muy comunes en el análisis económico y en distintas ramas de las ciencias exactas. Sobre todo, porque en la gran mayoría de los casos, el interés solo se centra en determinar si un sistema es estable o no lo es, si una política económica apunta a obtener los resultados deseados en el largo plazo, etc.

4.2. Puntos críticos y estabilidad

Sea $X(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ una función vectorial y X' su derivada respecto al tiempo. El sistema no lineal

$$\begin{aligned} X' &= F(t, X) \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

tiene a la variable t como argumento. En este sentido, se dice que el sistema es dependiente del tiempo. Aquí solo se estudian sistemas autónomos, aquellos que son independientes del tiempo.

Definición 4.1. ***Sistema autónomo***. *Sea x' de derivada con respecto al tiempo de la función vectorial $x = (x_1, ..., x_n)$. Un sistema autónomo se define como:*

$$\begin{aligned} X' &= F(X) \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

Observar que la variable t se introduce como argumento en cada una de las variables $x_1, ..., x_n$ de forma que no afecta directamente a la función F, aunque si indirectamente.

Definición 4.2. *Un vector $X^e \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico o de equilibrio si en un sistema autónomo*

$$X' = F(X)$$

se cumple

$$F(X^e) = 0.$$

Ejemplo 4.1. *Sea el siguiente par de ecuaciones diferenciales no lineales*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_1 x_2 \\ x_2' &= 3x_1 - 2x_2 - x_1 x_2 \end{aligned}$$

Los puntos críticos se encuentran cuando $x_1' = x_2' = 0$.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_1 x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_1 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

al sumar el par de ecuaciones

$$4x_1 - 3x_2 = 0$$

al despejar se obtiene $x_1 = \frac{3}{4}x_2$, y sustituir en la primera ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_2^2 &= 0 \\ \frac{1}{4}x_2(1 + 3x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Existen dos puntos críticos:

$$\begin{aligned} (x_1^e, x_2^e) &= (0,0) \\ (x_1^e, x_2^e) &= (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. *Considerar el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

los puntos críticos se obtienen a partir $x_1' = x_2' = 0$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

existe una solución trivial, $x_1 = x_2 = 0$, si y solo si el determinante de la matriz es distinto de cero. En caso contrario existe una recta de soluciones.

Definición 4.3. *Sea X^e un punto crítico o de equilibrio para $x' = F(x)$. Se dice que X^e es:*

1. *Estable si dado cualquier $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ se encuentra un X_0 en el conjunto solución, denotado por $X = \psi(t)$, y $\|X_0 - X^c\| < \delta$, entonces $\|\psi(t) - X^e\|$.*

2. *Asintóticamente estable si, además de ser estable, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que X_0 exista $\|x_0 - X^e\| < \delta$, entonces $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - X^e\| = 0$.*

3. *Inestable en otro caso.*

La función $f(t) = \cos(t)$ fluctúa entre -1 y 1; de modo, que es estable. La función exponencial $f(t) = e^{\lambda t}$ con $\lambda < 0$ es asintóticamente estable ya que conforme $t \to \infty$, $f(t) = 0$. Mientras que si $\lambda > 0$, es inestable debido a que crece indefinidamente conforme $t \to \infty$.

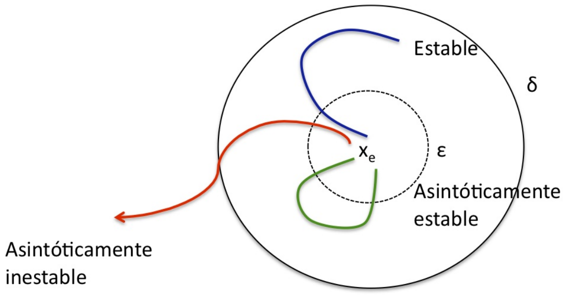


Figura 1: Estabilidad e inestabilidad

La figura (1) muestra puntos de equilibrios estables e inestables. Sea x_0 un punto cercano al de equilibrio, x^e, la distancia entre ambos puntos se denota con ε, y la de $\psi(t)$ con x^e a través de δ. Un punto crítico es estable, si se encuentra dentro de la norma euclidiana; mientras que en un punto asintóticamente estable converge a x^e. Un punto inestable sale del radio de estabilidad. Con el fin de ser accesible el análisis de estabilidad, el lugar propicio para iniciar es con los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

4.3. Estabilidad de sistemas lineales

Sin pérdida de generalidad, el análisis se limita a un sistema de dos ecuaciones y dos variables. Sea entonces el sistema,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

si la matriz es no singular, el único punto crítico se sitúa en el origen. Sea la matriz A la matriz de coeficientes con polinomio característico,

$$P(A) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

y ecuación característica,

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc).$$

la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal y el determinante de la matriz A es $ad - bc$, entonces la ecuación característica es

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = \lambda^2 - (\text{Traza}\, A)\lambda + |A| = 0$$

las raíces de la ecuación son:

$$\lambda = \frac{\text{Traza}\, A \pm \sqrt{(\text{Traza}\, A)^2 - 4|A|}}{2}$$

Donde

$$\lambda_1 = \frac{\text{Traza}\, A + \sqrt{(\text{Traza}\, A)^2 - 4|A|}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{\text{Traza}\, A - \sqrt{(\text{Traza}\, A)^2 - 4|A|}}{2}$$

Se verifica que $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Traza}\, A$, mientras que el producto de las raíces es una diferencia de cuadrados, y se obtiene como resultado $\lambda_1\lambda_2 = |A|$

De esta manera, se dispone de información relevante sobre la matriz A. Primero, la traza de la matriz es igual a la suma de los valores propios; segundo, el determinante de la matriz es igual al producto de los valores propios.

Al resolver de manera cuantitativa el sistema de ecuaciones diferenciales, se tienen los siguientes casos:

Caso A: $(\text{Traza})^2 > 4|A|$

Las raíces son reales y distintas, y el par de soluciones son

$$x_1 = v_1 e^{\lambda_1 t}$$
$$x_2 = v_2 e^{\lambda_2 t}$$

tomar la norma euclidiana de cada solución,

$$\|x_1\| = \|v_1 e^{\lambda_1 t}\| = \|v_1\| e^{\lambda_1 t}$$
$$\|x_2\| = \|v_2 e^{\lambda_2 t}\| = \|v_2\| e^{\lambda_2 t}$$

Si $t \geq 0$ entonces las soluciones son asintóticamente estables, si y solo si $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ ya que $\lim_{t \to \infty} \|v_i\| e^{\lambda_i t} = 0 \ \forall\ i = 1,2$. Si λ_1 y λ_2 son positivos entonces las soluciones son inestables, crecen indefinidamente. Raíces de signos contrarios generan una trayectoria punto de silla, la raíz positiva es inestable mientras que la negativa es estable.

Vinculando el análisis cuantitativo con la información de la matriz A se establece que:

A1) El sistema es asintóticamente estable si,

  i) Traza $A = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$
  ii) $|A| = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

A2) Es inestable si,

  i) Traza $A > 0$
  ii) $|A| > 0$

A3) El sistema tiene un punto de silla si,

i) Traza $A \geq 0$

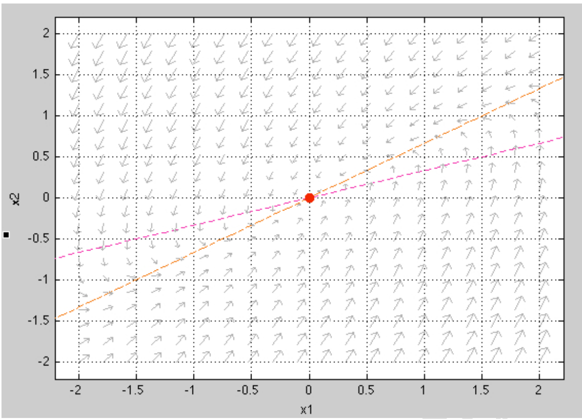
ii) $|A| < 0$

Ejemplo 4.3. *Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos*

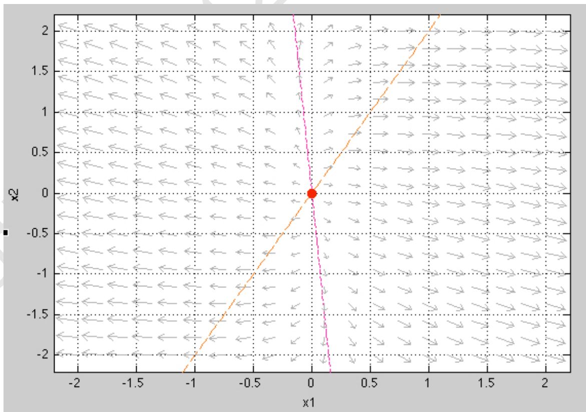
a) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



Ejemplo 5.3(a)



Ejemplo 5.3(b)

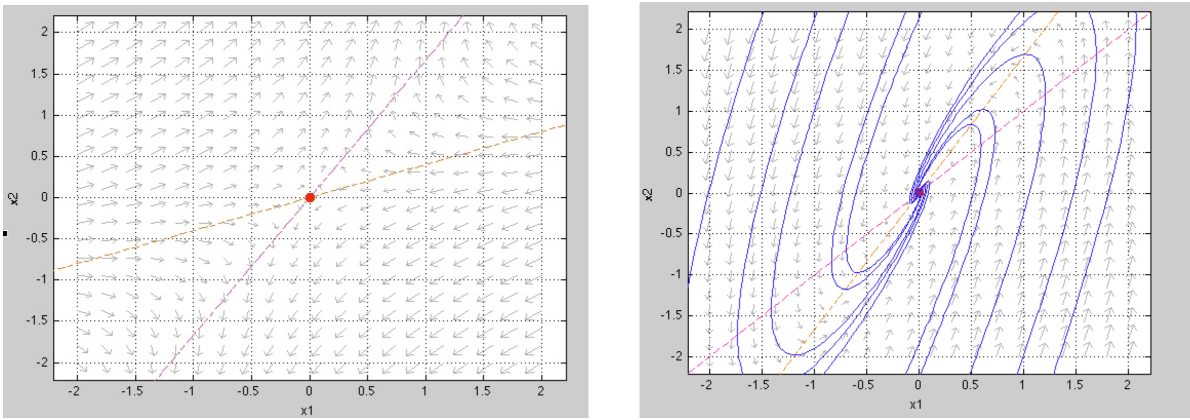
Figura 2: Diagrama de fases

Los 3 ejemplos tienen una matriz A no singular, el punto crítico se encuentra en el origen: $x^e = (0,0)$. En el ejemplo $a)$ la traza $A = -5$ y $|A| = 6$, dado que $(\text{Traza } A)^2 = 25$ y es mayor a $4|A| = 24$, entonces es un sistema asintóticamente estable. En $b)$ la traza $A = 4$ y $|A| = 2$, el sistema es inestable. Mientras que $c)$, la traza $A = 0$ y $|A| = -19$, lo que constituye una trayectoria punto de silla.

Caso B: $(\text{Traza} A)^2 < 4|A|$.

Existen raíces distintas, pero con la particularidad que son complejas.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Traza} \quad A \pm \sqrt{(4|A| - \text{Traza} \quad A)^2}\sqrt{-1}}{2}$$
$$\lambda_1 = h + vi$$
$$\lambda_2 = h - vi$$



Ejemplo 5.3(c) Ejemplo 5.4(a)

Figura 3: Diagrama de fases

donde $h = \frac{1}{2}(\text{Traza} A)$ y $v = \frac{1}{2}\sqrt{4|A| - (\text{Traza}\, A)^2}$ Una vez comprobamos que,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = h + iv + h - vi = \text{Traza}\, A$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1\lambda_2 &= (h + iv)(h - iv) \\
&= h^2 + hvi - hvi - v^2 i^2 \\
&= h^2 - v^2(\sqrt{-1})^2 \\
&= h^2 + v^2 \\
&= |A|.
\end{aligned}$$

La solución cuantitativa al sistema complejo es:

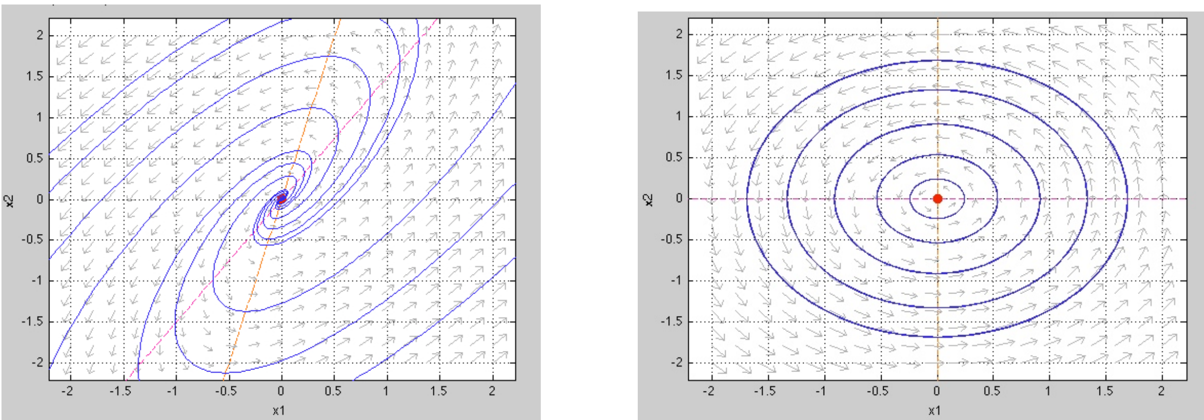
$$\begin{aligned}
x_1 &= e^{ht}(\alpha \cos vt - \beta \, sen\, vt) \\
x_2 &= e^{ht}(\beta \cos vt + \alpha \, sen\, vt)
\end{aligned}$$

Cuyas normas euclidianas son

$$\begin{aligned}
|x_1| &= |e^{ht}|(|\alpha|\,|\cos vt| - |\beta|\,|sen\, vt|] \\
|x_2| &= |e^{ht}|(|\beta|\,|\cos vt| + |\alpha|\,|sen\, vt|]
\end{aligned}$$

para $t \geq 0$, observar que tanto $|\cos vt| < 1$ y $|sen\, vt| < 1$, lo que obliga a que $h < 0$ y exista estabilidad asintótica. Si $h > 0$ el sistema es inestable y con $h = 0$ el sistema es estable. Por último, en todos los casos $|A| > 0$, debido a que el módulo de un número complejo es positivo.

Ejemplo 4.4. *Considerar los siguientes ejemplos, en cada uno de ellos se cumple* $(\text{Traza}\, A)^2 < 4|A|$.



Ejemplo 5.4(b) Ejemplo 5.4(c)

Figura 4: Diagrama de fases

a) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

En el ejemplo $a)$ Traza $A = -2$ y $|A| = 2$, el sistema es asintóticamente estable. En $b)$ es inestable porque la traza $A = 2$. El $c)$ muestra un sistema estable, pero no asintóticamente estable.

Caso C $(\text{Traza}\, A)^2 = 4|A|$

Es el caso de raíces repetidas: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\text{Traza}\ \ A}{2}$, con $|A| = \lambda^2$. Si $\lambda \neq 0$, entonces la matriz no es singular y el punto crítico se encuentra en el origen. Además se presentan dos situaciones con raíces repetidas:

C1) Existen los suficientes vectores propios para diagonalizar. El par de soluciones son de la forma:

$$x_1 = v_1 e^{\lambda t}$$
$$x_2 = v_2 e^{\lambda t}$$

La estabilidad asintótica se garantiza cuando $\lambda < 0$, pero no cuando $\lambda > 0$. Por lo tanto, si la traza de A, es negativa existe estabilidad asintótica y en caso contrario, inestabilidad.

C2) Recordar que si no existen los suficientes vectores propios para diagonalizar, se utiliza la base canónica de Jordan. El par de soluciones son

$$x_1 = v_1 e^{\lambda t}$$
$$x_2 = (v_1 t + v_2) e^{\lambda t}$$

Si $\lambda < 0$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} |x_1| = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} |x_2| = 0$$

Se comprueba de inmediato con la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\lambda t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\lambda t}} = 0$$

Por lo tanto, si la traza $|A| < 0$ el sistema es asintóticamente estable. Si $\lambda > 0$ resulta obvio que el sistema es inestable.

Ejemplo 4.5. *En los siguientes ejemplos $|A| \neq 0$, el punto crítico se encuentra en el origen. Además, $(\text{Traza } A)^2 = 4|A|$, situación que genera raíces repetidas.*

a) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2.5 \\ -2.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

En el ejemplo $a)$ el sistema es dinámicamente estable: Traza $(A) = -1$; mientras que el ejemplo $b)$ existe inestabilidad.

4.4. Estabilidad de sistemas no-lineales

La presente sección continúa con el análisis de dos ecuaciones y dos variables. El sistema no lineal autónomo es de la forma,

$$\begin{aligned} x_1' &= f(x_1, x_2) \\ x_2' &= g(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Los supuestos de partida son:

a) Existen puntos de equilibrio en una región Ω que contiene al origen. Cualquier punto de equilibrio fuera del origen debe ser trasladado al mismo.

b) Las funciones f y g son de clase ζ^1 en Ω; es decir, admiten derivadas parciales de primer orden.

Los supuestos son indispensable para construir el *método directo de Lyapunov*, que se ha popularizado en el análisis de la estabilidad o inestabilidad de un punto de equilibrio.

Definición 4.4. ***(Función de Lyapunov).*** *Sea Ω una región que contiene al origen y sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase ζ^1 en Ω que es definida positiva; esto es,*

i) $h(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega$

ii) $h(x_1, x_2) = 0$ *si y solo si* $(x_1, x_2) = (0,0)$

Si además, el, producto interior de los vectores en todos los puntos de Ω es

$$\nabla h(x_1, x_2)\mathbb{F} \leq 0 \tag{4.2}$$

Donde $\nabla h(x_1, x_2) = (\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2})$ y $\mathbb{F} = (f, g)$. Entonces, es una función de Lyapunov para el sistema autónomo (4.1).

Teorema 4.1. *Sea el origen de un punto crítico o de equilibrio del sistema autónomo (4.1), entonces el punto es estable si existe una función de Lyapunov para el sistema.*

La demostración se omite, y en cambio se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6.

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ x_2' &= -2x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{aligned}$$

El punto de equilibrio es el origen: $(x_1, x_2) = (0,0)$. El siguiente paso es deducir la función de Lyapunov. De momento se omite éste paso, mas adelante se explica el procedimiento para hacerlo. Por ahora, basta con utilizar la función de Lyapunov, $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Resulta obvio que para cualquier x_1 y x_2 la función $h(x_1, x_2) \geq 0$ y cuando $x_1 = x_2 = 0$, entonces $h(0,0) = 0$. Los primeros requisitos del teorema (4.1) se satisfacen, solo falta encontrar el producto interior,

$$\begin{aligned} \nabla h F &= (2x_1, 2x_2)(-x_1^3 + x_1 x_2^2, -2x_1^2 x_2 - x_2^3) \\ &= -2x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 - 4x_1^2 x_2^2 - 2x_2^4 \\ &= -2(x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4) \leq 0 \end{aligned}$$

Ninguno de los términos del paréntesis es negativo, por lo tanto el sistema es asintóticamente estable.

Desde luego, es fácil analizar la estabilidad de un sistema si todas la funciones a estudiar son simples como el ejemplo anterior. La mayoría de las ocasiones no es así, y posiblemente no se deduzca la función de Lyapunov. Sin embargo, la ayuda de los sistemas lineales es fundamental para deducir la función.

Sea el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} x_1' &= a_1 x_1 + b x_2 \\ x_2' &= c_1 x_1 + d x_2 \end{aligned}$$

En términos matriciales

$$X' = AX$$

Si la raíces del polinomio característico del sistema son negativas, $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, el par de soluciones son de la forma: $x_1 = v_1 e^{\lambda_1 t}$ y $x_2 = v_1 e^{\lambda_2 t}$.

Sean $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$ los vectores canónicos, y se procede a utilizarlos para generar la condición inicial,

$$\begin{aligned} x_1(0) &= e_1 \\ x_2(0) &= e_2 \end{aligned}$$

Si $z = (z_1, z_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, es sencillo expresar el vector en términos de la base canónica.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mas aún, la función

$$x(t,z) = z_1 x_1 + z_2 x_2$$

también es solución al sistema de ecuaciones que satisface las condiciones iniciales impuestas: $x(0) = z$.

Se define la función,

$$h(z) = \int_0^\infty |x(t,z)|^2 \, dt$$

donde $|\cdot|$ es la norma de un vector de funciones. Si la integral converge entonces $h(z) \geq 0$ y $h(z) = 0$ si y solo si $z = 0$.

Al examinar el punto $x(0) = z$ se observa

$$h[x(t, x(0))] = \int_t^\infty |x(s, x(0))|^2 \, ds \tag{4.3}$$

Donde $x(t, x(0))$ es la solución del sistema de ecuaciones que satisface la condición inicial $x(0, x(0)) = x(0)$.

Derivando (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\cdot)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_t^\infty |x(s, x(0))|^2 \, ds \\ &= |x(t, x(0))|^2 \end{aligned}$$

Recordar del teorema (4.1) en general es $\nabla h f = \frac{\partial h}{\partial t}$, por lo que $h(z)$ constituye la función de Lyapunov.

Ejemplo 4.7. *Analizar la estabilidad del siguiente sistema.*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $(-1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$. Los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$. El sistema es asintóticamente estable, y se comprueba utilizando la función de Lyapunov.

El par de soluciones x_1 y x_2 son

$$x_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{y} \quad x_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Al evaluar en la condición inicial,

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene $(a,b) = (1,0)$ y $(c,d) = (0,1)$, por lo tanto

$$x_1 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

al definir al vector $z = (x_1, x_2)$ tal que

$$x(t,z) = x_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

entonces la función de Lyapunov(4.1) es

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^\infty |x_1(e^{-t},0) + x_2(0,e^{-2t})|^2 \, dt \\ &= \int_0^\infty |(x_1 e^{-t}, x_2 e^{-2t}))|^2 \end{aligned}$$

la norma del vector es $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$ por ende,

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty (x_1^2 e^{-2t} + x_2^2 e^{-4t}) \, dt \\ &= x_1^2 \int_0^\infty e^{-2t} \, dt + x_2^2 \int_0^\infty e^{-4t} \, dt \end{aligned}$$

Al resolver las integrales impropias se obtiene la función de Lyapunov.

$$h(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4}.$$

concluye el ejemplo al comprobar

$$\begin{aligned}\nabla h(x_1,x_2)F &= (x_1,\frac{x_2}{2})(-x_1,-2x_2)\\ &= -x_1^2 - x_2^2\\ &= -(x_1^2+x_2^2) \leq 0\end{aligned}$$

efectivamente el sistema es asintóticamente estable.

¿ Qué ha agregado el ejemplo a nuestros conocimientos? En realidad, nada que no se conozca. Cuando se obtienen las raíces del polinomio de un sistema lineal es suficiente para determinar la estabilidad o inestabilidad. Sin embargo, existe un gran detalle, utilizar las conclusiones de un sistema lineal ayuda a deducir la estabilidad de un sistema no lineal. En concreto, si las funciones del sistema (4.1) son de ζ^1, entonces la linealización alrededor del punto crítico o estable es:

$$\begin{aligned}x_1' &= f(x_1^e,x_2^e) + f_{x_1}(x_1^e,x_2^e)(x_1 - x_1^e) + f_{x_2}(x_1^e,x_2^e)(x_2 - x_2^e)\\ x_2' &= g(x_1^e,x_2^e) + g_{x_1}(x_1^e,x_2^e)(x_1 - x_1^e) + g_{x_2}(x_1^e,x_2^e)(x_2 - x_2^e)\end{aligned}$$

Escrito en forma de matrices,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\\ X' &= JX + G\end{aligned}$$

Donde J es la *matriz Jacobiana*, y está evaluada en el punto crítico: (x_1^e,x_2^e). La matriz G puede omitirse sin afectar la ecuación,

$$X' = JX \tag{4.4}$$

el sistema es lineal, y, ciertamente, se puede construir una función de Lyapunov. Así que el siguiente teorema es fundamental.

Teorema 4.2. *Sean $f(x_1,x_2)$ y $g(x_1,x_2)$ funciones de clase ζ^1 en una región $\mathbb{R}^2$ que contiene al origen. Suponer que $f(0,0) = g(0,0) = 0$. Entonces el origen es asintóticamente estable para el sistema (4.4) siempre y cuando todos los valores propios de la matriz J sean reales y negativos.*

Ejemplo 4.8. *Analizar la estabilidad del sistema*

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1^3 + x_1x_2^2\\ x_2' &= -2x_1^2x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

El punto crítico es: $(x_1,x_2) = (0,0)$, y la matriz Jacobiana evaluada en el punto crítico es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Debido a que la Traza $|J| = 0$ y $|J| = 0$, los valores propios son cero y es un sistema constante.

Ejemplo 4.9. *Analizar la estabilidad del sistema*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_1x_2 \\ x_2' &= x_2 + 2x_1x_2 \end{aligned}$$

Obtención de los puntos críticos.

$$\begin{aligned} x_1 - x_1x_2 &= 0 \\ x_2 + 2x_1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

factorizar la primera ecuación, $x_1(1 - x_2) = 0$, existen dos posibilidades: si $x_1 = 0$ entonces de la segunda ecuación se deduce $x_2 = 0$. La segunda posibilidad es $x_2 = 1$ y $x_1 = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, existen dos puntos críticos: $a = (0,0)$ y $b = (-1/2,1)$

La matriz Jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ 2x_2 & 1 + 2x_1 \end{pmatrix}$$

al evaluar el primer punto crítico

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema es inestable en $(0,0)$, debido a que la Traza $J_{(0,0)} = 2$ y $|J_{(0,0)}| = 1$.

Respecto al segundo punto crítico

$$J_{(-1/2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Existe un punto de silla, Traza $J = 0$ y $|J| = -1$

Ejemplo 4.10. *Analizar la estabilidad del sistema lineal*

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= -2x_2 \end{aligned}$$

El punto crítico es $(0,0)$ y la matriz Jacobiana es:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema es asintóticamente estable, Traza $J = -3$ y $|J| = 2$