ÁLGEBRA LINEAL

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMIA

México, D.F., 10 de marzo de 2010

Contenido

1. Álgebra lineal

Introducción

En la presente unidad de aprendizaje introduciremos una serie de técnicas matemáticas encuadradas dentro de lo que se conoce como el **Álgebra lineal**, que nos proporcionarán un lenguaje eficiente para el tratamiento de una gran cantidad de fenómenos económicos.

1.1. Vectores

1.1.1. Definición

Definición 1.1 *Para cada entero positivo n, definimos el espacio Euclidiano n-dimensional como:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

Un elemento particular de $\mathbb{R}^n$, digamos $x = (x_1, ..., x_n)$ también pueden denotarse como vector columna

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

*se le llama **vector (o vector columna)**. Las cantidades x_i se le llaman componentes (o elementos de x), a n se le llama el orden de x. Los vectores de orden 1 se les llaman **escalares**.*

1.1.2. Operaciónes de vectores

La operación de suma entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

y el producto de un escalar λ por un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1 *Sea*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $x + y, 3x, -y,$ *y* $5x - 2y$.

Solución:

$$x + y = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 3x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad -y = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 5x - 2y = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -19 \end{pmatrix}$$

1.1.3. Representación gráfica.

La suma y multiplicación por escalar definidas anteriormente tienen un significado geométrico. La representación geométrica en $\mathbb{R}^3$ de la suma de vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$ se obtiene trasladando a uno de ellos al extremo del otro, formando un paralelogramo, una de cuyas diagonales representa el vector resultante $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. A esta representación de la suma de vectores es a lo que se le llama **la ley del paralelogramo**.

El producto de un escalar por un vector se interpreta de la siguiente manera: sí el escalar λ es positivo y diferente de uno, al multiplicar el escalar λ por el vector $x = (x_1, x_2, x_3)$, el vector resultante es $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, el cual se obtiene del vector x multiplicando su magnitud por λ; si el escalar es negativo y diferente de menos uno, el vector cambia su magnitud y sentido ; si el escalar es cero, el vector se hace cero.

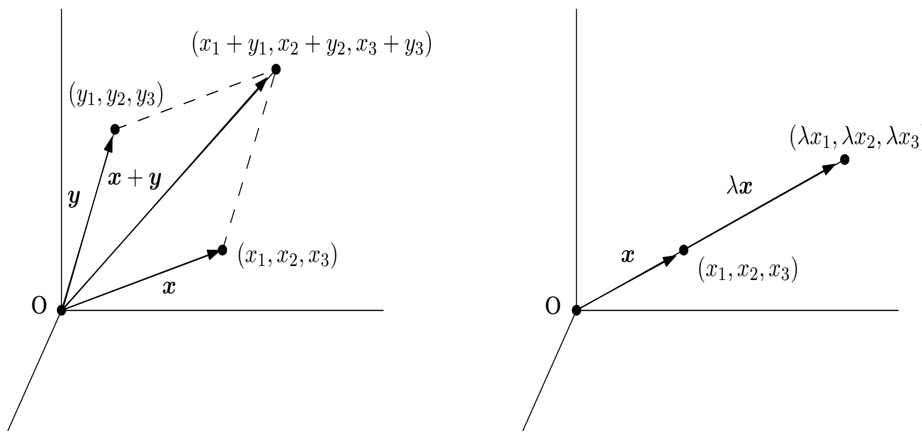


Figura 1: Paralelogramo

1.2. Producto punto

Una aplicación del Teorema de Pitágoras en el espacio permite definir la distancia del origen de coordenadas al punto que determina un vector α.

Definición 1.2 *Dados los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define su producto punto como:*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

El producto punto satisface las siguientes propiedades:

- El producto interno de dos vectores en $\mathbb{R}^n$ es un escalar único.
- $x \cdot y = y \cdot x$
- $\lambda x \cdot y = x \cdot \lambda y = \lambda(x \cdot y)$
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + x \cdot z$
- $x \cdot x > 0$ si $x \neq 0$. $x \cdot x = 0$ si $\alpha = 0$.

Ejemplo 2 *Si*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $x \cdot y$:

Solución:

$$x \cdot y = (1)(4) + (2)(-5) + (-3)(1) = -9.$$

1.2.1. Norma de un vector

Definición 1.3 *Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, se define su norma o longitud como*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Ejemplo 3 *Calcule la norma del vector $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$*

Solución:

$$\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

La norma de cualesquirera vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0$. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- $\|\lambda x\| =\mid \lambda \mid \|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.2.2. Ángulo entre vectores

El ángulo entre dos vectores x y y se puede obtener a través de la ecuación:

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Notemos que la ecuación anterior estable que los vectores x y y son perpendiculares si y solo si $x \cdot y = 0$, pues para $0 \leq \theta \leq \pi$, $\cos(\theta) = 0$ si y solo si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 4 *Calcular el ángulo entre los vectores:*

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El producto escalar de los vectores es

$$x \cdot y = -10 - 3 + 6 = -7$$

entonces como

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{-7}{22.7} = -0.31$$

de lo cual se sigue que el ángulo θ entre los vectores x y y es

$$\theta = 108.31^o$$

1.2.3. Vectores ortogonales

Definición 1.4 *Dos vectores no nulos x y y en $\mathbb{R}^n$ son llamados ortogonales o perpendiculares si y solo si $x \cdot y = 0$, y se escribe $x \perp y$.*

Ejemplo 5 *Determine todos los vectores que son ortogonales a:*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:
Todos los vectores $y \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales a x cumplen $x \cdot y = 0$, es decir, si $y = (y_1, y_2)$, entonces

$$x \cdot y = (1, 2) \cdot (y_1, y_2) = y_1 + 2y_2 = 0,$$

de lo cual se sigue que

$$y = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

La norma $\|x\|$ también se usa para definir la función distancia d en $\mathbb{R}^n$ como sigue:

Definición 1.5 *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$,*

$$d(x, y) = \|x - y\| \, .$$

La función distancia d satisface las siguientes propiedades:

- $d(x, y) \geq 0$. Además, $d(\alpha, \beta) = 0$ si y solo si $\alpha = \beta$.
- $d(x, y) = d(\beta, \alpha)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ejemplo 6 *Si*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcule la distancia entre los vectores x y y:

Solución:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 8.48.$$

1.3. Producto cruz

Definición 1.6 *Para cualquier par de vectores:*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

*en $\mathbb{R}^3$, el **producto cruz** se define como:*

$$x \times y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - y_2 x_3)\vec{i} - (x_1 y_3 - y_1 x_3)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k},$$

en donde

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7 *Dados*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calcule $x \times y$*,*

Solución:

De acuerdo con la definición del producto cruz tenemos:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (2 \cdot 0 - 3 \cdot 0)\vec{i} + (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\vec{j} + (3 - 2)\vec{k} = \vec{k}.$$

Por tanto

$$x \times y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar que:

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \operatorname{sen}(\theta)$$

donde θ es el ángulo formado por $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$.

La ecuación (1.3) proporciona una forma de calcular **el área del paralelogramo** determinado por los vectores x y y. También proporciona una alternativa para calcular el ángulo entre dos vectores.

1.3.1. Propiedades del producto cruz

Si x, y y z son vectores y λ es un escalar,
entonces:

- $x \times y = -(y \times x)$
- $\lambda(x \times y) = (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y)$
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

1.3.2. Ecuación del plano

La ecuación del plano que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) y cuyo vector normal es (a, b, c) es :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{1}$$

Ejemplo 8 *Determinar la ecuación del plano perpendicular al vector* $(1, 1, 1)$ *que contiene al punto* $(1, 0, 0)$.

Solución: De la ecuación (1), la ecuación del plano es

$$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0;$$

esto es,

$$x + y + z = 1.$$

TARGET

Trabajo individual.

1. Sean los vectores $v = (1, -3, 2)$ y $w = (4, 2, 1)$ calcule:

   a) $v + w$
   b) $2v$
   c) $v - w$

2. Encuente el producto escalar $x \cdot y$ donde:

   a) $x = (-1, 3),\ y = (-1, 5)$
   b) $x = (-6, 12),\ y = (15, -10)$

3. Calcule la norma del vector $x = (4, 2, 1)$

4. Hallar el ángulo que forman los vectores $x = (2, 10, 3)$ y $y = (10, 8, 12)$

5. Demuestre que los vectores $v = (1, -1, 1)$ y $w = (2, 3, 1)$ son ortogonales.

6. Encuentre un vector ortogonal a:

   a) $x = (1, 2)$
   b) $y = (-3, -4)$

7. Calcule la distancia entre los siguientes vectores:

   a) $x = (2, 3),\ y = (4, 7)$
   b) $x = (-1, 1),\ y = (4, 0)$

8. Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores:

   a) $x = (1, -1, 2),\ y = (-2, 0, 3)$.
   b) $x = (1, 0, -1),\ y = (-3, -1, 2)$

9. Calcule $x \times y$ dados Dados

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Encontrar un plano π que pasa por el punto $(2, 5, 1)$ y cuyo vector normal es $(1, -2, 3)$

2. Matrices y sistemas de ecuaciones

2.1. Matrices

Introducción

En econometría estamos preocupados con el modelado de los datos observados. En muchos casos el número de datos numéricos es grande (varios cientos o miles) de las observaciones de una serie de posibles variables de interés y todos los datos deben ser manejados de una manera organizada. Muchos conjuntos de datos se almacenan en una hoja de cálculo, donde cada columna es igual al número de observaciones de esa variable. Por ejemplo, los datos sobre las calificaciones de Cálculo, Inglés e Historia de cinco estudiantes se puede representar por la siguiente tabla.

Estudiantes	Cálculo	Inglés	Historia
1	1.8	4	8
2	2.4	6	9
3	2.9	6	7
4	3.0	7	6
5	3.5	8	7

Matriz de datos

La información consiste en datos reales de las cinco puntuaciones en Cálculo, Inglés e Historia y podemos resumir estos datos en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1.8 & 4 & 8 \\ 2.4 & 6 & 9 \\ 2.9 & 6 & 7 \\ 3.0 & 7 & 6 \\ 3.5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Este bloque rectangular de números se llama matriz. La matriz anterior tiene cinco filas y tres columnas. En econometría trabajamos con las matrices, y por supuesto siempre debemos recordarnos el significado de las columnas y filas (en el caso, la correspondencia entre columnas y variables y entre las filas y los estudiantes, por lo que el número 2.9 en la columna 1 y la fila 3 se sabe que corresponden a la calificación de Cálculo del tercer estudiante).

2.1.1. Definición

Definición 2.1 *Sean m, n números naturales. Una matriz de orden m filas por n columnas con coeficientes o entradas en los números reales, es un arreglo rectangular:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

por simplicidad a la matriz anterior simplemente se representa por: $[a_{ij}]$.

2.1.2. Tipos de matrices: Cuadrada, diagonal, identidad, simétrica

Definición 2.2 *Sea $[a_{ij}]$ una matriz m por n. Si $m = n$, al conjunto de matrices de orden n por n se le llama* ***matrices cuadradas de orden*** *n.*

Ejemplo 9 *La siguiente matriz es una matriz de orden 2 por 2:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definición 2.3 *La matriz cuadrada $[a_{ij}]$ de orden n, tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, es decir, a la matriz*

$$diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se le llama ***matriz diagonal de orden n****. En particular si además $a_{ii} = 1$ es decir,a la matriz*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

se le llama la ***matriz identidad de orden n****.*

Definición 2.4 *Si A es una matriz cuadrada puede ocurrir que $A^T = A$, en este caso a la matriz A se le llama **matriz simétrica.***

Ejemplo 10 *Si $A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, entones $A = A^T$, es decir, A es una matriz simétrica.*

Ejemplo 11 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces A es una matriz simétrica.

2.1.3. Aritmética de matrices

Propiedades de la suma y multiplicación

Sean $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ matrices m por n. Se define la **suma** de A con B por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

la cual también es una matriz m por n.

Ejemplo 12 *La suma de las matrices A y B donde:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 17 & 9 \end{bmatrix}$$

Sea A una matrix m por n, $A = [a_{ij}]$ y B una matriz n por k con $B = [b_{jr}]$, se define el **producto** de A por B como sigue: $AB = [c_{ir}]$ es una matriz m por k donde para todo $1 \leq i \leq m$, para todo $1 \leq r \leq k$:

$$c_{ir} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr}$$

En el siguiente ejemplo usaremos la notación $A_{m,n}$ para denotar la matriz A de orden $m \times n$.

Ejemplo 13 *Calcular $C_{2,2} = A_{2,2} \cdot B_{2,2}$ donde*

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \;\; y \;\; B_{2,2} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto

$$A_{2,2} \cdot B_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 56 & 32 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$C_{2,2} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 56 & 32 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 14 *Calcular $C_{3,3} = A_{3,2} \cdot B_{2,3}$ donde*

$$A_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \;\; y \;\; B_{2,3} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto

$$A_{3,2} \cdot B_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 10 & 20 & 7 \\ 13 & 26 & 7 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$C_{3,3} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 3 \\ 10 & 20 & 7 \\ 13 & 26 & 7 \end{bmatrix}$$

En álgebra matricial se dice que dos matrices son iguales si todos los elementos correspondientes son iguales. Si A es cualquier matriz, una matriz B será una matriz identidad para la suma si:

$$A + B = A \qquad \text{y} \qquad B + A = A$$

Se puede verificar fácilmente que la matriz identidad para la suma es una matriz en la cual cada elemento es igual a cero.

De manera similar, Si A es cualquier matriz, la matriz identidad para la multiplicación es la matriz identidad I_n que satisface la relación:

$$AI = A \qquad \text{y} \qquad IA = A$$

Ejemplo 15 ***El beneficio de una Firma***

Suponer que una firma produce tres tipos de productos, usando dos tipos de insumos, las cantidades de cada producto están dadas por los vectores columna q:

$$q = \begin{bmatrix} 15,000 \\ 27,000 \\ 13,000 \end{bmatrix}$$

y los precios unitarios están dadas por el vector de precios $\begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix}$.

Las cantidades de insumos empleados en la producción están dadas por el vector columna z:

$$z = \begin{bmatrix} 11,000 \\ 30,000 \end{bmatrix}$$

Y los precios de esos insumos por el vector $w = \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix}$. El beneficio de la empresa se encuentra dada por:

$$\begin{aligned} \prod &= pq - wz \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15,000 \\ 27,000 \\ 13,000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11,000 \\ 30,000 \end{bmatrix} \\ &= (150,000 + 324,000 + 65,000) - (220,000 + 240,000) = 79,000 \end{aligned}$$

Potencia de matrices y matriz idempotente

Definición 2.5 *Si A es una matriz cuadrada y n es un entero positivo, entonces* ***la n-ésima potencia de*** *A, la cual se escribe como A^n, es el producto de n factores de A:*

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n}$$

Si A es una matriz de orden n, se define $A^0 = I_n$.

Ejemplo 16 *Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:*

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 = A^2 A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es fácil demostrar por inducción que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.6 *Una matriz A tal que $A^2 = A$ se le llama* ***matriz idempotente****.*

Ejemplo 17 *La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ es idempotente.*

2.1.4. Transpuesta y sus propiedades

Definición 2.7 *Dada una matriz $A = [a_{ij}]$, se define la matriz $A^T = [b_{ij}]$ donde $b_{ij} = a_{ji}$. A la matriz A^T se le llama la* ***matriz traspuesta de*** *A.*

Ejemplo 18 *La traspuesta de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

es dada por:

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta:

- $A = (A^T)^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Ejemplo 19 *Si*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

así

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

Ejemplo 20 *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la suma tenemos que

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A^T + B^T$$

ya que

$$
\begin{aligned}
A^T + B^T &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para la multiplicación tenemos

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = B^T A^T
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
B^T A^T &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Traza y sus propiedades

La traza de una matriz es una operación definida sólo para matrices cuadradas.

Definición 2.8 *Si* $\boldsymbol{A}$ *es una matriz* $n \times n$*, la* ***traza de la matriz*** A*, denotada como* $tr(A)$*, se define como*

$$
tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.
$$

- $tr(I_n) = n$
- $tr(A^T) = tr(A)$

- *$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$*
- *$tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$, para todo escalar α*
- *$tr(AB) = tr(BA)$, donde A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times m$.*

Ejemplo 21 *Si*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$tr(A) = 2 + 4 = 6$$

2.2. Determinantes

En esta sección introducimos una función, la función determinante. Si A es una matriz cuadrada, entonces la función determinante asocia a A exactamente un número real llamado el determinante de A, el determinante de A el cual se le denota por $\mid A \mid$.

2.2.1. Definición

Definición 2.9 *Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz cuadrada de orden 1, entonces $\mid A \mid = a_{11}$.*

Definición 2.10 *Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $\mid A \mid = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.*

Ejemplo 22

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

Definición 2.11 *Determinante de* 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\det A = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 23 *Cálculo de un determinante 3×3*

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Calcule* $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 19 + 2 \cdot 10 = -69$$

Definición 2.12 *(**Menor**) Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el **menor ij** de A.*

Ejemplo 24 *Cálculo de dos menores de una matriz 3×3*

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. *Encuentre M_{13} y M_{32}.*

Solución: *Eliminando el primer renglón y la tercer columna de A se obtiene* $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Definición 2.13 *Sea A una matriz de $n \times n$. El **cofactor ij** de A, denotado por A_{ij}, está dado por*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \tag{2}$$

Estos es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 25 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Del ejemplo anterior tenemos que $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. *Entonces los cofactores* A_{13} *y* A_{32} *de la matriz* A *se obtienen usando formula* 2 *como sigue*

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^4(0 \cdot 3 - 1 \cdot 6) = -6 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^5(2 \cdot 5 - 0 \cdot 4) = -10 \end{aligned}$$

Definición 2.14 *(**Determinante** $n \times n$) Sea A una matriz $n \times n$. Entonces el determinante de A, denotado por* $\det A$ *o* $|A|$, *está dado por*

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \end{aligned} \tag{3}$$

La expresión al lado derecho de (3) *se llama **expansión por cofactores.***

Definición 2.15 *(**La adjunta**). Sea A una matriz de $n \times n$, y sea B, dada por*

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

*es decir, la matriz de sus cofactores. Entonces la **adjunta** de A, escrito adj A, es la transpuesta de la matriz B de $n \times n$; es decir*

$$adj\ A = B^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 26 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. *Calcule adj A.*

Solución:

Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = -3,\ A_{21} = -13,\ A_{22} = 5,\ A_{23} = 2,\ A_{31} = -7,\ A_{32} = 2$ *y* $A_{33} = 2$. *Así,*

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad y \qquad adj\ A = B^T = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Regla de Sarrus

Hay una forma alternativa de calcular determinantes de orden 3. Se añaden a la derecha sus dos primeras columnas de una matriz A dada, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Primero se multiplican las tres líneas que van de arriba a la izquireda a abajo a la derecha, poniendo el signo + a los productos.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \tag{4}$$

Luego se multiplican las tres líneas que van de abajo a la izquierda a arriba a la derecha, poniendo el signo − a a los productos.

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \tag{5}$$

La suma de los términos de (4) y (5) es igual a A.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces para calcular el determinante de la matriz A consideremos el siguiente arreglo

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus tenemos que

$$\begin{aligned} | A | &= 1 \cdot 5 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-4) \cdot 1 - (-2) \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-3) \cdot (-4) \cdot 2 \\ &= -15 - 4 - 12 + 30 - 1 - 24 \\ &= -26 \end{aligned}$$

Por tanto $| A |= -26$

2.2.2. Propiedades de los determinantes

El cálculo de los determinantes se simplifica utilizando varias propiedades. En lo siguiente A denota una matriz cuadrada.

Propiedades de los determinantes:

1. Si cada una de las entradas de un renglón (o columna) de A es 0, entonces $| A |= 0$.
2. Si dos renglones (o columnas) de A son idénticos, $| A |= 0$.
3. Si A es triangular superior (o inferior), entonces $| A |$ es igual al producto de las entradas de la diagonal principal.
4. Si B es la matriz que se obtiene sumando un múltiplo de un renglón (o columna) de A a otro renglón (columna), entonces $| A |=| B |$.
5. Si B es la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de un renglón (o columna) de A por el mismo número k, entonces
$| B |= k | A |$.

2.3. Matriz inversa

2.3.1. Definición

Definición 2.16 *Sea A una matriz n por n, una matriz B n por n que tiene la propiedad de que $AB = BA = I_n$ se le llama la* ***matriz inversa*** *de A y se le denota por $B = A^{-1}$. Más aún, se dice que A es* ***matriz invertible*** *en este caso.*

Teorema 2.17 *Una matriz cuadrada tiene inversa $\Longleftrightarrow | A | \neq 0$.*

Definición 2.18 *Una matriz A se llama* ***matriz singular*** *si $\mid A \mid = 0$ y* ***matriz no singular*** *si $\mid A \mid \neq 0$. Entonces una matriz tiene inversa si y sólo si es no singular.*

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si $\mid A \mid = ad - bc \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 27 *La matriz inversa de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es dada por:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \\ A^{-1}A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

2.3.2. Propiedades

Propiedades de la matriz inversa: Sea A y B matrices invertibles $n \times n$. Entonces:

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- La traspuesta de A es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- $(\lambda A)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$, si $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

En una matriz A m por n se tienen tres operaciones elementales de filas:

1. Multiplicación de una fila de A por un número c distinto de cero.
2. Remplazo de la r-ésima fila de A por la fila r más c veces la fila s, donde c es cualquier número y r es distinto de s.
3. Intercambio de dos filas de A.

Si A y B son dos matrices m por n sobre los números reales, se dice que B es equivalente por filas a A si B se obtiene de A por una sucesión finita de operaciones elementales de filas.

Se puede ver que si A es inversible, entonces A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n. Mas aún, al reducir la matriz A a la matriz identidad I_n por medio de una sucesión de operaciones elementales de filas, la inversa de A se obtiene al aplicar la misma sucesión de operaciones a la matriz identidad.

TAREA 1: MATRICES

Trabajo en equipo.

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\alpha = 3$, $\beta = 4$ calcular:

   a) $\alpha A + \beta B$
   b) $\alpha(B)$
   c) $(\alpha - \beta)(A - B)$

2. Obtener las matrices A + B, A - B y AB si:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Sean las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

   Calcular $AB,\ BA,\ CD,\ DA,\ C'B$

4. Cierto o falso: $(AB)^2 = A^2B^2$, demuestra tu respuesta.

5. Verificar que las matrices A y B satisfaces $(AB)^T = B^TA^T$, si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ realizar:

a) $A \cdot A^T$

b) $B(I + B)$

c) B^2

7. Dar los valores de x y y si:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x - y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

9. Calcule $\mid A^3 \mid$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Obtener la inversa de las siguientes matrices:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

TAREA 2: MATRICES EN CÓMPUTO

Trabajo en equipo.

Realicen en excel o en mathematica las siguientes operaciones matriciales.

1. Considerar las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

   calcular las operaciones matriciales,

   a) AB
   b) 3C
   c) C+D
   d) E-C
   e) -7C+3D
   f) 2C-3D+4E

2. Sea la siguiente matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Encontrar la matriz $P = X(X'X)^{-1}X'$
   b) Encontrar P' y calcular $P'X$
   c) Calcular PP, P^3, P^4
   d) Obtener $M = I - P$

e) Calcular MM, M^2, M^3

f) Calcular MX

3. Encontrar en cada caso el determinante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Calcular la inversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Sean las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcular AB y obtener su inversa, $(AB)^{-1}$

b) Verificar que $(AB)^{-1} = (A)^{-1}(B)^{-1}$

2.4. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un conjunto de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el administrador de una fábrica establece un plan de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas de tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II. De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Suponga que hacemos que x igual al número de artículos del modelo A fabricados cada día, y igual al número de artículos del modelo B. Entonces éstos requieren de $4x + 5y$ piezas del tipo I y $9x + 14y$ piezas del tipo II. Como están disponibles 335 y 850 piezas del tipo I y II, respectivamente tenemos:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 335 \\ 9x + 14y &= 850 \end{aligned}$$

A este conjunto de ecuaciones le llamamos **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales ambas ecuaciones sean verdaderas de manera simultánea. Estos valores se llaman soluciones del sistema.

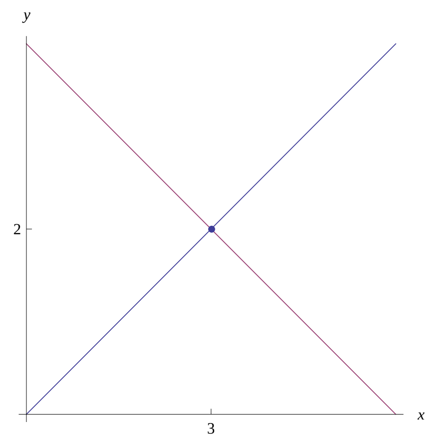
Como las ecuaciones son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamemoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen las ecuaciones de esa línea; esto es, hacen la ecuación verdadera, Por tanto, las coordendas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Estos significa que un punto de intersección da una solución del sistema.

Si L_1 y L_2 se dibujan en el mismo plano, existen tres posibles situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en exactamente un punto, digamos (x_0, y_0). Por tanto, el sistema tiene solución $x = x_0$ y $y = y_0$.

   Ejemplo 28 *El sistema de ecuaciones tiene solución unica*

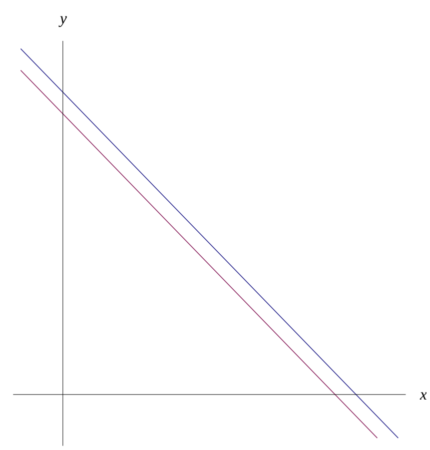
$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$



2. L_1 y L_2 pueden ser parelelas y no tener puntos en común. En este caso no existe solución.

Ejemplo 29 *Sistema de ecuaciones sin solución*

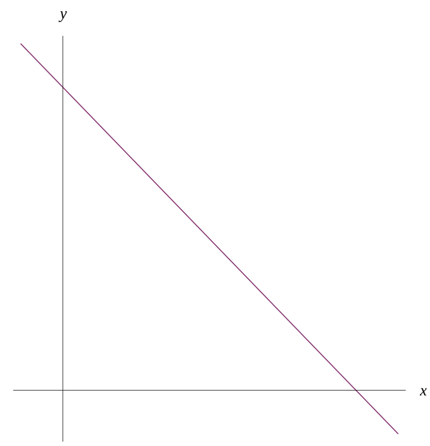
$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x + 2y &= 13 \end{aligned}$$



3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta. Por tanto las coordenadas de cualquier punto sobre la recta son una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

Ejemplo 30 *Sistema de ecuaciones con un número infinito de soluciones*

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x + 2y &= 14 \end{aligned}$$



Métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones en dos variables:

1. Método de eliminación por adición.
2. Método de eliminación por sustitución.
3. Método de eliminación por igualación.

Ejemplo 31 *Encontrar el punto de equilibio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son* $p = \frac{1}{300}q + 8$ *y* $p = -\frac{1}{180}q + 12$ *respectivamente.*

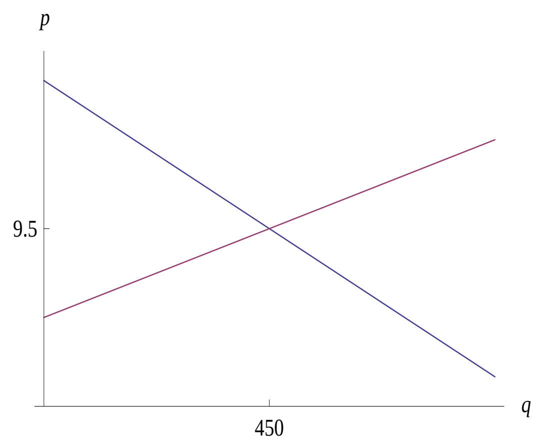
Solución:
Sustituyendo p *por* $\frac{1}{300}q + 8$ *en la ecuación de demanda, obtenemos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{300}q + 8 &= -\frac{1}{180}q + 12, \\ \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right) q &= 4, \\ q &= 450. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{300}(450) + 8 \\ &= 9.50 \end{aligned}$$

y el punto de equilibrio es $(450, 9.50)$.



2.4.1. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Definición 2.19 *Una ecuación lineal en las variables* $x_1, x_2, ..., x_n$ *es una ecuación de la forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Definición 2.20 *Un sistema de ecuaciones de* m *ecuaciones lineales en las incognitas* $x_1, ..., x_n$ *es un colección de ecuaciones de la forma:*

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

Dado el sistema, este se puede representar en forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 32 *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 335 \\ 9x + 14y &= 850 \end{aligned}$$

se representa matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 335 \\ 850 \end{bmatrix}$$

Definición 2.21 *Una solución del sistema es una n-ada* $(c_1, ..., c_n)$ *tal que* $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b$ *para cada* $i = 1, ..., n$*. Cuando el sistema tiene solución se dice consistente, de otra forma es inconsistente.*

2.4.2. Métodos de solución: Forma escalonada, el método de Gauss-Jordan, inversa de una matriz, regla de Cramer.

Forma escalonada y el método de Gauss-Jordan

Una técnica adecuada para resolver sistema de ecuaciones lineales de gran tamaño es el **método de eliminación** de Gauss-Jordan. Este método comprende una serie de operaciones sobre un sistema de ecuaciones lineales para obtener en cada paso un **sistema equivalente**. La reducción concluye cuando el sistema original ha sido transformado de modo que aparezca en cierta forma canónica de la pueda leerse la solución con facilidad.

Definición 2.22 *Una matriz se le llama* ***reducida por renglones****, si:*

1. *Cada renglón compuesto completamente de ceros se encuentra bajo los renglones con algún valor distinto de cero.*

2. *El primer valor distinto de cero en cada renglón es 1 (llamado el 1 principal)*

3. *En cualesquiera dos renglones sucesivos (distintos de cero), el 1 principal en el renglón inferior se encuentra a la derecha en el renglón superior.*

4. *Si una columna contiene un 1 principal, entonces los demás valores en esas columnas son ceros.*

Definición 2.23 *Un sistema de ecuaciones de m ecuaciones lineales en las incognitas $x_1, ..., x_n$*

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

se puede representar mediante la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

A la representación matricial anterior se le llama ***matriz aumentada del sistema de ecuaciones.***

El método de eliminación de Gauss-Jordan

1. Se escribe la matriz aumentada correspondiente al sistema lineal.
2. En caso necesario, se intercambian renglones para obtener una matriz aumentada donde el primer valor en el primer renglón sea distinto de cero. Luego se pivotea la matriz con respecto a este valor.
3. En caso necesario, se intercambia el segundo renglón con otro para obtener una matriz aumentada donde el segundo valor del segundo renglón sea distinto de cero. Luego se pivotea con respecto de este valor.
4. Se continúa hasta que la última matriz tenga una forma reducida por renglones.

El siguiente teorema nos permite determinar si un sistema homogéneo tiene una solución única (la solución trivial) o un número infinito de soluciones.

Teorema 2.24 *Sea A la matriz reducida de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si A tiene exactamente k renglones diferentes de cero, entonces $k \leq n$. Además:*

1. *Si $k \leq n$, el sistema tiene un número infinito de soluciones.*
2. *Si $k = n$, el sistema tiene una única solución (la solución trivial).*

Inversa de una matriz

Si A es inversible, el sistema de ecuaciones:

$$AX = B$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ \ y \ \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

tiene como única solución

$$X = A^{-1}B \tag{6}$$

Ejemplo 33 *Por (6) se tiene que la solución del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

es:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la solución es:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

es decir, $x_1 = -7$ y $x_2 = 11$.

Ejemplo 34 ***Equilibrio entre oferta y demanda***

El equilibrio del mercado de bienes (el equilibrio del mercado) se produce cuando la cantidad demandada por los consumidores (Q_d) *y la cantidad ofrecida* (Q_s) *por los productores de los bienes de servicio son iguales. De manera equivalente, el equilibrio del mercado se produce cuando el precio que un consumidor está dispuesto a pagar* (P_d) *es igual al precio que un productor está dispuesto a aceptar* (P_s)*. La condición de equilibrio, por lo tanto, se expresa como*

$$Q_d = Q_s = Q \quad y \quad P_d = P_s = P$$

Las funciones de demanda y la oferta de un producto son dadas por:

$$\text{Función de demanda:} \quad P = 100 - \frac{1}{2}Q$$
$$\text{Función de oferta:} \quad P = 10 + \frac{1}{2}Q$$

Calcular el precio de equilibrio y la cantidad algebraicamente y gráficamente.

Solución:

De las funciones de demanda y oferta obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$P + \frac{1}{2}Q = 100$$
$$P - \frac{1}{2}Q = 10$$

Este sistema escritó con matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Como la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el precio de equilibrio es $P = 55$ *y la cantidad de equilibrio es* $Q = 90$.

La siguiente figura ilustra el equilibrio del mercado, en el punto cuando la cantidad es 90, y precio de equilibrio \$55. El consumidor paga \$55 por la mercancía que es también el precio que recibe el productor por las mercancías.

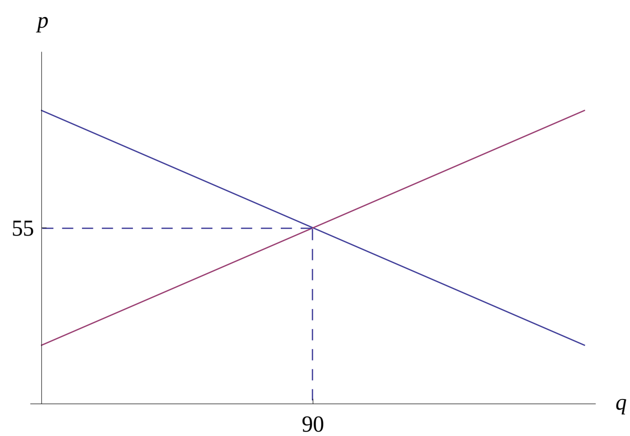


Figura 2: Equilibrio de mercado

Ejemplo 35 *(**Equilibrio en el mercado de trabajo**) El equilibrio del mercado de trabajo se produce cuando la mano de obra demandada por las empresas* (L_d) *es igual a la de la mano de obra ofrecida por los trabajadores* (L_s) *o, equivalentemente, cuando el salario que las empresas está dispuesto a ofrecer* (w_s) *es igual al salario que los trabajadores están dispuestos a aceptar* (w_d)*. El Equilibrio del mercado de trabajo, por lo tanto, se expresa como*

$$L_d = L_s = L \quad y \quad w_d = w_s = w$$

de nuevo, en la solución para el equilibrio del mercado de trabajo, L *y* w *se refieren al número de unidades de trabajo y el salario de equilibrio, respectivamente.*

La función de demanda de trabajo y la funciones de oferta se dan como

$$\begin{aligned} \textit{Función de demanda:} \quad & w = 9 - .6L \\ \textit{Función de oferta:} \quad & w = 2 + .4L \end{aligned}$$

Solución:

De las funciones de demanda y oferta obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} w + 0.6L &= 9 \\ w - 0.4L &= 2 \end{aligned}$$

Este sistema escritó con matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} w \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

La siguiente figura ilustra el punto de equilibrio del mercado laboral, con número de equilibrio de trabajadores, 7 y \$4.80 el salario de equilibrio. Cada trabajador recibe \$4.80 por hora de sus servicios laborados que también el salario que la empresa está dispuesta a pagar.

Ejemplo 36 *Una economía cerrada es descrita por el sistema de ecuaciones que da el equilibrio entre el mercado de bienes y el mercado de dinero, la*

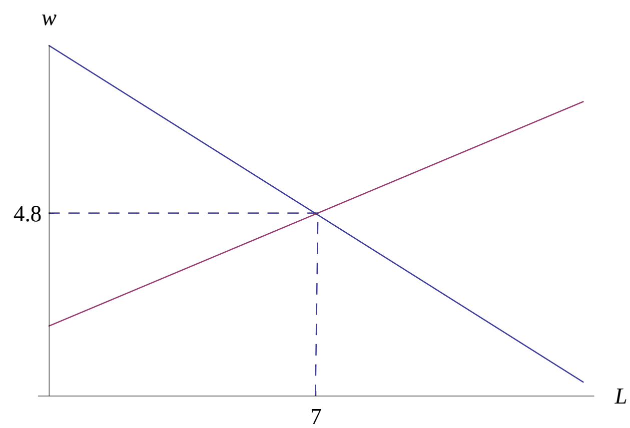


Figura 3: Equilibrio en el mercado de trabajo

relación entre la IS y la LM. El mercado de bienes (la parte IS del modelo) es descrito por:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= 15 + 0.8(Y - T) \\ T &= -25 + 0.25Y \\ I &= 65 - R \\ G &= 94 \end{aligned}$$

donde C es el gasto de consumo, T es el impuesto sobre los ingresos , Y es la producción total, I es el gasto de inversión, R es la tasa de interes y G es el gasto del gobierno.

$$\begin{aligned} L &= 5Y - 50R \\ M &= 1,500 \end{aligned}$$

donde L es la demanda de dinero y M es la oferta de dinero fija. Encontrar el nivel de equilibrio de Y y R.

Solución:

Expresamos el sistema de ecuaciones anterior en la forma

$$AX = B$$

donde A es una matriz 2×2 de coeficientes, $\boldsymbol{X}$ es el vector de variables 2×1 con entradas Y y R, y $\boldsymbol{B}$ es el vector de constantes 2×1. Primero resolveremos el equilibrio en el mercado de bienes y dinero, obteniendo las funciones IS y LM y luego ponemos las dos juntas. La función IS se obtiene de $Y = C + I + G$, como sigue:

$$\begin{aligned} Y &= 15 + 0.8Y + -0.8(-25 + 0.25Y) + 65 - R - 94 \\ Y(1 - 0.8 + 0.2) &= 15 + 20 + 65 + 94 - R \\ Y &= 485 - 2.5R \end{aligned}$$

La función LM es entonces dada de $M = L$:

$$1,500 = 5Y - 50R \quad o \quad Y = 300 + 10R$$

buscando entre las relaciones IS y LM como sistema de ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} Y + 2.5R &= 485 \\ Y - 10R &= 300 \end{aligned}$$

El cual se representa matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para Y y R tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y \\ R \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.08 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 485 \\ 300 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 448 \\ 14.8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El nivel de equilibrio de producción de esta economiía es 448 y la tasa de interes 14.8 %. Notemos que como el nivel de ingresos, impuesto sobre los ingresos es $T = -25 + 0.25(448) = 87$, mientras que el gasto público es $G = 94$. El déficit público corriente es por lo tanto $T - G = -7$.

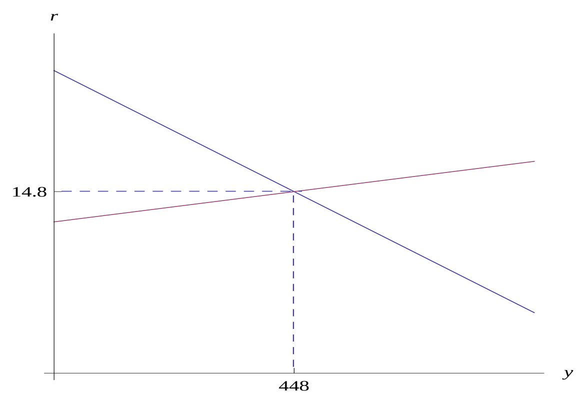


Figura 4: Modelo IS-LM de una economía cerrada

Regla de Cramer

Una de las aplicaciones más importantes de los determinantes es resolver ciertos tipos de sistemas de ecuaciones lineales.

Se va a estudiar el siguiente método, conocido como la **regla de Cramer** para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas dado por:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \cdots & + a_{nn}x_n = c_n \end{array}$$

Si el determinante Δ de la matriz de los coeficientes A es diferente de cero, entonces el sistema tiene una única solución. Además, la solución esta dada por:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

donde Δ_k, es el determinante de la matriz obtenida al remplazar la k-ésima columna de A por la columna de constantes.

Ejemplo 37 *Usar la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones*

$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$4x_1 + 4x_2 = 20$$

Solución:

La matriz de coeficientes y el vector columna son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix},$$

así que

$$\det A = 8 - (-4) = 12$$

por tanto

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 20 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{24}{12} = 2 \quad y \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{36}{12} = 3$$

Ejemplo 38 *En el modelo Keynesiano $IS - LM$*

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= 100 + 0.8Y \\ I &= 1000 - 20i \\ M^s &= M^d \\ M^s &= 2350 \\ M^d &= 0.5Y - 30i \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones anteriores obtener los valores de equilibrio del ingreso(Y) y la tasa de interes (i).

Solución:

Dadas las condiciones de equilibrio obtenemos:

$$\begin{aligned} Y &= 100{+}0.8Y + 1000 - 20i \\ 0.5Y - 30i &= 2350 \\ 0.2Y + 20i &= 1100 \\ 0.5Y - 30i &= 2350 \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 20 \\ 0.5 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 2350 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 10 = -16.$$

Usando la Regla de Cramer,

$$\bar{Y} = \frac{\begin{vmatrix} 1100 & 20 \\ 2350 & -30 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{-33000 - 47000}{-16} = 5000$$

$$\bar{i} = \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 1100 \\ 0.5 & 2350 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{470 - 550}{-16} = 5\,\%$$

Estatica comparativa

Para ilustrar el uso de las derivadas parciales, se recurre al modelo keynesiano simple de ingreso nacional Y, el nivel de consumo C, el nivel de inversión I_0 y el gasto del gobierno está dado por G_0. Por otra parte, la notación detrás de las dos últimas variables muestra que la inversión y el gasto público son variables exógenas. En el contexto de los modelos económicos, esto significa que dependen de factores externos al modelo y por lo tanto sus valores no pueden ser influenciados en el modelo y se deben tomar por sentados, es decir, ya estan dadas. Al mismo tiempo, las otras variables se suponen que son endógenas y, por tanto, dependen de factores internos del modelo. De hecho, las variables endógenas en el modelo depende de las exógenas, así como en los parámetros. Aquí C_0 es el nivel de consumo autónomo. El parámetro c es conocido como la propensión marginal a consumir. Queremos resolver el modelo a partir de las variables endógenas $\bar{Y}$ y $\bar{C}$ en equilibrio:

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= C_0 + cY \qquad\qquad C_0 > 0 \quad c \in (0,1) \end{aligned}$$

Así formuladas, las ecuaciones dadas forman la así llamada forma estructural del modelo. Cuando se resuelve por $\bar{Y}$ o $\bar{C}$, se obtiene la forma reducida del modelo. Tenemos la solución en forma reducida cuando la variable endógena se expresa en términos de las variables exógenas o parámetros en el modelo. Reescribiendo las ecuaciones,

$$\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -cY + C &= C_0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ C_0 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 - c > 0$

El determinante es claramente positivo, ya que la propensión marginal a consumir es menor que 1, calculando el valor de $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\begin{bmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ C_0 & 1 \end{bmatrix}}{1 - c} = \frac{I_0 + G_0 + C_0}{1 - c}$$

A partir de este modelo de ingreso, vemos que el equilibrio en el ingreso es positivo y se relaciona positivamente con la variable exógena inversión, el gasto gubernamental, y el consumo autónomo. Por otro lado, se relaciona positivamente con la propensión marginal a consumir.

La estática comparativa nos ayuda a estudiar la forma en que el ingreso $\bar{Y}$ responde ante cambios de las variables exógenas o de cualquier otro parámetro. Por ejemplo, podemos ver que el ingreso aumenta cuando la inversión aumenta en la economía simplemente diferenciando el ingreso con respecto a la inversión:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - c} > 0$$

Igualmente el efecto del gasto del gobierno en el ingreso. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresado por la derivada parcial

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - c} > 0$$

Vemos que el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el multiplicador de la inversión. Para el consumo tenemos

$$\bar{C} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -c & C_0 \end{bmatrix}}{1 - c} = \frac{C_0 + c(I_0 + G_0)}{1 - c} = \frac{C_0 + c(I_0 + G_0)}{1 - c} > 0$$

El equilibrio de consumo también es positivo. Podemos ver que el consumo se relaciona positivamente con el ingreso, el nivel de inversión y el gasto público.

Al igual que el ingreso el consumo aumenta con el nivel de inversión en la economía simplemente diferenciando el consumo con respecto a la inversión:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial I_0} = \frac{c}{1-c} > 0$$

Nuevamente el efecto del gasto del gobierno aumenta el consumo. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresada por la derivada parcial

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial G_0} = \frac{c}{1-c} > 0$$

Observemos que en en el caso del consumo, también el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el del multiplicador de la inversión.

Problema 1 *En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que* $Y = C + I_0 + G_0$*, donde* $C = 50 + 0.75Y$*,* $I = 100$ *y* $G_0 = 50$ *¿calcule el efecto de un incremento de 20 unidades en la inversión?.*

Solución

$$\begin{aligned} Y - C &= 100 + 50 \\ -0.75Y + C &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 - 0.75 = 0.25$

El determinante es positivo, calculando el valor de $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\begin{bmatrix} 150 & -1 \\ 50 & 1 \end{bmatrix}}{0.25} = 1000$$

Calculando el valor de $\bar{C}$

$$\bar{C} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 150 \\ -0.75 & 50 \end{bmatrix}}{0.25} = 1000$$

Ahora vamos obtener el multiplicador de la inversión

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1-0.75} = 4$$

Este multiplicador indica que por cada unidad que aumenta la inversión el ingreso se incrementará en 4 unidades. Luego, si la inversión aumenta en 20, entonces el ingreso aumentará en 80.

$$\begin{aligned} \partial \bar{Y} &= 4 * \partial I_0 \\ &= 4 * 20 \\ \partial \bar{Y} &= 80 \end{aligned}$$

Ejemplo 39 *El mercado de bienes es descrito por:*

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= C_0 + c(1-t)Y \\ I &= I_0 - bR \\ G &= \bar{G} \end{aligned}$$

El mercado de dinero es descrito por:

$$\begin{aligned} L &= kY - hR \\ M &= \bar{M} \end{aligned}$$

La economía en equilibrio es entonces caracterizada por:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + \bar{G} \\ C &= C_0 + c(1-t)Y \\ I &= I_0 - bR \\ \bar{M} &= kY - hR \end{aligned}$$

Estas son cuatro variables endógenas en el sistema Y, C, I y R y cuatro variables exogenas, $\bar{G}, C_0, I_0$, y $\bar{M}$. El sistema se puede escribir en la forma:

$$A\boldsymbol{x} = B$$

donde A es una matriz 4×4 de parámetros, x es el vector de variables endogenas, y $\boldsymbol{B}$ es un vector de constantes y variables exógenas.

Supongamos que nos interesa determinar R. Lo haremos por la regla de Cramer. El sistema es dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -c(1-t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ k & 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G} \\ C_0 \\ I_0 \\ \bar{M} \end{bmatrix}$$

Obtenemos $\mid A \mid$ desarrollandolo a lo largo de la tercer fila de A:

$$\begin{aligned} \mid A \mid &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & -h \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -h \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 \end{vmatrix} - b \left(-1 \begin{vmatrix} -c(1-t) & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= -h[1 - b(1-t)] - bk \end{aligned}$$

Resolviendo para $R = \mid A_4 \mid / \mid A \mid$, donde $\mid A_4 \mid$ se obtiene remplazando la cuarta columna de A por $\mathbf{B}$:

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \bar{G} \\ -c(1-t) & 1 & 0 & C_0 \\ 0 & 0 & 1 & I_0 \\ k & 0 & 0 & \tilde{M} \end{vmatrix}$$

Entonces $\mid A_4 \mid$ se obtiene expandiendo a lo largo de la tercer fila de A_4:

$$\begin{aligned} \mid A_4 \mid &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & \tilde{G} \\ -c(1-t) & 1 & C_0 \\ k & 0 & \tilde{M} \end{vmatrix} - I_0 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= k \begin{vmatrix} -1 & \tilde{G} \\ 1 & C_0 \end{vmatrix} + \tilde{M} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -c(1-t) & 1 \end{vmatrix} - I_0 \left(k \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= -k(C_0 + \tilde{G}) + \tilde{M}\,[1 - c(1-t)] - I_0 k. \end{aligned}$$

Por tanto R es dado por:

$$R = \frac{k(C_0 + I_0 + \tilde{G}) - \tilde{M}\,[1 - c(1-t)]}{h\,[1 - c(1-t)] + bk}.$$

TAREA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES

Trabajo en equipo.

1. Resolver las siguientes pares de ecuaciones por el método de igualación:

   a)

$$\begin{aligned} y &= 22 - x \\ 2y &= 4 + 8x \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} q &= 25 - p \\ q &= 4 + 2p \end{aligned}$$

2. Cuales de los siguientes sistemas son consistentes y cuales son inconsistentes:

   a)

$$\begin{aligned} 5x - 8y &= 4 \\ -x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} x - 4y &= 3 \\ -3x + 12y &= -14 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} x - 4y &= 3 \\ -3x + 12y &= -9 \end{aligned}$$

   d)

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 10 \\ 4y + 2z &= 4 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

   a)

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ -7x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

4. Usar la regla de Cramer para calcular las soluciones del sistema de ecuaciones:

   a)

$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 8 \\ -3x + 14y &= 8 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 \qquad + 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5. Las funciónes de demanda y oferta para un producto (pantalones) son dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Función de demanda:} \quad & P = 50 - 3Q \\ \text{Función de oferta:} \quad & P = 14 + 1.5Q \end{aligned}$$

   donde P es el precio de un par de pantalones; Q es el número de pares de pantalones. Calcular a través de la matriz inversa el precio y la cantidad de equilibrio.

6. Las funciónes de demanda y oferta para el trabajo son dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Función de demanda de trabajo:} \quad & w = 70 - 4L \\ \text{Función de oferta de trabajo:} \quad & w = 10 + 2L \end{aligned}$$

   Calcular con el método de Cramer el número de trabajadores empleados y el salario de equilibrio por hora.

7. Considere la siguiente economía cerrada:

$$\begin{aligned} C &= 15 + 0.8(Y - T) \\ T &= 25 + 0.25Y \\ I &= 65 - R \\ G &= 80 \\ L &= 5Y - 50R \\ M &= 1,500 \end{aligned}$$

   Resolver para el nivel de equilibrio de la renta y de la tasa de ínteres por cualquier método visto anteriormente.

8. El modelo de ingreso nacional es

$$\begin{aligned} & Y = C + I_0 + G_0 & & \\ & C = C_0 + c(Y - T) & & C_0 > 0 \quad c \in (0,1) \\ & T = T_0 + \beta Y & & T_0 > 0 \quad \beta \in (0,1) \end{aligned}$$

   Encontrar las derivadas parciales $\frac{\partial Y}{\partial G_0}$ y $\frac{\partial C}{\partial G_0}$. Determinar sus signos e interpretar su significado económico.

TAREA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES EN CÓMPUTO

Trabajo en equipo

De la siguiente información acerca de las ecuaciones estructurales de una economía cerrada, derivar las curvas IS ($Y = C + I$) y LM ($M/P = L$), donde supondremos que $P = 1$. Resolver la renta de equilibrio y la tasa de interés a través de matrices con excel o mathematica.

Ejercicio 1.

$$\begin{aligned} C &= 50 + 0.8Y \\ I &= 20 - 5R \\ L &= 100 - R + 0.5Y \\ M &= 200 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

$$\begin{aligned} C &= 15 + 3/4Y \\ I &= 10 - 1.5R \\ L &= 0.25Y - 0.5R \\ M &= 8 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

$$\begin{aligned} C &= 20 + 0.8Y \\ I &= 20 - 2R \\ L &= 10 + 0.25Y - 0.5R \\ M &= 55 \end{aligned}$$

3. Espacios vectoriales

3.1. Espacio y subespacio vectorial

Definición 3.1 *Sea K un campo. Un espacio vectorial sobre K, o también llamado un K- espacio vectorial, consta de lo siguiente:*

1. *Un conjunto V, cuyos elementos se llaman vectores.*
2. *Una operación binaria en V, llamada suma de vectores, denotada por $+$, y que cumple lo siguiente:*
   a) *Para todos $x, y \in V$, se cumple que $x+y = y+x$ (conmutatividad).*
   b) *Para todos x, y y $z \in V$, se cumple que $(x+y)+z = x+(y+z)$ (asociatividad).*
   c) *Existe un elemento en V llamado cero y denotado por 0 tal que $0+x = x$, pata todo $x \in V$ (existencia del neutro aditivo).*
   d) *Para todo $x \in V$ existe un elemento $-x$ tal que $x+(-x) = 0$ (existencia de elementos inversos).*
3. *Una operación binaria en V, llamada producto de vectores, denotada por $\cdot$, y que cumple lo siguiente:*
   a) *Para todo $x \in V$, se tiene que $1\,x = x$, con $1 \in K$.*
   b) *Para todo $x \in V$ y para todo λ y $\mu \in k$, se tiene que $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.*
   c) *El producto por escalar es distributivo, es decir,*

$$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$
$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,$$

   para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$

Definición 3.2 *Al conjunto V con la suma y el producto por escalar se le llama* ***espacio vectorial sobre*** *K.*

Ejemplo 40 *La operación de suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^3$ se formulan como:*

1. *Dados* (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, *se define:*

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

2. *Dados* $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *y* $c \in \mathbb{R}$, *se define:*

$$c\ (x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$$

Entonces $\mathbb{R}^3$ *con la suma y producto definidos anteriormente es un espacio vectorial. Para esto verifiquemos que* $\mathbb{R}^3$ *con la operación* $+$ *cumple las siguientes propiedades*

a) *Para todos* $x, y \in \mathbb{R}^3$, *se cumple que* $x + y = y + x$ *(conmutatividad). Sean* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *y* $y = (y_1, y_2, y_3)$, *entonces*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = y + x$$

b) *Para todos* $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, *se cumple que* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(asociatividad). Sean* $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, *y* $z = (z_1, z_2, z_3)$, *entonces*

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)) \\
&= (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)) \\
&= x + (y + z)
\end{aligned}$$

c) *Existe un elemento en* $\mathbb{R}^3$ *llamado cero y denotado por 0 tal que* $0 + x = x$, *pata todo* $x \in \mathbb{R}^3$ *(existencia del neutro aditivo). Sea* $0 = (0, 0, 0)$ *entonces si* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *tenemos*

$$0 + x = (0, 0, 0) + (x_1, x_2, x_3) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$$

d) *Para todo* $x \in \mathbb{R}^3$ *existe un elemento* $-x$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(existencia de elementos inversos). Sea* $x \in \mathbb{R}^3$, *con* $x = (x_1, x_2, x_3)$, *definimos el inverso de* x *por* $-x = (-x_1, -x_2, -x_3)$, *entonces tenemos*

$$\begin{aligned}
x + (-x) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) \\
&= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3)) \\
&= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) = (0, 0, 0) = 0
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\mathbb{R}^3$ con la operación producto $\cdot$ cumple

a) Para todo $x \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $1\,x = x$, con $1 \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}^3$,

$$1 \cdot x = 1 \cdot (x_1, x_2, x_3) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$$

b) Para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y para todo λ y $\mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$. Sea $x \in \mathbb{R}^3$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}\lambda(\mu x) &= \lambda(\mu(x_1, x_2, x_3)) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \lambda(\mu x_3)) \\ &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, (\lambda\mu)x_3) = (\lambda\mu)x\end{aligned}$$

c) El producto por escalar es distributivo, es decir,

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x, \\ \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y,\end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$.

Sea $x \in \mathbb{R}^3$, con $x = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot x &= (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2, x_3) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, (\lambda + \mu)x_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \lambda x_3 + \mu x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = \\ &= \lambda x + \mu x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = \lambda \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \lambda(x_3 + y_3)) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3) = \\ &= \lambda x + \lambda y.\end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $x, y \in V$

Definición 3.3 *Sea W un subconjunto no vacío de V, se dice que W es un* ***subespacio vectorial*** *de V, si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todos x y $y \in W$, se tiene que $x + y \in W$, es decir, W es cerrado bajo la suma.*

2. *Para todo $x \in W$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in W$, es decir W es cerrado bajo producto por escalar.*

Ejemplo 41 *Sea*

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$$

es decir, $x \in W$, entonces $x = (x_1, x_2, 0)$. Entonces W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Para esto verifiquemos que si $x, y \in W$, entonces $x + y \in W$. Como $x, y \in W$, $x = (x_1, x_2, 0)$ y $y = (y_1, y_2, 0)$, luego $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$. Ahora veamos que si $x \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in W$, lo cual se sigue de que si $x = (x_1, x_2, 0)$, entonces $\lambda x = \lambda(x_1, x_2, 0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) \in W$.

Ejemplo 42 *Sea A una matriz 3 por 2. Entonces*

a) el espacio columna de A, el cual es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A y se le denota por $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

b) el espacio nulo de A, que consta de todos los vectores x tales que $Ax = 0$ y se le denota por $N(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

c) el espacio renglón de A, generado por los renglones de A, el cual es el espacio columna de A^T y se le denota por $C(A^T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

d) el espacio nulo izquierdo de A el cual es espacio nulo de A^T, denotado por $N(A^T)$, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

TAREA 1: ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

Trabajo individual.

1. *Demostrar que el conjunto* V *de matrices* 3×3*, es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *con las operaciones suma y producto por escalar usuales, es decir:*

   Si $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ *matrices 3 por 3. La operación* ***suma*** *de* A *con* B *es:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

   y producto de una matriz por un escalar:

$$\lambda \cdot A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$$

2. *Una matriz (cuadrada) 3* $\times 3$ $[a_{ij}]$ *sobre* $\mathbb{R}$ *es simétrica si* $a_{ij} = a_{ji}$ *para todo* i, j*. Demostrar que las matrices simétricas forman un subespacio del espacio de las matrices* 3×3*.*

3. *Sea* V *el conjunto de todas las matrices* 2×2 *sobre* $\mathbb{R}$*. Demostrar que* V *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *con las operaciones usuales de suma y producto por escalar usuales. Sea* W *el subconjunto de* V *que consta de las matrices de la forma*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix}$$

   con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$*. Demostrar que* W *es un subespacio vectorial de* V*.*

4. *Demostrar que los siguientes conjuntos de vectores* $\alpha = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *son subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$

   a) *Todos los* α*, tales que* $x_1 \geq 0$*.*

   b) *Todos los* α*, tales que* $x_1 + 3x_2 = x_3$*.*

3.2. Combinacion lineal de vectores, dependencia e independencia lineal

Definición 3.4 *Un vector* $\beta \in V$*, se dice* ***combinación lineal*** *de los vectores* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in V$*, si existen escalares* $a_1, ..., a_n \in K$*, tales que:*

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i.$$

Ejemplo 43 *El vector* $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ *en* $\mathbb{R}^2$ *es combinación lineal de los vectores*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ya que:

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Definición 3.5 *Sea* S *es cualquier colección de vectores de* V*.* ***El subespacio generado*** *por* S *se define como*

$$L(S) = \{\sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i \mid a_i \in K, \alpha_i \in S \ y \ k = 1, 2, 3, ...\}$$

Cuando $L(S) = V$*, decimos que* S *genera a* V

Definición 3.6 *Un subconjunto* S *de* V *se dice* ***linealmente dependiente****, si existen vectores distintos* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *de* S *y escalares* $a_1, ..., a_n \in K$*, no todos cero, tales que:*

$$a_1 \alpha_1 + \cdots + a_n \alpha_n = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice ***linealmente independiente****. Si el conjunto* S *solo tiene un número finito de vectores* $\alpha_1, ..., \alpha_n$*, se dice a veces que los* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *son dependientes (o independientes), en vez de decir que* S *es dependiente (o independiente).*

Ejemplo 44 *Los siguientes vectores en* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes.

Solución*: Sea*

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de lo anterior obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_2 &= 0 \\ 3a_1 + 5a_2 &= 0 \end{aligned}$$

el cual tiene como solución: $a_1 = 0$ *y* $a_2 = 0$.

Ejemplo 45 *Los vectores*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes. Esto se sigue de

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 46 *Los vectores* $(1, 2, 3)$ *y* $(1, 1, 0)$ *son linealmente independientes en* $\mathbb{R}^3$.

Sea:

$$a_1 \cdot (1, 2, 3) + a_2 \cdot (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 &= 0 \\ 3a_1 &= 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que el sistema de ecuaciones anterior tiene como única solución $a_1 = a_2 = 0$.

Ejemplo 47 *Demostrar*

(a) *Sí* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ *son linealmente dependientes.*

(b) *Sí* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *son linealmente independientes.*

Solución:

(a) *Se ve que* $\alpha_2 = 2\alpha_1$*, luego* $2\alpha_1 - \alpha_2 = 0$*. Tomando* $a_1 = 2$ *y* $a_2 = -1$ *se obtiene* $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$*, lo cual prueba que* a_1 *y* a_2 *son linealmente dependientes.*

(b) *La ecuación* $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$*, da lugar al sistema*

$$\begin{aligned} 3a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución única $a_1 = a_2 = 0$*. Por tanto* α_1 *y* α_2 *son linealmente independientes.*

3.3. Base y dimensión

Definición 3.7 *Una* ***base*** *de* $\mathbb{R}^n$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes de* $\mathbb{R}^n$ *y que genera el espacio* $\mathbb{R}^n$*.*

Teorema 3.8 *Sea* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es una base.*
2. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es linealmente independiente.*
3. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *genera a* $\mathbb{R}^n$*.*

Ejemplo 48 *Los vectores*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son una base de $\mathbb{R}^2$. *Si*

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces de la combinación lineal anterior, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

El cual tiene como única solución: $a_1 = a_2 = 0$. *Ahora, sea* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *veamos que existen* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *tales que* $a_1 \cdot (1,1) + a_2 \cdot (-1,1) = (x, y)$. *Es fácil ver que* $a_1 = \frac{x+y}{2}$ *y* $a_2 = \frac{y-x}{2}$. *De lo anterior se sigue que los vectores* $(1,1)$ *y* $(-1,1)$ *son linealmente independientes y que generan a* $\mathbb{R}^2$, *por lo tanto son una base de* $\mathbb{R}^2$.

Definición 3.9 *Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial* V *contiene el mismo número de vectores. Este número que es compartido por todas las bases y expresa el número de grados de libertad del espacio, es la dimensión de* V.

Ejemplo 49 *En* $\mathbb{R}^n$, *sean* $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ *donde el 1 aparece en el i-ésimo lugar y todas las otras coordenadas son cero. El conjunto* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *es una base de* $\mathbb{R}^n$ *llamada la* ***base canónica***, *por lo tanto la dimensión del espacio* $\mathbb{R}^n$ *es* n.

Ejemplo 50 *Si* A *es una matriz 3 por 2 con rango* r, *entonces:*

a) La dimensión del espacio columna $C(A)$ *es el rango* r.

b) La dimensión del espacio nulo de A *es* $2 - r$.

c) La dimensión del espacio renglón $C(A^T)$ *es también* r.

d) La dimensión del espacio nulo izquierdo $N(A^T) = 3 - r$.

TAREA 2: BASES DE ESPACIOS VECTORIALES

Trabajo en equipo

1. *Decida la dependencia o independencia en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *de*

    a) *los vectores* $(1,1)$ *y* $(1,-2)$.

    b) *los vectores* $(1,-3,2),(2,1,-3)$ *y* $(-3,2,1)$.

    c) *los vectores* $(1,3,2),(2,1,3)$ *y* $(3,2,1)$.

2. *Demuestre que el siguiente subconjunto de las matrices* 2×2

$$\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

    es linealmente independiente

3. *Demostrar que los siguientes vectores forman una base para* $\mathbb{R}^2$.

    a)
$$\alpha_1=(1,1),\quad \alpha_2=(1,-1)$$

    b)
$$\alpha_1=(-1,1),\quad \alpha_2=(-1,0)$$

4. *Demostrar que los siguientes vectores forman una base para* $\mathbb{R}^3$.

a)
$$\alpha_1=(1,0,1),\quad \alpha_2=(1,1,0),\quad \alpha_3=(0,1,1)$$

b)
$$\alpha_1=(1,0,-1),\quad \alpha_2=(1,2,1),\quad \alpha_3=(0,3,-2)$$

c)
$$\alpha_1=(1,0,-1),\quad \alpha_2=(1,1,1),\quad \alpha_3=(1,0,0)$$

5. *Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios de* $\mathbb{R}^4$

    a) *Todos los vectores cuyas componentes son iguales.*

b) Todos los vectores tales que la suma de sus componentes es cero.

6. *Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios de matrices 3 por 3:*

    a) Todas las matrices diagonales

    b) Todas las matrices simétrica

c) Todas las matrices sesgadas simétricas $(A^T = -A)$

7. *Encontrar la dimensión y una base para la siguiente matriz.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. *Encontrar la dimensión y una base para la siguiente matriz.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

9. *Sea* V *el espacio vectorial de las matrices* 2×2 *sobre el campo* $\mathbb{R}$*. Demuestre que* V *tiene dimensión 4 encontrando una base de* V *que tenga cuatro elementos.*

3.4. Transformación lineal

Definición 3.10 *Sean V y W dos espacios vectoriales. Una transformación lineal es una función $T : V \to W$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$, *para todos* $\alpha, \beta \in V$.

2. $T(r\alpha) = rT(\alpha)$, *para todo escalar* $r \in \mathbb{R}$ *y para todo* $\alpha \in V$.

Un operador lineal sobre V es una transformación lineal de V en si mismo.

Ejemplo 51 *La función $0 : V \to W$ definida por $0(v) = 0$ que mapea todos los elementos del espacio vectorial V al elemento cero del espacio W, es claramente una función lineal, llamada la transformación cero.*

Ejemplo 52 *La función $1V : V \to V$ dada por $1V(v) = v$ es un operador lineal denominado operador identidad sobre V.*

Ejemplo 53 *Si $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$ las trasformaciones lineales entre V y W corresponden a las matrices A de $m \times n$. En particular, si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{entonces}$$

$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_A(x) = Ax$ es lineal, dada por:

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + z \end{pmatrix}$$

Teorema 3.11 *Si $T : V \to W$ es una tranformación lineal, y si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son vectores de V, entonces dados los escalares $a_1, a_2, ..., a_n$,*

$$T(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n) = a_1T(\alpha_1) + \cdots + a_nT(\alpha_n).$$

Teorema 3.12 *Sea $T : V \to W$ una tranformación lineal, si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es una base para V, y si $T(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, 2, ...n$ entonces para cualquier vector $\alpha \in V$, $T(\alpha)$ está determinada y $T(\alpha) = a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son escalares tales que $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$.*

Teorema 3.13 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, sea $\alpha_1, ..., \alpha_n$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial y $\beta_1, ..., \beta_n$ vectores cualesquiera en W. Entonces existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que*

$$T(\alpha_j) = \beta_j. \quad j = 1, ..., n.$$

Ejemplo 54 *Consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ formada por lo vectores $\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (3, 4)$. Por el Teorema 7 existe una transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$\begin{aligned} T(\alpha_1) &= (3, 2, 1) \\ T(\alpha_2) &= (6, 5, 4) \end{aligned}$$

Encontremos $T(1, 0)$. Si $(1, 0) = c_1(1, 2) + c_2(3, 4)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces $c_1 = -2$ y $c_2 = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} T((1, 0)) &= T(c_1(1, 2) + c_2(3, 4)) \\ &= c_1T(1, 2) + c_2T(3, 4) \\ &= -2(3, 2, 1) + (6, 5, 4) \\ &= (0, 1, 2). \end{aligned}$$

3.5. Nucleo e imagen

Definición 3.14 *Sea $T : V \to W$ una tranformación lineal. Definimos el núcleo de T como el conjunto $N_T = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = 0\}$. La imagen de T, denotada R_T, se define como $R_T = \{\beta \in W \mid \text{existe un}\, \alpha \in V\, \text{y satisface}\, T(\alpha) = \beta\}$.*

Ejemplo 55 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (-x + 3y + z, y + 2z)$. Entonces $(x, y, z) \in N_T$ si y solo si*

$$\begin{aligned} -x + 3y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

La forma escalonada reducida de la matriz de los coeficientes de este sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el núcleo de T, $N_T = \{(-5z, -2z, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en la teoría de espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema 3.15 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, $T : V \to W$ una tranformación lineal, entonces la siguiente ecuación se cumple:*

$$dim(V) = dim(N_T) + dim(R_T)$$

3.6. Matriz de una tranformación lineal

Sabemos que una tranformación lineal queda completamente determinada en una base. Si $T : V \to W$ es una tranformación lineal, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ son bases de V y W respectivamente, entonces para cada $j = 1, ..., n$, $T(\alpha_j)$ se representa como combinación linel de los elementos de la base $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$, es decir. existen escalares $a_{1j}, ..., a_{mj}$, únicos, tales que:

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$$

Los escalares a_{ij} solamente dependen de la tranformación lineal y de las bases elegidas, con ellos formamos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 56 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$. Entonces la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas es*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 57 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x + y, x - y)$. Entonces la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas es*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.7. Cambio de base

Teorema 3.16 *Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F, y W un espacio vectorial de dimensión n sobre F. Sean B una base ordenada de V y B' una base ordenada de W. Para cada transformación lineal T de V en W, existe una matriz $m \times n$, A, cuyos elementos pertenecen a F, tal que*

$$[T\alpha]_{B'} = A[\alpha]_B$$

Para todo vector $\alpha \in V$.

Definición 3.17 *La matriz A se llama* ***la matriz asociada a la transformación T respecto a las bases $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$.***

Ejemplo 58 *Sea B la base de $\mathbb{R}^2$ formada por lo vectores $\alpha_1 = (1, 1)$ y $\alpha_2 = (3, -2)$. Por el Teorema 7, existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\alpha_1) = (4, 5)$ y $T(\alpha_2) = (6, -1)$. Encontremos la matriz A asociada a T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Para determinar A, debemos determinar $T(e_1) = (a, b)$ y $T(e_2) = (c, d)$. De las ecuaciones*

$$\begin{aligned} T(1, 1) &= T(e_1) + T(e_2) \text{ y} \\ T(3, -2) &= 3T(e_1) - 2T(e_2) \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} (4, 5) &= (a + c, b + d) \\ (6, -1) &= (3a - 2c, 3b - 2d) \end{aligned}$$

de donde se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + c &= 4 \\ b + d &= 5 \\ 3a - 2c &= 6 \\ 3b - 2d &= -1 \end{aligned}$$

de cuya solución se sigue que $T(e_1) = \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)$ y $T(e_2) = \left(\frac{6}{5}, \frac{16}{5}\right)$, por lo tanto la matriz asociada a T respecto a la base canónica es:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la expresión que define a $T(x,y)$ se obtiene del siguiente producto de matrices:

$$AX = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{16}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5}x + \frac{6}{5}y \\ \frac{9}{5}x + \frac{16}{5}y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $T(x,y) = (\frac{14}{5}x + \frac{6}{5}y, \frac{9}{5}x + \frac{16}{5}y)$.

Teorema 3.18 *(Cambio de base). Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que A es la matriz asociada a T respecto a bases dadas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ en V y $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ en W. Si las bases anteriores se cambian a nuevas bases $\{\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n\}$ y $\{\beta'_1, ..., \beta'_n\}$, con matrices de cambio de base P y Q respectivamente y B es la matriz asociada a T en estas nuevas bases, entonces se tiene:*

$$B = Q^{-1}AP.$$

Si $T : V \to V$ es una transformación lineal, $\alpha_i = \beta_i$ y $\alpha'_i = \beta'_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Entonces la matriz asociada a T respecto a la nueva base es $P^{-1}AP$, P la matriz de cambio de base.

Ejemplo 59 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x+y-z, 2x-y+3z, x-z)$. Para encontrar la matriz asociada a T respecto a la base $\{(1,2,0), (1,-1,0), (1,1,1)\}$, primero encontramos la matriz asociada a T respecto a la base canónica, la cual se obtiene evaluando a T en los vectores canónicos. Tenemos que $T(1,0,0) = (1,2,1)$, $T(0,1,0) = (1,-1-0)$ y $T(0,0,1) = (-1,3,-1)$, por lo que la matriz asociada a T respecto de la base canónica es:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aplicando el Teorema anterior obtenemos que la matriz asociada a T *respecto de la base* $\{(1,2,0),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ *es:*

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 5 & -4 & -2\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

TAREA 3: TRANSFORMACIONES LINEALES

Trabajo en equipo

1. *¿Cuáles de las siguientes funciones T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son tranformaciones lineales?*

    (a) $T(x, y) = (1 + x, y)$

    (b) $T(x, y) = (y, x)$

    (c) $T(x, y) = (x^2, y)$

    (d) $T(x, y) = (x - y, 0)$

2. *¿ Existe una tranformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?*

3. *Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, encuentre su núcleo y rango*

    a) *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x - y, 3x + 2y)$*

    b) *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$*

    c) *Sea $T_A : V \to V$, dada por $T_A(X) = AX$, con V el espacio vectorial de las matrices 2×2, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$*

4. *Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por*

$$T(x, y) = (-y, x)$$

    a) *¿ Cuál es la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.*

    b) *¿Cuál es la matriz de T respecto de la base ordenada en $\mathbb{R}^2$ formada por los vectores $\alpha_1 = (1, 2)$ y $\alpha_2 = (1, -1)$?*

5. *Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por*

$$T(x, y, z) = (x + y, 2z - x).$$

    Si B es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$ y B' es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^2$, ¿ cuál es la matriz de T respecto al par de bases B, B'.

6. *Sea* T *el operador lineal en* $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$$

   a) *¿ Cuál es la matriz de* T *en la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

   b) *¿Cuál es la matriz de* T *respecto de la base ordenada en* $\mathbb{R}^3$ *formada por los vectores* $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (-1, 2, 1)$ *y* $\alpha_3 = (2, 1, 1)$*?.*

4. Diagonalización de matrices

La obtención de valores y vectores propios es fundamental para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, que seran tema principal en el curso de sistemas dinamicos. En el análisis de series de tiempo la diagonalización de matrices juega un papel fundamental en los vectores autorregresivos.

4.1. Valores y vectores propios

4.1.1. Obtención de los valores y vectores propios de una matriz y sus propiedades

Definición 4.1 *Si A es una matriz $n \times n$, un vector columna X, $n \times 1$, se llama* ***vector propio*** *de A si y solo si $AX = \lambda X$ para algún escalar λ. λ se llama* ***valor propio*** *de A que corresponde al vector X.*

Ejemplo 60

a) *Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$.

b) *Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

c) *Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son complejos.

d) *Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Teorema 4.2 *Sea A una matriz $n \times n$ y sea X un vector columna $n \times 1$ no nulo.*

1. *X es un vector propio de A perteneciente a λ_0 si y solo si $(A - \lambda_0 I_n) = 0$*

2. *Un escalar λ_0 es un valor propio de A si y solo si λ_0 es una raíz real de la ecuación polinómica $\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$.*

Definición 4.3 *Sea A una matriz $n \times n$. El polinomio $\det(A - \lambda I_n)$ de grado n se llama **polinomio característico** de A y se le denota por $p_A(\lambda)$. A la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se llama la **ecuación característica** de A. Las raíces reales de la ecuación característia de A son los valores propios reales o los valores característicos de A.*

Un pregunta natural es si existe una manera simple de encontrar el polinomio característico de una matriz. Para el caso de una matriz 2×2 la respuesta es afirmativa y el polinomio característico puede ser calculado con base en la traza y el determinante.

Si A una matrix 2×2, entonces

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema 4.4 *Si A es una matriz 2×2 Entonces*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A).$$

además, si λ_1 y λ_2 son las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 61 *Sea*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación $Ax = \lambda x$ aplicando los siguientes pasos:

1. *Calcular el determinante de $A - \lambda I$:*

$$det(A - \lambda I) = det \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

o sea, el polinomio característico de la matriz A es:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6$$

Otra forma de calcularlo es usando el teorema anterior:

$$\begin{aligned} tr(A) &= 4 + 3 = 7 \\ \det(A) &= 12 - 6 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \end{aligned}$$

2. *Encontrar las raíces del polinomio característico:*

$$\begin{aligned} p(\lambda) = det(A - \lambda I) &= 0 \\ (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 6 &= 0 \\ (\lambda - 6)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

entonces las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda)$ son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$ las cuales cumplen

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= tr(A) \\ 7 = 6 + 1 &= tr(A) \\ \lambda_1\lambda_2 &= \det(A) \\ 6 = 6 \cdot 1 &= \det(A) \end{aligned}$$

3. *Para cada valor característico, resolvemos la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$. Buscamos ahora los correspondientes vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$ respectivamente.*

   Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciónes son de la forma $x_1 = -2/3x_2$.

Por lo tanto , para $\lambda_1 = 1$*, los vectores propios son de la forma* $v_1 = \alpha \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

cuya solución es $x_1 = x_2 = 1$.

Por lo tanto , para $\lambda_2 = 6$*, el vector propio es* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teorema 4.5 *Si A es una matriz 3×3, entonces su polinomio característico es de la forma*

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(tr(A^2) - tr(A)^2\right)\lambda + det(A).$$

Los vectores propios también poseen una representación sencilla en el caso de una matriz A de 2×2 como la anterior. Para encontrar el vector propio $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio λ, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda_1 x_1, \\ ax_1 + dx_2 &= \lambda_1 x_2. \end{aligned}$$

Por construcción, las ecuaciones son dependientes, y el sistema no es originalmente diagonal. Tenemos que alguno de los coeficientes b *o* c *es diferente de cero. Supongamos que* $b \neq 0$*; suponiendo que* $x_1 = b$ *en la primera ecuación, es fácil ver que* $x_2 = \lambda - a$*, de manera que* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$ *es un vector propio con valor propio* λ*. En el caso en que* $b = 0$ *y* $c \neq 0$*, utilizamos la segunda ecuación y obtenemos que* $\begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$ *es el vector propio buscado.*

Ejemplo 62 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

notemos que la matriz es singular y que por lo tanto $\lambda = 0$ *es una raíz del polinomio característico. El polinomio esta dado por*

$$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 3),$$

con raíces $\lambda_1 = 3$ *y* $\lambda_2 = 0$*. es fácil ver que* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *es un vector propio asociado al valor propio* $\lambda_1 = 3$ *y que* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *es un vector no nulo que satisface la ecuación* $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$*, o sea un vector propio con valor propio* $\lambda = 0$*.*

Ejemplo 63 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propio de A *son* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ *y* $\lambda_3 = -2$*. Ahora encontraremos los vectores propios correspondientes a estos valores propios.*

Si $\lambda_1 = 1$, resolvemos el sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Estos es, si $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver estas ecuaciones y escoger $a = -1$, obtenemos $b = 4$ y $c = 1$. En concluisión,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es vector propio con valor propio $\lambda_1 = 1$. Para verificarlo consideramos

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

De modo semejante se obtiene que el vector $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de $\lambda_2 = 3$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_3 = -2$.

En el caso de raíces repetidas, es que no tiene una base de vectores propios y por lo tanto la matriz no puede ser diagonalizada. Sin embargo puede obtenerse una matriz triangular de la forma

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{7}$$

Para obtener la matriz T, lo que se necesita es el vector propio $\boldsymbol{v}$ correspondiente al valor propio y otro vector $\boldsymbol{w}$ tal que la matriz

$$P = [\ \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}\ ]$$

cumpla $P^{-1}AP = T$, donde T es la matriz triangular dada en 7. Para obtener el vector $\boldsymbol{w}$ se procede como sigue.

Definición 4.6 *Sea* $\boldsymbol{v}$ *un vector propio con valor propio* λ. *Se dice que* $\boldsymbol{w}$ ***es un vector propio generalizado*** *si satisface*

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}.$$

Si la matriz A *está dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y $b \neq 0$, *entonces un vector propio asociado al valor propio* λ *está dado por*

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}.$$

El valor propio es una raíz del polinomio $\lambda^2 - \lambda tr(A) + det(A)$ *y si es una raíz doble debe ser de la forma* $\lambda = \frac{tr(A)}{2} = \frac{a+d}{2}$. *Resolvamos ahora el sistema* $(A - \lambda I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$, *con estos valores específicos de* $\boldsymbol{v}$ *y* λ. *Si* $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

se tiene que

$$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto es fácil ver que $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *siempre es solución. Si en la matriz* A, $b = 0$ *pero* $c \neq 0$, *entonces se utiliza* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$ *como vector propio y procediendo de manera análoga tenemos que* $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

es un vector propio generalizado.

Ejemplo 64 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 2$$

entonces:

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= (3-\lambda)(-1-\lambda)+2=0 \\ &= -3-3\lambda+\lambda+\lambda^2+4=0 \\ &= \lambda^2-2\lambda+1=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación característica de la matriz A es $\lambda^2-2\lambda+1=0$, cuya única raíz es $\lambda=1$. El los vectores propios correspondientes son

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} 2x_1-2x_2=0 \\ x_1=x_2. \end{aligned}$$

es decir, los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1=1$ son de la forma $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces escogemos al vector propio $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y el vector propio generalizado, que se encuentra resolviendo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

es simplemente

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.7 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

Entonces la ecuación característica de la matriz A es:

$$p(\lambda)_A = (-1)^m \left(\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) = 0$$

y para cada valor propio λ_k*, el vector*

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ (\lambda_k)^2 \\ \vdots \\ (\lambda_k)^{m-1} \end{pmatrix}$$

es un vector propio.

Ejemplo 65 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema (4.7), la ecuación característica es $\lambda^3 - \lambda = 0$*, los valores propios son* $\lambda_1 = 0$*,* $\lambda_2 = 1$ *y* $\lambda_3 = -1$ *y para* $\lambda_1 = 0$*,*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ (\lambda_1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es vector propio. Del mismo modo,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ (\lambda_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es vector propio con valor propio $\lambda_2 = 1$*. Finalmente,*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ (\lambda_3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es vector propio con valor propio $\lambda_3 = -1$*.*

Ejemplo 66 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la ecuación es $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, por lo que los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i,$$

Es decir,

$$\lambda_1 = \lambda = 1 + i, \lambda_2 = \bar{\lambda} = 1 - i.$$

Tomemos $\lambda = 1+i$. Encontraremos vectores propios de la manera usual; esto es, si

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

entonces,

$$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si escogemos $a = 1$ obtenemos que $b = 1 + i$, y por lo tanto

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

es vector propio con valor propio $1 + i$.

Ejemplo 67 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Las raíces de p_A son $\lambda = i$ y $\bar{\lambda} = -i$. Encontraremos un vector propio v para el valor propio $\lambda = i$ usando el teorema (4.7). Así

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

es un vector propio con valor propio λ.

TAREA 1: VALORES Y VECTORES PROPIOS

Trabajo individual.

Obtener los valores y vectores propios de las siguientes matrices.

1.
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.
$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

4.
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.
$$E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

6.
$$F = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

7.
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

8.
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

4.2. Diagonalización de matrices

Definición 4.8 *Dos matrices cuadradas A y B de orden n son equivalentes si existe una matriz P de orden n, no singular ($\det(P \neq 0)$) tal que $A = P^{-1}AP$.*

Ejemplo 68 *Las matrices* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *son equivalentes pues:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Definición 4.9 *Una matriz cuadrada A es diagonalizable si posee una matriz equivalente B que sea diagonal.*

Suponga que la matriz A de orden n tiene n vectores característicos linealmente independientes. Si estos vectores característicos son las columnas de una matriz S, entonces $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal Λ, es decir A es diagonalizable y los valores característicos de A están sobre la diagonal de Λ:

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Diagonalización de matrices de orden 2

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *y calculemos sus valores propios, los cuales son las soluciones de:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Entonces tenemos los siguientes casos:

1. ***Dos raíces reales distintas*** *λ_1 y λ_2: Entonces la matriz A es equivalente a la matriz* $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *y por tanto es diagonalizable.*

Ejemplo 69 *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar

a) *Los valores propios de A.*

b) *Los vectores propios A.*

c) *Diagonalizar la matriz A*

La ecuación característica es

$$\mid A - \lambda I \mid = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

cuyas soluciones $\lambda_1 = -2$ *y* $\lambda_2 = 3$ *son los valores propios de A. Para* $\lambda = \lambda_1 = -2$ *da*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{aligned}$$

Tomando $x_2 = t$ *tenemos* $x_1 = -\frac{2}{3}t$. *Por lo tanto los vectores propios a* $\lambda_1 = -2$ *son*

$$x = t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Para $\lambda_2 = 3$, $x_1 = x_2$. *Luego los vectores propios son:*

$$x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Finalmente, como los lo valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ *y* $\lambda_2 = 3$, *podemos tomar los vectores propios respectivos*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{para la cual} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Multiplicando deducimos que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. ***Una raíz doble*** λ *y el rango de* $A-\lambda I$ *igual a 1; entonces la matriz* A *es equivalente a la matriz:* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ *y no es diagonalizable. Observemos que si el rango de* $A-\lambda I$ *es 0, entonces* $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *que ya es diagonal.*

   Ejemplo 70 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   La ecuación característica es

$$| A - \lambda I |= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

   cuyas soluciones $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$*, es decir,* $\lambda = 0$ *es un valor característico doble y el rango de la matriz* $A-\lambda I$ *es 1, entonces la matriz* A *es equivalente a la matriz* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*. la cual no es diagonal.*

3. ***Dos raíces complejas conjugadas*** $a+bi$ *y* $a-bi$*: entonces la matriz* A *es equivalente a la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *y no es diagonalizable.*

   Ejemplo 71 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$| A - \lambda I |= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

   cuyas raíces son $\lambda_1 = \lambda = i$ *y* $\lambda_2 = \bar{\lambda} = -i$*. Entonces la matriz* A *es equivalente a la matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   y no es diagonalizable.

TAREA 2: DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Tarea individual.

1. *Para la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   a) *Escribir la ecuación característica y calcular los valores propios.*

   b) *Calcular los vectores propios correspondientes a la equación característica.*

   c) *Diagonalize A.*

2. *Consteste las mismas preguntas del problema 1 para la matriz A dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. *Obtener los valores propios de la matriz $P = X(X^T X)^{-1} X^T$, si:*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.3. Matrices simétricas y formas cuadráticas

Sea A una matriz cuadradada simetrica. En este caso, si postmultiplicamos A por un vector x y la premultiplicamos por el transpuesto de ese mismo vector x, tenemos una ***forma cuadrática****. Por ejemplo,*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{21} + a_{12})x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Supongamos que A es la matriz identidad. En este caso, no es dificíl ver que cualesquiera que sean los valores de x_1 y x_2, la forma cuadrática debe ser no negativa. De hecho, si x_1 y x_2 no son cero, xAx será estrictamente positiva. La matriz identidad es un ejemplo de ***matriz definida positiva****.*

Matrices definidas*. Una matriz cuadrada A es:*

(a) ***definida positiva*** *si $x^tAx > 0$ cualquiera que sea $x \neq 0$;*

(b) ***definida negativa*** *si $x^tAx < 0$ cualquiera que sea x;*

(c) ***semidefinida positiva*** *si $x^tAx \geq 0$ cualquiera que sea x;*

(d) ***semidefinida negativa*** *si $x^tAx \leq 0$, cuaquiera que sea x.*

Ejemplo 72 *Considere el n-vector de variables aleatorias*

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

y sea

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y_1 - E(y_1) \\ y_2 - E(y_2) \\ \vdots \\ y_n - E(y_n) \end{bmatrix}$$

la matriz covarianza de y es definida como

$$V = E\begin{bmatrix} \tilde{y_1}^2 & \tilde{y_1}\tilde{y_2} & \dots & \tilde{y_1}\tilde{y_n} \\ \tilde{y_2}\tilde{y_1} & \tilde{y_2}^2 & \dots & \tilde{y_2}\tilde{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y_n}\tilde{y_1} & \tilde{y_n}\tilde{y_2} & \dots & \tilde{y_n}^2 \end{bmatrix}$$

La matrix covarianza es simetrica y semidefinida positiva. Para demostrar esta afirmación, primero notemos que V se puede escribir como

$$V = E(\tilde{y}\tilde{y}^T)$$

Así, para cualquier $x \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} x^T V x &= x^T E(\tilde{y}\tilde{y}^T)x \\ &= E x^T(\tilde{y}\tilde{y}^T)x \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{y}_j\right)^2 \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j (y_j - E(y_j))\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

En algunos casos no es necesario que $x^t A x$ tenga un signo definido en el caso de todos los valores de x, si no sólo de un conjunto restringido de ellos. Decimos que A es definida positiva sujeta a la restricción $bx = 0$. Las otras definiciones se amplían de manera natural al caso con restricciones.

Las ***matrices menores*** *de la matriz A son las matrices que se forman eliminando k-columnas y k-filas de la misma numeración. Los menores principales naturalmente ordenados o encadenados de la matriz A vienen dados por*

$$a_{11} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

etc. Los determinantes menores o menores de una matriz o menores principales, son los determinantes de las matrices menores

$$D_1 = a_{11} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

etc.

Supongamos que se nos da una matriz cuadrada A y un vector b. Podemos orlar A por medio de b de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz se denomina ***matriz orlada****. La útil generalización a las matrices menores genera los* ***menores principales que conservan la orla****. Son las submatrices que se forman eliminando las filas y las columnas adecuadas de A y los elementos de la orla que tienenla misma numeración, pero sin eliminar la propia orla. Por lo tanto, las eliminaciones pueden provenir de filas y columnas de 1 al n, pero no de la fila o la columna $n+1$, que es donde se encuentra la orla. Dada esta terminología, para que una matriz sea definida positiva o negativa.*

Teorema 4.10 *. Una matriz cuadrada A es:*

(a) definida positiva si y sólo si los menores principales son todos positivos.

(b) definida negativa si y sólo si los menores principales tienen el signo $(-1)^k$ siendo $k = 1, ..., n$.

(c) definida positiva sujeta a la restricción $bx = 0$ si y sólo si los menores principales que conservan la orla son todos ellos negativos;

(d) definida negativa sujeta a la restricción $bx = 0$ si y sólo si los menores principales que generan la orla tienen el signo $(-1)^k$ siendo $k = 2, ..., n$.

Definición 4.11 *Una forma cuadratica en dos variables es un polinomio de la forma*

$$q = au^2 + 2huv + bv^2$$

Definición 4.12 *Una forma cuadrática q se dice*

(a) positiva definida si $q > 0$.

(b) semidefinida positiva si $q \geq 0$.

(c) semidefinida negativa si $q \leq 0$

(d) definida negativa si $q < 0$.

Una forma cuadrática se puede expresar en términos de matrices. Sea

$$q = au^2 + 2huv + bv^2$$

entonces

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

luego, si

$$A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$$

la forma cuadrática q es

(a) positiva definida si y solo si la matriz A es definida positiva.

(b) semi-definida positiva definida si y solo si la matriz A es semi-definida positiva.

(c) definida negativa si y solo si la matriz A es definida negativa.

(d) semi-definida negativa si y solo si la matriz A es semi-definida negativa.

Ejemplo 73 *¿La forma cuadrática $q = 5u^2 + 3uv + 2v^2$ es positiva definida o negativa definida ?*

En forma de matrices:

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como

$$D_1 = 5 > 0 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 2.25 = 7.75 > 0$$

entonces la matriz A es definida positiva, por tanto la forma cuadrática q es definida positiva.

Ejemplo 74 *Con el fin de conseguir una reducción del déficit público, el gobierno esta estudiando la posibilidad de introducir un nuevo impuesto complementario del impuesto sobre la renta de las personas físicas y el impuesto sobre el patrimonio, pero de tal forma que dependa de ellos, según:*

$$T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$$

donde R y P son, respectivamente, las cantidades ingresadas por el impuesto sobre la renta y el de patrimonio.

Justifique que ningún contibuyente conseguirá, con este nuevo impuesto, que su declaración le salga devolver.

Solución:

El nuevo impuesto puede considerarse como una forma cuadrática en las variables R y P:

$$T(R,P) = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$$

que, por tanto tiene como matriz simétrica asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

El hecho de que el gobierno no quiera devolver dinero se traduce en que la forma cuadrática no debe tomar valores negativos para ningún R, P, es decir, tiene que verificarse que:

$$T(R,P) \geq 0 \quad \text{para cualesquiera } R \text{ y } P$$

Por tanto T debe ser al menos semidefinida positiva. Veamos si esto es así, calculando los menores principales de A

$$D_1 = 2 > 0$$
$$D_2 = \det(A) = 4 > 0$$

luego T es definida positiva, por lo que se verifica lo pedido. Así pues , el impuesto reúne las condiciones exigidas para su aplicación.

4.4. Matrices hermitianas

Definición 4.13 *Una matriz A se le llama hermitiana si es igual a su traspuesta conjugada, es decir $A = \bar{A}^T = A^H$.*

Ejemplo 75

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} = A^H$$

Las tres propiedades básicas de las matrices hermitianas son:

1. *Si $A = A^H$, entonces para todos los vectores compelejos x , el número $x^H Ax$ es real.*

   Ejemplo 76 *Cada elemento de A contibuye a $x^H Ax$. Si $x = (u, v)$, entonces*

   $$\begin{aligned} x^H Ax = x^H \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \\ = 2\bar{u}u + 5\bar{v}v + (3-3i)\bar{u}v + (3+3i)u\bar{v}, \end{aligned}$$

   el cual es un número real.

2. *Si $A = A^H$, todo valor característico es real.*

   Ejemplo 77 *Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$, entonces:*

   $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1).$$

   de donde sus valores característicos son los números reales $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = -1$.

3. Dos vectores característicos de una matriz hermitiana, si provienen de valores característicos distintos, son ortogonales entre sí:

Ejemplo 78 *Para la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$*, obtenemos los valores característicos asociados a* $\lambda_1 = 8$ *y* $\lambda_2 = 1$*. De las siguientes ecuaciones*

$$
\begin{aligned}
(A-8I)x &= \begin{pmatrix} -6 & 3-3i \\ 3+3i & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(A+I)y &= \begin{pmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

se obtienen los vectores característicos asociados a λ_1 *y* λ_2 *respectivamente:*

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
y &= \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Estos vectores son ortogonales:

$$x^H y = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

4.5. Forma canónica de Jordan

Dada una matriz cuadrada A*, se quiere escoger* M *de forma que* $M^{-1}AM$ *sea lo más diagonalmente posible. En el caso más sencillo,* A *tiene un conjunto completo de vectores característicos que se convierten en las columnas de* M*, la cual la denotamos por* S*. La forma de Jordan es* $J = M^{-1}AM = \Lambda$*; se construyo completamente a partir de bloques* $J_i = \lambda_i$ *de 1 por 1, y el objeto de una matriz diagonal se ha alcanzado por completo. En el caso más general y difícil, faltan algunos vectores característicos y una forma diagonal es imposible. Ese caso constituye ahora nuestro principal interés.*

Teorema 4.14 *Si una matrizx A tiene s vectores característicos linealmente independientes, entonces es semejante a una matriz J que es la* ***forma de Jordan****, con s bloques cuadrados en la diagonal:*

$$J = M^{-1}AM = \Lambda = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

Cada bloque tiene un vector característico, un valor característico y unos justo arriba de la diagonal:

$$J_i = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 79 *Un ejemplo de esta forma de Jordan es la matriz J, con*

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}.$$

donde $J_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $J_3 = [0]$. El valor característico dobre $\lambda = 8$ sólo tiene un simple vector característico, en la primera dirección de coordenadas $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$; como resultado $\lambda = 8$ sólo aparece en un simple bloque J_1. El valor característico triple $\lambda = 0$, tiene dos vectores característicos, e_3 y e_5 que corresponden a los dos bloques de Jordan J_2 y J_3.

En términos de operadores. *Sea T un operador en $\mathbb{R}^n$ y $m_T(x) = p_1^{e_1}(x) \cdots p_r^{er}(x)$ la representación del polinomio mínimo de T como productos de irreducibles. Entonces*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, \quad con W_i = V_{pi^{e_i}}$$

También sabemos que el polinomio mínimo de T restringido a W_j es $p_j{}^{e_j}(x)$. Entonces:

$$W_j = W_{1j} \oplus \cdots \oplus W_{ij}$$

donde cada W_{ij} es T-cíclico con anulador $p_j{}^{e_{ij}(x)}$, los exponentes satisfacen: $e_j = e_{1j} \geq \cdots \geq e_{ij}$.

Definición 4.15 *Los polinomios $p_j{}^{e_j}(x)$ se llaman divisores elementales de T.*

Ahora, supongamos que algún $p_j(x)$ es lineal y que el anulador y que el anulador de W_{ij} es $(x - c_j)^{e_{ij}}$. Si v es un vector cíclico de W_{ij} entonces:

$$\{v, (T - c_j I)v, ..., (T - c_j I)^{e_{ij-1}}\}$$

es una base.

La matriz de T restringida a W_{ij} respecto a la base $\{v, (T - c_j I)v, ..., (T - c_j I)^{e_{ij-1}}$ se obtiene aplicando T a cada elemento.

$$\begin{aligned} T(v) &= c_j v + (T - c_j I)v \\ T(T - c_j I)v &= c_j (T - c_j I)v + (T - c_j I)^2 v \\ &\vdots \\ T((T - c_j I)^{e_{ij}-1}(v)) &= c_j (T - c_j I)^{e_{ij}-1}(v) \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se tiene que la matriz asociada a la restricción de T en W_{ij} es:

$$\begin{bmatrix} c_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_j \end{bmatrix}$$

Por tanto existe una base de W_j respecto de la cual la matriz asociada a T restringida a W_j es diagonal por bloques con cada bloque de la forma , llamado bloque de Jordan. Si el polinomio mínimo se expresa como un producto de factores lineales, entonces el anulador en cada W_{ij} es de la forma $(x - c_j)^{e_{ij}}$ y procediendo como en el caso anterior se tiene que la restricción de T a cada W_j es diagonal por bloques con cada bloque de la forma. Resumiendo se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.16 (Forma Canónica de Jordan) *Sobre* $\mathbb{R}^n$*, sea* T *un operador lineal. Supongamos que el polinomio mínimo de* T *se expresa como* $m_T(x) = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_k)^{e_k}$*. Entonces existe una base* $\mathbb{R}^n$ *respecto de la cual* T *se representa por una matriz de la forma* $J = diag\{j_1, ..., j_k\}$*, con cada* J_m *a la vez diagonal por bloques:* $J_m = diag\{j_1, ..., j_{i_m m}\}$ *y cada* J_{rm} *un bloque de Jordan de orden* e_{rm}*, los cuales satisfacen* $e_m = e_{1m} \geq \cdots e_{r_m m}$*.*

Ejemplo 80 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A *es* $(x-2)^4$*. Como* A *es suma directa de dos matrices* 2×2*, es claro que el polinomio minimal de* A *es* $(x-2)^2$*. Luego* A *está en forma de Jordan.*

TAREA3: FORMAS CUADRATICAS, MATRICES HERMITIANAS Y FORMA CANONICA DE JORDAN

Trabajo en equipo

1. *Calcular la matriz Q (cuyas columnas son los vectores característicos ortonormales), y diagonaliza las siguientes matrices simétricas:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. *Encontrar y diagonalizar la matriz simétrica A que corresponde a la forma cuadrática.*

   a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4 + x_4^2$

   b) $x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_4 + x_4^2$

   c) $4x^2 + 4xy + y^2 = 9$

   d) $3x^2 - 6xy + 5y^2 = 36$

3. *Diagonalizar las siguientes matrices hermitianas*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3+4i \\ -2i & 4 & 5 \\ 3-4i & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Diagonalizar las siguientes matrices de Jordan:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}$$

Referencias

[1] *Gilbert Strang, 2007. Algebra Lineal y sus aplicaciones, Thomson. 4a edición.*

[2] *Darell A. Turkington, 2007. Mathematical Tools for Economics, Blackwell Publishing.*

[3] *Mike Rosser, 2003. Basic Mathematics for Economicsts, Routledge. Routledge. 2da. edición.*

[4] *Nakos George, 2004. Algebra Lineal con aplicaciones. Internacional Thomson Editores. 2a Ed, México.*