4. Optimización libre y restringida en varias variables

Introducción

Los problemas de optimización se pueden describir usualmente de la siguiente forma matemática. Hay una **función objetivo** $f(x_1, ..., x_n)$, que es una función real de n variables de la que hay que hallar los valores máximos o mínimos. También hay un **conjunto de restricciones** o un **conjunto de oportunidades** S que es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Se pueden abarcar varios tipos de distintos problemas de optimización dando el conjunto S adecuadamente. Si f tiene un punto óptimo en el interior de S se habla del caso clásico. Si S es el conjunto de todos los puntos $(x_1, ..., x_n)$ que verifican un cierto número de ecuaciones tenemos un problema lagrangiano, que es maximizar o minimizar una función sujeta a restricciones de igualdad.

4.1. Optimización libre

Sea f una función de n variables $x_1, ..., x_n$ definida en un dominio $S \subset \mathbb{R}^n$. Sea $c = (c_1, ..., c_n) \in S$ y supongamos que f toma un valor en c que es mayor o igual que todos los valores de f en los otros puntos $x = (x_1, ..., x_n)$ de S, es decir:

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \in S.$$

Entonces se llama a c un **máximo global** de f en S y a $f(c)$ el **valor máximo**. De forma análoga definimos un **mínimo global** y el **valor mínimo** invirtiendo el signo de la desigualdad. Conjuntamente se usarán los nombres de óptimos y valores óptimos para significar máximos o mínimos. El vector c se llama **un punto estacionario** de $f(x_1, ..., x_n)$ si $x = c$ es una solución de las n ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0, ..., \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

Teorema 4.1. *Sea f una función definida en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $c = (c_1, ..., c_n)$ un punto interior de S en el que f es diferenciable. Una* *condición necesaria para que c sea un máximo o un mínimo para f es que c sea un punto estacionario para f, es decir,*

$$f_i'(c) = 0 \ (i = 1, ..., n).$$

En particular se tiene el siguiente

Teorema 4.2. *Una condición necesaria para que una función $f(x, y)$ diferenciable tenga un máximo o un mínimo en un punto interior (x_0, y_0) de su dominio es que (x_0, y_0) sea un punto estacionario de f, esto es,*

$$f_x'(x_0, y_0) = 0, \ f_y'(x_0, y_0) = 0. \tag{21}$$

Teorema 4.3. *(Condiciones suficientes de óptimos globales) Si $f(x, y)$ es una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un dominio convexo S, y sea (x_0, y_0) un punto estacionario de f interior a S, entonces la condición suficiente para que la función $f(x, y)$ tenga un máximo o un mínimo respectivamente es:*

(a) *Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:*

$$D(x, y) = f_{xx}''(x, y) f_{yy}''(x, y) - [f_{xy}''(x, y)]^2 < 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un punto de silla de $f(x, y)$ en S.

(b) *Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:*

$$D(x, y) = f_{xx}''(x, y) f_{yy}''(x, y) - [f_{xy}''(x, y)]^2 > 0, \ y \ f_{xx}''(x, y) < 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un máximo de $f(x, y)$ en S.

(c) *Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:*

$$D(x, y) = f_{xx}''(x, y) f_{yy}''(x, y) - [f_{xy}''(x, y)]^2 > 0, \ y \ f_{xx}''(x, y) > 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un mínimo de $f(x, y)$ en S.

Ejemplo 44. Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y clasifique cada uno como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

Solución

Como

$$f_x = 2x \quad \text{y} \quad f_y = 2y$$

el único punto crítico de f es $(0, 0)$. Para poner a prueba este punto, use las derivadas parciales de segundo orden

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2 \quad \text{y} \quad f_{xy} = 0$$

y obtenga

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - 0^2 = 4$$

Esto es , $D(x, y) = 4$, para todos los puntos (x, y), en particular,

$$D(0, 0) = 4 > 0$$

Por tanto f tiene un extremo relativo en $(0, 0)$. Además, como

$$f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$$

se deduce que el extremo relativo en $(0, 0)$ es un mínimo relativo. Como referencia, la grafica de f aparece en la figura 21.

Ejemplo 45. Encuentre todos los puntos críticos de la funcion $f(x, y) = 12x - x^3 - 4y^2$ y clasifique cada uno como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto silla.

Solución

Como

$$f_x = 12 - 3x^2 \quad \text{y} \quad f_y = -8y$$

los puntos críticos se encuentran resolviendo simultaneamente las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 12 - 3x^2 &= 0 \\ -8y &= 0 \end{aligned}$$

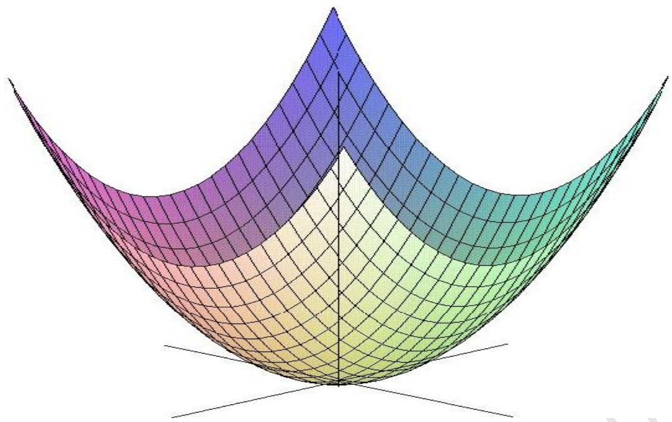

Figura 21: $f(x,y) = x^2 + y^2$

De la segunda ecuación obtenemos $y = 0$ y, de la primera,

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 12 \\ x &= 2 \text{ o } -2 \end{aligned}$$

Por tanto, hay dos puntos críticos, $(2,0)$ y $(-2,0)$.

Para determinar la naturaleza de estos puntos, primero se calcula

$$f_{xx} = -6x \quad f_{yy} = -8 \quad \text{y} \quad f_{xy} = 0$$

y luego se forma la función

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6x)(-8) - 0 = 48x$$

Al aplicar la prueba de las segundas derivadas parciales a los dos puntos críticos, se obtiene

$$D(2,0) = 48(2) = 96 > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(2,0) = -6(2) = -12 < 0$$

y

$$D(-2,0) = 48(-2) = -96 < 0$$

de modo que hay un máximo realtivo en $(2,0)$ y un punto silla en $(-2,0)$. Ver figura 22.

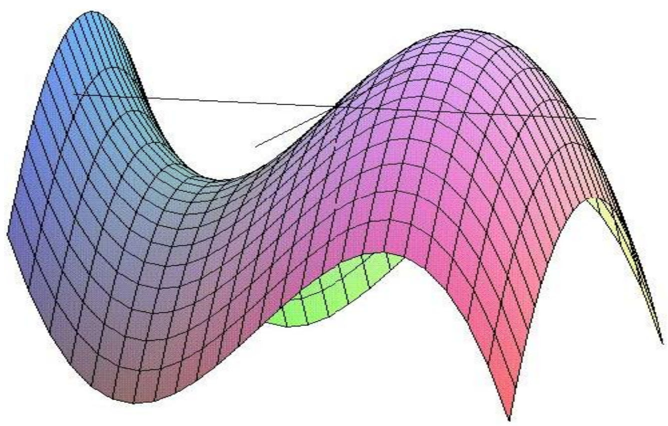

Figura 22: $f(x,y) = 12x - x^3 - 4y^2$

Ejemplo 46. Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$ y clasifique cada uno como máximo relativo, mínimo relativo o punto silla.

Solución

Como

$$f_x = 3x^2 + 6y \quad \text{y} \quad f_y = -3y^2 + 6x$$

los puntos críticos de f se encuentran resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones

$$3x^2 + 6y = 0 \quad \text{o} \quad -3y^2 + 6x = 0$$

De la primera ecuación se obtiene $y = -\frac{x^2}{2}$ que se puede sustituir en la segunda ecuación para encontrar

$$\begin{aligned} -3\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2 + 6x &= 0 \\ -\frac{3x^4}{4} + 6x &= 0 \\ -x(x^3 - 8) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de dicha ecuación son $x = 0$ y $x = 2$. Estas son las coordenadas x de los puntos críticos de f. Para obtener las coordenadas y correspondientes, sustituya estos valores de x en la ecuación $y = -\frac{x^2}{2}$ (o en cualquiera de las dos ecuaciones originales).

Así encontrara que $y = 0$ cuando $x = 0$ y $y = -2$ cuando $x = 2$. De ahí se deduce que los puntos críticos de f son $(0, 0)$ y $(-2, 2)$.

Las derivadas parciales de segundo orden de f son

$$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = -6y \quad \text{o} \quad f_{xy} = 6$$

Por tanto,

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = -36xy - 36 = -36(xy + 1)$$

Como

$$D(0, 0) = -36[(0)(0) + 1] = -36 < 0$$

se deduce que f tiene un punto silla en $(0, 0)$. Como

$$D(2, -2) = -36[2(-2) + 1] = 108 > 0$$

y

$$f_{xy}(2, -2) = 6(2) = 12 > 0$$

se ve que f tiene un mínimo relativo en $(2, -2)$.

Ejemplo 47. Sea $Y = F(K, L)$ es una función de producción, donde K es el capital y L es el trabajo. Designemos por p el precio por unidad de producción, por r el costo por unidad de capital y w el precio (o tasa de salario) por unidad de trabajo. El beneficio de producir y vender $F(K, L)$ unidades es entonces:

$$\pi(K, L) = pF(K, L) - rK - wL,$$

Si F es diferenciable y π tiene un máximo con $K > 0$ y $L > 0$, entonces por el teorema (4.2) las parciales de π deben anularse. Por tanto, las condicione de primer orden son:

$$\pi'_K(K, L) = pF'_K(K, L) - r = 0$$
$$\pi'_L(K, L) = pF'_L(K, L) - w = 0.$$

Así una condición necesaria para que el beneficio tenga un máximo para $K = K^*$ y $L = L^*$ es que:

$$pF'_K(K^*, L^*) = r, \; pF_L(K^*, L^*) = w$$

otra forma de interpretarlo es

$$F'_K(K^*, L^*) = \frac{r}{p}, \; F_L(K^*, L^*) = \frac{w}{p}$$

Supongamos que incrementamos el capital en una unidad desde el nivel K^*. ¿Cuánto ganaremos? La producción crece en, aproximadamente, $F'_K(K^*, L^*)$ unidades. Como cada una de esas unidades tiene un precio p, el aumento de ingresos es de $pF'_K(K^*, L^*)$ aproximadamente.¿Cúanto se pierde en este aumento unitario de capital? Se pierde r, que es el costo de una unidad de capital. Estas dos cantidades deben ser iguales. La segunda ecuación tiene una interpretación análoga: incrementando el trabajo en una unidad desde el nivel L^* se tendrá un aumento aproximado de los ingresos de $pF'_L(K^*, L^*)$, mientras que el costo del trabajo extra es w, y esas dos cantidades son iguales. El punto (K^*, L^*) que maximiza el beneficio tiene la propiedad de que el ingreso extra generado por un aumento unitario de capital o trabajo se compensa con el aumento del costo.

Problema 10. Supongamos que:

$$Y = F(K, L) = 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}},$$

es una función de producción, donde K es el capital y L es el trabajo. Sean $p = 0.5$ el precio por unidad de producción, $r = 0.1$ el costo por unidad de capital y $w = 1$ el precio por unidad de trabajo. Hallar el beneficio máximo en este caso.

Solución del problema 10: La función de beneficios es:

$$\pi(K, L) = 0.5 \cdot 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1K - 1 \cdot L = 3K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1K - L,$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\pi'_K(K, L) = 1.5 \cdot K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1 = 0,$$
$$\pi'_L(K, L) = K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} - 1 = 0.$$

La primera ecuación da $K^{-1/2} = L^{1/3}$. Sustitutendo este valor de $K^{\frac{1}{2}}$ en la segunda ecuación obtenemos $15L^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = 1$. Así $15L^{-\frac{1}{3}} = 1$, ó $L = 15^3$. Veamos que el punto estacionario $(K, L) = (50.625, 3.375)$ maximiza los beneficios.

Tenemos que:

$$\pi(K, L) = 3K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1k - L,$$

con $K > 0$ y $L > 0$, luego:

$$\pi''_{KK} = -\frac{3}{4}K^{-3/2}L^{1/3}\, \pi''_{KL} = \frac{1}{2}K^{-1/2}L^{-2/3}, \text{y}$$
$$\pi''_{LL} = -\frac{2}{3}K^{1/2}L^{-5/3}.$$

Por tanto, $\pi''_{KK} < 0$ y $\pi''_{LL} < 0$ para todo $K > 0$ y $L > 0$. Además,

$$\pi''_{KK}\pi''_{LL} - (\pi''_{KL})^2 = \frac{1}{2}K^{-1}L^{-4/3} - \frac{1}{4}K^{-1}L^{-4/3} > 0$$

Por el teorema 4.3 el punto $(50.625, 3.375)$ es un máximo de $\pi(K, L)$. Entonces, para maximizar los beneficios, hay que tomar:

$$L = 15^3 = 3.375 \text{ y } K = 15^2L^{2/3} = 15^4 = 50.625$$

El valor de la función de beneficios es $\pi(50.625, 3.375) = 1687.5$.