3. Cálculo en varias variables

3.1. Funciones en varias variables

Hasta ahora hemos estudiado mayormente funciones de una variable, esto es, funciones cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es también un conjunto de números reales. Sin embargo la descripción de muchos fenómenos económicos exigen considerar un número grande de variables de manera simultánea. Por ejemplo, la demanda de un bien depende del precio del bien, de los gustos del consumidor, de las rentas de los diferentes consumidores, y de los precios de los bienes complementarios y sustitutos, entre otras cosas. Así esta demanda es esencialmente una función de varias variables.

Definición 3.1. Una **función de n variables** $x_1, x_2, ..., x_n$ con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ es una regla que asigna un número especifico $f(x_1, ..., x_n)$ a cada n-vector $(x_1, ..., x_n) \in D$.

Por ejemplo, la forma general de la función de producción es:

$$Q = f(K, L)$$

Decimos que Q depende de las dos variables independientes, la variable capital (K) y el trabajo (L) . La forma específica de una función nos dice exactamente cómo el valor de la variable dependiente se determina a partir de los valores de la variable independiente. Una forma específica en una función de producción puede ser:

$$Q = 4K^{0.5}L^{0.5}$$

Para cualquier valor dado de K y L la función específica nos permite calcular el valor de Q. Por ejemplo:

$$Si\ K = 1\, y\ L = 1\ entonces\ Q = 4(1)^{0.5}(1)^{0.5} = 4$$
$$Si\ K = 4\, y\ L = 4\ entonces\ Q = 4(4)^{0.5}(4)^{0.5} = 16$$

Ejemplo 32. Otro ejemplo de función de Producción es:

$$Y = F(K, L, T),$$

donde Y es el volumen de cosecha, K es el capital invertido, L el trabajo y T la superficie de explotación agrícola.

Ejemplo 33. Función de Cobb-Douglas:

$$F(x, y) = Ax^a y^b,$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y $A > 0, x > 0, y > 0$.

La gráfica de la función producción Cobb-Douglas se presenta en la figura 19.

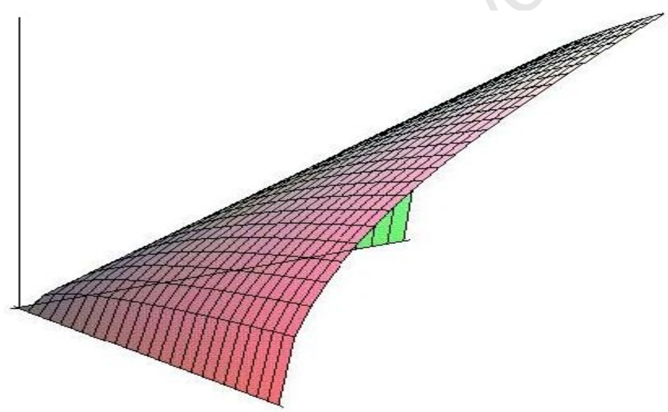

Figura 19: $f(x, y) = Ax^a y^b$ con $a > 0$, $b > 0$ y $A, x, y, > 0$

3.1.1. Curvas de nivel

El correspondiente conjunto de puntos (x, y) del plano xy que satisface $f(x, y) = C$ se llama **curva de nivel** de f en C, cuando C varía sobre un conjunto de números se genera toda una familia de curvas de nivel. Las curvas de nivel aparecen en numerosas aplicaciones diferentes. Por ejemplo, en economía, si la salida $Q(x, y)$ de un proceso de producción está determinada por dos entradas x y y (digamos horas de fuerza laboral e inversión de capital), entonces la curva de nivel $Q(x, y) = C$ se llama **curva de producción constante** C o, más brevemente, **isocuanta**.

Ejemplo 34. Una empresa tiene la siguiente función de producción

$$Q = 4L^{1/2}K^{3/4}$$

Identifique que combinaciones de trabajo (L) y capital (K) generan el mismo nivel de producción (Q) y por lo tanto se encuentran en la misma isocuanta.

Solución

Se construye la siguiente tabla de combinaciones de trabajo y capital

K/L	Trabajo			
Capital	1	16	64	729
1	4	16	32	108
16	32	128	256	864
81	108	432	864	2916

A partir de la tabla anterior se observa que

$$\text{Si } L = 1, K = 16 \text{ y } L = 64, K = 1 \Rightarrow Q = 32$$
$$\text{Si } L = 1, K = 81 \text{ y } L = 729, K = 1 \Rightarrow Q = 108$$
$$\text{Si } L = 64, K = 81 \text{ y } L = 729, K = 16 \Rightarrow Q = 864$$

En la figura 20 se muestran las isocuantas de la función producción Cobb-Douglas.

Otra aplicación de curvas de nivel en economía comprende el concepto de curvas de indiferencia. Un consumidor que esté considerando la compra de varias unidades de cada una de dos mercancías está asociado con una **función de utilidad** $U(x, y)$, que mide la satisfacción total (o **utilidad**) que el consumidor obtiene por tener x unidades de la primera mercancía, así como y unidades de la segunda. Una curva de nivel $U(x, y) = C$ de la función de utilidad se llama **curva de indiferencia** y da todas las combinaciones de x y y que conducen al mismo nivel de satisfacción del consumidor.

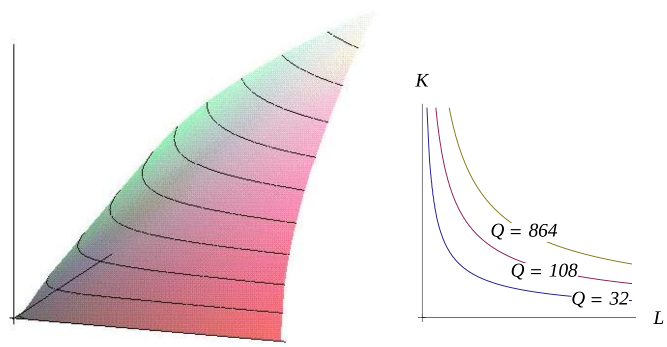

Figura 20: $Q(L, K) = 4L^{1/2}K^{3/4}$

Las funciones que los economistas estudian normalmente tienen más de dos variables, luego necesitamos extender a ellas el concepto de derivadas parciales.

3.2. Derivadas parciales

Cuando se estudia una función $y = f(x)$ de una variable, la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$ mide la tasa de variación de la función cuando x cambia. Para funciones de dos variables $z = f(x, y)$ queremos ver la velocidad de variación de la función respecto de los cambios de valores en las variables independientes.

Definición 3.2. Sea $z = f(x, y)$. La **derivada parcial de z** con respecto de x, la cual se le denota por $\partial z/\partial x$, es la derivada de $f(x, y)$ con respecto a x cuando y se mantiene constante. La derivada parcial de f con respecto de y, la cual se le denota por $\partial z/\partial y$, es la derivada de f con respecto a y cuando x se mantiene constante.

Definición 3.3. Sea $z = f(x_1, ..., x_n)$. Entonces $\partial f/\partial x_i$ es la derivada de $f(x_1, ..., x_n)$ con respecto a x_i, considerando las otras variables $x_j\,(i \neq i)$ como constantes.

Ejemplo 35. Encuentre las derivadas parciales f_x y f_y si $f(x, y) = 2xy^5 + 3x^2y + x^2$.

Solución

Para calcular f_x, considere f como una función de x y derive la suma término por término, tratando y como constante para obtener

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(1)y^5 + 3(2x)y + 2x \\ &= 2y^5 + 6xy + 2x \end{aligned}$$

Para calcular f_y, considere f como una función de y y derive término por término, tratando x como constante para obtener

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= 2x(5y^4) + 3x^2(1) + 0 \\ &= 10xy^4 + 3x^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 36. Encuentre las derivadas parciales f_x y f_y si $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$.

Solución

Para simplificar el cálculo, empiece por reescribir la función como

$$f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2}{3}yx^{-1}$$

Para calcular f_x, considere f como una función de x y derive la suma término por término, tratando y como constante para obtener

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + 2(1)y^2 + \frac{2}{3}y(-x^{-2}) \\ &= 2x + 2y^2 - \frac{2y}{3x^2} \end{aligned}$$

Para calcular f_y, considere f como una función de y y derive término por término, tratando x como constante para obtener

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= 0 + 2x(2y) + \frac{2}{3}(1)(x^{-1}) \\ &= 4xy + \frac{2}{3x} \end{aligned}$$

3.2.1. Derivadas parciales de orden superior

Si $z = f(x, y)$, entonces $\partial f/\partial x$ y , $\partial f/\partial y$ se llaman las **derivadas parciales de primer orden** o **derivadas parciales primeras**. Esas derivadas parciales son, a su vez, funciones de dos variables. A partir de $\partial f/\partial x$, podemos construir dos nuevas funciones tomando las derivadas parciales con respecto a x y y. De la misma manera podemos tomar las derivadas parciales de $\partial f/\partial y$ con respecto a x y y. A continuación se muestra un resumen de la definición y notación para las cuatro posibles derivadas parciales de segundo orden de una función de dos variables.

(a) Si $z = f(x, y)$, la derivada parcial de f_x con respecto a x es

$$f_{xx} = (f_x)_x \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

(b) La derivada parcial de f_x con respecto a y es

$$f_{xy} = (f_x)_y \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

(c) La derivada parcial de f_y con respecto a x es

$$f_{yx} = (f_y)_x \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

(d) La derivada parcial de f_y con respecto a y es

$$f_{yy} = (f_y)_y \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

Ejemplo 37. Calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x, y) = xy^3 + 5xy^2 + 2x^2 + 1$.

Solución

Como

$$f_x = y^3 + 5y^2 + 4x$$
$$f_y = 3xy^2 + 10xy$$

se deduce que

$$f_{xx} = 4$$
$$f_{yy} = 6xy + 10x$$

Las derivadas cruzadas son

$$f_{yx} = 3y^2 + 10y$$
$$f_{xy} = 3y^2 + 10y$$

Aplicaciones de diferenciación parcial

La diferenciación parcial es básicamente un aplicación matemática del supuesto de ceteris paribus (es decir, las otras cosas se suponen constantes), que es frecuentemente utilizado en el análisis económico. Debido a que la economía es un sistema complejo de entender, los economistas a menudo ven el efecto de los cambios en una variable asumiendo que todos los demas factores permanecen sin cambios. Cuando la relación entre las distintas variables se puede expresar en forma matemática, el análisis del efecto de los cambios en una variable puede ser descubierto a través de la diferenciación parcial. La diferenciación parcial se puede aplicar a las funciones de utilidad y a modelos macroeconómicos como veremos a continuación.

Función de utilidad del Consumo

La forma general de la función de utilidad del consumo es

$$U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ representan las cantidades de los diferentes bienes consumidos.

La teoría económica moderna asume que la utilidad es un concepto ordinal, lo que significa que diferentes combinaciones de productos se pueden clasificar en orden de preferencia, pero las utilidades en sí mismas no puede ser cuantificados de ninguna manera. Sin embargo, los economistas también trabajan un poco con el concepto de utilidad cardinal donde se supone que, al menos hipotéticamente, cada individuo puede cuantificar y comparar los diferentes niveles de su propia utilidad. Es este concepto de utilidad cardinal el que se utiliza aquí.

Si se supone que sólo los dos bienes x y y son consumidos, la función de utilidad tendrá la forma.

$$U = f(x, y)$$

La utilidad marginal se define como la tasa de cambio de la utilidad total con respecto al aumento en el consumo de un bien. Por lo tanto las funciones de la utilidad marginal de los bienes x y y son respectivamente

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad U_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Dos principios importantes de la teoría de la utilidad son:

1. La ley de la utilidad marginal decreciente dice que si, ceteris paribus, la satisfacción adicional del consumidor disminuye a medida que se consume una mayor cantidad del bien.
2. El consumidor va a consumir un bien hasta el punto de que su utilidad marginal es cero.

Algunos aplicaciones de los dos principios se dan en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 38. Analizar si la ley de la utilidad marginal decreciente es válida para los bienes x y y en la siguiente función de utilidad del tipo Cobb-Douglas: $U = x^{\alpha}y^{\beta}$ y $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, x > 0, y > 0$.

Solución

Para la función utilidad $U = x^{\alpha}y^{\beta}$ la diferenciación parcial lleva a la función de utilidad marginal

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} > 0 \quad \text{y}$$

$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} > 0$$

Cuando aumenta el consumo del bien x manteniendo constante la cantidad del bien y, la utilidad del consumidor U aumenta. Del mismo modo cuando aumenta el consumo del bien y manteniendo constante la cantidad del bien x, la utilidad del consumidor U aumenta. Para analizar los utilidad marginal decreciente hacemos las segundas derivadas de la función de utilidad.

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}y^{\beta} < 0 \quad \text{y}$$

$$U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \beta(\beta - 1)x^{\alpha}y^{\beta-2} < 0$$

Así U_{xx} cae a medida que x aumenta y la caída U_{yy} cae a medida que y aumenta.

Modelo macroeconómico keynesiano de una economía abierta

Si se introduce al comercio exterior el modelo macroeconómico keynesiano básico se convierte en la identidad

$$Y = C + I + G + X - M \tag{9}$$

y la relación funcional de la función consumo

$$C = cY_d \tag{10}$$

donde c es la propensión marginal al consumo, más

$$M = mY \tag{11}$$

donde M es la importación y m es la propensión marginal de la importación, y

$$\begin{aligned} Y_d &= Y - T \\ T &= tY \end{aligned} \tag{12}$$

donde Y_d es el ingreso disponible, T son los impuestos y t es la tasa de impuestos.

La inversión I, el gasto público G y las exportaciones X se determinan de manera exógena y c, m y t son parámetros dados. Sustituyendo (10), (11) y (12) en (9) tenemos

$$\begin{aligned}
Y &= c(1-t)Y + I + G + X - mY \\
Y[1 - c(1-t) + m] &= I + G + X \\
Y &= \frac{I + G + X}{1 - c(1-t) + m} \qquad (13)
\end{aligned}$$

en el modelo básico keynesiano sin G y X, el multiplicador de la inversión es simplemente dY/dI. Sin embargo, en este modelo extendido también se tiene que asumir que G, I y X son constantes con el fin de obtener el multiplicador de la inversión. Así, el multiplicador de la inversión se encuentra diferenciando parcialmente (13) con respecto a I, lo cúal da

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{1}{1 - c(1-t) + m}$$

también debe ser capaz de ver que el gasto público y el multiplicador de exportación también toma esta, ya que

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{1 - c(1-t) + m}$$

Ejemplo 39. En un sistema macroeconómico Keynesiano se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{llll}
Y = C + I + G + X - M & & & \\
C = 0.8Y_d & Y_d = Y - T & T = 0.2Y & M = 0.16Y \\
G = 400 & I = 300 & X = 288 &
\end{array}$$

¿Cuál es el nivel de equilibrio de Y? ¿Que aumento en G sería necesario para que Y tenga un crecimiento de 2,500? Si este aumento del gasto se lleva a cabo, ¿Qué pasará con

(i) el superavit presupuestario o déficit del gobierno, y

(ii) el saldo de la balanza de pagos?

Solución:

Primero derivamos ambas relaciones entre C y Y. Así:

$$C = 0.8Y_d = 0.8(1-t)Y = 0.8(1-0.2)Y \tag{14}$$

A continuación sustituimos (14), las relaciones funcionales y los valores que figuran en la identidad para encontrar el equilibrio Y. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Y &= C + I + G + X - M \\
&= 0.8(1-0.2)Y + 300 + 400 + 288 - 0.16Y \\
&= 0.64Y + 988 - 0.16Y \\
(1-0.48)Y &= 988 \\
Y &= \frac{988}{0.52} = 1,900
\end{aligned}$$

en este nivel de equilibrío de Y, la cantidad total de impuestos recaudados es

$$T = tY = 0.2(1,900) = 380$$

por lo tanto, el déficit presupuestario, que es el monto de impuesto recaudados menos el gasto público, es

$$T - G = 380 - 400 = -20$$

la cantidad gastada en las importaciones es

$$M = 0.16Y = 0.16 \times 1,900 = 304$$

por lo que la balanza de pagos es

$$X - M = 288 - 304 = -16$$

es decir, un deficit de 16.

El multiplicador del gasto público es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial G} &= \frac{1}{1-c(1-t)+m} = \frac{1}{1-0.8(1-0.2)+0.16} \\
&= \frac{1}{1-(0.8)(0.8)+0.16} = \frac{1}{1-0.48} = \frac{1}{0.52}
\end{aligned} \tag{15}$$

como el equilibrio Y es 1,900, el aumento en Y necesario para llegar al nivel deseado de 2,500 es

$$\Delta Y = 2,500 - 1,900 = 600 \tag{16}$$

dado que el impacto del multiplicador sobre Y será siempre igual a

$$\Delta G \frac{\partial Y}{\partial G} = \Delta Y \tag{17}$$

Dónde ΔG es el cambio en el gasto público, sustituyendo (15) y (16) en (17) da

$$\Delta G \frac{1}{0.52} = 600$$
$$\Delta G = 600(0.52) = 312$$

este es el aumento en G necesario para elevar a Y a 2,500.

En el nuevo nivel del ingreso nacional, el importe del impuesto recaudado será

$$T = tY = 0.2(2,500) = 500$$

el nivel de gasto público nuevo, incluyendo el aumento de 312 es

$$400 + 312 = 712$$

por lo tanto, el déficit presupuestario es

$$T - G = 500 - 712 = -212$$

es decir, hay un aumento de 192 en el déficit.

El nuevo nivel de importaciones es

$$M = (0.16)2,500 = 400$$

por lo que el nuevo equilibrío donde figuran los pagos

$$X - M = 288 - 400 = -112$$

es decir, el déficit aumento en 96.

Problema 12. Sea F una función de producción agrícola $Y = F(K, L, T)$, donde Y es el número de unidades producidas, K el capital invertido, L el trabajo y T la superficie de la tierra. Entonces $\frac{\partial Y}{\partial K} = F'_K$ se le llama la **productividad marginal del capital** y es la tasa de variación de la producción de Y con respecto a K cuando L y T se mantienen constantes. De manera análoga $\frac{\partial Y}{\partial L} = F'_L$, es la **productividad marginal del trabajo** y $\frac{\partial Y}{\partial T} = F'_T$ es la **productividad marginal de la tierra**. Supongamos que F es una función de Cobb-Douglas:

$$F(K, L, T) = AK^a L^b T^c$$

Hallar las productividades marginales y las parciales segundas. Estudiar sus signos.

Solución del problema 12. Las productividades marginales son:

$$F'_K = AaK^{a-1}L^bT^c,\ F'_L = AbK^aL^{b-1}T^c,\ F'_T = AcK^aL^bT^{c-1},$$

Si K, L y T son positivas, las productividades marginales son positivas. Así, un aumento de capital, trabajo o tierra se traducirá en un aumento del número de unidades producidas.

Las derivadas parciales cruzadas son:

$$\begin{aligned} F''_{KL} &= AabK^{a-1}L^{b-1}T^c \\ F''_{KT} &= AacK^{a-1}L^bT^{c-1} \\ F''_{LT} &= AbcK^aL^{b-1}T^{c-1} \end{aligned}$$

Además es fácil ver que $F''_{LK} = F''_{KL}, F''_{TK} = F''_{KT}$ y $F''_{LT} = F_{LT}$. Observemos que estas parciales son positivas. Llamamos complementarios a los factores de cada uno de los pares (capital y trabajo, capital y tierra, tierra y trabajo) por que si uno aumenta, aumenta la productividad marginal del otro.

Las parciales directas son:

$$\begin{aligned} F''_{KK} &= Aa(a-1)K^{a-2}L^bT^c \\ F''_{LL} &= Ab(b-1)K^aL^{b-2}T^{c-1} \\ F''_{TT} &= Ac(c-1)K^aL^bT^{c-2} \end{aligned}$$

Por ejemplo, F''_{KK} es la derivada parcial de la productividad marginal del capital respecto a K. Si $a < 1$, entonces $F''_{KK} < 0$ y por lo tanto hay una disminución de la productividad marginal del capital, es decir, un pequeño incremento del capital invertido redunda en una disminución de la productividad marginal del capital. Entonces podemos interpretar esto diciendo que, un pequeño incremento del capital hace que la producción aumente $(F'_k > 0)$, este aumento se prouduce a una tasa decreciente $(F''_{kk} < 0)$. Lo análogo ocurre para el trabajo si $(b < 1)$ y la tierra si $c > 1$.

3.3. La regla de la cadena

Muchos modelos económicos manejan funciones compuestas. Se trata de funciones de una o varias variables que, a su vez, son funciones de otras variables básicas. Por ejemplo, la cantidad producida puede ser función del capital y el trabajo y ambos funciones del tiempo. ¿Cómo varía la cantidad producida con el tiempo?. Más generalmente, ¿qué ocurre al valor de una función compuesta cuando los valores de sus variables básicas cambian?.

Supongamos que

$$z = F(x, y)$$

es una función de x y y donde, a su vez,

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

son funciones de una variable t. Sustituyendo tenemos

$$z = F(f(t), g(t))$$

de tal manera que z es función de t únicamente. Una variación de t producirá en general una variación de $f(t)$ y $g(t)$ y, como resultado, una variación de z. ¿Cómo cambia z cuando varía t? Por ejemplo, ¿producirá un aumento de t un aumento o disminución de z? La respuesta a estas preguntas será mucho más fácil si se puede hallar una expresión de dz/dt, la tasa de variación de z con respecto a t. Esta expresión viene dada por la regla siguiente:

Definición 3.4. Si la funcion esta dada por $z = F(x,y)$, $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = F_x(x,y)\frac{dx}{dt} + F_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$

Esta definición suministra la derivada de $z = F(x,y)$ con respecto a t, existen las derivadas parciales de F con respecto a x y y, y x, y son funciones derivables de t. Esta derivada se llama normalmente la **derivada total** de z con respecto a t. Según la definición, el hecho de que la primera variable x depende de t contribuye con el término $F_x(x,y)dx/dt$ a la derivada total. Análogamente, el hecho de que la segunda variable y dependa de t contribuye con el término $F_y(x,y)dy/dt$ a la derivada total. La derivada total dz/dt es la **suma** de las dos contribuciones.

Ejemplo 40. Calcular dz/dt en la función $z = F(x,y) = x^2 + y^3$, donde $x = t^2$, $y = 2t$.

Solución

Se tiene que

$$F_x(x,y) = 2x, \quad F_y(x,y) = 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2$$

Así por la definición obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= 2x \cdot 2t + 3y^2 \cdot 2\\ &= 4tx + 6y^2\\ &= 4t^3 + 24t^2\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene al sustituir x y y por sus valores en función de t.

Ejemplo 41. Sea $Y = F(K,L)$, donde Y representa la cantidad producida, K capital y L trabajo. Supongamos que K y L son funciones del tiempo. Entonces a partir de la regla de la cadena tenemos que:

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial K}\dot{K} + \frac{\partial Y}{\partial L}\dot{L}$$

Esto se interpreta diciendo que la producción total crece a la tasa obtenida multiplicando la productividad marginal de cada recurso por la tasa de cambio de ese recurso y sumando estos términos.

3.4. Funciones implícitas

A menudo necesitamos derivar funciones definidas implícitamente por una ecuación o un sistema de ecuaciones.

Sea F una función de dos variables y consideremos la ecuación:

$$F(x, y) = c \quad \text{(c es constante)} \tag{18}$$

Vemos que (18) representa una curva de nivel de F. Supongamos que esta ecuación define a y como una función $y = f(x)$ de x en cierto intervalo I. Esto significa que:

$$F(x, f(x)) = c \quad \text{para todo}\, x \in I \tag{19}$$

Si f es derivable ¿cuál es la derivada de $y = f(x)$?, el problema geométrico es hallar su pendiente en el punto P.

Para hallar la expresión de la pendiente se introduce la función auxiliar u definida por:

$$u(x) = F(x, f(x))$$

Para todo $x \in I$. Entonces por la regla de la cadena tenemos $u'(x) = F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x)$. Ahora bien, (19) dice que $u(x) = c$ para todo $x \in I$ y, como la derivada de una constante es cero, tenemos:

$$u'(x) = F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$

Si $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, entonces $f'(x) = \frac{-F_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Así, después de simplificar la notación, tenemos:

$$F(x, y) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (F'_y(x, y) \neq 0) \tag{20}$$

Este resultado es importante. Notese que, cuando (18) define a y como función implícita de x, la formula (20) da la derivada de y con respecto a x, aun cuando sea imposible resolver la ecuación en y.

Ejemplo 42. Usar (20) para calcular y' si $xy^{1/2} = 2$.

Solución: Escribimos $F(x,y) = xy^{1/2}$. Entonces $F'_x(x,y) = y^{1/2}$ y $F'_y(x,y) = 1/2xy^{-1/2}$. Por tanto (20) da:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{y^{1/2}}{1/2xy^{-1/2}} = -\frac{2y}{x}$$

Ejemplo 43. Dada la curva de ecuación:

$$x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y = 0$$

Hallar la pendiente y la ecuación de la tangente en el punto $(x,y) = (2,1)$.

Solución: Se comprueba primero que $x = 2$ e $y = 1$ satisfacen la ecuación, luego $(2,1)$ es un punto de la curva. Sea $F(x,y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y$; la ecuación dada es equivalente a $F(x,y) = 0$, que es la curva de nivel de F. Como $F'_x(x,y) = 3x^2 + 2xy$ y $F'_y(x,y) = x^2 - 4y - 10, (20)$ implica que:

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 4y - 10}$$

Para $x = 2$ e $y = 1$ se tiene que $y' = 8/5$. Por la formula punto-pendiente la ecuación de la tangente en $(2,1)$ es $y - 1 = (8/5)(x - 2)$, o bien $y = (1/5)(8x - 11)$.

Ejemplo 44. En el modelo de ingreso $Y = C(Y) + I(Y) + G_0$, utilice la regla de la función implícita para encontrar el multiplicador del gasto del gobierno, es decir, $\frac{\partial Y}{\partial G_0}$. Todas las derivadas son conocidas por ser continuas, ademas se tiene que, $0 < C_Y < 1$ y $I' > 0$. ¿Qué otra condición es necesaria para escribir una identidad de equilibrio?

Utilizar el resultado para encontrar el equilibrio de ingreso, si $C = 65$ millones, $I = 12$ millones, $G_0 = 5$ millones. Use diferenciales para encontrar el aumento del ingreso nacional, cuando el gasto público se duplica.

Solución:

$$F = Y - C(Y) - I(Y) - G_0 = 0$$

De acuerdo con la regla de la función implícita:

$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}$, donde $F_y \neq 0$ y F_x, F_y son continuas. Para este ejemplo se tiene $F'_{G_0} = -1$ y $F'_Y = 1 - C_Y - I'$

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = -\frac{-1}{1 - C_Y - I'} = \frac{1}{1 - C_Y - I'}$$

Necesitamos tener $C_Y - I' \neq 1$ a fin de que la regla de funciones implícitas se pueda aplicar y obtener una solución viable. Para encontrar el equilibrio de ingreso nacional, sustituimos en la fórmula

$$\bar{Y} = 65 + 12 + 5 = 82 \text{ millones}$$

Para el multiplicador del gasto del gobierno,

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - C_Y - I'} = \frac{1}{1 - 0.75 - 0.05} = \frac{1}{0.2} = 5$$

Cuando el gasto público se duplicó, lo que tenemos $dG_0 = 5$. Utilizando las reglas de los diferenciales, expresamos el aumento del ingreso nacional:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial G_0} dG_0 = 5(5) = 25 \text{ millones}$$

Debido al efecto estimulante de los gastos del gobierno, el ingreso nacional se incrementa por 25 millones para un total de 107 millones.

Ejemplo 45. Sea el siguiente modelo:

$$S(Y, i) + T(Y) = I(i) + G_0 \qquad 0 < S_y < 1 \qquad S_i, T' > 0 \qquad I'_i < 0$$

Donde S, Y, i, T, I y G_0 son el ahorro, la renta nacional, la tasa de interés, los impuestos, la inversión y el gasto público, respectivamente. Todas las derivadas son continuas. Usando la regla de la función implícita, dar el efecto del gasto de gobierno G_0 sobre el ingreso nacional Y ($\frac{\partial Y}{\partial G_0}$) y de la tasa de interés i ($\frac{\partial i}{\partial G_0}$). Interpretar los resultados.

Solución:

$$F = S(Y, i) + T(Y) - I(i) - G_0 = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = -\frac{F_{G_0}}{F_Y} = \frac{1}{S_Y + T'} > 0 \qquad \frac{\partial i}{\partial G_0} = -\frac{F_{G_0}}{F_i} = \frac{1}{S_i - I'} > 0$$

El aumento del gasto del gobierno aumenta el ingreso y la tasa de interés.