1.3. Cálculo diferencial

Introducción

Uno de los conceptos más importantes del cálculo es el de la derivada, la cual mide la razón en que cambia la función.

Las derivadas se usan para calcular la velocidad y la aceleración, estimar la razón de propagación de una enfermedad, fijar niveles de producción de manera que pueda maximizar la eficiencia y para muchas otras aplicaciones.

En esta sección continuaremos nuestro estudio, analizando aplicaciones en donde se usan las derivadas para modelar las razones a las que cambian las cosas en nuestro mundo. Hablaremos del movimiento a lo largo de una recta, y examinaremos otras aplicaciones.

1.3.1. Definición de derivada

Definición 1.5. La derivada de f en el punto a de su dominio está dada por la fórmula:

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

El número $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es $y - y_1 = m(x - x_1)$. Por tanto la ecuación de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, es:

$$y - f(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0)(x - x_0).$$

Ejemplo 8. Dada la funcíon $f(x) = 2x+1$, usemos la definición de derivada para calcular la derivada de f:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) + 1 - (2x+1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h + 1 - 2x - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ es 2. En palabras, por una unidad que cambia el dominio la imagen cambia en dos unidades. Ver figura 13.

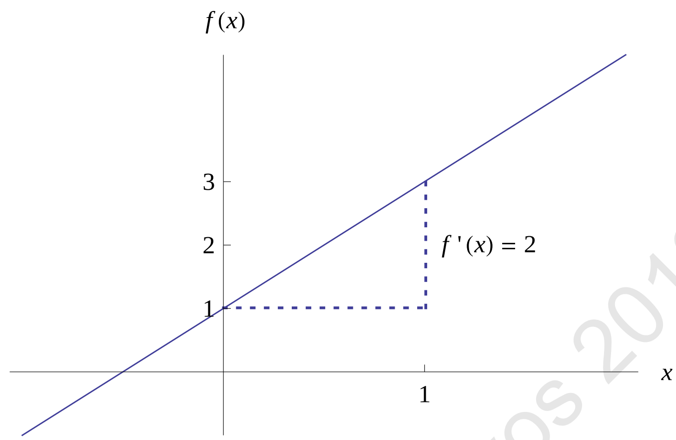

Figura 13: $f(x) = 2x + 1$

1.3.2. Reglas básicas de la derivación.

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$,
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$,
- $\frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c \cdot \frac{d}{dx}f(x)$,
- $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$,
- $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$,
- $\frac{d}{dx}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$,

Ejemplo 9. Derive el polinomio $y = x^4 + 12x$

Solución

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 12x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + 12\frac{d}{dx}(x) \\ &= 4x^3 + 12. \end{aligned}$$

Ejemplo 10. Derive el polinomio $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

Solución

$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) - 5\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5. \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Derive el producto

$$y = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} \\ &= 1 - \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 12. Derive el cociente

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Solución

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x^2-1}{x^2+1}\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)\cdot 2x-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{4x}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Análisis marginal

El análisis marginal es el estudio de la razón de cambio de cantidades económicas. La **función de costo total** de un fabricante, $c = f(q)$, nos da el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal**. Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

En general, interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de producir una unidad más de un bien dado.

El análisis anterior no solo se aplica al costo, sino a otras magnitudes económicas. A continuación se presenta un resumen de lo que se entiende por ingreso marginal y utilidad marginal. Sea

$$\begin{aligned}
R(x) &= \text{Ingreso por venta de } x \text{ unidades}\\
&= (\text{número de unidades vendidas})(\text{precio por unidad})\\
C(x) &= \text{Costo de producción de } x \text{ unidades}\\
\pi(x) &= R(x)-C(x) = \text{Utilidad de producción de } x \text{ unidades}
\end{aligned}$$

Llamamos a $R'(x)$ el **ingreso marginal**, a $C'(x)$ el **costo marginal** (en x), y a $\pi'(x)$ la **utilidad marginal**. Los economistas usan a menudo la palabra **marginal** de esta manera con el significado de derivada.

Problema 3. La empresa Elektra fabrica una calculadora de bolsillo programable. La gerencia determinó que el costo total diario de producción de estas calculadoras (en pesos) está dado por $c(q) = \frac{1}{5}q^2 + 4q + 27$, donde q representa las calculadoras producidas y además, que todas las q unidades se venderán, cuando el precio sea $p(q) = 75 - 3q$ pesos por unidad.

1. Encuentre el costo marginal y el ingreso marginal.
2. Utilice el costo marginal para calcular el costo de producir la novena unidad.
3. ¿Cuál es el costo real de producir la novena unidad?.
4. Utilice el ingreso marginal para calcular el ingreso derivado de la venta de la novena unidad.
5. ¿Cuál es el ingreso real de la venta de la novena unidad?.

Solución al problema 3.

1. La función de costo marginal es $C'(q) = \frac{2}{5}q + 4$. Como q unidades del artículo se venden a un precio de $p(q) = 75 - 3q$ pesos por unidad, el ingreso total es

   $$R(q) = p \cdot q = (75 - 3q)q = 75q - 3q^2$$

   El ingreso marginal es

   $$R'(q) = 75 - 6q$$

2. El costo de producir la novena unidad es el cambio en el costo cuando q se incrementa de 8 a 9 y se puede calcular usando el costo marginal

   $$C'(8) = \frac{2}{5}(8) + 4 = \frac{36}{5} = \$7.2$$

3. El costo real de producir la novena unidad es

   $$C(9) - C(8) = \$7.4$$

   que se aproxima razonablemente bien mediante el costo marginal $C'(8) = \$7.2$

4. El ingreso obtenido por la venta de la novena unidad se aproxima usando el ingreso marginal

$$R'(8) = 75 - 6(8) = \$27$$

5. El ingreso real obtenido por la venta de la novena unidad es

$$R(9) - R(8) = \$24$$

Análisis macroeconómico

En un modelo macroeconómico keynesiano simple sin sector gobierno y sin el comercio exterior, supone que:

$$Y = C + I \tag{4}$$

$$C = C_0 + cY \tag{5}$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo y I es la inversión, exógenamente fijas, y $C_0 > 0$ y $0 < c < 1$ son los parámetros.

La propensión marginal del consumo (c) es la tasa de cambio del consumo a medida que se incrementa el ingreso nacional, la cúal es igual a $dC/dY = c$. El multiplicador es el cambio en la tasa de la renta nacional en respuesta a un aumento de la inversión determina de manera exógena, es decir, dY/dI. El multiplicador es igual a

$$k = \frac{1}{1-c}$$

el cual es fácil derivar por diferenciación. Sustitutendo (5) en (4), tenemos

$$\begin{aligned} Y &= C_0 + cY + I \\ Y(1-c) &= C_0 + I \\ Y &= \frac{C_0 + I}{1-c} = \frac{C_0}{1-c} + \frac{I}{1-c} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1-c} = k$$

La cúal es la fórmula para el multiplicador. Este multiplicador se puede utilizar para calcular el aumento de la inversión necesarios para alcanzar un determinado incremento en el ingreso nacional.

Problema 4. En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $I = 200$ y $C = 50 + 0.75Y$. ¿Cúal es el nivel de equilibrio de Y? ¿Cúal es el aumento en I necesario para hacer que Y aumente a 1,200?.

Solución al problema 4

$$Y = C + I = 50 + 0.75Y + 200$$
$$0.25Y = 250$$
$$\text{Nivel de equilibrio } Y = 1,000$$

Para cualquier crecimiento (ΔI) en I, el crecimiento resultante (ΔY) en Y puede ser determinado por la formula

$$\Delta Y = K\Delta I$$

En este ejemplo, $b = 0.75$. Por tanto,

$$K = \frac{1}{1 - 0.75} = \frac{1}{0.25} = 4$$

El cambio requerido en Y es

$$\Delta Y = 1,200 - 1000 = 200 \tag{6}$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) y (3) en I,

$$200 = 4\Delta I$$
$$\Delta I = 50$$

Esto es el crecimiento requerido en I.

Multiplicadores de las demás variables exógenas en los modelos macroeconomicos más complejos pueden ser creadas usando el mismo método.

1.3.3. Tasas de crecimiento porcentual

Hemos interpretado la derivada de una función como la pendiente de la tangente a su gráfica en el punto de que se trate. En economía hay otras interpretaciones más importantes. Veamos primero cómo se puede interpretar en general la derivada como tasa de variación.

Supongamos que una cantidad y está relacionada con una cantidad x por $y = f(x)$. Si se da a x un valor a, el valor de la función es $f(a)$. Supongamos que se cambia a por $a + h$. El nuevo valor de y es $f(a + h)$ y la variación del valor de la función, cuando x varía de a a $a + h$, es $f(a + h) - f(a)$. La variación de y por unidad de variación de x tiene un nombre especial, **la tasa media de variación de f en el intervalo** $[a, a + h]$, y vale

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Tomando límite cuando h tiende a 0 se obtiene la derivada de f en a. Por tanto:

La tasa instantánea de variación de f *en* a *es* $f'(a)$

Este concepto es muy importante cuando se estudian cantidades que cambian. Cuando la variable independiente es el tiempo, usamos un punto para designar derivación respecto a él. Por ejemplo, si $x(t) = t^2$, escribimos $\dot{x}(t) = 2t$.

Aveces nos interesa estudiar las tasas de crecimiento porcentual $f'(a)/f(a)$. Para ello definimos:

La tasa de crecimiento porcentual f *en* a *es* $[\dfrac{f'(a)}{f(a)}] \cdot 100$

Ejemplo 13. Pondremos un ejemplo de la regla de derivación de un producto considerando la extracción de petróleo de un pozo. Supongamos que la cantidad de petróleo que se extrae por unidad de tiempo y el precio unitario cambian con el tiempo. Definimos:

$x(t) =$ tasa de extracción de barriles al día en el instante t

$p(t) =$ precio en dólares por barril en el instante t

Entonces obtenemos una expresión para el ingreso $R(t)$ en dólares por día que es la siguiente:

$$R(t) = p(t)x(t) \tag{7}$$

Según la regla del producto (recordando que se usan puntos para indicar derivación con respecto al tiempo),

$$\dot{R}(t) = p(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{p}(t) \tag{8}$$

Se puede interpretar como sigue el miembro de la derecha de (8). Supongamos que $p(t)$ y $x(t)$ crecen con el tiempo por la inflación y por que la compañía petrolera propietaria del pozo aumenta la capacidad de equipo de extracción. Entonces $R(t)$ crece por dos razones. Primeramente $R(t)$ aumenta porque la extracción aumenta y debe ser proporcional al precio y es igual a $p(t)\dot{x}(t)$. También $R(t)$ crece porque el precio lo hace. Este aumento es proporcional a la cantidad extraída $x(t)$ y es igual a $\dot{p}(t)x(t)$. Su contribución a la tasa de variación de $R(t)$, debe ser la ecuación (8) , que expresa el simple hecho de que $\dot{R}(t)$, la tasa total de variación de $R(t)$, es la suma de esas dos partes.

Nótese también que la tasa proporcional de crecimiento del ingreso se calcula dividiendo (8) por (7), obteniéndose:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{p}x + p\dot{x}}{px} = \frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{x}}{x}$$

En palabras: la tasa proporcional de crecimiento del ingreso es la suma de las tasas proporcionales de variación de precio y cantidad.

Problema 5. La cantidad de extracción del petróleo es $x(t) = \frac{1}{4}t$ millones de barriles en el año 2000 y el precio de venta era $p(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5$ miles de millones de dólares en el mismo año.

a) ¿A qué razón porcentual cambio el precio del petróleo respecto al tiempo en 2008?

b) ¿A qué razón porcentual cambio la extracción del petróleo respecto al tiempo en el 2008?

c) ¿A qué razón porcentual cambio el ingreso del petróleo respecto al tiempo en 2008?

Solución al problema 5

a) La tasa de crecimiento porcentual del precio esta dada por

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{t}{\frac{1}{2}t^2 + 5}$$

Como se analiza el periodo del 2000 al 2008 $t = 8$, tenemos

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{8}{\frac{1}{2}(8)^2 + 5} = \frac{8}{37} = (0.2162) \cdot 100 = 21.62\,\%$$

b) La tasa de crecimiento porcentual de la extracción del petróleo esta dada por

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}t}$$

Como se analiza el periodo del 2000 al 2008 $t = 8$, tenemos

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}(8)} = \frac{1}{8} = (0.125) \cdot 100 = 12.5\,\%$$

c) La tasa de crecimiento porcentual del ingreso del petróleo en 2008 es

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}}{R} &= \frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{x}}{x} \\ &= 21.62\,\% + 12.5\,\% \\ &= 34.12\,\%. \end{aligned}$$

Ejemplo 14. Otra aplicación económica es como sigue. Sea $W(t)$ la tasa nominal de salario y $P(t)$ el índice de precios en el instante t. Entonces $w(t) = W(t)/P(t)$ se le llama **tasa de salario real**, si deseamos saber su tasa proporcional de variación de salario real a través del tiempo lo derivamos como con la regla del cociente:

$$\dot{w}(t) = \frac{d\left(\frac{W(t)}{P(t)}\right)}{dt} = \frac{P(t)\dot{W}(t) - W(t)\dot{P}(t)}{[P(t)]^2}$$

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{\dot{W}(t)}{W(t)} - \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}$$

La tasa proporcional de variación del salario real es igual a la diferencia entre las tasas proporcionales de variación del salario nominal y del índice de precios.

1.3.4. Regla de la cadena

Teorema 1.6. ***(La regla de la cadena)*** *Sí $g(y)$ es diferenciable en el punto $y = f(x)$ y $f(x)$ es diferenciable en x, entonces la función compuesta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es diferenciable en x, y*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

En la notación de Leibniz, si $z = g(y)$ y $y = f(x)$, entonces:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

donde dz/dy se evalúa en $y = f(x)$.

Ejemplo 15. Derive la función $f(x) = (2-5x)^3$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2-5x)^3 &= 3(2-5x)^2\frac{d}{dx}(2-5x)\\ &= 3(2-5x)^2(-5)\\ &= -15(2-5x)^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 16. Derive la función $f(x) = (5x^3 - x^4)^7$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3).\end{aligned}$$

1.3.5. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones exponenciales

Definición 1.7. La función definida por:

$$f(x) = b^x, (b > 0, b \neq 1)$$

se le llama **función exponencial con base b y exponente x.**

Propiedades de la función exponencial:

- El dominio de una función exponencial es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- El rango es el intervalo $(0, \infty)$.
- La función exponencial es continua en todo su dominio.

Uno de los números más útiles como base de una función exponencial es el número irracional denotado por e, donde:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71828182845...,$$

La función exponencial con base $b = e$:

$$f(x) = e^x,$$

se le conoce como **función exponencial natural**.

Propiedades de la función exponencial natural:

- Es derivable para todo número real x.
- Es estrictamente creciente para todo número real x.
- Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = f(x) = e^x$.
- La función exponencial natural cumple:

1. $e^s e^t = e^{s+t}$,
2. $\frac{e^s}{e^t} = e^{s-t}$,
3. $(e^s)^t = e^{st}$.

Para cualesquiera exponentes s y t.

Reglas básicas de la derivación exponencial.

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$,
- $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$.

Ejemplo 17. Derive la función $f(x) = e^{x^2+1}$.

Solución

Utilizando la regla de la cadena con $u = x^2 + 1$, se tiene

$$f'(x) = e^{x^2+1}[\frac{d}{dx}(x^2 + 1)] = 2xe^{x^2+1}$$

Ejemplo 18. Derive la función

$$f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}.$$

Solución

Empleando la regla de la cadena junto con la regla del cociente, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 1)(-3e^{-3x}) - (2x)e^{-3x}}{(x^2 + 1)^2} \\ &= e^{-3x}[\frac{-3(x^2 + 1) - 2x}{(x^2 + 1)^2}] \\ &= e^{-3x}[\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}] \end{aligned}$$

Funciones exponenciales en economía

Supongamos que el déficit comercial actual es de \$5,345 miles de millones y una tasa de reducción continua de 6 % anual, ¿Cuánto será el déficit dentro de 10 años?

La magnitud del déficit comercial afecta la confianza en la economía de México, tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros. Se cree que para reducir su déficit comercial del gobierno debería reducir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno, o aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Supongamos que es posible reducir el déficit comercial continuamente a una tasa anual fija. Supongamos que el déficit D_0 en el instante $t = 0$, se reduce a una tasa anual r.

El déficit comercial D_0 en el instante $t = 0$ se reduce continuamente a una tasa anual r, y t años después el déficit comercial esta dado por:

$$D = D_0 e^{-rt}.$$

El déficit comercial dentro de t anõs a partir de ahora esta dado por:

$$D = 5,345e^{-0.06t},$$

en donde D esta en miles de millones. Esto significa que dentro de 10 años, el déficit será $5,345e^{-0.6} \approx \$2,933$ miles de millones.

Funciones logarítmicas

Definición 1.8. La función logarítmica de base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, se denota por $\log_b$ y se define por:

$$y = \log_b x \text{ si y sólo si } b^y = x.$$

La función logarítmica de base e se le llama **función logarítmica natural** y se usa la notación $\log_e x = \ln x$.

Propiedades de la Función Logarítmica Natural:

- La función logarítmica natural:

  $$g(x) = \ln x,$$

  es derivable y estrictamente creciente para todo $x > 0$. Además:

  $$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{1}{x}.$$

- Para todo $x > 0$, $y > 0$:

    1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
    2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
    3. $\ln x^p = p \ln x$.

- La función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logarítmica natural $g(x) = \ln x$ son funciones inversas la una de la otra, es decir:

    1. $\ln e^x = x$ para toda x,
    2. $e^{\ln y} = y$ para todo $y > 0$.

Reglas básicas de la derivación logarítmica.

- $\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$ para $x > 0$,
- $\frac{d}{dx}[\ln(u)] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ejemplo 19. Derive la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Solución

Utilizando la regla de la cadena con $u = x^2 + 1$, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}[\frac{d}{dx}(x^2 + 1)] = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Ejemplo 20. Derive la función $f(x) = x^2 \ln(x)$.

Solución

Utilizando la regla del producto se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2[\frac{d}{dx}\ln(x)] + \ln(x)[\frac{d}{dx}(x^2)] \\ &= x^2\frac{1}{x} + \ln(x)2x \\ &= x + 2x\ln(x). \end{aligned}$$

Funciones logarítmicas en economía

Los modelos económicos suelen emplear transformaciónes logarítmicas de las variables del modelo. Una transformación logarítmica es la conversión de una variable en diferentes valores reales positivos. En esta sección se demuestran propiedades de los logarítmos y demostrar por qué ésta es una herramienta útil para los economistas.

Los modelos económicos suelen incluir relaciones no lineales. Por ejemplo, los saldos monetarios reales están representados por el dinero en circulación (M), entre el nivel de precios (P), es decir, $M^s = \frac{M}{P}$; el tipo de cambio real (S) es igual al producto del tipo de cambio nominal (E) y el nivel de precios extranjeros (P^*), dividido por el nivel de precios internos (P), es decir, $S = \frac{(EP^*)}{P}$. Las relaciones no lineales entre las variables se puede expresar como relaciones lineales entre sus logaritmos. Modelos que incluyen productos o cocientes son más difíciles de resolver que los modelos que son lineales en las variables de interés. Así que expresar estos modelos en términos de sus logaritmos es a menudo una estrategia útil para hacer un análisis más sencillo. Una advertencia, sin embargo, es que cero y números negativos no se puede expresar como logaritmos. Esto limita al conjunto de variables que se puedan expresar como una transformación logarítmica. Resolvamos los ejemplos anteriores.

Saldos monetarios reales

La ecuación de los saldos monetarios reales están representados por:

$$M^s = \frac{M}{P}$$

Aplicando la segunda propiedad de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned}
\ln(M^s) &= \ln(\frac{M}{P}) \\
&= \ln(M) - \ln(P) \\
m^s &= m - p
\end{aligned}$$

De esta forma ya tenemos un modelo lineal que es más fácil de trabajar dentro del análisis económico.

Tipo de cambio real

La ecuación del tipo de cambio real está representada por:

$$S = \frac{EP^*}{P}$$

Aplicando la segunda y primera propiedad de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned}
\ln(S) &= \ln(\frac{EP^*}{P}) \\
s &= \ln(EP^*) - \ln P \\
&= \ln(E) + \ln(P^*) - \ln(P) \\
s &= e + p^* - p
\end{aligned}$$

Nuevamente obtenemos un modelo lineal que es más fácil de trabajar dentro del análisis económico.

Función producción Cobb-Douglas

Suponga una función producción $Q = 15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$, donde Q es la producción, K es el capital y L representa al trabajo. Vamos a linealizar esta función usando logaritmos naturales para transformar esta función exponencial a una función lineal.

$$Q = 15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned}
\ln(Q) &= \ln(15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}) \\
&= \ln(15) + \ln(K^{\frac{1}{5}}) + \ln(L^{\frac{4}{5}}) \\
\ln(Q) &= \ln(15) + \frac{1}{5}\ln(K) + \frac{4}{5}\ln(L)
\end{aligned}$$

De esta forma obtenemos una función lineal

Ahora supongamos que $K = 5$ y $L = 10$. ¿Cuál es el valor de Q?

$$\begin{aligned}
\ln(Q) &= \ln(15) + \frac{1}{5}\ln(5) + \frac{4}{5}\ln(10) \\
&= 4.87200586 \\
e^{\ln(Q)} &= e^{4.87200586} \\
Q &= 130.582584
\end{aligned}$$

En este ejemplo se aplicaron las propiedades de los logaritmos.

1.3.6. Derivación de funciones trigonométricas

Las derivadas trigonométricas son relativamente fácil de derivar. A continuación se muestran las fórmulas para las derivadas del seno, coseno y tangente. Como estas fórmulas se usan con frecuencia junto con la regla de la cadena, también se indica la versión generalizada de cada fórmula.

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$,
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$,
- $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$,
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$,
- $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$,

A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran el uso de estas formulas.

Ejemplo 21. Derive la función $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)$.

Solución

Con el uso de la regla de la cadena para la función seno con $u = 3x + 1$, se obtiene

$$f'(x) = 3\cos(3x + 1)$$

Ejemplo 22. Derive la función $f(x) = \cos^2 x$.

Solución

Como $$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

se usa la regla de la cadena para potencias y la fórmula para la derivada del coseno para obtener

$$f'(x) = 2\cos x(-\operatorname{sen} x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 23. Derive la función $f(x) = \tan(1 - x^3)$.

Solución

Con el uso de la regla de la cadena para la función tangente con $u = 1 - x^3$, se obtiene

$$f'(x) = \sec^2(1 - x^3)(-3x^2) = -3x^2 \sec^2(1 - x^3)$$

1.4. Derivadas implícitas

Las funciones de la forma $y = f(x)$ expresan a y explícitamente en términos de x y pueden derivarse de acuerdo con las reglas apropiadas al tipo de función que se maneje. Sin embargo, algunas ecuaciones en las que intervienen x y y, de la forma $f(x, y) = 0$, no presentan a y explicítamente en términos de x y no pueden manipularse de manera que se logre ese propósito. Tales ecuaciones definen a y como una función de x en el sentido de que para cada valor de x hay un correspondiente valor de y que satisface la ecuación; por consiguiente, se dice que la ecuación determina a y como una función implícita de x. Es posible calcular $\frac{dy}{dx}$ a partir de tales ecuaciones mediante el método de derivación implícita: Si dos variables x e y están relacionadas por una ecuación, para hallar $\frac{dy}{dx}$:

1. Derívese cada miembro de la ecuación respecto de x, considerando a y como función de x.

2. Despéjese $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación resultante.

Ejemplo 24. Encontrar dy/dx si $x^2 + y^2 = 25$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) &= \frac{d}{dx}(25) \\
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

Problema 6. Los ahorros S de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional Y por medio de la ecuación:

$$S^2 + \frac{1}{4}Y^2 = SY + Y$$

donde S e Y están en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando $Y = 16$ y $S = 12$.

Solución al Problema 6. Diferenciando ambos miembros de la ecuación con respecto a Y y despejando $\frac{dS}{dY}$ obtenemos:

$$\frac{dS}{dY} = \frac{S + 1 - \frac{Y}{2}}{2S - Y}.$$

De la cual si $Y = 16$ y $S = 12$, la propensión marginal al ahorro es $\frac{5}{8}$.

Problema 7. Para un mercado de dinero en equilibrio se tiene que la cantidad de dinero en circulación (M^s) es igual a la demanda de dinero ($M^d = hy - \alpha i$)

$$M^s = hy - \alpha i \qquad h, \alpha > 0$$

Usando la diferenciación implícita, encontrar el efecto del aumento de la oferta de dinero en el ingreso (Y) y en la tasa de interés (i). Interprete resultados.

Solución al Problema 7.

Calculemos $\frac{dY}{dM^s}$.

$$1 = h\frac{dY}{dM^s}$$
$$\frac{dY}{dM^s} = \frac{1}{h} > 0$$

Calculemos $\frac{di}{dM^s}$.

$$1 = -\alpha\frac{di}{dM^s}$$
$$\frac{di}{dM^s} = -\frac{1}{\alpha} < 0$$

Según este modelo simple, el aumento de la oferta de dinero aumenta el ingreso nacional y disminuye la tasa de interés.

1.5. Derivadas sucesivas o de orden superior

En algunos problemas de Economía se requiere derivar una función más de una vez. El resultado de dos o más derivaciones sucesivas de una función, es una derivada de orden superior. La derivada de $y = f(x)$, con respecto a x es, en general una función de x, y puede derivarse con respecto a esta variable. La derivada de la primera derivada es la segunda derivada; la derivada de esta última es a su vez la tercera derivada; y así sucesivamente.

En general. La derivada de orden n de una función $y = f(x)$ se obtiene al derivar n veces sucesivamente. El resultado de esta derivación, es decir, la derivada n-ésima, se representa por:

$$\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Al igual que la derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a x representa la tasa de cambio de y cuando varía x, la segunda derivada de $y = f(x)$ con respecto a x, representa la tasa de cambio de la primera derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}(x)$ también con respecto a x.

En general, la n-ésima derivada con respecto a x de una función $y = f(x)$, representa la tasa de cambio de la $(n-1)$-ésima derivada de $y = f(x)$ cuando x varía.

Ejemplo 25. Si $y = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, encontrar todas sus derivadas de orden superior.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 18x^2 - 24x + 6, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 36x - 24, \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= 36, \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= 0.
\end{aligned}$$

Todas las derivadas sucesivas son también cero: $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$, etcétera.