1. Álgebra lineal

Introducción

En la presente unidad de aprendizaje introduciremos una serie de técnicas matemáticas encuadradas dentro de lo que se conoce como el **Álgebra lineal**, que nos proporcionarán un lenguaje eficiente para el tratamiento de una gran cantidad de fenómenos económicos.

1.1. Vectores

1.1.1. Definición

Definición 1.1 *Para cada entero positivo n, definimos el espacio Euclidiano n-dimensional como:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

Un elemento particular de $\mathbb{R}^n$, digamos $x = (x_1, ..., x_n)$ también pueden denotarse como vector columna

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

*se le llama **vector (o vector columna)**. Las cantidades x_i se le llaman componentes (o elementos de x), a n se le llama el orden de x. Los vectores de orden 1 se les llaman **escalares**.*

1.1.2. Operaciónes de vectores

La operación de suma entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

y el producto de un escalar λ por un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1 *Sea*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $x + y, 3x, -y,$ *y* $5x - 2y$.

Solución:

$$x + y = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 3x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad -y = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 5x - 2y = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -19 \end{pmatrix}$$

1.1.3. Representación gráfica.

La suma y multiplicación por escalar definidas anteriormente tienen un significado geométrico. La representación geométrica en $\mathbb{R}^3$ de la suma de vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$ se obtiene trasladando a uno de ellos al extremo del otro, formando un paralelogramo, una de cuyas diagonales representa el vector resultante $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. A esta representación de la suma de vectores es a lo que se le llama **la ley del paralelogramo**.

El producto de un escalar por un vector se interpreta de la siguiente manera: sí el escalar λ es positivo y diferente de uno, al multiplicar el escalar λ por el vector $x = (x_1, x_2, x_3)$, el vector resultante es $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, el cual se obtiene del vector x multiplicando su magnitud por λ; si el escalar es negativo y diferente de menos uno, el vector cambia su magnitud y sentido ; si el escalar es cero, el vector se hace cero.

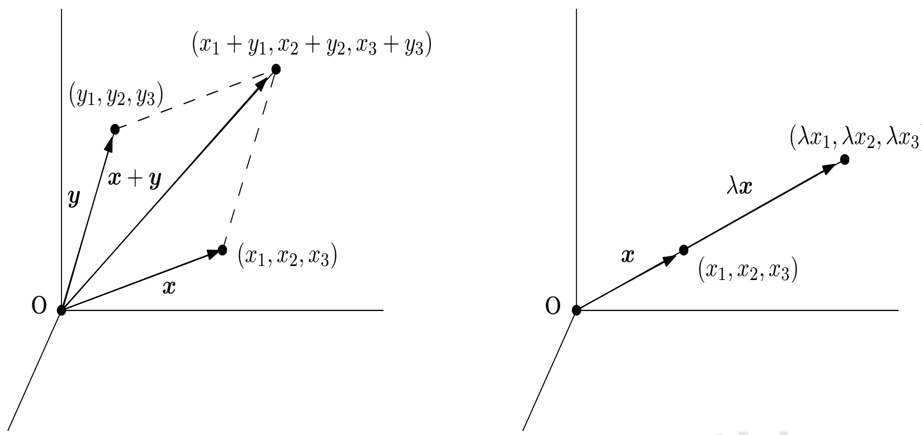

Figura 1: Paralelogramo

1.2. Producto punto

Una aplicación del Teorema de Pitágoras en el espacio permite definir la distancia del origen de coordenadas al punto que determina un vector α.

Definición 1.2 *Dados los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define su producto punto como:*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

El producto punto satisface las siguientes propiedades:

- El producto interno de dos vectores en $\mathbb{R}^n$ es un escalar único.
- $x \cdot y = y \cdot x$
- $\lambda x \cdot y = x \cdot \lambda y = \lambda(x \cdot y)$
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + x \cdot z$
- $x \cdot x > 0$ si $x \neq 0$. $x \cdot x = 0$ si $\alpha = 0$.

Ejemplo 2 *Si*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $x \cdot y$:

Solución:

$$x \cdot y = (1)(4) + (2)(-5) + (-3)(1) = -9.$$

1.2.1. Norma de un vector

Definición 1.3 *Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, se define su norma o longitud como*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Ejemplo 3 *Calcule la norma del vector $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$*

Solución:

$$\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

La norma de cualesquirera vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades:

- $\|x\| \geq 0$. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.2.2. Ángulo entre vectores

El ángulo entre dos vectores x y y se puede obtener a través de la ecuación:

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Notemos que la ecuación anterior estable que los vectores x y y son perpendiculares si y solo si $x \cdot y = 0$, pues para $0 \leq \theta \leq \pi$, $\cos(\theta) = 0$ si y solo si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 4 *Calcular el ángulo entre los vectores:*

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El producto escalar de los vectores es

$$x \cdot y = -10 - 3 + 6 = -7$$

entonces como

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{-7}{22.7} = -0.31$$

de lo cual se sigue que el ángulo θ entre los vectores x y y es

$$\theta = 108.31^o$$

1.2.3. Vectores ortogonales

Definición 1.4 *Dos vectores no nulos x y y en $\mathbb{R}^n$ son llamados ortogonales o perpendiculares si y solo si $x \cdot y = 0$, y se escribe $x \perp y$.*

Ejemplo 5 *Determine todos los vectores que son ortogonales a:*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:
Todos los vectores $y \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales a x cumplen $x \cdot y = 0$, es decir, si $y = (y_1, y_2)$, entonces

$$x \cdot y = (1, 2) \cdot (y_1, y_2) = y_1 + 2y_2 = 0,$$

de lo cual se sigue que

$$y = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

La norma $\|x\|$ también se usa para definir la función distancia d en $\mathbb{R}^n$ como sigue:

Definición 1.5 *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$,*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

La función distancia d satisface las siguientes propiedades:

- $d(x, y) \geq 0$. Además, $d(\alpha, \beta) = 0$ si y solo si $\alpha = \beta$.
- $d(x, y) = d(\beta, \alpha)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ejemplo 6 *Si*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y \quad y = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calcule la distancia entre los vectores x y y:

Solución:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 8.48.$$

1.3. Producto cruz

Definición 1.6 *Para cualquier par de vectores:*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

*en $\mathbb{R}^3$, el **producto cruz** se define como:*

$$x \times y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - y_2 x_3)\vec{i} - (x_1 y_3 - y_1 x_3)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k},$$

en donde

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7 *Dados*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calcule $x \times y$,

Solución:

De acuerdo con la definición del producto cruz tenemos:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (2 \cdot 0 - 3 \cdot 0)\vec{i} + (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\vec{j} + (3 - 2)\vec{k} = \vec{k}.$$

Por tanto

$$x \times y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar que:

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \operatorname{sen}(\theta)$$

donde θ es el ángulo formado por $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$.

La ecuación (1.3) proporciona una forma de calcular **el área del paralelogramo** determinado por los vectores x y y. También proporciona una alternativa para calcular el ángulo entre dos vectores.

1.3.1. Propiedades del producto cruz

Si x, y y z son vectores y λ es un escalar, entonces:

- $x \times y = -(y \times x)$
- $\lambda(x \times y) = (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y)$
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

1.3.2. Ecuación del plano

La ecuación del plano que pasa por un punto (x_0, y_0, z_0) y cuyo vector normal es (a, b, c) es :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{1}$$

Ejemplo 8 *Determinar la ecuación del plano perpendicular al vector* $(1, 1, 1)$ *que contiene al punto* $(1, 0, 0)$.

Solución: De la ecuación (1), la ecuación del plano es

$$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0;$$

esto es,

$$x + y + z = 1.$$