4.2. Optimización restringida

El Método de los multiplicadores de Lagrange

Las variables que aparecen en los problemas económicos de optimización estan casi siempre sometidas a ciertas restricciones. Por ejemplo, precios y cantidades son a menudo no negativos por definición, y la escasez impone que las cantidades que se consumen estén acotadas superiormente. Además cuotas de producción, limitaciones presupuestarias y otras condiciones pueden restringir el rango de elección.

Cuando la restricción es una función complicada, o cuando hay todo un sistema de ecuaciones para expresar restricciones, los economistas usan el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para hallar las soluciones del problema:

$$\text{máx(mín) } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y) = c \tag{22}$$

se usa el método de los multiplicadores de Lagrange el cual consiste en:

1. Escribir la función lagrangiana:

   $$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

   donde λ es una constante.

2. Derivar $\mathcal{L}$ con respecto a x e y, e igualar a cero las parciales.

3. Escribir el sistema formado por las dos ecuaciones de 2 junto con la restricción:

   $$\begin{aligned} f_1'(x,y) &= \lambda g_1'(x,y) \\ f_2'(x,y) &= \lambda g_2'(x,y) \\ g(x,y) &= c \end{aligned}$$

4. Resolver esas tres ecuaciones en las tres incógnitas x, y y λ.

Métodos Cuantitativos 2012

Consideremos el problema:

$$\text{máx } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y)=c$$

Sean x^* e y^* los valores de x y y que resuelven el problema. En general x^* y y^* dependen de c. Vamos a suponer que $x^*=x^*(c)$ e $y^*=y^*(c)$ son funciones diferenciables de c. Entonces:

$$f^*(c)=(x^*(c),y^*(c)),$$

es también función de c. A $f^*(c)$ se le llama **función valor óptimo** para el problema. Cuando se usa el método lagrangiano, el valor correspondiente del multiplicador de Lagrange también depende de c. Si se satisfacen ciertas condiciones de regularidad tenemos el siguiente resultado:

$$\frac{df^*(c)}{dc}=\lambda(c) \tag{23}$$

Así el multiplicador de Lagrange $\lambda=\lambda(c)$ es la tasa de variación del valor óptimo de la función objetivo cuando la constante de restricción c cambia.

Teorema 4.4. *(Teorema de Lagrange) Supongamos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en un dominio A del plano xy y que (x_0,y_0) es un punto interior de A y un óptimo local para $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y)=c$. Supongamos además que no se anulan a la vez $g_1'(x_0,y_0)$ y $g_2'(x_0,y_0)$. Existe un número único λ tal que la función lagrangiana:*

$$\mathcal{L}(x,y)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-c)$$

tiene un punto estacionario en (x_0,y_0).

Bajo las hipótesis del Teorema 4.4 el método de los multiplicadores de Lagrange para el problema:

$$\text{máx(mín) } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y)=c$$

da condiciones necesarias para la solución del problema. El siguiente resultado da condiciones suficientes para resolver el problema.

Métodos Cuantitativos 2012

Teorema 4.5. *(Suficiencia global) Supongamos que las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continuamente diferenciables en un conjunto abierto convexo A de $\mathbb{R}^2$ y sea $(x_0, y_0) \in A$ un punto estacionario para la función lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

Supongamos además que $g(x_0, y_0) = c$. Entonces:

1. *$\mathcal{L}$ es concava $\Longrightarrow$ resuelve el problema de maximización de (22).*
2. *$\mathcal{L}$ es convexa $\Longrightarrow$ resuelve el problema de minimización de (22).*

Problema 11. Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar Q unidades de su producto, con

$$Q = F(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

Le cuesta a la empresa \$100 por cada unidad de mano de obra y \$300 por cada unidad de capital empleado. La empresa dispone de una suma de \$45,000 para propósitos de producción.

i) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con objeto de maximizar su producción.

ii) Gráfique a través de las curvas de nivel los resultados obtenidos.

Solución del problema 11

i) Aquí la función a maximizar es

$$\text{máx}\, Q(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

El costo de emplear L unidades de mano de obra a \$100 cada una y K unidades de capital a \$300 cada una es de $(100L + 300K)$ pesos. Puesto que deseamos disponer por completo de la suma de \$45 000, debemos tener que

Métodos Cuantitativos 2012

$$100L + 300K = 45,000$$

Maximizaremos $Q(L,K)$ sujeta a esta restricción. La función lagrangeana es

$$\mathcal{L}(L,K,\lambda) = 50L^{2/3}K^{1/3} - \lambda(100L + 300K - 45,000).$$

A fin de obtener un máximo de $Q(L,K)$, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \frac{100}{3}L^{-1/3}K^{1/3} - 100\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \frac{50}{3}L^{2/3}K^{-2/3} - 300\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(100L + 300K - 45,000) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ, obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} \text{ y } \lambda = \frac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Ahora igualamos los dos valores de λ

$$\frac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} = \frac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Despejando en ambos lados L, obtenemos

$$L = 6K$$

Sustituyendo esto en la expresión de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$ resulta que

$$600K + 300K - 45,000 = 0 \text{ o bien } K = 50$$

Por consiguiente, $L = 6K = 300$ y la empresa maximiza su producción si emplea 300 unidades de mano de obra y 50 de capital.

ii) La gráfica de las curvas de nivel se muestra en la figura 23.

Métodos Cuantitativos 2012

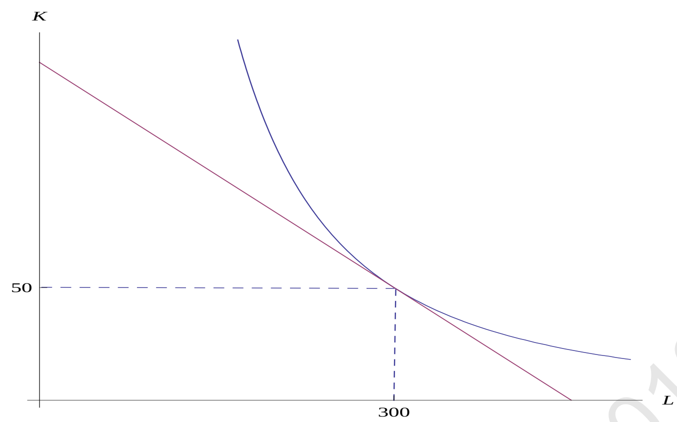

Figura 23: $50L^{2/3}K^{1/3}$ sujeto a $100L + 300K = 45,000$

Métodos Cuantitativos 2012

Problema 12. Un consumidor tiene \$600 para gastar en dos mercancias, la primera de las cuales cuesta \$20 por unidad y, la segunda, \$30 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor con x unidades de la primera mercancía y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la **función de utilidad de Cobb-Douglas** $U(x, y) = 10x^{3/5}y^{2/5}$.

i) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de cada mercancía que debe comprar el consumidor para maximizar su utilidad.

ii) Gráfique a través de las curvas de nivel los resultados obtenidos.

Solución al problema 12

i) Aquí la función a maximizar es

$$\max U(x, y) = 10x^{3/5}y^{2/5}$$

El costo total de comprar x unidades de la primera mercancía a \$20 por unidad y, y unidades de la segunda mercancía a \$30 por unidad, es $20x + 30y$. Como el consumidor tiene sólo \$600 para gastar, la meta es maximizar la utilidad $U(x, y)$ sujeta a la restricción presupuestal

$$20x + 30y = 600$$

Maximizaremos $U(x, y)$ sujeta a esta restricción. La función lagrangeana es

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 10x^{3/5}y^{2/5} - \lambda(20x + 30y - 600).$$

A fin de obtener un máximo de $U(x, y)$, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 6x^{-2/5}y^{2/5} - 20\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4x^{3/5}y^{-3/5} - 30\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(20x + 30y - 600) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ, obtenemos

$$\lambda = \frac{3}{10}x^{-2/5}y^{2/5} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Ahora igualamos los dos valores de λ

$$\frac{3}{10}x^{-2/5}y^{2/5} = \frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Despejando en ambos lados y, obtenemos

$$y = \frac{4}{9}x$$

Sustituyendo esto en la expresión de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$ resulta que

$$20x + 30(\frac{4}{9}x) = 600 \quad \text{o bien} \quad x = 18$$

Por consiguiente, $y = \frac{4}{9}(18) = 8$. Esto es, para maximizar la utilidad, el consumidor debe comprar 18 unidades de la primera mercancía y 8 unidades de la segunda.

Métodos Cuantitativos 2012

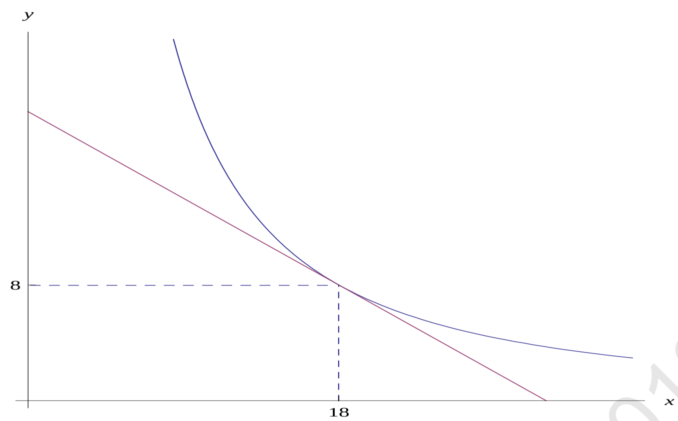

Figura 24: $10x^{3/5}y^{2/5}$ sujeto a $20x + 30y = 600$

ii) La gráfica de las curvas de nivel se muestran en la figura 24

Problema 13. Una empresa usa cantidades K y L de capital y trabajo, respectivamente para producir una cantidad Q de un solo producto, siguiendo la función de producción:

$$Q = F(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}.$$

Los precios de capital y trabajo son r y w respectivamente.

i) Hallar las cantidades K y L que minimizan los costos, así como el costo mínimo, como funciones de r, w y Q. Designemos por K^*, L^*, y C^* a estos valores.

ii) Comprobar que:

$$K^* = \frac{\partial C^*}{\partial r},\ L^* = \frac{\partial C^*}{\partial w},\ \lambda = \frac{\partial C^*}{\partial Q},\ \frac{\partial K^*}{\partial w} = \frac{\partial L^*}{\partial r}.$$

Solución del problema 13

i) La empresa tiene que resolver el siguiente problema de minimización de costo:

$$\min C = rK + wL \text{ sujeta a } Q = K^{1/2}L^{1/4}$$

Métodos Cuantitativos 2012

La función lagrangiana es:

$$\mathcal{L}(K,L) = rK + wL - \lambda(K^{1/2}L^{1/4} - Q).$$

Igualando las derivadas parciales a cero obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2}L^{1/4} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \frac{1}{4}\lambda K^{1/2}L^{-3/4} = 0.$$

Así, $r = \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2}L^{1/4}$ y $w = \frac{1}{4}\lambda K^{1/2}L^{-3/4}$. Despejando λ de estas dos ecuaciones e igualando los resultados:

$$\lambda = 2r\lambda K^{1/2}L^{-1/4} = 4wK^{-1/2}L^{3/4}$$

Simplificando por $K^{1/2}L^{1/4}$ obtenemos $2rK = 4wL$, luego $L = (r/2w)K$. Llevando este valor a la restricción $K^{-1/2}L^{1/4} = Q$ tenemos que $K^{1/2}(r/2w)^{1/4}K^{1/4} = Q$, luego:

$$K^{3/4} = 2^{1/4}r^{-1/4}w^{1/4}Q \tag{24}$$

Elevando ambos miembros de la igualdad (24) a 4/3 y usando superíndices $(*)$ se tiene:

$$K^* = 2^{1/3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3}$$

y así:

$$L^* = (r/2w)K^* = 2^{-2/3}r^{2/3}w^{-2/3}Q^{4/3}$$

La función lineal $rK + wL$ es convexa y la función de Cobb-Douglas $K^{1/2}L^{1/4}$ es cóncava. Como $\lambda \geq 0$, la función lagrangiana:

$$\mathcal{L}(K,L) = rK + wL + (-\lambda)(K^{1/2}L^{1/4} - Q)$$

es suma de dos funciones convexas y, por tanto, es convexa. Por el Teorema 4.5, el punto (K^*, L^*) minimiza el costo. El costo mínimo correspondiente es:

$$C^* = rK^* + wL^* = 3 \cdot 2^{-2/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{4/3} \tag{25}$$

Finalmente, usando (24) otra vez, hallamos $\lambda = 2^{4/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{1/3}$.

Métodos Cuantitativos 2012

ii) Por (25) tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^*}{\partial r} &= 3 \cdot 2^{-2/3}\frac{2}{3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3} \\ &= 2^{1/3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3} \\ &= K^*\end{aligned}$$

Observemos que la tercera igualdad de ii) es un caso particular de (23), y vemos que el valor común es $\lambda = \partial C^*/\partial Q = 2^{4/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{1/3}$. Se comprueban fácilmente las demás igualdades.

Métodos Cuantitativos 2012