5.3. Integral definida

Introducción

El área de la región con una frontera curva puede ser aproximada sumando áreas de un conjunto de rectángulos. Al usar más rectángulos podemos aumentar la exactitud de la aproximación. El proceso de límite nos conduce a la definición de integral definida de una función en un intervalo cerrado.

La integral definida tiene muchas aplicaciones en estadística y economía. Nos permite calcular rangos de cantidades de probabilidad y promedios de consumo de energía.

5.4. Definición de integral definida

Sea f una función continua no negativa en $[a, b]$. Entonces el área A de la región bajo la gráfica de f es:

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \right] \Delta x,$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son puntos arbitrarios en los n subintervalos de $[a, b]$ del mismo ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Definición 5.2. Sea f una función continua definida en $[a, b]$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \right] \Delta x,$$

existe para todas las elecciones de puntos representativos $x_1, x_2, ..., x_n$ en los n subintervalos de $[a, b]$ del mismo ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, entonces este límite se llama la **integral definida** de f en $[a, b]$ y se le denota por $\int_a^b f(x)dx$. Así :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \right] \Delta x.$$

Interpretación geométrica de la integral definida

- Si f es no negativa y continua en $[a, b]$, entonces:

  $$\int_a^b f(x)dx$$

  es el área de la región bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$.

- Si f es continua en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx$$

es el área de la región por arriba del intervalo $[a,b]$ menos el área de la región por debajo de $[a,b]$.

Ejemplo 56. Trazar la gráfica y hallar el área de la región acotada por debajo de la gráfica de la función f y arriba del eje x donde:

$$f(x) = -x^2 + 4$$

Solución

Igualando a cero la f obtenemos los puntos de intersección con el eje x

$$\begin{aligned} -x^2 + 4 &= 0 \\ 4 &= x^2 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Los puntos de intersección son -2 y 2, entonces el área entre esta gráfica y el eje x es (ver figura 25):

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)dx &= \int_{-2}^{2} [-x^2 + 4]dx \\ &= (-\frac{x^3}{3} + 4x)\Big|_{-2}^{2} \\ &= (-\frac{2^3}{3} + 4(2)) - (-\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2)) \\ &= \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

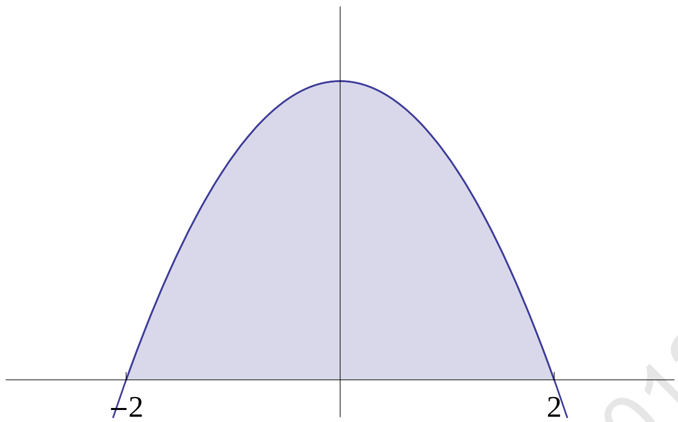

Figura 25: $f(x) = -x^2 + 4$

Ejemplo 57. En estadística, una función de densidad (de probabilidad) f de una variable x, donde x toma todos los valores en el intevalo $[a, b]$, tiene las siguientes propiedades:

1. $f(x) \geq 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = 1$.

   Si f es una función de densidad de probabilidad continua, la media μ de f en el intervalo $[a, b]$ está definida por:

   $$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)]dx,$$

   y la varianza σ^2 está dada por

   $$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)dx,$$

   La probabilidad de que x tome un valor entre c y d, lo cual se escribe $P(c \leq x \leq d)$, donde $a \leq c \leq x \leq d \leq b$, se representa por el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x entre $x = c$ y $x = d$. Por tanto:

   $$P(c \leq x \leq d) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La función $f(x) = 6(x - x^2)$, donde $0 \leq x \leq 1$, satisface que es una función de densidad, por:

$$f(x) = 6(x - x^2) = 6x(1 - x) \geq 0$$

en $[0, 1]$ ya que $6x \geq 0$ si $x \geq 0$ y $1 - x \geq 0$ si $x \leq 1$, lo cual se cumple pues $x \in [0, 1]$, ademas:

$$\int_0^1 6(x - x^2)dx = 6\int_0^1 (x - x^2)dx = 6(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = 6(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{6}) = 1$$

con media μ

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^1 [x \cdot f(x)]dx = \mu = 6\int_0^1 [x(x - x^2)]dx \\ &= 6\int_0^1 [x^2 - x^3]dx = 6(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\Big|_0^1 = 6(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 6(\frac{1}{12}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

y varianza σ^2

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})(6(x - x^2))dx \\ &= 6\int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})(x - x^2)dx = 6\int_0^1 (x^3 - x^2 + \frac{x}{4} - x^4 + x^3 - \frac{x^2}{4}) \\ &= 6(-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{8})\Big|_0^1 \\ &= 6(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{20}\end{aligned}$$

Para esta función, podemos encontrar las siguientes probabilidades:

a) $P(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$.

Solución: Por la propiedad 3:

$$\begin{aligned} P(0 \leq x \leq \frac{1}{4}) &= \int_0^{\frac{1}{4}} 6(x - x^2)\, dx \\ &= 6 \int_0^{\frac{1}{4}} (x - x^2)\, dx \\ &= 6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\ &= (3x^2 - 2x^3) \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

b) $P(x \geq \frac{1}{2})$.

Solución:

$$\begin{aligned} P(x \geq \frac{1}{2}) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6(x - x^2)\, dx \\ &= 6 \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x - x^2)\, dx \\ &= 6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= (3x^2 - 2x^3) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5.5. Área entre dos curvas

Sean f y g funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces el área de la región acotada por arriba por $y = f(x)$ y por abajo por $y = g(x)$ en $[a, b]$ está dada por:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Ejemplo 58. Trazar la gráfica de las funciones f y g y determine el área de la región encerrada entre estas gráficas donde:

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^3$$

Solución

Igualando ambas funciones f y g obtenemos los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones

$$\begin{aligned} x^2 &= x^3 \\ x^2 - x^3 &= 0 \\ x^2(1 - x) &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ (1 - x) &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(1, 1)$, entonces el área entre estas graficas es (ver figura 26):

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx &= \int_0^1 [x^2 - x^3]dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

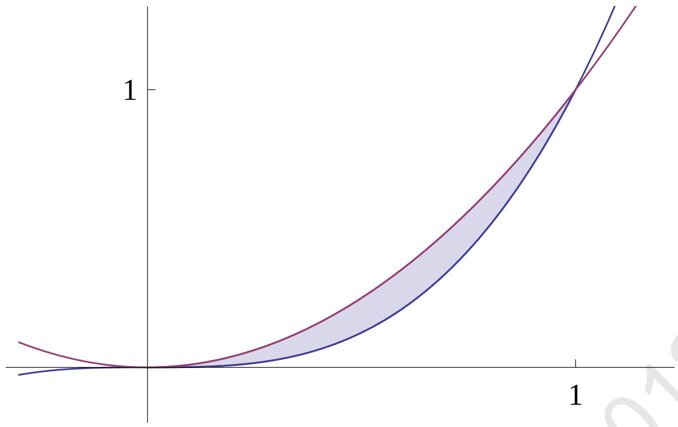

Figura 26: $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$

Ejemplo 59. Una curva de Lorenz $y = L(x)$ se utiliza para estudiar las distribuciones de ingresos. Si x es el porcentaje acumulativo de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulativo de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta $y = x$, donde x y y se expresan como decimales. Por ejemplo, 10 % de la gente recibe 10 % de los ingresos totales, 20 % de la gente recibe 20 % de los ingresos, etcétera.

Si $y = L(x)$ es la ecuación de una curva de Lorentz, entonces la desigualdad en la distribución de riqueza correspondiente se mide mediante el índice de Gini G, cuya formula esta dada por

$$G = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx$$

El índice de Gini siempre se situa entre 0 y 1. Un índice de 0 corresponde a una igualdad completa. Cuanto más pequeño sea el índice, más equitativa será la distribución de la riqueza; cuanto más grande sea el índice, más riqueza estará concentrada en pocas manos. Ver figura 27.

Suponga que la distribución real esta dada por la curva de Lorenz definida por

$$L(x) = \frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x.$$

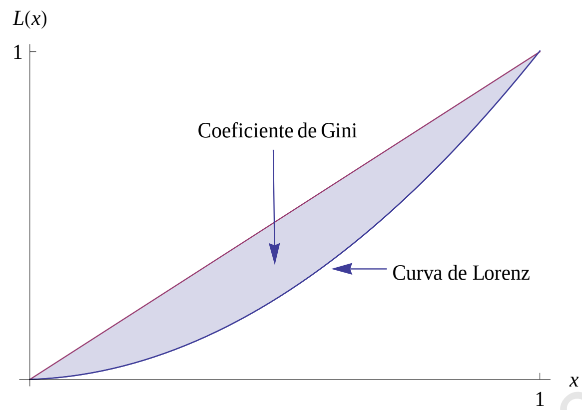

Figura 27: Curva de Lorenz y coeficiente de Gini

$$
\begin{aligned}
G &= 2\int_0^1 [x - L(x)]dx = 2\int_0^1 (x - (\frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x))dx \\
&= 2\int_0^1 (-\frac{20}{21}x^2 + \frac{20}{21}x)dx = 2(-\frac{20}{63}x^3 + \frac{20}{42}x^2)\Big|_0^1 \\
&= 2(-\frac{20}{63} + \frac{20}{42}) = 0.3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor (0,3 , 0,1) significa que el 30 % de la población posee el 10 % de la riqueza total en la sociedad. Ver figura 28.

Problema 17. La función de demanda para un producto es:

$$p = D(q) = 100 - 0.05q,$$

donde p es el precio por unidad (en pesos) de q unidades. La función de oferta es:

$$p = S(q) = 10 + 0.1q.$$

Determinar el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio de mercado.

Supongamos que el mercado para un producto está en equilibrio y que (q_0, p_0) es el punto de equilibrio (el punto de intersección de las curvas de

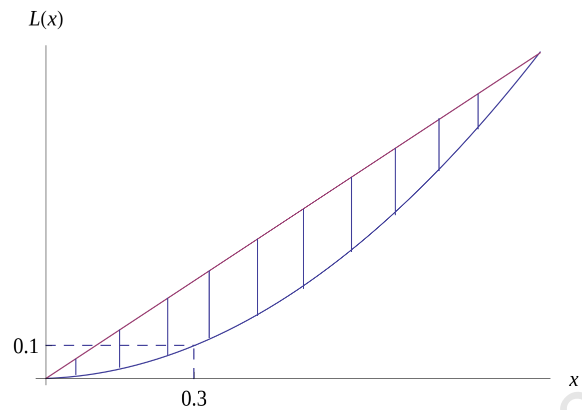

Figura 28: $\frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x$

demanda y oferta para el producto). El excedente de los consumidores, y se abrevia EC, corresponde al área entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la curva de demanda y abajo por la recta $p = p_0$. Entonces,

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq,$$

donde f es la función de demanda. El excedente de los productores, y se abrevia EP, corresponde al área, entre $q = 0$ y $q = q_0$. limitada por arriba por la recta $p = p_0$ y abajo por la curva de oferta. Entonces:

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq,$$

donde g es la función de oferta.

Solución del problema 17: Primero debemos encontrar el punto de equilibrio (p_0, q_0) resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$p = 100 - 0.05q$$
$$p = 10 + 0.1q.$$

Por el método de igualación, tenemos que:

$$\begin{aligned} 10 + 0.1q &= 100 - 0.05q, \\ 0.15q &= 90, \\ q &= 600. \end{aligned}$$

Cuando $q = 600$, $p = 10 + 0.1(600) = 70$. Así, $q_0 = 600$ y $p_0 = 70$. El excedente de los consumidores es:

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq, \\ &= \int_0^{600} [100 - 0.05q - 70]\, dq, \\ &= \left(30q - 0.05\,\frac{q^2}{2}\right)\Big|_0^{600} \\ &= 9000. \end{aligned}$$

El excedente de los productores es:

$$\begin{aligned} \text{EP} &= \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq, \\ &= \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)]\, dq, \\ &= \left(60q - 0.1\,\frac{q^2}{2}\right)\Big|_0^{600} \\ &= 18000. \end{aligned}$$

Por tanto, el excedente de los consumidores es de \$9,000 y el de los productores es de \$18,000.

5.6. Integral impropia

La definición de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ requiere que el intervalo de integración $a \leq x \leq b$ este acotado, pero en ciertas aplicaciones es útil considerar integrales sobre intervalos no acotados como $x \geq a$. A este tipo de integrales se les llaman **integrales impropias**.

Definición 5.3. (**La integral impropia**). Si $f(x)$ es continua para $x \geq a$, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx$$

Si el límite existe, se dice que la integral **converge** al valor del límite. Si no existe el límite, se dice que la integral impropia **diverge**.

Ejemplo 60. Evalué o demuestre que converge la integral impropia:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Solución: Primero calcule la integral de 1 a N y luego haga que N tienda al infinito. Continúe su trabajo de este modo:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^N \right) = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{N} + 1 \right) = 1$$

Ejemplo 61. Evalué o demuestre que diverge la integral impropia:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución: Primero calcule la integral de 1 a N y luego haga que N tienda al infinito. Continúe su trabajo de este modo:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-1/2}\,dx = \lim_{N\to\infty} 2x^{1/2}\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty} \left(2\sqrt{x} - 1\right) = \infty.$$

Por lo tanto la integral impropia diverge.

Un test de comparación para la convergencia

El siguiente test de convergencia de integrales suele ser útil por que no requiere el cálculo de la integral.

Teorema 5.4. *(* ***Un test de comparación para la convergencia****) Supongamos que f y g son continuas para toda $x \geq a$ y que*

$$| f(x) | \leq g(x) \quad (\textit{para toda} x \leq a)$$

Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \le \int_a^\infty g(x)\,dx$$

Ejemplo 62. Para todo $x \ge 1$, se tiene $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$. Como $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ converge, por el Teorema (5.4), la integral $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ también converge.

Ejemplo 63. En la teoría de crecimiento económico aparecen frecuentemente integrales de la forma

$$\int_{t_0}^\infty U(c(t))e^{-\alpha t}\,dt \tag{26}$$

En la expresión, $c(t)$ designa el consumo en el momento t, U es la función de utilidad instantánea y α es una tasa positiva de descuento. Supongamos que existen números M y β, con $\beta \le \alpha$, tales que

$$\mid U(c(t)) \mid \le Me^{\beta t} \tag{27}$$

pata todo $t \ge t_0$ y para todo nivel posible de consumo $c(t)$ en el tiempo t. Así, el valor absoluto de la utilidad de consumo crece a una tasa menor que la de descuento α. Probar que, entonces (26) converge.

Solución: De (27) obtenemos

$$\mid U(c(t))e^{-\alpha t} \mid \le Me^{-(\alpha-\beta)t} \quad \text{(parea todo} t \ge t_0\text{)}$$

Además,

$$\int_{t_0}^T Me^{(\alpha-\beta)t}\,dt = \Big|_{t_0}^T \frac{-M}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)t} = \frac{M}{\alpha-\beta}\left[e^{-(\alpha-\beta)t_0} - e^{-(\alpha-\beta)T}\right]$$

Como $\alpha - \beta > 0$, la última expresión tiende a $[M/(\alpha-\beta)]e^{-(\alpha-\beta)t_0}$ cuando $T \to \infty$. Se deduce del Teorema (5.4) que (26) converge.