# 1. Matrices aplicadas a la macroeconomía

**Ejemplo 1** *Una empresa compra dos bienes, la mano de obra $L$ y de capital $K$, la cantidad total de los cuales no puede exceder es de 50 unidades. El salario es \$8 y la tasa de interes es \$10. La empresa puede gastar \$440 entre los dos bienes. ¿Cuáles son las cantidades de los dos bienes que la empresa debe comprar para producir la máxima cantidad? Utilice el método de Cramer.*

**Solución:**

$$\begin{aligned} L + K &= 50 \\ 8L + 10K &= 440 \end{aligned}$$

Dado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 440 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 10 - 8 = 2 \neq 0.$$

Usando la Regla de Cramer,

$$L = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 440 & 10 \end{vmatrix}}{2} = \frac{500 - 440}{2} = 30 \quad K = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 8 & 440 \end{vmatrix}}{2} = \frac{440 - 400}{2} = 20$$

La empresa puede comprar un máximo de 20 máquinas y contratar a 30 trabajadores

**Ejemplo 2** *En el modelo Keynesiano $IS - LM$*

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= 100 + 0.8Y \\ I &= 1000 - 20i \\ M^s &= M^d \\ M^s &= 2350 \\ M^d &= 0.5Y - 30i \end{aligned}$$

*A partir de las ecuaciones anteriores obtener los valores de equilibrio del ingreso (Y) y la tasa de interes (i).*

***Solución:***

*Dadas las condiciones de equilibrio obtenemos:*

$$\begin{aligned} Y &= 100{+}0.8Y + 1000 - 20i \\ 0.5Y - 30i &= 2350 \\ 0.2Y + 20i &= 1100 \\ 0.5Y - 30i &= 2350 \end{aligned}$$

*Escribiendo en forma matricial*

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 20 \\ 0.5 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 2350 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 10 = -16.$$

*Usando la Regla de Cramer,*

$$\bar{Y} = -\frac{\begin{vmatrix} 1100 & 20 \\ 2350 & -30 \end{vmatrix}}{16} = \frac{33000 + 47000}{16} = 5000 \quad \bar{i} = \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 1100 \\ 0.5 & 2350 \end{vmatrix}}{16} = -\frac{470 - 550}{16} = 5\,\%$$

**Ejemplo 3** *En el modelo Keynesiano $IS - LM$*

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= 800 + 0.8Y \\ I &= 4000 - 300i \\ L &= 0.85Y - 400i \\ M^s &= L \end{aligned}$$

*En equilibrio la oferta de dinero $M^s$ es igual a la demanda de dinero L en el mercado monetario, y se sabe que $M^s = 10,350$. Encontrar los valores de equilibrio de la renta nacional (Y) y la tasa de interés (i).*

***Solución:***

*Sustituyendo en la primera ecuación y la reescritura de la última obtenemos:*

$$\begin{aligned} Y &= 800{+}0.8Y + 4000 - 300i \\ 0.85Y - 400i &= 10350 \\ 0.2Y + 300i &= 4800 \\ 0.85Y - 400i &= 10350 \end{aligned}$$

*Escribiendo en forma matricial*

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 300 \\ 0.85 & -400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4800 \\ 10350 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -80 - 255 = -335.$$

*Usando la Regla de Cramer,*

$$\bar{Y} = -\frac{\begin{vmatrix} 4800 & 300 \\ 10350 & -400 \end{vmatrix}}{335} = \frac{(19200 + 31050)100}{335} = 15000$$

$$\bar{i} = \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 4800 \\ 0.85 & 10350 \end{vmatrix}}{335} = -\frac{2070 - 4080}{335} = 6\,\%$$

**Ejemplo 4** *Considere la siguiente economía abierta*

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G_0 + X - M \\ C &= 80 + 0.8Y \\ I &= 50 - 20i \\ X &= 0.3Y - 14i \\ M &= 50 + 0.2Y \end{aligned}$$

*de los cuales $G_0 = 190$ y el déficit comercial se sabe que es 20. Encontrar $\bar{Y}$ e $\bar{i}$. ¿Cuál es el valor de las exportaciones? ?Cuanto vale la propensión marginal a importar?*

***Solución:***

*Como el país se enfrenta a un déficit comercial, tenemos*

$$X - M = -20$$

*sustituyendo en la ecuación de ingreso*

$$Y = 80 + 0.8Y + 50 - 20i + 190 - 20$$

*y de la ecuación comercial tenemos:*

$$0.3Y - 14i - 50 - 0.2Y = -20$$

*la transformación de estas dos ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 0.2Y + 20i &= 300 \\ 0.1Y - 14i &= 30 \end{aligned}$$

*Escribiendo en forma matricial*

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 20 \\ 0.1 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2.8 - 2 = -4.8.$$

*Usando la Regla de Cramer,*

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= -\frac{\begin{vmatrix} 300 & 20 \\ 30 & -14 \end{vmatrix}}{4.8} = \frac{4200 + 600}{4.8} = 1000 \\ \bar{i} &= \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 300 \\ 0.1 & 30 \end{vmatrix}}{4.8} = -\frac{6 - 30}{4.8} = 5\,\% \\ X &= 0.3Y - 14i = 0.3(1000) - 14(5) = 300 - 70 = 230 \\ M &= 50 + 0.2Y = 50 + 0.2(1000) = 50 + 200 = 250 \end{aligned}$$

*Como el modelo supone, la balanza comercial del país es negativo a -20. Esto implica la nación está importando más de lo que está exportando. La propensión marginal a importar muestra la proporción del ingreso nacional que se dedica a la importación, es decir,* $MPI = 0.2$.

**Ejemplo 5** ***(Modelo de ingreso nacional simple)***

*Un simple modelo keynesiano del ingreso nacional puede ser introducido cuando $Y$ es el ingreso nacional, $C$ es el nivel de consumo, $I_0$ el nivel de inversión total y el gasto del gobierno está dado por $G_0$. Por otra parte, la anotación detrás de las dos últimas variables muestra que la inversión total y el gasto público son variables exógenas. En el contexto de los modelos económicos, esto significa que dependen de factores externos al modelo y por lo tanto sus valores no pueden ser influenciados en el modelo y se deben tomar por sentado. Al mismo tiempo, las otras variables se supone que son endógenas y, por tanto, dependen de factores internos del modelo. De hecho, las variables endógenas en el modelo depende de las exógenas, así como en los parámetros. Aquí $\alpha$ es el nivel de consumo autónomo, el consumo que no está relacionado al nivel del ingreso nacional. El parámetro $\beta$ da como resultado la participación del ingreso nacional en el consumo conocido como la propensión marginal a consumir. Por lo tanto, este es el consumo que depende del nivel de ingreso de la economía. Este consumo se relaciona negativamente con el nivel de ahorro, ya que el ingreso que no se consume se ahorra y viceversa. Por lo tanto, la propensión marginal a consumir $\beta$ y la propensión marginal para ahorrar $s$ en una economía cerrada debe ser igual a 1, ya que los ingresos nacionales, ya sea que se gastan o se guardan. Queremos resolver el variables endógenas $\bar{Y}$ y $\bar{C}$ en equilibrio:*

$$\begin{aligned} &Y = C + I_0 + G_0 \\ &C = \alpha + \beta Y \qquad\qquad \alpha > 0 \quad \beta \in (0,1) \quad \textit{como } \beta + s = 1 \end{aligned}$$

*Así formuladas, las ecuaciones forman la así llamada forma estructural del modelo. Cuando se resuelve por $\bar{Y}$ o $\bar{C}$, se obtiene la forma reducida del modelo. Tenemos la solución en forma reducida cuando la variable endógena se expresa en términos de las variables exógenas o parámetros en el modelo. Reescribiendo las ecuaciones,*

$$\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -\beta Y + C &= \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$|A| = 1 - \beta > 0$

*El determinante es claramente positivo, ya que la propensión marginal a ahorrar es menor que 1, calculando el valor de* $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\begin{bmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}}{1 - \beta + \beta} = \frac{I_0 + G_0 + \alpha}{1 - \beta}$$

*A partir de este modelo de ingreso nacional simple, vemos que el equilibrio en el ingreso nacional es positivo y se relaciona positivamente con la inversión, el gasto gubernamental, y los consumos autónomos. Por otro lado, se relaciona positivamente con la propensión marginal a consumir, lo que significa que es negativamente afectado por la propensión marginal a ahorrar* $s$*. En una economía cerrada como la descrita más arriba, es decir, en ausencia de comercio exterior, tenemos en equilibrio*

$$\bar{Y} = \frac{I_0 + G_0 + \alpha}{s}$$

*Por ejemplo, podemos ver que la cantidad de ingreso nacional aumenta con el nivel de inversión en la economía. Simplemente diferenciando los ingresos nacionales con respecto a la inversión:*

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{s} > 0$$

*Similarmente el efecto del gasto del gobierno en la renta nacional. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresada por la derivada*

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{s} > 0$$

*Vemos que el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el del multiplicador de la inversión. Para el consumo agregado*

$$\bar{C} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}}{1 - \beta} = \frac{\alpha + \beta(I_0 + G_0)}{1 - \beta} = \frac{\alpha + \beta(I_0 + G_0)}{s} > 0$$

*El equilibrio de consumo agregado también es positivo. Como se puede esperar, se relaciona negativamente con la propensión marginal a ahorrar. Cuanto más la nación se inclina a ahorrar, menor será su consumo; cuando* *es más probable que se consuma, mayor será el nivel de consumo agregado. También podemos ver que el consumo agregado se relaciona positivamente con los ingresos no relacionados con el consumo y el nivel de inversión y el gasto público.*

*Por ejemplo, podemos ver que la cantidad de consumo aumenta con el nivel de inversión en la economía. Simplemente diferenciando el consumo con respecto a la inversión:*

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial I_0} = \frac{\beta}{1-\beta} > 0$$

*Similarmente el efecto del gasto del gobierno aumenta en el consumo. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresada por la derivada*

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial G_0} = \frac{\beta}{1-\beta} > 0$$

*Observemos que en en el caso del consumo, también el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el del multiplicador de la inversión.*

**Ejemplo 6** *El modelo de ingreso nacional es*

$$\begin{aligned} &Y = C + I_0 + G_0 && \\ &C = \alpha + \beta(Y - T) && \alpha > 0 \quad \beta \in (0,1) \\ &T = \gamma + \delta Y && \gamma > 0 \quad \delta \in (0,1) \end{aligned}$$

*Dar las derivadas parciales $\frac{\partial Y}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial Y}{\partial \beta}$. Trate de determinar sus signos e interpretar su significado económico.*

***Solución:***

*De la condición de equilibrio y resolviendo el sistema de tres ecuaciones, nos encontramos con la renta de equilibrio nacional*

$$\bar{Y} = \frac{I_0 + G_0 + \alpha - \beta\gamma}{1 - \beta + \beta\delta}$$

*Diferenciando con respecto a $\alpha$*

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{1}{1 - \beta + \beta\delta} > 0$$

*da el valor del multiplicador ordinario. Por lo tanto, el efecto del consumo autónomo en la renta nacional es positivo:*

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = \frac{-\gamma(1-\beta+\beta\delta) - (I_0 + G_0 + \alpha - \beta\gamma)(-1+\delta)}{(1-\beta+\beta\delta)^2} = -\frac{\gamma}{1-\beta+\beta\delta} + \frac{\bar{Y}(1-\delta)}{1-\beta+\beta\delta}$$

*El impuesto sin ingreso $\gamma$ es positivo así el primer término es claramente negativo. En cuanto al segundo término ya que $1-\delta$ es positivo, resulta que el segundo término es positivo. No sabemos cuál de los dos términos se impone, por lo que el signo de la derivada es indeterminado. El efecto de la propensión marginal a consumir en la renta nacional puede ser positivo o negativo*

**Ejemplo 7** *El modelo de ingreso nacional es*

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G_0 \\ C &= \alpha + \beta(Y - T_0) \qquad && \alpha > 0 \quad \beta \in (0,1) \\ I &= I_0 - \gamma i && \gamma > 0 \end{aligned}$$

*Encontrar el efecto de la tasa de interés $i$ y la propensión marginal a consumir $\beta$ en el equilibrio del ingreso nacional.*

***Solución:***

*Sustituyendo en la primera ecuación, encontramos el equilibrio del ingreso nacional*

$$\begin{aligned} Y &= \alpha + \beta(Y - T_0) + I_0 - \gamma i + G_0 \\ Y &= \alpha + \beta Y - \beta T_0 + I_0 - \gamma i + G_0 \\ (1-\beta)Y &= \alpha - \beta T_0 + I_0 - \gamma i + G_0 \\ \bar{Y} &= \frac{\alpha - \beta T_0 + I_0 - \gamma i + G_0}{1-\beta} \end{aligned}$$

*Diferenciando con respecto a $i$,*

$$\frac{\partial Y}{\partial i} = -\frac{\gamma}{1-\beta} < 0$$

*Un aumento en la tasa de interés implica una baja en el ingreso de equilibrio nacional. El efecto funciona a través de la inversión agregada, que cae cuando la tasa de interés sube.*

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = \frac{-T_0(1-\beta) + \alpha - \beta T_0 + I_0 - \gamma i + G_0}{(1-\beta)^2}$$

*Ya que se puede esperar que el ingreso disponible $Y_d = \bar{Y} - T_0$ es positivo, el efecto de la propensión marginal a consumir en la renta nacional es positivo.*

**Ejemplo 8** *Para el modelo de ingreso nacional en el problema anterior, encontrar el efecto acumulativo del gasto público exógeno y los impuestos sobre el ingreso nacional, donde*

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G_0 & & \\ C &= \alpha + \beta(Y - T_0) & & \alpha > 0 \quad \beta \in (0,1) \\ I &= I_0 - \gamma i & & \gamma > 0 \end{aligned}$$

***Solución:***

$$\bar{Y} = \frac{\alpha - \beta T_0 + I_0 - \gamma i + G_0}{1 - \beta}$$

*Diferenciar un poco con respecto a los impuestos exógenos da el multiplicador de los impuestos,*

$$\frac{\partial Y}{\partial T_0} = \frac{\beta}{1 - \beta} < 0$$

*con respecto a los gastos del gobierno*

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - \beta} > 0$$

*Tenemos que el multiplicador del gasto del gobierno es positiva. Para encontrar el efecto combinado,*

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} + \frac{\partial Y}{\partial T_0} = \frac{1}{1 - \beta} - \frac{\beta}{1 - \beta} = 1$$

*la suma de los dos multiplicadores igual a uno. Esto es exactamente el efecto de un presupuesto equilibrado multiplicador cuando cada dólar de gasto público destinado a estimular el ingreso nacional está respaldado por un dólar recaudado en impuestos. El modelo teórico muestra que el efecto estimulante del gasto público es neutralizado por los impuestos.*

**Ejemplo 9** *El siguiente modelo de ingreso nacional*

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= 22 + 0.8(Y - T) \\ T &= 15 + 0.2Y \end{aligned}$$

*cuando $I_0 = 15$, encontrar los valores de las variables endogeous. También se asume que el país mantiene un presupuesto equilibrado, es decir, el gasto del gobierno es exactamente igual a los ingresos fiscales totales. Utilice el método de la matriz.*

***Solución:***

*Con la hipótesis de un presupuesto equilibrado, tenemos $G_0 = T$, y podemos escribir*

$$\begin{aligned} Y - C - T &= 15 \\ -0.8Y + C + 0.8T &= 22 \\ -0.2Y + T &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -0.8 & 1 & 0.8 \\ -0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \\ \bar{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 22 \\ 15 \end{bmatrix}$$

*desarrollando el determinante a lo largo de la última fila, obtenemos*

$$|A| = -0.2(-0.8 + 1) + 1(1 - 0.8) = -0.04 + 0.2 = 0.16$$

*Para encontrar la matrix inversa,*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0.64 & 0.2 \\ 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.2 \\ 0.64 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \\ \bar{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{0.16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.2 \\ 0.64 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 22 \\ 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.16} \begin{bmatrix} 15 + 22 + 3 \\ 9.6 + 17.6 \\ 3 + 4.4 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 170 \\ 65 \end{bmatrix}$$

Con un presupuesto balanceado, el gobierno podría gastar más que el impuesto total recaudado, que es de 65.

**Ejemplo 10** *Para ilustrar el uso de las derivadas parciales, se recurre al modelo de la renta nacional con tres variables endógenas, $Y$ (ingreso nacional), $C$ (consumo), y $T$ (impuestos).*

$$\begin{aligned} & Y = C + I_0 + G_0 & & \\ & C = \alpha + \beta(Y - T) & & \alpha > 0 \quad \beta \in (0,1) \\ & T = \gamma + \delta Y & & \gamma > 0 \quad \delta \in (0,1) \end{aligned}$$

*donde $\alpha$ es el consumo autónomo, $\beta$ es la propensión marginal a consumir, $\delta$ es la tasa de impuesto sobre la renta, $\gamma$ es el impuesto sin ingresos. Todos los parámetros y las variables endógenas se supone que pueden ser negativas. Usando la regla de Cramer se resuelve para $\bar{Y}$.*

$$\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -\beta Y + C + \beta T &= \alpha \\ -\delta Y + T &= \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{C} \\ \bar{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}$$

*resolviendo para $\bar{Y}$, obtenemos*

$$\bar{Y} = \frac{\begin{bmatrix} I_0 + G_0 & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}}{1 - \beta + \beta\delta} = \frac{I_0 + G_0 + \alpha - \beta\gamma}{1 - \beta + \beta\delta}$$

*La estática comparativa nos ayuda a estudiar la forma en que la renta nacional $\bar{Y}$ cambia con un cambio en cualquier parámetro o variable exógena, permaneciendo las otras constantes. Por ejemplo, podemos encontrar el multiplicador de la inversión que muestra el cambio en el ingreso nacional a partir de un cambio en la inversión. Este lo obtenemos simplemente diferenciando el ingreso nacional con respecto a la inversión:*

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial I_0} = \frac{1}{1 - \beta + \beta\delta} > 0$$

*Como $\beta$ es menor a 1 y el producto $\beta\delta$ es una fracción positiva, vemos que el efecto de la inversión nacional en ingreso es positivo. Así, la inversión tiene un efecto multiplicador en la renta nacional. Similarmente el efecto del gasto del gobierno en la renta nacional. Este efecto se muestra por el multiplicador del gasto del gobierno, expresada por la derivada*

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - \beta + \beta\delta} > 0$$

*Vemos que el valor del multiplicador del gasto gubernamental es el mismo que el del multiplicador de la inversión. También podemos obtener el multiplicador de impuestos sin ingresos rastreando el efecto de los impuestos sin ingresos sobre ingreso nacional:*

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \gamma} = -\frac{\beta}{1-\beta+\beta\delta} < 0$$

*El multiplicador de los impuestos sin ingresos es negativo, lo que implica que cuando el gobierno aumenta los impuesto sin ingreso, esto disminuye el ingreso nacional. Similarmente, podemos encontrar el efecto del impuesto sobre la renta con el cociente de la regla de diferenciación:*

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \delta} = -\frac{(I_0+G_0+\alpha-\beta\gamma)\beta}{(1-\beta+\beta\delta)^2} = -\frac{\beta\bar{Y}}{1-\beta+\beta\delta} < 0$$

*A través de la regla de cramer, encontrar* $\bar{C}$ *y obtener* $\frac{\partial \bar{C}}{\partial I_0}$ *e interpretar.*