5. Ecuaciones en diferencia

El movimiento de las variables no solo es continuo, en economía, por ejemplo, variables como el tipo de cambio, la inflación, deuda pública, entre otras, se contabilizan en periodos discretos: un día, mes, trimestre o años.

Considerar al tiempo como variable discreta, motiva el análisis de ecuaciones en diferencia, cualquier variable se relaciona consigo misma k periodos atrás de la siguiente forma

$$x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}) \tag{5.1}$$

La función $f(\cdot)$ puede ser lineal o no lineal, el objetivo es encontrar x_t^* que satisfaga (5.1). En principio, el teorema de existencia y unicidad garantiza las condiciones bajo las cuales (5.1) tiene solución, así que se orienta el análisis a desarrollar métodos para encontrar soluciones numéricas.

5.1. Ecuaciones en diferencia de primer orden

El estudio inicia con el caso de ecuaciones en diferencia de primer orden,

$$x_t = f(t, x_{t-1}) \tag{5.2}$$

La variable x_t se relaciona con su pasado inmediato, entonces es posible establecer una relación de recurrencia a partir de conocer el valor x_0.

$$\begin{aligned} x_1 &= f(1, x_0) \\ x_2 &= f(2, x_1) = f(2, f(1, x_0)) \\ x_3 &= f(3, x_2) = f(3, f(2, f(1, x_0))) \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Con el fin de hacer el análisis mas evidente, suponer que la ecuación en diferencia es lineal y toma la forma

$$x_t = a x_{t-1} + b_t \tag{5.3}$$

donde a es una constante y b_t es una función discreta, x_0 es conocido, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= a x_0 + b_1 \\ x_2 &= a x_1 + b_2 \\ &= a(a x_0 + b_1) + b_2 \\ &= a^2 x_0 + a b_1 + b_2 \\ x_3 &= a x_2 + b_3 \\ x_3 &= a(a^2 x_0 + a b_1 + b_2) + b_3 \\ &= a^3 x_0 + a^2 b_1 + a b_2 + b_3 \end{aligned}$$

continuando la relación de recurrencia, la solución (5.3) es,

$$x_t = a^t x_0 + a^{t-1} b_1 + a^{t-2} b_2 + \cdots + b_t \tag{5.4}$$

Si $b_t = 0$, la ecuación (5.3) se reduce a una ecuación en diferencia homogénea

$$x_t = a x_{t-1} \tag{5.5}$$

La solución es simple, consiste en el primer término de (5.4)

$$x_t = a^t x_0 \tag{5.6}$$

cuando b_t es constante, $b_t = b$, la ecuación (5.3) se reduce a

$$x_t = a x_{t-1} + b \tag{5.7}$$

La solución aplicando (5.4) es

$$x_t = a^t x_0 + b(1 + a + \cdots + a^{t-2} + a^{t-1})$$

La suma $(1 + a + \cdots + a^{t-2} + a^{t-1})$ se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} s_a &= 1 + a + \cdots + a^{t-2} + a^{t-1} \\ a s_a &= a + a^2 \cdots + a^{t-1} + a^t \\ s_a - a s_a &= 1 - a^t \\ s_a &= \frac{1 - a^t}{1 - a} \end{aligned}$$

siempre y cuando $a \neq 1$ La solución a (5.7) es

$$x_t = a^t x_0 + \frac{1 - a^t}{1 - a} b$$

simplificando

$$x_t = \left(x_0 - \frac{b}{1 - a} \right) a^t + \frac{b}{1 - a} \tag{5.8}$$

Una manera sencilla de resolver ecuaciones de la forma (5.7), es descomponer la solución en dos: una solución a lo homogéneo $x_t = k a^t$ y una a lo particular $x_t = x^p$, que sea constante. De forma que

$$\begin{aligned} x^p - a x^p &= b \\ x^p &= \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

De forma que la solución general es

$$x_t = k a^t + \frac{b}{1 - a} \tag{5.9}$$

la constante k se determina a partir del valor inicial x_0

$$x_0 = k + \frac{b}{1-a}$$
$$k = x_0 - \frac{b}{1-a}$$

La solución (5.9) es idéntica a (5.8)

Teorema 5.1. *Sean a y b constantes complejas en la ecuación,*

$$x_t = ax_{t-1} + b$$

la solución es

$$x_t = ka^t + \frac{b}{1-a}$$

siempre y cuando $a \neq 1$

Observaciones relativas al teorema (5.1).

1) El comportamiento de la solución depende enteramente de a Si $-1 < a < 1$ el

$$\lim_{t\to\infty} ka^t = 0$$

y la solución converge a

$$\frac{b}{1-a}$$

Si $|a| > 1$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} x_t \to \infty$$

2) Si $a = 1$ la solución explota debido a que

$$x_t = x_0 + b(1 + 1 + \cdots)$$

3) Adelantar un periodo la ecuación no modifica la solución

Ejemplo 5.1. *Resolver*

$$x_t = 0.5x_{t-1} + 1$$

La solución a lo homogéneo es

$$x_t - 0.5x_{t-1} = 0$$
$$x_t = k(0.5)^t$$

La solución particular

$$x^p = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

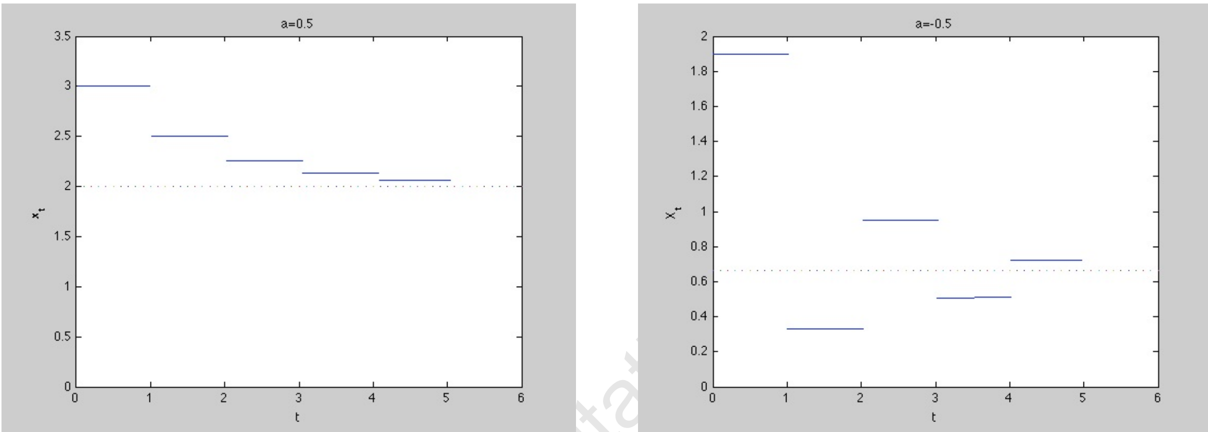
solución general

$$x_t = k(0.5)^t + 2$$

Independientemente del valor de k la trayectoria converge

$$\lim_{t \to \infty} x_t = 2$$

La figura (1) exhibe el comportamiento de la función cuando $k = 1$. También se ha incluido el caso cuando $a = -0.5$, pero la trayectoria converge a $\frac{2}{3}$. Por el contrario, en la figura (2) cuando $a = 2$ o $a = -2$ las trayectorias divergen.



Ejemplo 7.1(a)

Ejemplo 7.1(b)

Figura 1: Ecuaciones estables

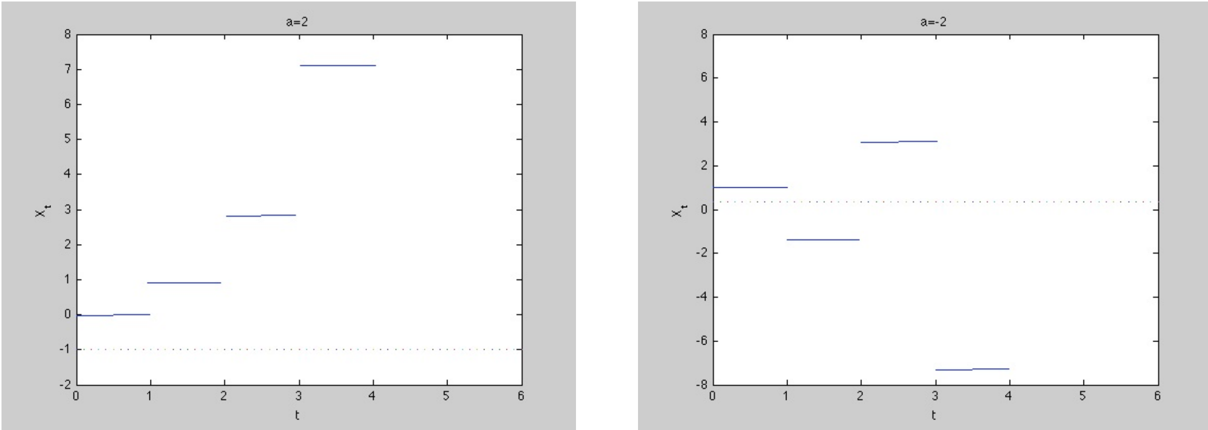
Ejemplo 5.2. *Modelo AR*

$$x_t = \phi x_{t-1} + \epsilon_t$$

donde $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$

si conocemos a x_0, la solución de acuerdo a 5.5, es

$$x_t = \phi^t x_0 + \phi^{t-1}\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_t$$



Ejemplo 7.1(c) Ejemplo 7.1(d)

Figura 2: Ecuaciones inestables

5.2. Ecuaciones en diferencia de orden superior

Una ecuación en diferencia de segundo orden es

$$x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} = 0 \tag{5.10}$$

El objetivo es encontrar la solución, y por analogía a la sección anterior proponer como solución a $x_t = r^t$,

$$r^t + a_1 r^{t-1} + a_2 r^{t-2} = 0$$
$$r^t(1 + a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2}) = 0$$

La igualdad se satisface si

$$(1 + a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2}) = 0$$

Sea $\lambda = r^{-1}$

$$1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 = 0$$
$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_2}$$

Conocer λ_1 y λ_2, entonces es fácil obtener $r_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ y $r_2 = \frac{1}{\lambda_2}$.

Antes de continuar con la solución de la ecuación en diferencia, se propone un método alterno que resulta directo. Adelantar dos periodos la ecuación (5.10)

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a x_t = 0 \tag{5.11}$$

La solución propuesta $x_t = r^t$ genera

$$r^t(r^2 + a_1 r + a_2) = 0$$
$$r = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

El lector puede comprobar que las raíces obtenidas en ambos casos son las mismas. Como ilustración del método considerar el siguiente ejemplo,

Ejemplo 5.3. *Resolver*

$$x_t - 3x_{t-1} + 2x_{t-2} = 0$$

El polinomio asociado es,

$$1 - 3r^{-1} + 2r^{-2} = 0$$

Sea $\lambda = r^{-1}$, entonces

$$1 - 3\lambda + 2\lambda^2 = 0$$
$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)}}{4}$$
$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Las raíces son

$$r_1 = \lambda_1^{-1} = 1$$
$$r_2 = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$$

Ahora, proceder a adelantar la ecuación en diferencia dos periodos,

$$x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0$$

el polinomio asociado

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$
$$(r-2)(r-1) = 0$$
$$r_1 = 1 \quad r_2 = 2$$

Las raíces son equivalentes y es un método que resulta directo. En adelante se trabaja con éste método, de forma que el problema se reduce a encontrar la solución a la ecuación cuadrática

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

Caso A) $a_1^2 > 4a_2$. Las raíces son distintas y reales

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$
$$r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Existe un par de soluciones linealmente independientes y, por lo tanto, la base del espacio de soluciones es:

$$x_t = k_1 r_1^t + k_2 r_2^t$$

La estabilidad del modelo depende de las raíces del polinomio.
Si $|r_1, r_2| < 1$ la trayectoria de x_t es convergente:

$$\lim_{t \to \infty} x_t = 0$$

Cuando $|r_1, r_2| > 1$ es divergente.

Ejemplo 5.4. *Analizar la estabilidad de las siguientes ecuaciones en diferencia:*
a) $x_{t+2} - 9x_t = 0$
b) $x_{t+2} - 1.4x_{t+1} + 0.45x_t = 0$

En el ejemplo (a) la raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = -3$, la solución general es: $x_t = k_1(3)^t + k_2(-3)^t$. Una de las raíces converge mientra que la otra no. Respecto al ejemplo (b) las raíces son $r_1 = 0.9$ y $r_2 = 0.5$ y la solución general es $x_t = k_1(0.9)^t + k_2(0.5)^t$. La trayectoria solución es convergente al origen.

Caso B) $a_1^2 = 4a_2$. La raíz es repetida, $r_1 = r_2 = -\dfrac{a_1}{2}$.

No es posible generar dos vectores linealmente independientes. Sin embargo, es posible ensayar con la solución

$$x_t = tr^t$$

$$\begin{aligned}
x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_2 x_t &= (t+2)r^{t+2} + a_1(t+1)r^{t+1} + a_2 tr^t \\
&= r^t[(t+2)r^2 + a_1(t+1)r + a_2^t] \\
&= r^t[(t+2)\frac{a_1^2}{4} - (t+1)\frac{a_2^2}{2} + a_2^t] \\
&= r^t[(t+2)a_2 - 2(t+1)a_2 + a_2^t] \\
&= 0
\end{aligned}$$

El par de soluciones $x_t = r^t$ y $x_t = tr^t$ son linealmente independientes.

El conjunto solución es

$$x_t = k_1 r^t + k_2 t r^t$$

Si $|r| < 1$ entonces el

$$\lim_{t\to\infty} x_t = 0$$

Si $|r| > 1$ la función diverge.

Ejemplo 5.5. *Analizar la estabilidad de las siguientes ecuaciones en diferencia:*
a) $x_{t+2} + 6x_{t+1} + 9x_t = 0$
b) $x_{t+2} + x_{t+1} + 0.25x_t = 0$

En el ejemplo (a) la raíces son $r_1 = r_2 = 3$, la solución general es: $x_t = k_1(3)^t + k_2 t(3)^t$. La solución es divergente. Respecto al ejemplo (b) las raíces son $r_1 = r_2 = 0.5$ y la solución general es $x_t = k_1(0.5)^t + k_2 t(0.5)^t$. La trayectoria solución es convergente al origen.

Caso C) $a_1^2 < 4a_2$. Existen raíces complejas de la forma $r = h \pm vi$, cuya representación en la forma polar es

$$r = z(cos\theta \pm isen\theta)$$

donde z es el módulo $z = h^2 + v^2$.

El teorema de *Moivre* garantiza

$$\begin{aligned} r^t &= [z(cos\theta \pm isen\theta)]^t \\ &= z^t cos\theta t \pm isen\theta t \end{aligned}$$

el par de soluciones son

$$\begin{aligned} x_t^1 &= z^t(cos\theta t + isen\theta t) \\ x_t^2 &= z^t(cos\theta t - isen\theta t) \end{aligned}$$

La base del espacio de soluciones después de un poco de álgebra es

$$x_t = z^t(c_1 cos\theta t + c_2 sen\theta t) \tag{5.12}$$

Ejemplo 5.6. *Resolver*

$$x_t + x_{t-2} = 0$$

Adelantando dos periodos

$$x_{t+2} + x_t = 0$$

El polinomio asociado es

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i, \qquad h = 0, \qquad v = 1$$

El módulo es

$$z = 0^2 + 1^2 = 1$$

y la solución

$$x_t = (c_1 cos\theta t + c_2 sen\theta t)$$

el valor de θ se determina a partir de

$$cos\theta = \frac{h}{z} = 0, \qquad sen\theta = \frac{v}{z} = 1$$

el único valor de θ que satisface ambas ecuaciones es π

La solución final es

$$x_t = c_1 cos\pi t + c_2 sen\pi t$$

En forma general se establece el siguiente teorema relativo a las ecuaciones en diferencia de segundo orden.

Teorema 5.2. *Sea*

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_2 x_t = 0$$

una ecuación en diferencia de segundo orden con a_1 y a_2 constantes, la ecuación polinómica asociada es

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Si las raíces son reales y distintas entonces la solución es

$$x_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^2$$

Si la raíz es repetida,

$$x_t = c_1 r^t + c_2 t r^t$$

Si es compleja,

$$x_t = z^t (c_1 cos(\theta t) + c_2 sen(\theta t))$$

donde

$$z = h^2 + v^2$$

El análisis puede extenderse para estudiar ecuaciones en diferencia de orden superior de la forma:

$$x_{t+k} + a_1 x_{t+k-1} + \cdots + a_k x_t = 0$$

la solución propuesta es $x_t = r^t$

$$r^t (r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k = 0)$$

el conjunto solución se obtiene al resolver la ecuación polinómica. Del mismo modo que las ecuaciones diferenciales, todo se reduce a encontrar $k-$ raíces que son una combinación de reales y complejas.

Ejemplo 5.7. *Resolver*

$$x_{t+4} - 4x_{t+3} + 4x_{t+2} = 0$$

el polinomio asociado es

$$\begin{aligned} r^4 - 4r^3 + 4r^2 &= 0 \\ r^2(r-2)^2 &= 0 \\ r_1 = r_2 &= 0 \\ r_3 = r_4 &= 0 \end{aligned}$$

la solución es

$$x_t = c_1 + c_2 t + c_3 2^t + c_4 t 2^t$$

Finaliza la sección al proponer el siguiente ejemplo con término variable.

Ejemplo 5.8. *Resolver la siguiente ecuación en diferencia de segundo orden*

$$x_{t+2} - 0.6x_{t+1} + 0.08x_t = t$$

La solución a lo homogéneo es

$$\begin{aligned} r^2 - 0.6r + 0.08 &= 0 \\ (r-0.4)(r-0.2) &= 0 \end{aligned}$$

Las raíces son:

$$r_1 = 0.4 \qquad r_2 = 0.2$$

La solución particular se obtiene mediante coeficientes indeterminados:

$$x_t^p = a + bt$$

$$\begin{aligned} a + b(t+2) - 0.6(a + b(t+1)) + 0.8(a+bt) &= t \\ 0.48a + 1.4b + 0.48bt &= t \end{aligned}$$

al igualar coeficientes

$$\begin{aligned} 0.48a + 1.4b &= 0 \\ 0.48bt &= t \end{aligned}$$

por lo tanto, $0.48b = 1$, $b = 2.083$ y de la primera ecuación se deduce que $a = -6.076$ Las solución general es

$$x_t = c_1(0.4)^t + c_2(0.2)^t - 6.076 + 2.083t$$