1. Derivadas

1.1. Funciones

Introducción.

Las funciones representan el principal objeto de análisis en el cálculo, ya que constituyen la clave para describir el mundo real en términos matemáticos. En esta sección se da el concepto de función, su graficación y las maneras de representarlas.

En muchas aplicaciones, con frecuencia existe cierta correspondencia entre dos conjuntos de números. Por ejemplo, la ganancia R que resulta de la venta de x artículos vendidos a \$1,000 cada uno es R=10x. Si conocemos el número de artículos vendidos, entonces podemos calcular la ganancia por medio de la regla R=10x. Esta regla es un ejemplo de función.

Veamos ahora la definición de función

1.1.1. Definición de función.

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales. Una **función** de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. El conjunto X es el dominio de la función. Para cada elemento x en X, el elemento correspondiente y en Y es el **valor** de la función en x, o la **imagen** de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el **rango** de la función.

La regla (o correspondencia) mencionada en la definición de función se proporciona con mayor frecuencia como una ecuación con dos variables, denotadas por lo general con x y y.

Ejemplo 1. Considere la función definida por la ecuación

$$y = 2x + 1 \qquad -1 \leq x \leq 2$$

El dominio $-1 \leq x \leq 2$ especifica que el número x está restringido a los números reales entre -1 y 2. La regla $y = 2x + 1$ (ver figura 1) establece que el número x se multiplica por 2 y que después se suma 1 al resultado para obtener y. Por ejemplo:

$$Si \quad x = 1 \quad entonces \quad y = 2(1) + 1 = 3$$

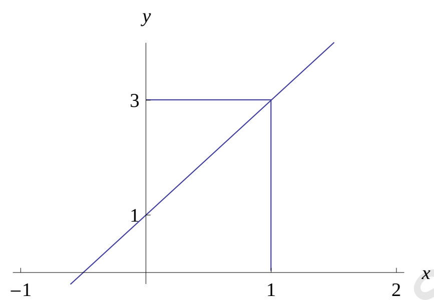

Figura 1: $y = 2x + 1$

Con frecuencia, las funciones se denotan por letras como f, F, g, G, y así sucesivamente. Si f es una función, para cada número x en su dominio la imagen correspondiente en el rango es designada por el símbolo $f(x)$, el cual se lee f de x. Nos referimos a $f(x)$ como el **valor de f en el número** x. Así, $f(x)$ es el número obtenido cuando x es conocido y se aplica la regla para f; $f(x)$ no significa f por x.

En general, cuando la regla que define a una función f está dada por una ecuación en x y y, decimos que la función tiene forma **implícita**. Si es posible despejar y en términos de x en la ecuación, entonces escribimos $y = f(x)$ y decimos que la función está dada en forma **explícita**. De hecho, por lo general escribimos: la función $y = f(x)$ para decir la función f definida por la ecuación $y = f(x)$. Por ejemplo:

FORMA IMPLÍCITA	FORMA EXPLÍCITA
$3x + y = 5$	$y = f(x) = 5 - 3x$
$x^2 - y = 6$	$y = f(x) = x^2 - 6$
$xy = 4$	$y = f(x) = \dfrac{4}{x}$

Variable Dependiente e Independiente

Considere una función $y = f(x)$. La variable x se denomina **variable independiente**, ya que puede asumir cualquier número permisible del dominio. La variable y es la **variable dependiente** porque su valor depende de x.

Las funciones pueden tener más de una variable independiente. Por ejemplo, la forma general de la función de producción es:

$$Q = f(K, L)$$

Decimos que la cantidad (Q) depende de las dos variables independientes, la variable capital (K) y el trabajo (L). La forma específica de una función nos dice exactamente cómo el valor de la variable dependiente se determina a partir de los valores de la variable independiente. Una forma específica en una función de producción puede ser:

$$Q = 4K^{0.5}L^{0.5}$$

Para cualquier valor dado de K y L la función específica nos permite calcular el valor de Q. Por ejemplo:

$$Si\ K = 1\, y\ L = 1\ entonces\ Q = 4(1)^{0.5}(1)^{0.5} = 4$$
$$Si\ K = 4\, y\ L = 4\ entonces\ Q = 4(4)^{0.5}(4)^{0.5} = 16$$

1.1.2. Funciones lineales

El dominio de la **función lineal** f consta de todos los números reales y su gráfica es una línea recta no vertical con pendiente m y ordenada al origen b.

$$f(x) = mx + b$$

Una función lineal es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$ y constante si $m = 0$. A continuación se muestran los tres casos: (figura 2)

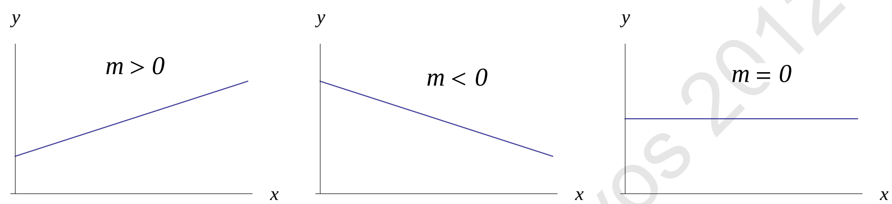

Figura 2: $f(x) = mx + b$

Funciones lineales en economía

Suponga que el gasto promedio semanal de los hogares en alimentos (C) depende de los ingresos semanales de los hogares (Y), de acuerdo con la relación:

$$C = 12 + 0.3Y$$

En este caso tenemos que la pendiente $m = 0.3$ es creciente. Si el ingreso semanal es de 90 unidades, entonces el consumo en alimentos es de 39 unidades. Lo anterior se expresa de la siguiente manera (ver figura 3):

$$Si \;\; Y = 90 \;\; entonces \;\; C = 12 + 0.3(90) = 39$$

Otro ejemplo de funciones en economía es del tipo $Q_d = f(p)$. Esta particular forma es cuando la cantidad demandada (Q_d) de una bien depende del precio (p). Una forma específica en una función de demanda puede ser:

$$Q_d = 80 - 2p$$

Para cualquier valor dado de p la función específica nos permite calcular el valor de Q_d. Por ejemplo:

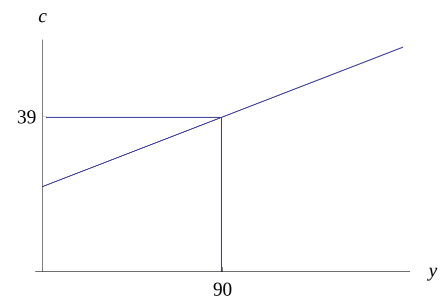

Figura 3: $C = 12 + 0.3Y$

$$Si \;\; p = 10 \;\; entonces \;\; Q_d = 80 - 2(10) = 80 - 20 = 60$$
$$Si \;\; p = 20 \;\; entonces \;\; Q_d = 80 - 2(20) = 80 - 40 = 40$$

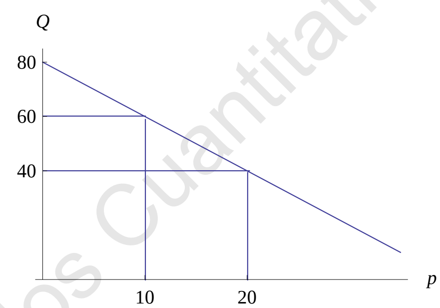

Figura 4: $Q_d = 80 - 2p$

En este caso vemos que la pendiente $m = -2$, es decir, la función es decreciente como se observa en la figura 4.

Ejemplo 2. En un modelo macroeconómico keynesiano simple sin sector gobierno y sin el comercio exterior, supone que:

$$Y = C + I \tag{1}$$
$$C = C_0 + cY \tag{2}$$
$$I = I_0 - br \tag{3}$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo y I es la inversión, exógenamente fijas. Además se tiene que $C_0 > 0$ es el consumo autónomo, $I_0 > 0$ es la inversión autónoma, y $0 < c < 1$ y $b > 0$ son los parámetros.

En este tipo de modelos macroeconómicos se busca obtener el nivel de equilibrio del ingreso nacional (Y) con respecto a la tasa de interés (r). Para obtener la ecuación del ingreso en función de la tasa de interés sustituimos la ecuación (2) y (3) en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} Y &= C_0 + cY + I_0 - br \\ Y - cY &= C_0 + I_0 - br \\ Y(1-c) &= A - br \quad \text{donde} \quad A = C_0 + I_0 \\ Y &= \frac{A}{(1-c)} - \frac{b}{(1-c)} \cdot r \end{aligned}$$

En este modelo se tiene que la pendiente de la función es negativa y su grado de inclinación depende de los parametros b y c.

Problema 1. En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $C = 10 + 0.5Y$ e $I = 15 - 2r$.

a) Grafique la función de consumo e intérprete.

b) Grafique la función de inversión e intérprete.

c) Obtenga la función de ingreso (Y) en función de la tasa de interés (r) argumentando y graficando tu resultado.

Solución al problema 1

a) La gráfica del consumo se muestra en la figura 5 e interpretamos que si incrementa el ingreso aumenta el consumo y por lo tanto la pendiente es positiva.

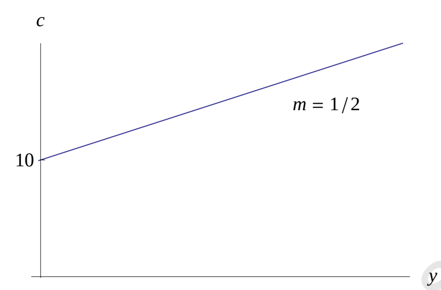

Figura 5: $C = 10 + 0.5Y$

b) La gráfica de la inversión se muestra en la figura 6 e interpretamos que si incrementa la tasa de interés disminuye la inversión y por lo tanto la pendiente es negativa.

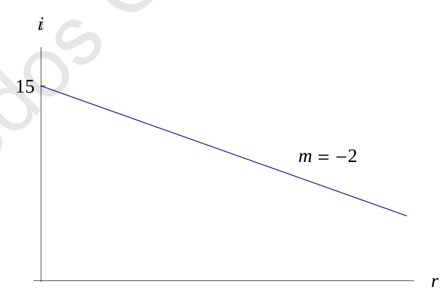

Figura 6: $I = 15 - 2r$

c) Siguiendo a la ecuación del ingreso obtenida anteriormente tenemos

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{A}{(1-c)} - \frac{b}{(1-c)} \cdot r \\
&= \frac{10+15}{(1-0.5)} - \frac{2}{(1-0.5)} \cdot r \\
Y &= 50 - 4r
\end{aligned}
$$

La gráfica del ingreso se muestra en la figura 7 e interpretamos que si incrementa la tasa de interés disminuye el ingreso y por lo tanto la pendiente es negativa.

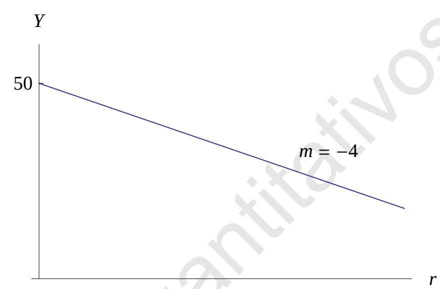

Figura 7: $Y = 50 - 4r$