2. Matrices y sistemas de ecuaciones

2.1. Matrices

Introducción

En econometría estamos preocupados con el modelado de los datos observados. En muchos casos el número de datos numéricos es grande (varios cientos o miles) de las observaciones de una serie de posibles variables de interés y todos los datos deben ser manejados de una manera organizada. Muchos conjuntos de datos se almacenan en una hoja de cálculo, donde cada columna es igual al número de observaciones de esa variable. Por ejemplo, los datos sobre las calificaciones de Cálculo, Inglés e Historia de cinco estudiantes se puede representar por la siguiente tabla.

Estudiantes	Cálculo	Inglés	Historia
1	1.8	4	8
2	2.4	6	9
3	2.9	6	7
4	3.0	7	6
5	3.5	8	7

Matriz de datos

La información consiste en datos reales de las cinco puntuaciones en Cálculo, Inglés e Historia y podemos resumir estos datos en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1.8 & 4 & 8 \\ 2.4 & 6 & 9 \\ 2.9 & 6 & 7 \\ 3.0 & 7 & 6 \\ 3.5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Este bloque rectangular de números se llama matriz. La matriz anterior tiene cinco filas y tres columnas. En econometría trabajamos con las matrices, y por supuesto siempre debemos recordarnos el significado de las columnas y filas (en el caso, la correspondencia entre columnas y variables y entre las filas y los estudiantes, por lo que el número 2.9 en la columna 1 y la fila 3 se sabe que corresponden a la calificación de Cálculo del tercer estudiante).

2.1.1. Definición

Definición 2.1 *Sean m, n números naturales. Una matriz de orden m filas por n columnas con coeficientes o entradas en los números reales, es un arreglo rectangular:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

por simplicidad a la matriz anterior simplemente se representa por: $[a_{ij}]$.

2.1.2. Tipos de matrices: Cuadrada, diagonal, identidad, simétrica

Definición 2.2 *Sea $[a_{ij}]$ una matriz m por n. Si $m = n$, al conjunto de matrices de orden n por n se le llama* ***matrices cuadradas de orden*** *n.*

Ejemplo 9 *La siguiente matriz es una matriz de orden 2 por 2:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definición 2.3 *La matriz cuadrada $[a_{ij}]$ de orden n, tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, es decir, a la matriz*

$$diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

se le llama ***matriz diagonal de orden n****. En particular si además $a_{ii} = 1$ es decir,a la matriz*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

se le llama la ***matriz identidad de orden n****.*

Definición 2.4 *Si A es una matriz cuadrada puede ocurrir que $A^T = A$, en este caso a la matriz A se le llama* ***matriz simétrica.***

Ejemplo 10 *Si $A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, entones $A = A^T$, es decir, A es una matriz simétrica.*

Ejemplo 11 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces A es una matriz simétrica.

2.1.3. Aritmética de matrices

Propiedades de la suma y multiplicación

Sean $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ matrices m por n. Se define la **suma** de A con B por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

la cual también es una matriz m por n.

Ejemplo 12 *La suma de las matrices A y B donde:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \;\; y \;\; B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 17 & 9 \end{bmatrix}$$

Sea A una matrix m por n, $A = [a_{ij}]$ y B una matriz n por k con $B = [b_{jr}]$, se define el **producto** de A por B como sigue: $AB = [c_{ir}]$ es una matriz m por k donde para todo $1 \leq i \leq m$, para todo $1 \leq r \leq k$:

$$c_{ir} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr}$$

En el siguiente ejemplo usaremos la notación $A_{m,n}$ para denotar la matriz A de orden $m \times n$.

Ejemplo 13 *Calcular* $C_{2,2} = A_{2,2} \cdot B_{2,2}$ *donde*

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \;\; y \;\; B_{2,2} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto

$$A_{2,2} \cdot B_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 56 & 32 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$C_{2,2} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 56 & 32 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 14 *Calcular* $C_{3,3} = A_{3,2} \cdot B_{2,3}$ *donde*

$$A_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \;\; y \;\; B_{2,3} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando el producto

$$A_{3,2} \cdot B_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 10 & 20 & 7 \\ 13 & 26 & 7 \end{bmatrix}$$

por tanto

$$C_{3,3} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 3 \\ 10 & 20 & 7 \\ 13 & 26 & 7 \end{bmatrix}$$

En álgebra matricial se dice que dos matrices son iguales si todos los elementos correspondientes son iguales. Si A es cualquier matriz, una matriz B será una matriz identidad para la suma si:

$$A + B = A \qquad \text{y} \qquad B + A = A$$

Se puede verificar fácilmente que la matriz identidad para la suma es una matriz en la cual cada elemento es igual a cero.

De manera similar, Si A es cualquier matriz, la matriz identidad para la multiplicación es la matriz identidad I_n que satisface la relación:

$$AI = A \qquad \text{y} \qquad IA = A$$

Ejemplo 15 ***El beneficio de una Firma***

Suponer que una firma produce tres tipos de productos, usando dos tipos de insumos, las cantidades de cada producto están dadas por los vectores columna q:

$$q = \begin{bmatrix} 15,000 \\ 27,000 \\ 13,000 \end{bmatrix}$$

y los precios unitarios están dadas por el vector de precios $\begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix}$.

Las cantidades de insumos empleados en la producción están dadas por el vector columna z:

$$z = \begin{bmatrix} 11,000 \\ 30,000 \end{bmatrix}$$

Y los precios de esos insumos por el vector $w = \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix}$. *El beneficio de la empresa se encuentra dada por:*

$$\begin{aligned}
\prod &= pq - wz \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15,000 \\ 27,000 \\ 13,000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11,000 \\ 30,000 \end{bmatrix} \\
&= (150,000 + 324,000 + 65,000) - (220,000 + 240,000) = 79,000
\end{aligned}$$

Potencia de matrices y matriz idempotente

Definición 2.5 *Si A es una matriz cuadrada y n es un entero positivo, entonces* ***la n-ésima potencia de*** *A, la cual se escribe como A^n, es el producto de n factores de A:*

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n}$$

Si A es una matriz de orden n, se define $A^0 = I_n$.

Ejemplo 16 *Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:*

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 = A^2 A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es fácil demostrar por inducción que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.6 *Una matriz A tal que $A^2 = A$ se le llama* ***matriz idempotente****.*

Ejemplo 17 *La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ es idempotente.*

2.1.4. Transpuesta y sus propiedades

Definición 2.7 *Dada una matriz $A = [a_{ij}]$, se define la matriz $A^T = [b_{ij}]$ donde $b_{ij} = a_{ji}$. A la matriz A^T se le llama la* ***matriz traspuesta de*** *A.*

Ejemplo 18 *La traspuesta de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

es dada por:

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta:

- $A = (A^T)^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Ejemplo 19 *Si*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

así

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

Ejemplo 20 *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la suma tenemos que

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A^T + B^T$$

ya que

$$
\begin{aligned}
A^T + B^T &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para la multiplicación tenemos

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = B^T A^T
$$

ya que

$$
\begin{aligned}
B^T A^T &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Traza y sus propiedades

La traza de una matriz es una operación definida sólo para matrices cuadradas.

Definición 2.8 *Si **A** es una matriz $n \times n$, la **traza de la matriz** A, denotada como $tr(A)$, se define como*

$$
tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.
$$

- $tr(I_n) = n$
- $tr(A^T) = tr(A)$

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$, *para todo escalar* α
- $tr(AB) = tr(BA)$, *donde* A *es una matriz* $m \times n$ *y* B *es una matriz* $n \times m$.

Ejemplo 21 *Si*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$tr(A) = 2 + 4 = 6$$

2.2. Determinantes

En esta sección introducimos una función, la función determinante. Si A es una matriz cuadrada, entonces la función determinante asocia a A exactamente un número real llamado el determinante de A, el determinante de A el cual se le denota por $\mid A \mid$.

2.2.1. Definición

Definición 2.9 *Si* $A = [a_{ij}]$ *es una matriz cuadrada de orden 1, entonces* $\mid A \mid = a_{11}$.

Definición 2.10 *Si* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *es una matriz cuadrada de orden 2, entonces* $\mid A \mid = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Ejemplo 22

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

Definición 2.11 *Determinante de* 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. *Entonces*

$$\det A = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 23 *Cálculo de un determinante* 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Calcule* $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 5\cdot 19 + 2\cdot 10 = -69$$

Definición 2.12 *(**Menor**) Sea* A *una matriz de* $n \times n$ *y sea* M_{ij} *la matriz de* $(n-1)\times(n-1)$ *que se obtiene de* A *eliminando el renglón* i *y la columna* j. M_{ij} *se llama el **menor ij** de* A.

Ejemplo 24 *Cálculo de dos menores de una matriz* 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. *Encuentre* M_{13} *y* M_{32}.

Solución: *Eliminando el primer renglón y la tercer columna de* A *se obtiene* $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Definición 2.13 *Sea* A *una matriz de* $n \times n$. *El **cofactor ij** de* A, *denotado por* A_{ij}, *está dado por*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \tag{2}$$

Estos es, el cofactor ij *de* A *se obtiene tomando el determinante del menor* ij *y multiplicándolo por* $(-1)^{i+j}$. *Observe que*

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 25 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Del ejemplo anterior tenemos que $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$*. Entonces los cofactores* A_{13} *y* A_{32} *de la matriz* A *se obtienen usando formula* 2 *como sigue*

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^4(0 \cdot 3 - 1 \cdot 6) = -6 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^5(2 \cdot 5 - 0 \cdot 4) = -10 \end{aligned}$$

Definición 2.14 *(**Determinante** $n \times n$) Sea* A *una matriz* $n \times n$*. Entonces el determinante de* A*, denotado por* $\det A$ *o* $|A|$*, está dado por*

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \end{aligned} \tag{3}$$

La expresión al lado derecho de (3) *se llama **expansión por cofactores.***

Definición 2.15 *(**La adjunta**). Sea* A *una matriz de* $n \times n$*, y sea* B*, dada por*

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

*es decir, la matriz de sus cofactores. Entonces la **adjunta** de* A*, escrito adj* A*, es la transpuesta de la matriz* B *de* $n \times n$*; es decir*

$$adj\ A = B^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 26 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$*. Calcule adj* A*.*

Solución:

Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = -3,\ A_{21} = -13,\ A_{22} = 5,\ A_{23} = 2,\ A_{31} = -7,\ A_{32} = 2$ *y* $A_{33} = 2$. *Así,*

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \ y \quad adj\ A = B^T = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Regla de Sarrus

Hay una forma alternativa de calcular determinantes de orden 3. Se añaden a la derecha sus dos primeras columnas de una matriz A dada, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Primero se multiplican las tres líneas que van de arriba a la izquireda a abajo a la derecha, poniendo el signo + a los productos.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \tag{4}$$

Luego se multiplican las tres líneas que van de abajo a la izquierda a arriba a la derecha, poniendo el signo − a a los productos.

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \tag{5}$$

La suma de los términos de (4) y (5) es igual a A.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces para calcular el determinante de la matriz A consideremos el siguiente arreglo

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}$$

Aplicando la regla de Sarrus tenemos que

$$\begin{aligned}
\mid A \mid &= 1\cdot 5\cdot(-3)+2\cdot 1\cdot(-2)+3\cdot(-4)\cdot 1-(-2)\cdot 5\cdot 3-1\cdot 1\cdot 1-(-3)\cdot(-4)\cdot 2\\
&= -15-4-12+30-1-24\\
&= -26
\end{aligned}$$

Por tanto $\mid A \mid = -26$

2.2.2. Propiedades de los determinantes

El cálculo de los determinantes se simplifica utilizando varias propiedades. En lo siguiente A denota una matriz cuadrada.

Propiedades de los determinantes:

1. Si cada una de las entradas de un renglón (o columna) de A es 0, entonces $\mid A \mid = 0$.
2. Si dos renglones (o columnas) de A son idénticos, $\mid A \mid = 0$.
3. Si A es triangular superior (o inferior), entonces $\mid A \mid$ es igual al producto de las entradas de la diagonal principal.
4. Si B es la matriz que se obtiene sumando un múltiplo de un renglón (o columna) de A a otro renglón (columna), entonces $\mid A \mid = \mid B \mid$.
5. Si B es la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de un renglón (o columna) de A por el mismo número k, entonces $\mid B \mid = k \mid A \mid$.

2.3. Matriz inversa

2.3.1. Definición

Definición 2.16 *Sea A una matriz n por n, una matriz B n por n que tiene la propiedad de que $AB = BA = I_n$ se le llama la* ***matriz inversa*** *de A y se le denota por $B = A^{-1}$. Más aún, se dice que A es* ***matriz invertible*** *en este caso.*

Teorema 2.17 *Una matriz cuadrada tiene inversa $\iff \mid A \mid \neq 0$.*

Definición 2.18 *Una matriz A se llama* ***matriz singular*** *si $\mid A \mid = 0$ y* ***matriz no singular*** *si $\mid A \mid \neq 0$. Entonces una matriz tiene inversa si y sólo si es no singular.*

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si $\mid A \mid = ad - bc \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 27 *La matriz inversa de la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es dada por:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \\ A^{-1}A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

2.3.2. Propiedades

Propiedades de la matriz inversa: Sea A y B matrices invertibles $n \times n$. Entonces:

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- La traspuesta de A es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- $(\lambda A)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$, si $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

En una matriz A m por n se tienen tres operaciones elementales de filas:

1. Multiplicación de una fila de A por un número c distinto de cero.
2. Remplazo de la r-ésima fila de A por la fila r más c veces la fila s, donde c es cualquier número y r es distinto de s.
3. Intercambio de dos filas de A.

Si A y B son dos matrices m por n sobre los números reales, se dice que B es equivalente por filas a A si B se obtiene de A por una sucesión finita de operaciones elementales de filas.

Se puede ver que si A es inversible, entonces A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n. Mas aún, al reducir la matriz A a la matriz identidad I_n por medio de una sucesión de operaciones elementales de filas, la inversa de A se obtiene al aplicar la misma sucesión de operaciones a la matriz identidad.