2. Optimización libre con una variable

2.1. Máximos y mínimos relativos y absolutos

Introducción

En esta sección resolveremos problemas que impliquen maximizar o minimizar una cantidad. Por ejemplo, podríamos tener que maximizar una ganancia o minimizar un costo. La parte crucial consiste en expresar la cantidad que se debe maximizar o minimizar como función de alguna variable contenida en el problema. Luego diferenciamos y probamos los valores críticos resultantes. Para esto pueden usarse las pruebas de la primera o de la segunda derivada, aunque puede ser obvio por la naturaleza si un valor crítico representa o no una respuesta apropiada. Como nuestro interés estriba en los máximos y mínimos absolutos, a veces tendremos que examinar los puntos extremos del dominio de la función.

2.1.1. Método analítico

Definición 2.1. Una función f tiene un **máximo absoluto** en $x = x_0$, si $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de f. El máximo absoluto es $f(x_0)$. Una función f tiene un **mínimo absoluto** en $x = x_0$, si $f(x_0) \leq f(x)$, para toda x en el dominio de f. El mínimo absoluto es $f(x_0)$.

Los valores máximo y mínimo absoluto se llaman **extremos absolutos**. Los extremos absolutos también suelen denominarse extremos **globales**, para distinguirlos de los extremos locales, que se definen a continuación.

Definición 2.2. Una función f tiene un **máximo relativo** en $x = x_0$, si existe un intervalo abierto que contenga a x_0, sobre el cual $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo. El máximo relativo es $f(x_0)$. Una función tiene un **mínimo relativo** en $x = x_0$, si existe un intervalo abierto que contenga a x_0, sobre el cual $f(x_0) \leq f(x)$, para toda x en el intervalo. El mínimo relativo es $f(x_0)$.

Cuando aludamos a un máximo o un mínimo relativo lo llamaremos a cada uno extremo relativo.

Definición 2.3. Si x_0 está en el dominio de f y $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$ o $\frac{df}{dx}(x_0)$ no está definida, entonces x_0 se denomina valor crítico de f. Si x_0 es un **valor crítico** de f, entonces el punto $(x_0, f(x_0)$ se le llama **punto crítico**.

2.2. Criterios de la primera y segunda derivada

Criterio de la derivada para hallar Máximos y Mínimos:

1er paso. Calcular $\frac{df}{dx}(x)$.

2o. paso. Determinar los valores de x en que $\frac{df}{dx}(x) = 0$ o no está definida (estos valores incluyen valores críticos y puntos de discontinuidad).

3er. paso. Calcular $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$.

4o. paso. Evaluar $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$ para cada valor crítico x_0. Entonces

i) Si $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo reativo en x_0.

ii) Si $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

iii) Si $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) = 0$, entonces el criterio no es concluyente.

Definición 2.4. Una función f tiene un **punto de inflexión** cuando $x = x_0$, si y sólo si f es continua en x_0, y f cambia de concavidad en x_0.

Ejemplo 30. Encontar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ en $[-3, 1]$

Solución:

1er paso. Calculemos $\frac{df}{dx}(x)$.

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 6x$$

2o. paso. Determinemos los valores de x en que $\frac{df}{dx}(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= 0 \\ 3x^2 + 6x &= 0 \\ 3x(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones $3x = 0$ y $x+2 = 0$, tenemos que los valores críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$.

3er. paso. Hallemos la segunda derivada

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = 6x + 6.$$

4o. paso. Evaluemos $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ en cada valor crítico. Entonces

$$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 6(0) + 6$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 6$$

Por lo que $x_1 = 0$ es la abscisa de un mínimo.

$$\frac{d^2f}{dx^2}(-2) = 6(-2) + 6$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}(-2) = -6$$

En consecuencia el punto $x_2 = -2$ es la abscisa de un máximo.

En conclusión para encontrar los valores que corresponden al máximo y al mínimo se deben realizar varias sustituciones en la función original:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

Para $x_1 = 0$ se tiene

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 2$$
$$f(0) = -2$$

Para $x_2 = -2$ se tiene

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2$$
$$f(-2) = 2$$

Por lo que el máximo es el punto (-2,2) y el mínimo es el punto (0,-2) como se muestra en la figura 15.

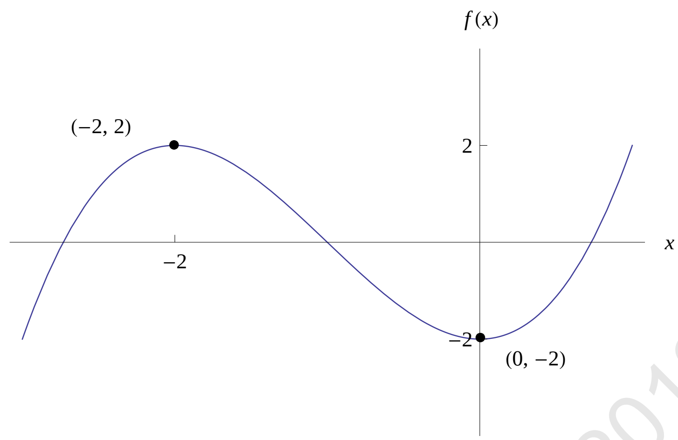

Figura 15: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

Ejemplo 31. Encontar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ en $[-3, 3]$.

Solución:

1er paso. Calculemos $\frac{df}{dx}(x)$.

$$\frac{df}{dx}(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

2o. paso. Determinemos los valores de x en que $\frac{df}{dx}(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= 0 \\
6x^2 + 6x - 12 &= 0 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x + 2)(x - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones $x + 2 = 0$ y $x - 1 = 0$, tenemos que los valores críticos son $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$.

3er. paso. Hallemos la segunda derivada

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = 12x + 6$$

4o. paso. Evaluemos $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ en cada valor crítico. Entonces

$$\frac{d^2f}{dx^2}(-2) = 12(-2) + 6$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}(-2) = -18$$

Por lo que $x_1 = -2$ es la abscisa de un máximo.

$$\frac{d^2f}{dx^2}(1) = 12(1) + 6$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}(1) = 18$$

En consecuencia el punto $x_2 = -2$ es la abscisa de un mínimo.

En conclusión para encontrar los valores que corresponden al máximo y al mínimo se deben realizar varias sustituciones en la función original:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$$

Para $x_1 = -2$ se tiene

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) - 7$$
$$f(-2) = 13$$

Para $x_2 = 1$ se tiene

$$f(1) = 2 + 3 - 12 - 7$$
$$f(1) = -14$$

Por lo que el máximo relativo es el punto(-2,13) y el mínimo relativo es el punto (1,-14). Como referencia, se traza la gráfica de f en la figura 16.

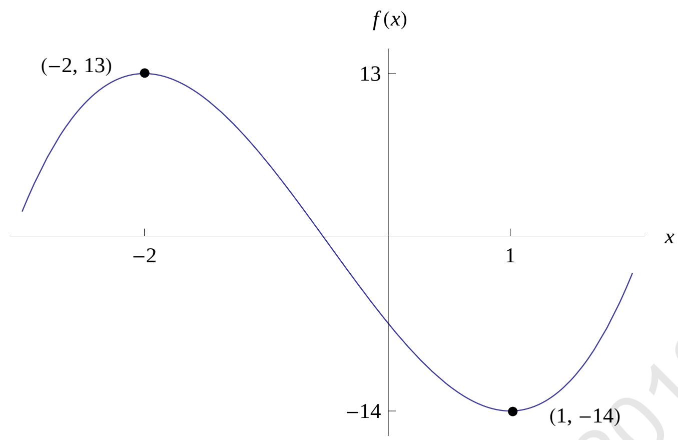

Figura 16: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

Problema 8. Un monopolista tiene una función de demanda inversa $p(q) = 100 - q$. La función de costo total es $C = 25q$.

1. ¿Cuál es la cantidad y el precio que maximiza la utilidad?
2. Hallar el ingreso y el costo marginal.
3. Gráficar conjuntamente las funciones del ingreso, utilidad y costo.
4. Gráficar conjuntamente las funciones del precio, ingreso marginal y costo marginal.

Solución al problema 8.

1. La función del ingreso del monopolista es

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (100 - q)q \\ &= 100q - q^2 \end{aligned}$$

La función de utilidad es

$$\begin{aligned}\pi(q) &= R(q) - C(q)\\ &= 100q - q^2 - 25q\\ &= 75q - q^2\end{aligned}$$

Derivando la función de utilidad obtenemos

$$\begin{aligned}\pi'(q) &= 75 - 2q\\ \pi'(q) &= 0\\ q &= 37.5\end{aligned}$$

Para probar que este punto es un máximo, obtenemos la segunda derivada de la función de la utilidad.

$$\pi''(q) = -2 < 0$$

De acuerdo con el criterio de la segunda derivada este punto es un máximo. Para determinar el precio y la utilidad hacemos:

$$\begin{aligned}p(q) &= 100 - 37.5 = \$62.50\\ \pi(q) &= 75(37.5) - (37.5)^2 = \$1,406.25\end{aligned}$$

2. El ingreso y costo marginal son respectivamente

$$\begin{aligned}R'(q) &= 100 - 2q\\ C'(q) &= 25\end{aligned}$$

Si igualamos el ingreso marginal al costo marginal obtenemos la cantidad que maximiza la utilidad

$$\begin{aligned}R'(q) &= C'(q)\\ 100 - 2q &= 25\\ 75 &= 2q\\ q &= 37.5\end{aligned}$$

3. Gráfica del ingreso, utilidad y costo.

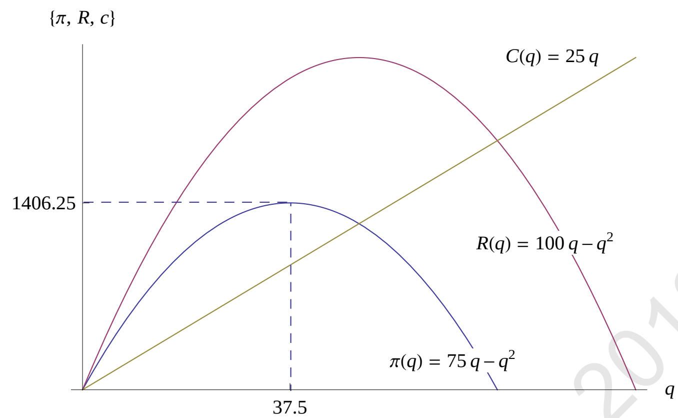

Figura 17: $R(q), \pi(q), C(q)$

4. Gráfica del precio, ingreso marginal y costo marginal.

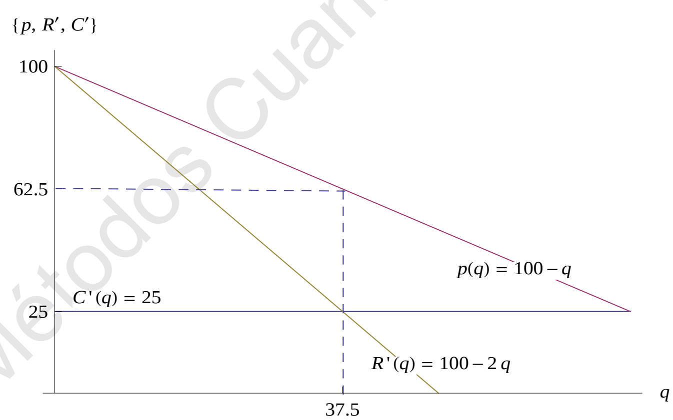

Figura 18: $p(q), C'(q), R'(q)$

Problema 9. La empresa de cablevisión tiene actualmente $100,000$ suscriptores que pagan una couta mensual de \$40 pesos. Una encuesta reveló que se tendrían 1000 suscriptores más por cada \$0.25 de disminución en la cuota.

¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían entonces?

Solución del problema 9. Sea x el número de disminuciones de \$0.25. La couta mensual es entonces de 40 - 0.25x, donde $0 \leq x \leq 160$ y el número de suscriptores nuevos es $1000x$. Por lo tanto, el número total de suscriptores es $100,000 + 1000x$. Entonces queremos maximizar el ingreso, el cuál esta dado por:

$$\begin{aligned} r &= (\text{número de suscriptores})(\text{couta por suscriptor}) \\ &= (100,000 + 1000x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(100 + x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(4000 + 15x - 0.25x^2). \end{aligned}$$

Haciendo $\frac{dr}{dx} = 0$ y despejamos a x, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx} = 1000(15 - 0.5x) &= 0 \\ &= 30. \end{aligned}$$

Como el dominio de r es el intervalo cerrado $[0, 160]$, el valor máximo absoluto de r debe ocurrir en $x = 30$ o en los puntos extremos del intervalo. Ahora calculamos r en estos tres puntos:

1. Si $x = 0$, entonces $r = 4,000,000$;
2. Si $x = 30$, entonces $r = 4,225,000$;
3. Si $x = 160$, entonces $r = 0$.

De esto se sigue que el ingreso máximo ocurre cuando $x = 30$. Esto corresponde a 30 disminuciones de \$0.25, para una disminución total de \$7.5; esto es la couta mensual \$32.50. El número de suscriptores con esa couta son 100,000 + 30(1000) = 130,000.

Problema 10. Una empresa tiene una función dada por $q(L) = aL - bL^2$, donde L es el número de trabajadores empleados por la empresa y $a, b > 0$. El producto de la empresa se vende a un precio de p, y el salario promedio de un trabajador es w. Encontrar el número de trabajadores que maximiza el beneficio de la empresa. Demostrar que el beneficio es, en efecto, un máximo.

Solución al Problema 10.

Expresamos la ganancia como la diferencia entre los ingresos totales y el costo total

$$\begin{aligned} \pi(L) &= p(aL - bL^2) - wL \\ \pi'(L) &= ap - 2bpL - w = 0 \qquad \pi''(L) = -2bp < 0 \text{ implica un máximo} \\ L^* &= \frac{ap - w}{2bp} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número óptimo de trabajadores y el salario promedio se ven relacionados, como dicta la lógica económica.

Problema 11. Una empresa tiene una función de producción Cobb-Douglas $q = 10K^{\frac{3}{5}}L^{\frac{2}{5}}$, y vende sus productos a un precio de 30. La empresa opera en el corto plazo con un número fijo de máquinas en 32. Buscar el máximo beneficio de la empresa, si se sabe que el precio de una máquina es de 120 y el salario de los trabajadores es de 15 unidades.

Solución al Problema 11. Restando el costo total de capital y el trabajo de los ingresos totales da la ecuación de beneficios:

$$\begin{aligned} \pi &= pq - rK - wL = 30(10)32^{\frac{3}{5}}L^{\frac{2}{5}} - 120(32) - 15L \\ \pi(L) &= 300(32)^{\frac{3}{5}}L^{\frac{2}{5}} - 120(32) - 15(L) = 300(8)L^{\frac{2}{5}} - 3840 - 15L \\ &= 2400L^{\frac{2}{5}} - 3840 - 15L \end{aligned}$$

La maximización de beneficios con respecto a la mano de obra

$$
\begin{aligned}
\pi'(L) &= \frac{2400(2)}{5} L^{-\frac{3}{5}} - 15 = 0 \quad \pi''(L) = -576 L^{-\frac{8}{5}} < 0 \\
960 L^{-\frac{3}{5}} &= 15 \\
L^{\frac{3}{5}} &= 64 \\
L &= 64^{\frac{5}{3}} \\
L^{*} &= 1024 \;\; \text{trabajadores} \\
\pi(1024) &= 2400(1024)^{\frac{2}{5}} - 3840 - 15(1024) \\
&= 2400(16) - 3840 - 15360 \\
&= 19,200
\end{aligned}
$$