1. Derivadas

1.1. Funciones

Introducción.

Las funciones representan el principal objeto de análisis en el cálculo, ya que constituyen la clave para describir el mundo real en términos matemáticos. En esta sección se da el concepto de función, su graficación y las maneras de representarlas.

En muchas aplicaciones, con frecuencia existe cierta correspondencia entre dos conjuntos de números. Por ejemplo, la ganancia R que resulta de la venta de x artículos vendidos a \$1,000 cada uno es R=10x. Si conocemos el número de artículos vendidos, entonces podemos calcular la ganancia por medio de la regla R=10x. Esta regla es un ejemplo de función.

Veamos ahora la definición de función

1.1.1. Definición de función.

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales. Una **función** de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. El conjunto X es el dominio de la función. Para cada elemento x en X, el elemento correspondiente y en Y es el **valor** de la función en x, o la **imagen** de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el **rango** de la función.

La regla (o correspondencia) mencionada en la definición de función se proporciona con mayor frecuencia como una ecuación con dos variables, denotadas por lo general con x y y.

Ejemplo 1. Considere la función definida por la ecuación

$$y = 2x + 1 \qquad -1 \leq x \leq 2$$

El dominio $-1 \leq x \leq 2$ específica que el número x está restringido a los números reales entre -1 y 2. La regla $y = 2x + 1$ (ver figura 1) establece que el número x se multiplica por 2 y que después se suma 1 al resultado para obtener y. Por ejemplo:

$$Si \quad x = 1 \quad entonces \quad y = 2(1) + 1 = 3$$

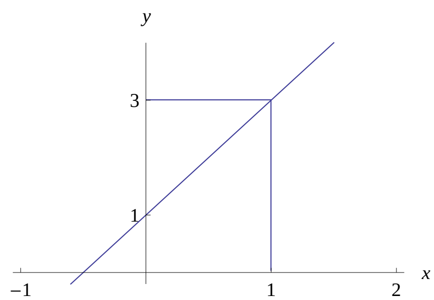

Figura 1: $y = 2x + 1$

Con frecuencia, las funciones se denotan por letras como f, F, g, G, y así sucesivamente. Si f es una función, para cada número x en su dominio la imagen correspondiente en el rango es designada por el símbolo $f(x)$, el cual se lee f de x. Nos referimos a $f(x)$ como el **valor de f en el número** x. Así, $f(x)$ es el número obtenido cuando x es conocido y se aplica la regla para f; $f(x)$ no significa f por x.

En general, cuando la regla que define a una función f está dada por una ecuación en x y y, decimos que la función tiene forma **implícita**. Si es posible despejar y en términos de x en la ecuación, entonces escribimos $y = f(x)$ y decimos que la función está dada en forma **explícita**. De hecho, por lo general escribimos: la función $y = f(x)$ para decir la función f definida por la ecuación $y = f(x)$. Por ejemplo:

FORMA IMPLÍCITA	**FORMA EXPLÍCITA**
$3x + y = 5$	$y = f(x) = 5 - 3x$
$x^2 - y = 6$	$y = f(x) = x^2 - 6$
$xy = 4$	$y = f(x) = \dfrac{4}{x}$

Variable Dependiente e Independiente

Considere una función $y = f(x)$. La variable x se denomina **variable independiente**, ya que puede asumir cualquier número permisible del dominio. La variable y es la **variable dependiente** porque su valor depende de x.

Las funciones pueden tener más de una variable independiente. Por ejemplo, la forma general de la función de producción es:

$$Q = f(K, L)$$

Decimos que la cantidad (Q) depende de las dos variables independientes, la variable capital (K) y el trabajo (L). La forma específica de una función nos dice exactamente cómo el valor de la variable dependiente se determina a partir de los valores de la variable independiente. Una forma específica en una función de producción puede ser:

$$Q = 4K^{0.5}L^{0.5}$$

Para cualquier valor dado de K y L la función específica nos permite calcular el valor de Q. Por ejemplo:

$$Si\ K = 1\, y\ L = 1\ entonces\ Q = 4(1)^{0.5}(1)^{0.5} = 4$$
$$Si\ K = 4\, y\ L = 4\ entonces\ Q = 4(4)^{0.5}(4)^{0.5} = 16$$

1.1.2. Funciones lineales

El dominio de la **función lineal** f consta de todos los números reales y su gráfica es una línea recta no vertical con pendiente m y ordenada al origen b.

$$f(x) = mx + b$$

Una función lineal es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$ y constante si $m = 0$. A continuación se muestran los tres casos: (figura 2)

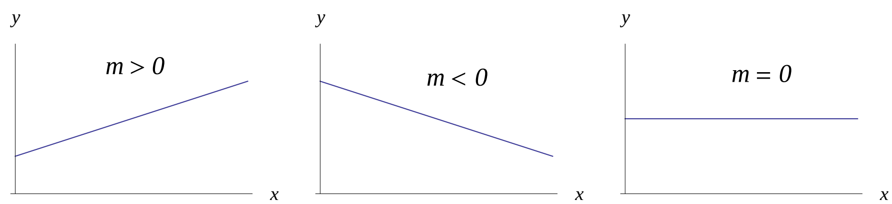

Figura 2: $f(x) = mx + b$

Funciones lineales en economía

Suponga que el gasto promedio semanal de los hogares en alimentos (C) depende de los ingresos semanales de los hogares (Y), de acuerdo con la relación:

$$C = 12 + 0.3Y$$

En este caso tenemos que la pendiente $m = 0.3$ es creciente. Si el ingreso semanal es de 90 unidades, entonces el consumo en alimentos es de 39 unidades. Lo anterior se expresa de la siguiente manera (ver figura 3):

$$Si \;\; Y = 90 \;\; entonces \;\; C = 12 + 0.3(90) = 39$$

Otro ejemplo de funciones en economía es del tipo $Q_d = f(p)$. Esta particular forma es cuando la cantidad demandada (Q_d) de una bien depende del precio (p). Una forma específica en una función de demanda puede ser:

$$Q_d = 80 - 2p$$

Para cualquier valor dado de p la función específica nos permite calcular el valor de Q_d. Por ejemplo:

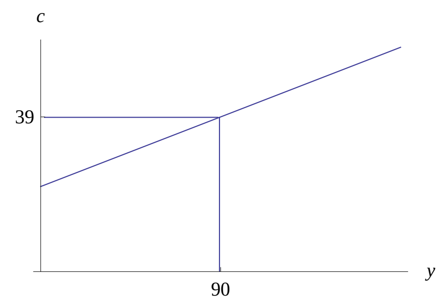

Figura 3: $C = 12 + 0.3Y$

$$
\begin{aligned}
Si\ \ p = 10\ \ entonces\ \ Q_d = 80 - 2(10) = 80 - 20 = 60 \\
Si\ \ p = 20\ \ entonces\ \ Q_d = 80 - 2(20) = 80 - 40 = 40
\end{aligned}
$$

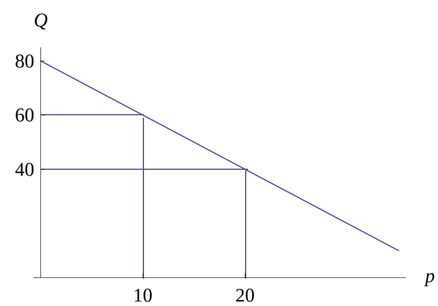

Figura 4: $Q_d = 80 - 2p$

En este caso vemos que la pendiente $m = -2$, es decir, la función es decreciente como se observa en la figura 4.

Ejemplo 2. En un modelo macroeconómico keynesiano simple sin sector gobierno y sin el comercio exterior, supone que:

$$Y = C + I \tag{1}$$

$$C = C_0 + cY \tag{2}$$

$$I = I_0 - br \tag{3}$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo y I es la inversión, exógenamente fijas. Además se tiene que $C_0 > 0$ es el consumo autónomo, $I_0 > 0$ es la inversión autónoma, y $0 < c < 1$ y $b > 0$ son los parámetros.

En este tipo de modelos macroeconómicos se busca obtener el nivel de equilibrio del ingreso nacional (Y) con respecto a la tasa de interés (r). Para obtener la ecuación del ingreso en función de la tasa de interés sustituimos la ecuación (2) y (3) en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} Y &= C_0 + cY + I_0 - br \\ Y - cY &= C_0 + I_0 - br \\ Y(1-c) &= A - br \quad \text{donde} \;\; A = C_0 + I_0 \\ Y &= \frac{A}{(1-c)} - \frac{b}{(1-c)} \cdot r \end{aligned}$$

En este modelo se tiene que la pendiente de la función es negativa y su grado de inclinación depende de los parametros b y c.

Problema 1. En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $C = 10 + 0.5Y$ e $I = 15 - 2r$.

a) Grafique la función de consumo e intérprete.

b) Grafique la función de inversión e intérprete.

c) Obtenga la función de ingreso (Y) en función de la tasa de interés (r) argumentando y graficando tu resultado.

Solución al problema 1

a) La gráfica del consumo se muestra en la figura 5 e interpretamos que si incrementa el ingreso aumenta el consumo y por lo tanto la pendiente es positiva.

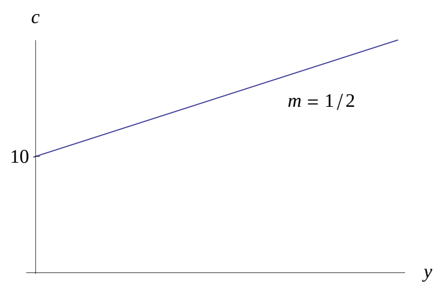

Figura 5: $C = 10 + 0.5Y$

b) La gráfica de la inversión se muestra en la figura 6 e interpretamos que si incrementa la tasa de interés disminuye la inversión y por lo tanto la pendiente es negativa.

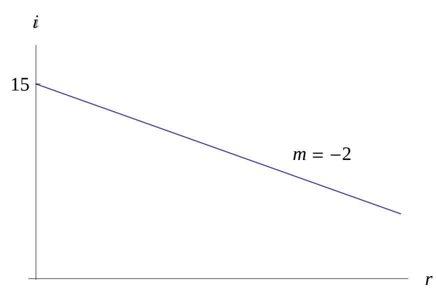

Figura 6: $I = 15 - 2r$

c) Siguiendo a la ecuación del ingreso obtenida anteriormente tenemos

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{A}{(1-c)} - \frac{b}{(1-c)} \cdot r \\
&= \frac{10+15}{(1-0.5)} - \frac{2}{(1-0.5)} \cdot r \\
Y &= 50 - 4r
\end{aligned}
$$

La gráfica del ingreso se muestra en la figura 7 e interpretamos que si incrementa la tasa de interés disminuye el ingreso y por lo tanto la pendiente es negativa.

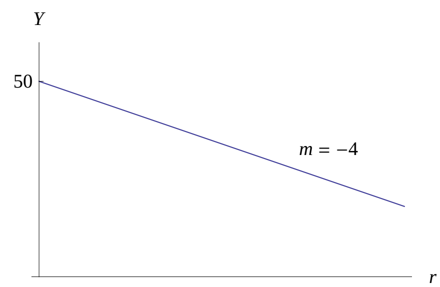

Figura 7: $Y = 50 - 4r$

TAREA 1: FUNCIONES

Trabajo individual

Resuelva los siguientes ejercicios argumentando tus resultados.

1. Considera la función $f(x) = x^2 - 1$, contesta en los espacios disponibles las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es el valor de la función si $x = -2$? ____________________

   b) ¿Cuánto vale $f(3)$? ____

   c) Grafica la función anterior.

   d) ¿Cuál es el dominio de la función? __________________________

2. La función de demanda Q_d depende del precio P y está determinada por la siguiente relación:

$$Q_d = a - bP \qquad a, b > 0$$

   Sea la siguiente función de demanda de cierto bien, contesta en los espacios disponibles las siguientes preguntas:

$$Q_d = 72 - 4P \qquad 0 \leq P \leq 18$$

   a) ¿Cuánto vale la pendiente? _________________________________

   b) Grafique esta función en el dominio especificado.

   c) ¿Qué sucede con tu gráfica si $a = 50$? _______________________

   d) ¿Qué sucede con tu gráfica si $b = 8$? ________________________

3. El consumo de las familias (C) depende de su ingreso (Y) y está determinado por la siguiente relación:

$$C = C_0 + cY \qquad 0 < c < 1$$

   Grafique la función de consumo.

$$C = 50 + \frac{1}{2}Y \qquad 0 \leq Y \leq 10$$

a) Si el ingreso incrementa de 5 a 6 unidades, ¿En cuánto incrementa el consumo? ____________________

b) Si el ingreso incrementa de 6 a 7 unidades, ¿En cuánto incrementa el consumo? ____________________

c) Si el ingreso incrementa de 7 a 8 unidades, ¿En cuánto incrementa el consumo? ____________________

d) ¿Qué conclusión observas? ____________________

4. En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $C = 4 + 0.5Y$ e $I = 2 - r$.

   a) Grafique la función de consumo e intérprete.

   b) Grafique la función de inversión e intérprete.

   c) Obtenga la función de ingreso (Y) en función de la tasa de interés (r) argumentando y graficando tu resultado.

5. Se define a las exportaciones netas (NX) como las exportaciones (X) menos las importaciones (M). En México durante todo el año 2009 las exportaciones se mantuvierón en 25 mil millones de dólares y las importaciones tuvieron el siguiente comportamiento $M = 18 + \frac{1}{2}Y$ millones de dólares, donde Y es el Producto Interno Bruto (PIB).

   a) Grafique la función de exportaciones e intérprete.

   b) Grafique la función de importaciones e intérprete.

   c) Obtenga y grafique la función de exportaciones netas (NX) en función del Producto Interno Bruto (Y).

1.2. Límites de funciones

Introducción

El concepto que marca la diferencia entre el cálculo, el álgebra y la trigonometría, es el de límite. El límite es fundamental para determinar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

1.2.1. Definición de límites

Definición 1.1. El límite de una función $f(x)$ cuando x se acerca a x_0, es el número L, el cual se le denota por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

siempre que $f(x)$ esté arbitrariamente cercana a L para toda x lo suficientemente cerca, pero diferente de x_0.

En pocas palabras, el proceso de límite consiste en examinar el comportamiento de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a un número x_0, que puede o no estar en el dominio de f.

1.2.2. Reglas de los límites

El siguiente resultado nos indica cómo calcular límites de funciones que son combinaciones aritméticas de otros cuyos límites ya se conocen.

Teorema 1.2. *Supongamos que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$*, entonces:*

- *El límite de una suma o resta de funciones:*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm M,$$

- *El límite de un producto de funciones:*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M,$$

- *El límite de un cociente de funciones:*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M},\ M \neq 0.$$

- *El límite del múltiplo constante:*

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

Ejemplo 3. Si $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, para $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

En la figura 8 se muestra la gráfica de $f(x)$. El cálculo del límite indica que cuando el dominio $x \to 1$, la imagen $f(x)$ tiende a 2. En este mismo ejemplo se utiliza un procedimiento algebraico para encontrar el mismo resultado.

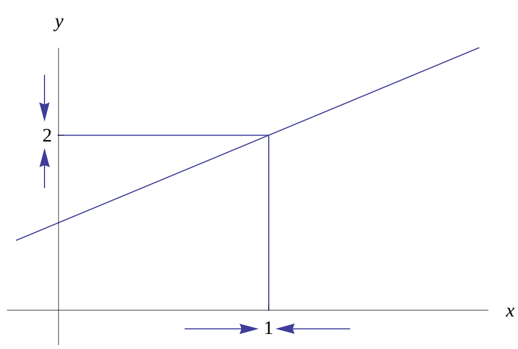

Figura 8: $\lim_{x \to 1} f \to 2$

Ejemplo 4. Si $f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x-5}$, para $x \to 5$:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+2)}{x-5} = \lim_{x \to 5}(x+2) = 7.$$

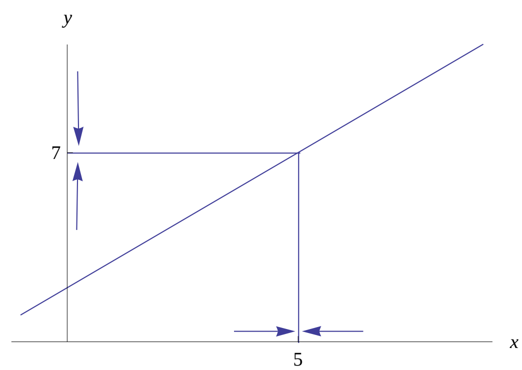

Figura 9: $\lim_{x\to 5} f \to 7$

En la figura 9 se muestra la gráfica de $f(x)$. El cálculo del límite indica que cuando el dominio $x \to 5$, la imagen $f(x)$ tiende a 7. En este mismo ejemplo se utiliza un procedimiento algebraico para encontrar el mismo resultado.

Ejemplo 5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^3+4x^2-3) &= \lim_{x\to 1} x^3 + \lim_{x\to 1} 4x^2 - \lim_{x\to 1} 3\\ &= 1^3 + 4(1)^2 - 3\\ &= 2.\end{aligned}$$

1.2.3. límites al infinito

Con frecuencia el comportamiento a **largo plazo** es un tema de interés en economía. Por ejemplo, un economista podría desear conocer la población de cierto país después de un periodo de tiempo indefinido.

En matemáticas, el símbolo infinito ∞ se utiliza para representar el crecimiento ilimitado o el resultado de tal crecimiento. He aqui las definiciones de los límites que implican infinito, que se usarán para estudiar el comportamiento **a largo plazo**.

Definición 1.3. Decimos que $f(x)$ tiene el **límite L cuando x tiende al**

infinito, y escribimos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si cuando x se aleja cada vez más del origen en dirección positiva, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L.

Se tienen los siguientes hechos básicos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \text{ y } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Los límites al infinito tienen propiedades similares a los de los límites finitos. Además, debido a que cualquier recíproco de una potencia $1/x^k$ para $k > 0$, se hace más y más pequeño en valor absoluto cuando x aumenta o disminuye sin límite.

Teorema 1.4. *Supongamos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M$*, entonces:*

- *El límite de una suma o resta de funciones:*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L \pm M,$$

- *El límite de un producto de funciones:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L \cdot M,$$

- *El límite de un cociente de funciones:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)} = \frac{L}{M},\ M \neq 0.$$

- *El límite del múltiplo constante:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

Ejemplo 6. Encuentre el $\lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)$

Solución

Para obtener intuitivamente lo que ocurre con este límite, se evalúa la función

$$f(x) = 5 + \frac{1}{x}$$

en x=0.5, 1, 5, 10, 20 y 50 y se muestran los datos en una tabla:

x	0.5	1	5	10	20	50
$f(x)$	7	6	5.2	5.1	5.05	5.02

Los valores de la función en el renglón inferior de la tabla indican que $f(x)$ se aproxima a 5 cuando x crece más y más (ver figura 10). En este ejemplo observamos que $1/x$ se hace más y más pequeño en valor absoluto cuando x aumenta.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \\ &= 5 + 0 = 5. \end{aligned}$$

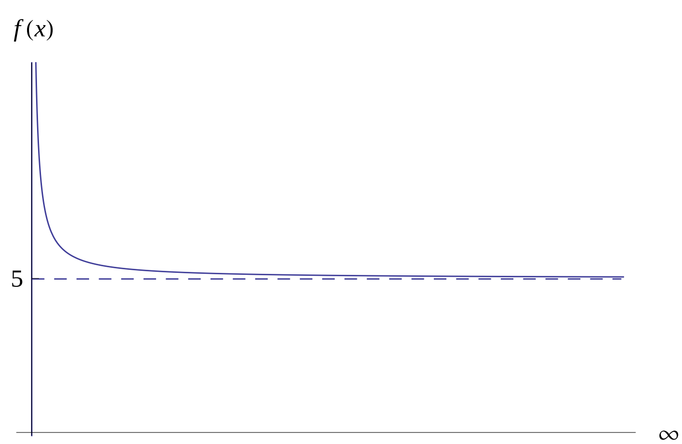

Figura 10: $\lim_{x\to\infty} f \to 5$

Ejemplo 7. Encuentre el $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x+2x^2}$

Solución

Para obtener intuitivamente lo que ocurre con este límite, se evalúa la función

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x + 2x^2}$$

en x=100, 1 000, 10 000 y 100 000 y se muestran los datos en una tabla:

x	100	1 000	10 000	100 000
$f(x)$	0.49749	0.49975	0.49997	0.49999

Los valores de la función en el renglón inferior de la tabla indican que $f(x)$ se aproxima a 0.5 cuando x crece más y más (ver figura 11). Para confirmar esta observación analíticamente, se divide cada término de la ecuación en $f(x)$ entre la potencia más alta que aparece en el denominador $1+x+x^2$; es decir, entre x^2. Esto permite encontrar el $\lim_{x\to\infty} f(x)$; aplicando las reglas del recíproco de la potencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1 + x + 2x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2/x^2}{1\,/x^2\, + x\,/x^2\, + 2x^2/x^2} \\ &= \frac{1}{0 + 0 + 2} = 0.5\end{aligned}$$

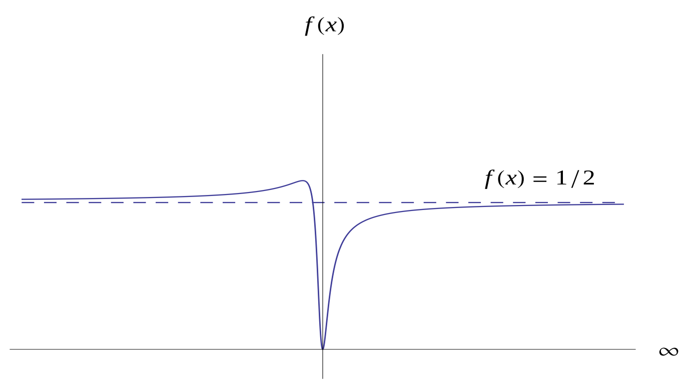

Figura 11: $\lim_{x\to\infty} f \to 0.5$

Problema 2. Una mercancía se introduce en un precio inicial de \$5 por unidad, y t semanas después el precio es:

$$p(t) = 1 + 20e^{-0.1t} - 16e^{-0.2t}$$

por unidad. Determine lo siguiente:

a) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 5 semanas después?

b) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 22 semanas después?

c) ¿Cuál es el precio de "largo plazo"($t \to \infty$)?

Solución al problema 2

a) Después de 5 semanas ($t = 5$), el precio es

$$p(5) = 1 + 20e^{-0.1(5)} - 16e^{-0.2(5)} = 7.24454$$

b) Después de 22 semanas ($t = 22$), el precio es

$$p(22) = 1 + 20e^{-0.1(22)} - 16e^{-0.2(22)} = 3.01963$$

c) Como

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} p(t) &= \lim_{t \to \infty} (1 + 20e^{-0.1t} - 16e^{-0.2t}) \\ &= 1 + 20(0) - 16(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

"**a largo plazo**", el precio tiende a \$1 por unidad. La gráfica de la función de precio unitario $p(t)$ se muestra en la figura 12.

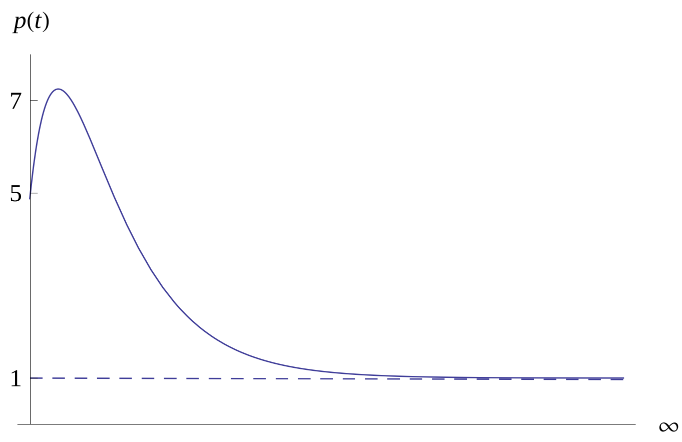

Figura 12: $\lim_{t\to\infty} p \to 1$

TAREA 2: LÍMITES

Trabajo en equipo con dos o tres integrantes.

Grafiquen en excel los siguientes límites y deduzcan el resultado. Posteriormente resuelvan algebraicamente cada uno de los ejercicios argumentando sus resultados obtenidos.

1) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$

4) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

7) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$

8) $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

9) $\lim\limits_{t\to \infty} (4-4e^{-t})$

10) $\lim\limits_{t\to \infty} (\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}e^{-\frac{1}{2}t})$

11) $\lim\limits_{t\to \infty} (5+\dfrac{1}{t})$

12) $\lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{5t^2+8t-3}{3t^2+2}$

13) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{x}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x}$

15) $\lim\limits_{t\to \infty} (5+4e^{-0.1t})$

16) $\lim\limits_{t\to \infty} (5-4e^{-0.1t})$

17) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^7-x^2+1}{2x^7+x^3+300}$

Problema 1. Una mercancía se introduce en un precio inicial de \$1 por unidad, y t semanas después el precio es:

$$p(t) = 4 - 3e^{-0.1t}$$

por unidad. Determine lo siguiente:

a) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 12 semanas después?

b) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 24 semanas después?

c) ¿Cuál es el precio de "largo plazo" $(t \to \infty)$?

d) Grafique la función de precios.

1.3. Cálculo diferencial

Introducción

Uno de los conceptos más importantes del cálculo es el de la derivada, la cual mide la razón en que cambia la función.

Las derivadas se usan para calcular la velocidad y la aceleración, estimar la razón de propagación de una enfermedad, fijar niveles de producción de manera que pueda maximizar la eficiencia y para muchas otras aplicaciones.

En esta sección continuaremos nuestro estudio, analizando aplicaciones en donde se usan las derivadas para modelar las razones a las que cambian las cosas en nuestro mundo. Hablaremos del movimiento a lo largo de una recta, y examinaremos otras aplicaciones.

1.3.1. Definición de derivada

Definición 1.5. La derivada de f en el punto a de su dominio está dada por la fórmula:

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

El número $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es $y - y_1 = m(x - x_1)$. Por tanto la ecuación de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, es:

$$y - f(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0)(x - x_0).$$

Ejemplo 8. Dada la funcíon $f(x) = 2x+1$, usemos la definición de derivada para calcular la derivada de f:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2x+2h+1-2x-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ es 2. En palabras, por una unidad que cambia el dominio la imagen cambia en dos unidades. Ver figura 13.

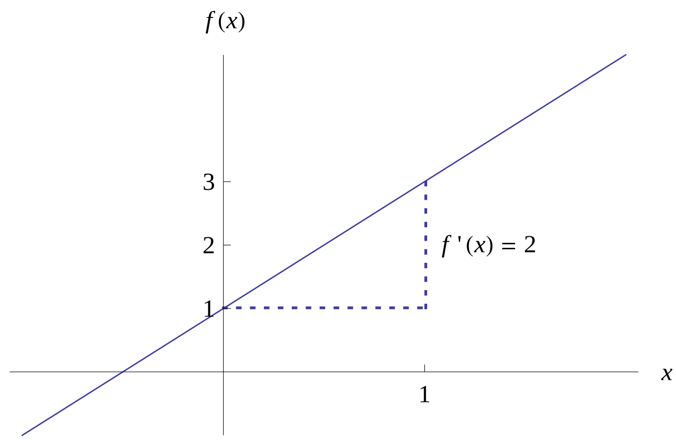

Figura 13: $f(x) = 2x + 1$

1.3.2. Reglas básicas de la derivación.

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$,
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$,
- $\frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c \cdot \frac{d}{dx}f(x)$,
- $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$,
- $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$,
- $\frac{d}{dx}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$,

Ejemplo 9. Derive el polinomio $y = x^4 + 12x$

Solución

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 12x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + 12\frac{d}{dx}(x) \\ &= 4x^3 + 12. \end{aligned}$$

Ejemplo 10. Derive el polinomio $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

Solución

$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) - 5\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5. \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Derive el producto

$$y = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} \\ &= 1 - \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 12. Derive el cociente

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Solución

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2-1}{x^2+1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)\cdot 2x-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Análisis marginal

El análisis marginal es el estudio de la razón de cambio de cantidades económicas. La **función de costo total** de un fabricante, $c = f(q)$, nos da el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal**. Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

En general, interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de producir una unidad más de un bien dado.

El análisis anterior no solo se aplica al costo, sino a otras magnitudes económicas. A continuación se presenta un resumen de lo que se entiende por ingreso marginal y utilidad marginal. Sea

$$\begin{aligned} R(x) &= \text{Ingreso por venta de } x \text{ unidades} \\ &= (\text{número de unidades vendidas})(\text{precio por unidad}) \\ C(x) &= \text{Costo de producción de } x \text{ unidades} \\ \pi(x) &= R(x) - C(x) = \text{Utilidad de producción de } x \text{ unidades} \end{aligned}$$

Llamamos a $R'(x)$ el **ingreso marginal**, a $C'(x)$ el **costo marginal** (en x), y a $\pi'(x)$ la **utilidad marginal**. Los economistas usan a menudo la palabra **marginal** de esta manera con el significado de derivada.

Problema 3. La empresa Elektra fabrica una calculadora de bolsillo programable. La gerencia determinó que el costo total diario de producción de estas calculadoras (en pesos) está dado por $c(q) = \frac{1}{5}q^2 + 4q + 27$, donde q representa las calculadoras producidas y además, que todas las q unidades se venderán, cuando el precio sea $p(q) = 75 - 3q$ pesos por unidad.

1. Encuentre el costo marginal y el ingreso marginal.
2. Utilice el costo marginal para calcular el costo de producir la novena unidad.
3. ¿Cuál es el costo real de producir la novena unidad?.
4. Utilice el ingreso marginal para calcular el ingreso derivado de la venta de la novena unidad.
5. ¿Cuál es el ingreso real de la venta de la novena unidad?.

Solución al problema 3.

1. La función de costo marginal es $C'(q) = \frac{2}{5}q + 4$. Como q unidades del artículo se venden a un precio de $p(q) = 75 - 3q$ pesos por unidad, el ingreso total es

$$R(q) = p \cdot q = (75 - 3q)q = 75q - 3q^2$$

El ingreso marginal es

$$R'(q) = 75 - 6q$$

2. El costo de producir la novena unidad es el cambio en el costo cuando q se incrementa de 8 a 9 y se puede calcular usando el costo marginal

$$C'(8) = \frac{2}{5}(8) + 4 = \frac{36}{5} = \$7.2$$

3. El costo real de producir la novena unidad es

$$C(9) - C(8) = \$7.4$$

que se aproxima razonablemente bien mediante el costo marginal $C'(8) = \$7.2$

4. El ingreso obtenido por la venta de la novena unidad se aproxima usando el ingreso marginal

$$R'(8) = 75 - 6(8) = \$27$$

5. El ingreso real obtenido por la venta de la novena unidad es

$$R(9) - R(8) = \$24$$

Análisis macroeconómico

En un modelo macroeconómico keynesiano simple sin sector gobierno y sin el comercio exterior, supone que:

$$Y = C + I \tag{4}$$

$$C = C_0 + cY \tag{5}$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo y I es la inversión, exógenamente fijas, y $C_0 > 0$ y $0 < c < 1$ son los parámetros.

La propensión marginal del consumo (c) es la tasa de cambio del consumo a medida que se incrementa el ingreso nacional, la cúal es igual a $dC/dY = c$. El multiplicador es el cambio en la tasa de la renta nacional en respuesta a un aumento de la inversión determina de manera exógena, es decir, dY/dI. El multiplicador es igual a

$$k = \frac{1}{1-c}$$

el cual es fácil derivar por diferenciación. Sustitutendo (5) en (4), tenemos

$$\begin{aligned} Y &= C_0 + cY + I \\ Y(1-c) &= C_0 + I \\ Y &= \frac{C_0 + I}{1-c} = \frac{C_0}{1-c} + \frac{I}{1-c} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1-c} = k$$

La cúal es la fórmula para el multiplicador. Este multiplicador se puede utilizar para calcular el aumento de la inversión necesarios para alcanzar un determinado incremento en el ingreso nacional.

Problema 4. En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $I = 200$ y $C = 50 + 0.75Y$. ¿Cúal es el nivel de equilibrio de Y? ¿Cúal es el aumento en I necesario para hacer que Y aumente a 1,200?.

Solución al problema 4

$$Y = C + I = 50 + 0.75Y + 200$$
$$0.25Y = 250$$
$$\text{Nivel de equilibrio } Y = 1,000$$

Para cualquier crecimiento (ΔI) en I, el crecimiento resultante (ΔY) en Y puede ser determinado por la formula

$$\Delta Y = K\Delta I$$

En este ejemplo, $b = 0.75$. Por tanto,

$$K = \frac{1}{1-0.75} = \frac{1}{0.25} = 4$$

El cambio requerido en Y es

$$\Delta Y = 1,200 - 1000 = 200 \tag{6}$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) y (3) en I,

$$200 = 4\Delta I$$
$$\Delta I = 50$$

Esto es el crecimiento requerido en I.

Multiplicadores de las demás variables exógenas en los modelos macroeconomicos más complejos pueden ser creadas usando el mismo método.

1.3.3. Tasas de crecimiento porcentual

Hemos interpretado la derivada de una función como la pendiente de la tangente a su gráfica en el punto de que se trate. En economía hay otras interpretaciones más importantes. Veamos primero cómo se puede interpretar en general la derivada como tasa de variación.

Supongamos que una cantidad y está relacionada con una cantidad x por $y = f(x)$. Si se da a x un valor a, el valor de la función es $f(a)$. Supongamos que se cambia a por $a + h$. El nuevo valor de y es $f(a + h)$ y la variación del valor de la función, cuando x varía de a a $a + h$, es $f(a + h) - f(a)$. La variación de y por unidad de variación de x tiene un nombre especial, **la tasa media de variación de f en el intervalo** $[a, a + h]$, y vale

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tomando límite cuando h tiende a 0 se obtiene la derivada de f en a. Por tanto:

La tasa instantánea de variación de f *en* a *es* $f'(a)$

Este concepto es muy importante cuando se estudian cantidades que cambian. Cuando la variable independiente es el tiempo, usamos un punto para designar derivación respecto a él. Por ejemplo, si $x(t) = t^2$, escribimos $\dot{x}(t) = 2t$.

Aveces nos interesa estudiar las tasas de crecimiento porcentual $f'(a)/f(a)$. Para ello definimos:

La tasa de crecimiento porcentual f *en* a *es* $[\dfrac{f'(a)}{f(a)}] \cdot 100$

Ejemplo 13. Pondremos un ejemplo de la regla de derivación de un producto considerando la extracción de petróleo de un pozo. Supongamos que la cantidad de petróleo que se extrae por unidad de tiempo y el precio unitario cambian con el tiempo. Definimos:

$$x(t) = \text{tasa de extracción de barriles al día en el instante}\, t$$
$$p(t) = \text{precio en dólares por barril en el instante}\, t$$

Entonces obtenemos una expresión para el ingreso $R(t)$ en dólares por día que es la siguiente:

$$R(t) = p(t)x(t) \tag{7}$$

Según la regla del producto (recordando que se usan puntos para indicar derivación con respecto al tiempo),

$$\dot{R}(t) = p(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{p}(t) \tag{8}$$

Se puede interpretar como sigue el miembro de la derecha de (8). Supongamos que $p(t)$ y $x(t)$ crecen con el tiempo por la inflación y por que la compañía petrolera propietaria del pozo aumenta la capacidad de equipo de extracción. Entonces $R(t)$ crece por dos razones. Primeramente $R(t)$ aumenta porque la extracción aumenta y debe ser proporcional al precio y es igual a $p(t)\dot{x}(t)$. También $R(t)$ crece porque el precio lo hace. Este aumento es proporcional a la cantidad extraída $x(t)$ y es igual a $\dot{p}(t)x(t)$. Su contribución a la tasa de variación de $R(t)$, debe ser la ecuación (8) , que expresa el simple hecho de que $\dot{R}(t)$, la tasa total de variación de $R(t)$, es la suma de esas dos partes.

Nótese también que la tasa proporcional de crecimiento del ingreso se calcula dividiendo (8) por (7), obteniéndose:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{p}x + p\dot{x}}{px} = \frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{x}}{x}$$

En palabras: la tasa proporcional de crecimiento del ingreso es la suma de las tasas proporcionales de variación de precio y cantidad.

Problema 5. La cantidad de extracción del petróleo es $x(t) = \frac{1}{4}t$ millones de barriles en el año 2000 y el precio de venta era $p(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5$ miles de millones de dólares en el mismo año.

a) ¿A qué razón porcentual cambio el precio del petróleo respecto al tiempo en 2008?

b) ¿A qué razón porcentual cambio la extracción del petróleo respecto al tiempo en el 2008?

c) ¿A qué razón porcentual cambio el ingreso del petróleo respecto al tiempo en 2008?

Solución al problema 5

a) La tasa de crecimiento porcentual del precio esta dada por

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{t}{\frac{1}{2}t^2 + 5}$$

Como se analiza el periodo del 2000 al 2008 $t = 8$, tenemos

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{8}{\frac{1}{2}(8)^2 + 5} = \frac{8}{37} = (0.2162) \cdot 100 = 21.62\,\%$$

b) La tasa de crecimiento porcentual de la extracción del petróleo esta dada por

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}t}$$

Como se analiza el periodo del 2000 al 2008 $t = 8$, tenemos

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}(8)} = \frac{1}{8} = (0.125) \cdot 100 = 12.5\,\%$$

c) La tasa de crecimiento porcentual del ingreso del petróleo en 2008 es

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}}{R} &= \frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{x}}{x} \\ &= 21.62\,\% + 12.5\,\% \\ &= 34.12\,\%. \end{aligned}$$

Ejemplo 14. Otra aplicación económica es como sigue. Sea $W(t)$ la tasa nominal de salario y $P(t)$ el índice de precios en el instante t. Entonces $w(t) = W(t)/P(t)$ se le llama **tasa de salario real**, si deseamos saber su tasa proporcional de variación de salario real a través del tiempo lo derivamos como con la regla del cociente:

$$\dot{w}(t) = \frac{d\left(\frac{W(t)}{P(t)}\right)}{dt} = \frac{P(t)\dot{W}(t) - W(t)\dot{P}(t)}{[P(t)]^2}$$

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{\dot{W}(t)}{W(t)} - \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}$$

La tasa proporcional de variación del salario real es igual a la diferencia entre las tasas proporcionales de variación del salario nominal y del índice de precios.

1.3.4. Regla de la cadena

Teorema 1.6. ***(La regla de la cadena)*** *Sí $g(y)$ es diferenciable en el punto $y = f(x)$ y $f(x)$ es diferenciable en x, entonces la función compuesta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es diferenciable en x, y*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

En la notación de Leibniz, si $z = g(y)$ y $y = f(x)$, entonces:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

donde dz/dy se evalúa en $y = f(x)$.

Ejemplo 15. Derive la función $f(x) = (2 - 5x)^3$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2-5x)^3 &= 3(2-5x)^2 \frac{d}{dx}(2-5x) \\ &= 3(2-5x)^2(-5) \\ &= -15(2-5x)^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 16. Derive la función $f(x) = (5x^3 - x^4)^7$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6 \frac{d}{dx}(5x^3 - x^4) \\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^3). \end{aligned}$$

1.3.5. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones exponenciales

Definición 1.7. La función definida por:

$$f(x) = b^x, (b > 0, b \neq 1)$$

se le llama **función exponencial con base b y exponente x.**

Propiedades de la función exponencial:

- El dominio de una función exponencial es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- El rango es el intervalo $(0, \infty)$.
- La función exponencial es continua en todo su dominio.

Uno de los números más útiles como base de una función exponencial es el número irracional denotado por e, donde:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71828182845...,$$

La función exponencial con base $b = e$:

$$f(x) = e^x,$$

se le conoce como **función exponencial natural**.

Propiedades de la función exponencial natural:

- Es derivable para todo número real x.
- Es estrictamente creciente para todo número real x.
- Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = f(x) = e^x$.
- La función exponencial natural cumple:

1. $e^s e^t = e^{s+t}$,
2. $\frac{e^s}{e^t} = e^{s-t}$,
3. $(e^s)^t = e^{st}$.

Para cualesquiera exponentes s y t.

Reglas básicas de la derivación exponencial.

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$,
- $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$.

Ejemplo 17. Derive la función $f(x) = e^{x^2+1}$.

Solución

Utilizando la regla de la cadena con $u = x^2 + 1$, se tiene

$$f'(x) = e^{x^2+1}[\frac{d}{dx}(x^2+1)] = 2xe^{x^2+1}$$

Ejemplo 18. Derive la función

$$f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2+1}.$$

Solución

Empleando la regla de la cadena junto con la regla del cociente, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)(-3e^{-3x}) - (2x)e^{-3x}}{(x^2+1)^2} \\ &= e^{-3x}[\frac{-3(x^2+1) - 2x}{(x^2+1)^2}] \\ &= e^{-3x}[\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2+1)^2}] \end{aligned}$$

Funciones exponenciales en economía

Supongamos que el déficit comercial actual es de \$5,345 miles de millones y una tasa de reducción continua de 6 % anual, ¿Cuánto será el déficit dentro de 10 años?

La magnitud del déficit comercial afecta la confianza en la economía de México, tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros. Se cree que para reducir su déficit comercial del gobierno debería reducir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno, o aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Supongamos que es posible reducir el déficit comercial continuamente a una tasa anual fija. Supongamos que el déficit D_0 en el instante $t = 0$, se reduce a una tasa anual r.

El déficit comercial D_0 en el instante $t = 0$ se reduce continuamente a una tasa anual r, y t años después el déficit comercial esta dado por:

$$D = D_0 e^{-rt}.$$

El déficit comercial dentro de t anõs a partir de ahora esta dado por:

$$D = 5,345e^{-0.06t},$$

en donde D esta en miles de millones. Esto significa que dentro de 10 años, el déficit será $5,345e^{-0.6} \approx \$2,933$ miles de millones.

Funciones logarítmicas

Definición 1.8. La función logarítmica de base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, se denota por $\log_b$ y se define por:

$$y = \log_b x \text{ si y sólo si } b^y = x.$$

La función logarítmica de base e se le llama **función logarítmica natural** y se usa la notación $\log_e x = \ln x$.

Propiedades de la Función Logarítmica Natural:

- La función logarítmica natural:

$$g(x) = \ln x,$$

es derivable y estrictamente creciente para todo $x > 0$. Además:

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{1}{x}.$$

- Para todo $x > 0$, $y > 0$:

    1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
    2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
    3. $\ln x^p = p \ln x$.

- La función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logarítmica natural $g(x) = \ln x$ son funciones inversas la una de la otra, es decir:

    1. $\ln e^x = x$ para toda x,
    2. $e^{\ln y} = y$ para todo $y > 0$.

Reglas básicas de la derivación logarítmica.

- $\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$ para $x > 0$,
- $\frac{d}{dx}[\ln(u)] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ejemplo 19. Derive la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Solución

Utilizando la regla de la cadena con $u = x^2 + 1$, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}[\frac{d}{dx}(x^2+1)] = \frac{2x}{x^2+1}$$

Ejemplo 20. Derive la función $f(x) = x^2 \ln(x)$.

Solución

Utilizando la regla del producto se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2[\frac{d}{dx}\ln(x)] + \ln(x)[\frac{d}{dx}(x^2)] \\ &= x^2\frac{1}{x} + \ln(x)2x \\ &= x + 2x\ln(x). \end{aligned}$$

Funciones logarítmicas en economía

Los modelos económicos suelen emplear transformaciónes logarítmicas de las variables del modelo. Una transformación logarítmica es la conversión de una variable en diferentes valores reales positivos. En esta sección se demuestran propiedades de los logarítmos y demostrar por qué ésta es una herramienta útil para los economistas.

Los modelos económicos suelen incluir relaciones no lineales. Por ejemplo, los saldos monetarios reales están representados por el dinero en circulación (M), entre el nivel de precios (P), es decir, $M^s = \frac{M}{P}$; el tipo de cambio real (S) es igual al producto del tipo de cambio nominal (E) y el nivel de precios extranjeros (P^*), dividido por el nivel de precios internos (P), es decir, $S = \frac{(EP^*)}{P}$. Las relaciones no lineales entre las variables se puede expresar como relaciones lineales entre sus logaritmos. Modelos que incluyen productos o cocientes son más difíciles de resolver que los modelos que son lineales en las variables de interés. Así que expresar estos modelos en términos de sus logaritmos es a menudo una estrategia útil para hacer un análisis más sencillo. Una advertencia, sin embargo, es que cero y números negativos no se puede expresar como logaritmos. Esto limita al conjunto de variables que se puedan expresar como una transformación logarítmica. Resolvamos los ejemplos anteriores.

Saldos monetarios reales

La ecuación de los saldos monetarios reales están representados por:

$$M^s = \frac{M}{P}$$

Aplicando la segunda propiedad de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln(M^s) &= \ln(\frac{M}{P}) \\ &= \ln(M) - \ln(P) \\ m^s &= m - p \end{aligned}$$

De esta forma ya tenemos un modelo lineal que es más fácil de trabajar dentro del análisis económico.

Tipo de cambio real

La ecuación del tipo de cambio real está representada por:

$$S = \frac{EP^*}{P}$$

Aplicando la segunda y primera propiedad de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln(S) &= \ln(\frac{EP^*}{P}) \\ s &= \ln(EP^*) - \ln P \\ &= \ln(E) + \ln(P^*) - \ln(P) \\ s &= e + p^* - p \end{aligned}$$

Nuevamente obtenemos un modelo lineal que es más fácil de trabajar dentro del análisis económico.

Función producción Cobb-Douglas

Suponga una función producción $Q = 15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$, donde Q es la producción, K es el capital y L representa al trabajo. Vamos a linealizar esta función usando logaritmos naturales para transformar esta función exponencial a una función lineal.

$$Q = 15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln(Q) &= \ln(15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}) \\ &= \ln(15) + \ln(K^{\frac{1}{5}}) + \ln(L^{\frac{4}{5}}) \\ \ln(Q) &= \ln(15) + \frac{1}{5}\ln(K) + \frac{4}{5}\ln(L) \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos una función lineal

Ahora supongamos que $K = 5$ y $L = 10$. ¿Cuál es el valor de Q?

$$\begin{aligned} \ln(Q) &= \ln(15) + \frac{1}{5}\ln(5) + \frac{4}{5}\ln(10) \\ &= 4.87200586 \\ e^{\ln(Q)} &= e^{4.87200586} \\ Q &= 130.582584 \end{aligned}$$

En este ejemplo se aplicaron las propiedades de los logaritmos.

1.3.6. Derivación de funciones trigonométricas

Las derivadas trigonométricas son relativamente fácil de derivar. A continuación se muestran las fórmulas para las derivadas del seno, coseno y tangente. Como estas fórmulas se usan con frecuencia junto con la regla de la cadena, también se indica la versión generalizada de cada fórmula.

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$,
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$,
- $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$,
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$,
- $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$,

A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran el uso de estas formulas.

Ejemplo 21. Derive la función $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)$.

Solución

Con el uso de la regla de la cadena para la función seno con $u = 3x + 1$, se obtiene

$$f'(x) = 3\cos(3x + 1)$$

Ejemplo 22. Derive la función $f(x) = \cos^2 x$.

Solución

Como $$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

se usa la regla de la cadena para potencias y la fórmula para la derivada del coseno para obtener

$$f'(x) = 2\cos x(-\operatorname{sen} x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 23. Derive la función $f(x) = \tan(1 - x^3)$.

Solución

Con el uso de la regla de la cadena para la función tangente con $u = 1 - x^3$, se obtiene

$$f'(x) = \sec^2(1 - x^3)(-3x^2) = -3x^2 \sec^2(1 - x^3)$$

1.4. Derivadas implícitas

Las funciones de la forma $y = f(x)$ expresan a y explícitamente en términos de x y pueden derivarse de acuerdo con las reglas apropiadas al tipo de función que se maneje. Sin embargo, algunas ecuaciones en las que intervienen x y y, de la forma $f(x, y) = 0$, no presentan a y explicítamente en términos de x y no pueden manipularse de manera que se logre ese propósito. Tales ecuaciones definen a y como una función de x en el sentido de que para cada valor de x hay un correspondiente valor de y que satisface la ecuación; por consiguiente, se dice que la ecuación determina a y como una función implícita de x. Es posible calcular $\frac{dy}{dx}$ a partir de tales ecuaciones mediante el método de derivación implícita: Si dos variables x e y están relacionadas por una ecuación, para hallar $\frac{dy}{dx}$:

1. Derívese cada miembro de la ecuación respecto de x, considerando a y como función de x.

2. Despéjese $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación resultante.

Ejemplo 24. Encontrar dy/dx si $x^2 + y^2 = 25$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) &= \frac{d}{dx}(25) \\
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

Problema 6. Los ahorros S de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional Y por medio de la ecuación:

$$S^2 + \frac{1}{4}Y^2 = SY + Y$$

donde S e Y están en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando $Y = 16$ y $S = 12$.

Solución al Problema 6. Diferenciando ambos miembros de la ecuación con respecto a Y y despejando $\frac{dS}{dY}$ obtenemos:

$$\frac{dS}{dY} = \frac{S + 1 - \frac{Y}{2}}{2S - Y}.$$

De la cual si $Y = 16$ y $S = 12$, la propensión marginal al ahorro es $\frac{5}{8}$.

Problema 7. Para un mercado de dinero en equilibrio se tiene que la cantidad de dinero en circulación (M^s) es igual a la demanda de dinero $(M^d = hy - \alpha i)$

$$M^s = hy - \alpha i \qquad h, \alpha > 0$$

Usando la diferenciación implícita, encontrar el efecto del aumento de la oferta de dinero en el ingreso (Y) y en la tasa de interés (i). Interprete resultados.

Solución al Problema 7.

Calculemos $\frac{dY}{dM^s}$.

$$\begin{aligned} 1 &= h\frac{dY}{dM^s} \\ \frac{dY}{dM^s} &= \frac{1}{h} > 0 \end{aligned}$$

Calculemos $\frac{di}{dM^s}$.

$$\begin{aligned} 1 &= -\alpha\frac{di}{dM^s} \\ \frac{di}{dM^s} &= -\frac{1}{\alpha} < 0 \end{aligned}$$

Según este modelo simple, el aumento de la oferta de dinero aumenta el ingreso nacional y disminuye la tasa de interés.

1.5. Derivadas sucesivas o de orden superior

En algunos problemas de Economía se requiere derivar una función más de una vez. El resultado de dos o más derivaciones sucesivas de una función, es una derivada de orden superior. La derivada de $y = f(x)$, con respecto a x es, en general una función de x, y puede derivarse con respecto a esta variable. La derivada de la primera derivada es la segunda derivada; la derivada de esta última es a su vez la tercera derivada; y así sucesivamente.

En general. La derivada de orden n de una función $y = f(x)$ se obtiene al derivar n veces sucesivamente. El resultado de esta derivación, es decir, la derivada n-ésima, se representa por:

$$\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Al igual que la derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a x representa la tasa de cambio de y cuando varía x, la segunda derivada de $y = f(x)$ con respecto a x, representa la tasa de cambio de la primera derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}(x)$ también con respecto a x.

En general, la n-ésima derivada con respecto a x de una función $y = f(x)$, representa la tasa de cambio de la $(n-1)$-ésima derivada de $y = f(x)$ cuando x varía.

Ejemplo 25. Si $y = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, encontrar todas sus derivadas de orden superior.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 18x^2 - 24x + 6, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 36x - 24, \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= 36, \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= 0.
\end{aligned}$$

Todas las derivadas sucesivas son también cero: $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$, etcétera.

TAREA 3: DERIVADAS

Trabajo individual.

Ejercicio 1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^{\frac{4}{3}} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = 2x - 5x^{\frac{1}{2}}$
3. $f(x) = (2x+3)(3x-4)$
4. $f(x) = (3x+1)(x^2-2)$
5. $g(x) = \dfrac{3}{2x+4}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$
7. $f(x) = (2x-1)^4$
8. $f(x) = (1-x)^3$
9. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$
10. $f(x) = 3e^{4x+1}$
11. $f(x) = x^2 \ln x$
12. $f(x) = \ln(2x+5)$
13. $f(x) = xe^x$
14. $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2-1)$
15. $f(x) = \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$
16. $f(x) = \cos(3x^2 - x)$

Ejercicio 2. Use diferenciación implícita para encontrar $\frac{dy}{dx}$ en las siguientes funciones.

1. $y^2 = 5x$
2. $y^2 - 2xy = 8$
3. $y + y^4 = x$
4. $x^2 + y^2 = 5$

Ejercicio 3. Si $y = 5x^5 - 3x^2 + 6x$, encontrar $\frac{d^4y}{dx^4}$.

TAREA 4: DERIVADAS APLICADAS A LA ECONOMÍA

Trabajo en equipo con dos o tres integrantes.

Problema 1. La línea aérea Aeroméxico tiene un ingreso mensual de:

$$R(x) = 8000x - 100x^2,$$

pesos, cuando el precio por pasajero es x pesos.

1. Determinar el ingreso marginal $\frac{dR}{dx}$.
2. Calcular $\frac{dR}{dx}(39)$, $\frac{dR}{dx}(40)$ y $\frac{dR}{dx}(41)$

Problema 2. En un módelo básico macroeconomico Keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $C = 60 + 0.8Y$ y $I = 820$.

(a) ¿Cuál es la propensión marginal al consumo?

(b) ¿Cuál es el nivel de equilibrio de Y?

(c) ¿Cuál es el valor del multiplicador?

(d) ¿Que incremento en la inversión (I) es requerido para un crecimiento de Y en 5,000 ?

Problema 3. En una economía cerrada (es decir, sin comercio exterior) se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{lll} Y = C + I + G & & \\ C = 0.6Y_d & Y_d = (1-t)Y & t = 0.25 \\ I = 120 & G = 210 & \end{array}$$

donde C es el gasto de los consumidores, Y_d el ingreso disponible, Y es el ingreso nacional, I es la inversión, t es la tasa de impuestos y G es el gasto de gobierno.

(a) ¿Cuál es la propensión marginal al consumo?

(b) ¿Cuál es el nivel de equilibrio de Y?

(c) ¿Cuál es el valor del multiplicador del gasto de gobierno?

(d) ¿Que incremento en el gasto de gobierno (G) es requerido para un crecimiento de Y en 700 ?

Problema 4. La ecuación que describe el salario es $W(t) = 36 + \frac{1}{8}t$ milones de personas en el año 2000 y del índice de precios es $P(t) = 26 + \frac{1}{4}t^2$ pesos en el mismo año.

1. ¿A qué razón porcentual cambio el salario respecto al tiempo en 2008?

2. ¿A qué razón porcentual cambio el índice de precios respecto al tiempo 2008?

3. ¿A qué razón porcentual cambio el salario real respecto al tiempo en 2008?

Problema 5. El concepto de crecimiento económico se refiere al incremento porcentual de una economía en un periodo de tiempo. Los valores suelen estar expresados en términos per cápita y en términos reales para tener en cuenta los efectos de las variaciones en los niveles de precios, es decir, deflactando el PIB.

Se tiene que una economía cuenta con ciertas cantidades de capital, K y cierta cantidad de fuerza de trabajo que la denotaremos con L, si queremos obtener el capital per cápita debemos dividir el capital entre el número de trabajadores, es decir:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

a) Obtenga la evolución del capital per cápita en términos porcentuales a través del tiempo.

b) Interprete el resultado obtenido.

1.6. Funciones continuas, crecientes e inversas

Las funciones continuas desempeñarán una importante función en la mayor parte del estudio del cálculo. Cualquier función $y = f(x)$ cuya gráfica puede trazarse sobre su dominio con un movimiento ininterrumpido, es decir, sin levantar el lápiz de la hoja de papel, es un ejemplo de función continua.

Definición 1.9. (Continuidad en un punto). Una función $y = f(x)$ es continua en un punto interior c de su dominio sí

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Condiciones para la continuidad:

Una función $f(x)$ es continua en $x = c$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(c)$ existe.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Una función es continua en un intervalo sí y sólo sí es continua en todos los puntos del mismo.

Teorema 1.10. *Si las funciones f y g son continuas en $x = c$, entonces las combinaciones siguientes son continuas en $x = c$*

1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$
3. f/g

Ejemplo 26. Las funciones polinomiales y racionales son continuas.

(a) Cualquier función polinomial $P(x) = a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es continua por que $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$.

(b) Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces la función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ es continua en todo punto x donde $Q(x) \neq 0$.

Funciones crecientes y decrecientes

Definición 1.11. Se dice que una función f es **creciente** en el intervalo I, si para dos números cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, donde $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función f es **decreciente** en el intervalo I, donde $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Criterios en terminos de la derivada para funciones crecientes o decrecientes:

- Si $\frac{df}{dx}(x) > 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces f es creciente en (a, b).
- Si $\frac{df}{dx}(x) < 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).
- Si $\frac{df}{dx}(x) = 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

Definición 1.12. Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Entonces se dice que f es **cóncava hacia arriva** [**cóncava hacia abajo**] en (a, b), si f' es creciente [decreciente] en (a, b).

Criterio de la derivada para funciones Concavas hacia arriba o hacia abajo:

1. Si $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) > 0$ para cada valor de x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
2. Si $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) < 0$ para cada valor de x en (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Funciones inversas y sus derivadas

Como cada valor (salida) de una función, uno a uno proviene de una y sólo una entrada, el efecto de la función puede ser invertido, enviando la salida de regreso a la entrada de la que vino bajo la función.

Definición 1.13. (**Función inversa**) Suponga que f es una fucnión inyectiva en un dominio D con rango R. La **función inversa** f^{-1} se define como

$$f^{-1}(a) = b \text{ si } f(b) = a.$$

El dominio de f^{-1} es R y su rango es D.

El proceso de pasar de f a f^{-1} puede realizarse en dos pasos.

1. Despejar x en la ecuación $y = f(x)$. Esto proporciona una fórmula $x = f^{-1}(y)$ en donde x se expresa como una función de y.

2. Intercambiar x y y para obtener una fórmula $y = f^{-1}(x)$ en donde f^{-1} se expresa en el formato convencional, con x en la variable independiente y y como la variable dependiente.

Ejemplo 27. Determinar la inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, expresada como función de x.

Solución:

1. Despejese x en términos de y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 1 \\ 2y &= x + 2 \\ x &= 2y - 2. \end{aligned}$$

2. Intercambie x y y: $\quad y = 2x - 2$

   La inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ es la función $f^{-1}(x) = 2x - 2$. Para comprobarlo, hay que revisar si las dos funciones compuestas producen la función identidad.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \\ f(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - -1 + 1 = x. \end{aligned}$$

El siguiente resultado proporciona las condiciones en las que f^{-1} es diferenciable en su dominio, que es el mismo que el rango de f.

Teorema 1.14. *Si f tiene un intervalo I como dominio y $f'(x)$ existe y nunca es cero en I, entonces f^{-1} es derivable en cada punto de su dominio. El valor de $(f^{-1})'$ en un punto b del dominio de f^{-1} es el recíproco del valor de f' en el punto $a = f^{-1}(b)$:*

$$(f^{-1})(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

o

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

Ejemplo 28. La función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ y su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ tienen derivadas $f'(x) = 2x$ y $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Por el teorema 1.14 tenemos:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Teorema 1.15. *(El teorema del valor intermedio) Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y M es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = M$*

Ejemplo 29. Sea $f(x) = x^3 + x + 2$. Puesto que $f(-2) = -8$ y $f(1) = 4$, es decir, $f(-2)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos, por el teorema 1.15, hay al menos un punto $x = c$, con $-2 < c < 1$ tal que $f(c) = 0$. (Ver figura 14)

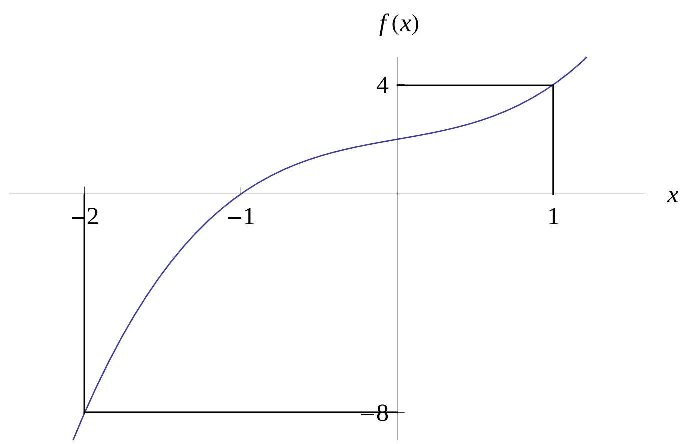

Figura 14: $f(x) = x^3 + x + 2$