CÁLCULO PARA EL ANÁLISIS ECONÓMICO

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMÍA

México, D.F., 27 de Agosto de 2010

Contenido

1. Derivadas

1.1. Funciones

Introducción.

Las funciones representan el principal objeto de análisis en el cálculo, ya que constituyen la clave para describir el mundo real en términos matemáticos. En esta sección se da el concepto de función, su graficación y las maneras de representarlas.

En muchas aplicaciones, con frecuencia existe cierta correspondencia entre dos conjuntos de números. Por ejemplo, la ganancia R que resulta de la venta de x artículos vendidos a \$1,000 cada uno es R=10x. Si conocemos el número de artículos vendidos, entonces podemos calcular la ganancia por medio de la regla R=10x. Esta regla es un ejemplo de función.

Veamos ahora la definición de función

1.1.1. Definición de función.

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales. Una **función** de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. El conjunto X es el dominio de la función. Para cada elemento x en X, el elemento correspondiente y en Y es el **valor** de la función en x, o la **imagen** de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el **rango** de la función.

La regla (o correspondencia) mencionada en la definición de función se proporciona con mayor frecuencia como una ecuación con dos variables, denotadas por lo general con x y y.

Ejemplo 1. Considere la función definida por la ecuación

$$y = 2x + 1 \qquad -1 \leq x \leq 2$$

El dominio $-1 \leq x \leq 2$ específica que el número x está restringido a los números reales entre -1 y 2. La regla $y = 2x + 1$ (ver figura 1) establece que el número x se multiplica por 2 y que después se suma 1 al resultado para obtener y. Por ejemplo:

$$Si \quad x = 1 \quad entonces \quad y = 2(1) + 1 = 3$$

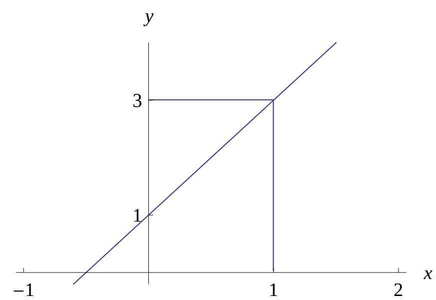

Figura 1: $y = 2x + 1$

Con frecuencia, las funciones se denotan por letras como f, F, g, G, y así sucesivamente. Si f es una función, para cada número x en su dominio la imagen correspondiente en el rango es designada por el símbolo $f(x)$, el cual se lee f de x. Nos referimos a $f(x)$ como el **valor de f en el número** x. Así, $f(x)$ es el número obtenido cuando x es conocido y se aplica la regla para f; $f(x)$ no significa f por x.

En general, cuando la regla que define a una función f está dada por una ecuación en x y y, decimos que la función tiene forma **implícita**. Si es posible despejar y en términos de x en la ecuación, entonces escribimos $y = f(x)$ y decimos que la función está dada en forma **explícita**. De hecho, por lo general escribimos: la función $y = f(x)$ para decir la función f definida por la ecuación $y = f(x)$. Por ejemplo:

FORMA IMPLÍCITA	FORMA EXPLÍCITA
$3x + y = 5$	$y = f(x) = 5 - 3x$
$x^2 - y = 6$	$y = f(x) = x^2 - 6$
$xy = 4$	$y = f(x) = \dfrac{4}{x}$

Variable Dependiente e Independiente

Considere una función $y = f(x)$. La variable x se denomina **variable independiente**, ya que puede asumir cualquier número permisible del dominio. La variable y es la **variable dependiente** porque su valor depende de x.

Las funciones pueden tener más de una variable independiente. Por ejemplo, la forma general de la función de producción es:

$$Q = f(K, L)$$

Decimos que la cantidad (Q) depende de las dos variables independientes, la variable capital (K) y el trabajo (L). La forma específica de una función nos dice exactamente cómo el valor de la variable dependiente se determina a partir de los valores de la variable independiente. Una forma específica en una función de producción puede ser:

$$Q = 4K^{0.5}L^{0.5}$$

Para cualquier valor dado de K y L la función específica nos permite calcular el valor de Q. Por ejemplo:

$$Si\ K = 1\, y\ L = 1\ entonces\ Q = 4(1)^{0.5}(1)^{0.5} = 4$$
$$Si\ K = 4\, y\ L = 4\ entonces\ Q = 4(4)^{0.5}(4)^{0.5} = 16$$

1.1.2. Funciones lineales

El dominio de la **función lineal** f consta de todos los números reales y su gráfica es una línea recta no vertical con pendiente m y ordenada al origen b.

$$f(x) = mx + b$$

Una función lineal es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$ y constante si $m = 0$. A continuación se muestran los tres casos: (figura 2)

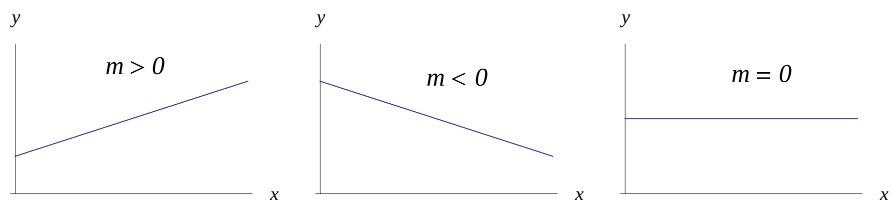

Figura 2: $f(x) = mx + b$

Funciones lineales en economía

Suponga que el gasto promedio semanal de los hogares en alimentos (C) depende de los ingresos semanales de los hogares (Y), de acuerdo con la relación:

$$C = 12 + 0.3Y$$

En este caso tenemos que la pendiente $m = 0.3$ es creciente. Si el ingreso semanal es de 90 unidades, entonces el consumo en alimentos es de 39 unidades. Lo anterior se expresa de la siguiente manera (ver figura 3):

$$Si \ \ Y = 90 \ \ entonces \ \ C = 12 + 0.3(90) = 39$$

Otro ejemplo de funciones en economía es del tipo $Q_d = f(p)$. Esta particular forma es cuando la cantidad demandada (Q_d) de una bien depende del precio (p). Una forma específica en una función de demanda puede ser:

$$Q_d = 80 - 2p$$

Para cualquier valor dado de p la función específica nos permite calcular el valor de Q_d. Por ejemplo:

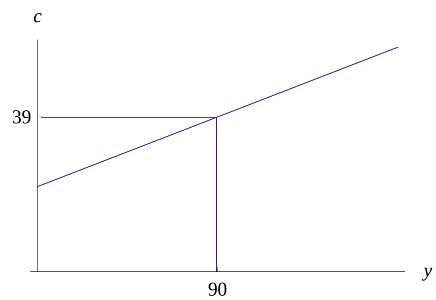

Figura 3: $C = 12 + 0.3Y$

$$\begin{aligned} Si \;\; p = 10 \;\; entonces \;\; Q_d = 80 - 2(10) = 80 - 20 = 60 \\ Si \;\; p = 20 \;\; entonces \;\; Q_d = 80 - 2(20) = 80 - 40 = 40 \end{aligned}$$

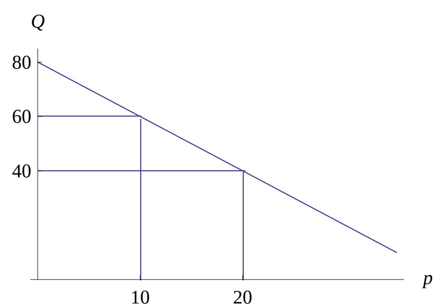

Figura 4: $Q_d = 80 - 2p$

En este caso vemos que la pendiente $m = -2$, es decir, la función es decreciente como se observa en la figura 4.

Ejemplo 2. En un modelo macroeconómico keynesiano simple sin sector gobierno y sin el comercio exterior, supone que:

$$Y = C + I \tag{1}$$

$$C = C_0 + cY \tag{2}$$

$$I = I_0 - br \tag{3}$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo y I es la inversión, exógenamente fijas. Además se tiene que $C_0 > 0$ es el consumo autónomo, $I_0 > 0$ es la inversión autónoma, y $0 < c < 1$ y $b > 0$ son los parámetros.

En este tipo de modelos macroeconómicos se busca obtener el nivel de equilibrio del ingreso nacional (Y) con respecto a la tasa de interés (r). Para obtener la ecuación del ingreso en función de la tasa de interés sustituimos la ecuación (2) y (3) en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} Y &= C_0 + cY + I_0 - br \\ Y - cY &= C_0 + I_0 - br \\ Y(1-c) &= A - br \quad \text{donde} \quad A = C_0 + I_0 \\ Y &= \frac{A}{(1-c)} - \frac{b}{(1-c)} \cdot r \end{aligned}$$

En este modelo se tiene que la pendiente de la función es negativa y su grado de inclinación depende de los parametros b y c.

Problema 1. En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $C = 10 + 0.5Y$ e $I = 15 - 2r$.

a) Grafique la función de consumo e intérprete.

b) Grafique la función de inversión e intérprete.

c) Obtenga la función de ingreso (Y) en función de la tasa de interés (r) argumentando y graficando tu resultado.

Solución al problema 1

a) La gráfica del consumo se muestra en la figura 5 e interpretamos que si incrementa el ingreso aumenta el consumo y por lo tanto la pendiente es positiva.

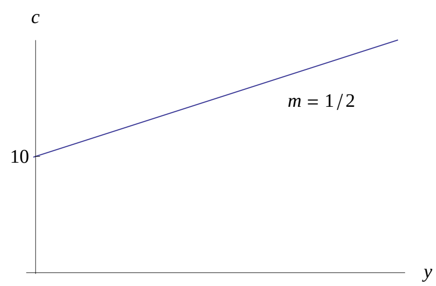

Figura 5: $C = 10 + 0.5Y$

b) La gráfica de la inversión se muestra en la figura 6 e interpretamos que si incrementa la tasa de interés disminuye la inversión y por lo tanto la pendiente es negativa.

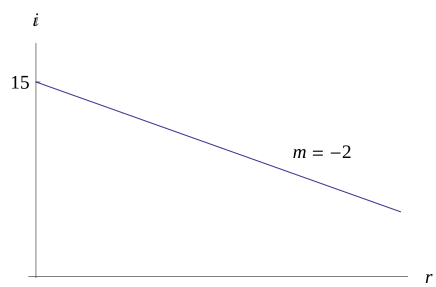

Figura 6: $I = 15 - 2r$

c) Siguiendo a la ecuación del ingreso obtenida anteriormente tenemos

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{A}{(1-c)} - \frac{b}{(1-c)} \cdot r \\
&= \frac{10+15}{(1-0.5)} - \frac{2}{(1-0.5)} \cdot r \\
Y &= 50 - 4r
\end{aligned}
$$

La gráfica del ingreso se muestra en la figura 7 e interpretamos que si incrementa la tasa de interés disminuye el ingreso y por lo tanto la pendiente es negativa.

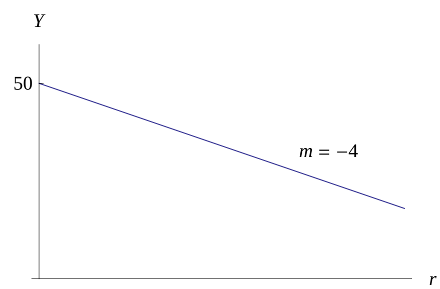

Figura 7: $Y = 50 - 4r$

TAREA 1: FUNCIONES

Trabajo individual

Resuelva los siguientes ejercicios argumentando tus resultados.

1. Considera la función $f(x) = x^2 - 1$, contesta en los espacios disponibles las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es el valor de la función si $x = -2$? ____________________

   b) ¿Cuánto vale $f(3)$? ____

   c) Grafica la función anterior.

   d) ¿Cuál es el dominio de la función? __________________________

2. La función de demanda Q_d depende del precio P y está determinada por la siguiente relación:

$$Q_d = a - bP \qquad a, b > 0$$

   Sea la siguiente función de demanda de cierto bien, contesta en los espacios disponibles las siguientes preguntas:

$$Q_d = 72 - 4P \qquad 0 \leq P \leq 18$$

   a) ¿Cuánto vale la pendiente? _________________________________

   b) Grafique esta función en el dominio especificado.

   c) ¿Qué sucede con tu gráfica si $a = 50$? _______________________

   d) ¿Qué sucede con tu gráfica si $b = 8$? ________________________

3. El consumo de las familias (C) depende de su ingreso (Y) y está determinado por la siguiente relación:

$$C = C_0 + cY \qquad 0 < c < 1$$

   Grafique la función de consumo.

$$C = 50 + \frac{1}{2}Y \qquad 0 \leq Y \leq 10$$

a) Si el ingreso incrementa de 5 a 6 unidades, ¿En cuánto incrementa el consumo? ______________________________

b) Si el ingreso incrementa de 6 a 7 unidades, ¿En cuánto incrementa el consumo? ______________________________

c) Si el ingreso incrementa de 7 a 8 unidades, ¿En cuánto incrementa el consumo? ______________________________

d) ¿Qué conclusión observas? ________________________

4. En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $C = 4 + 0.5Y$ e $I = 2 - r$.

   a) Grafique la función de consumo e intérprete.

   b) Grafique la función de inversión e intérprete.

   c) Obtenga la función de ingreso (Y) en función de la tasa de interés (r) argumentando y graficando tu resultado.

5. Se define a las exportaciones netas (NX) como las exportaciones (X) menos las importaciones (M). En México durante todo el año 2009 las exportaciones se mantuvierón en 25 mil millones de dólares y las importaciones tuvieron el siguiente comportamiento $M = 18 + \frac{1}{2}Y$ millones de dólares, donde Y es el Producto Interno Bruto (PIB).

   a) Grafique la función de exportaciones e intérprete.

   b) Grafique la función de importaciones e intérprete.

   c) Obtenga y grafique la función de exportaciones netas (NX) en función del Producto Interno Bruto (Y).

1.2. Límites de funciones

Introducción

El concepto que marca la diferencia entre el cálculo, el álgebra y la trigonometría, es el de límite. El límite es fundamental para determinar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

1.2.1. Definición de límites

Definición 1.1. El límite de una función $f(x)$ cuando x se acerca a x_0, es el número L, el cual se le denota por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

siempre que $f(x)$ esté arbitrariamente cercana a L para toda x lo suficientemente cerca, pero diferente de x_0.

En pocas palabras, el proceso de límite consiste en examinar el comportamiento de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a un número x_0, que puede o no estar en el dominio de f.

1.2.2. Reglas de los límites

El siguiente resultado nos indica cómo calcular límites de funciones que son combinaciones aritméticas de otros cuyos límites ya se conocen.

Teorema 1.2. *Supongamos que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$*, entonces:*

- *El límite de una suma o resta de funciones:*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm M,$$

- *El límite de un producto de funciones:*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M,$$

- *El límite de un cociente de funciones:*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M},\ M \neq 0.$$

- *El límite del múltiplo constante:*

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

Ejemplo 3. Si $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, para $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

En la figura 8 se muestra la gráfica de $f(x)$. El cálculo del límite indica que cuando el dominio $x \to 1$, la imagen $f(x)$ tiende a 2. En este mismo ejemplo se utiliza un procedimiento algebraico para encontrar el mismo resultado.

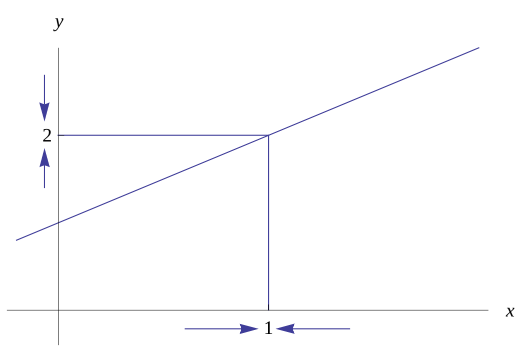

Figura 8: $\lim_{x \to 1} f \to 2$

Ejemplo 4. Si $f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x-5}$, para $x \to 5$:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+2)}{x-5} = \lim_{x \to 5}(x+2) = 7.$$

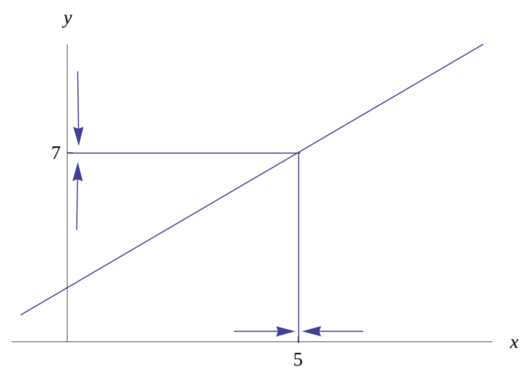

Figura 9: $\lim_{x\to 5} f \to 7$

En la figura 9 se muestra la gráfica de $f(x)$. El cálculo del límite indica que cuando el dominio $x \to 5$, la imagen $f(x)$ tiende a 7. En este mismo ejemplo se utiliza un procedimiento algebraico para encontrar el mismo resultado.

Ejemplo 5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^3 + 4x^2 - 3) &= \lim_{x\to 1} x^3 + \lim_{x\to 1} 4x^2 - \lim_{x\to 1} 3 \\ &= 1^3 + 4(1)^2 - 3 \\ &= 2.\end{aligned}$$

1.2.3. límites al infinito

Con frecuencia el comportamiento a **largo plazo** es un tema de interés en economía. Por ejemplo, un economista podría desear conocer la población de cierto país después de un periodo de tiempo indefinido.

En matemáticas, el símbolo infinito ∞ se utiliza para representar el crecimiento ilimitado o el resultado de tal crecimiento. He aqui las definiciones de los límites que implican infinito, que se usarán para estudiar el comportamiento **a largo plazo**.

Definición 1.3. Decimos que $f(x)$ tiene el **límite L cuando x tiende al**

infinito, y escribimos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si cuando x se aleja cada vez más del origen en dirección positiva, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L.

Se tienen los siguientes hechos básicos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \text{ y } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$$

Los límites al infinito tienen propiedades similares a los de los límites finitos. Además, debido a que cualquier recíproco de una potencia $1/x^k$ para $k > 0$, se hace más y más pequeño en valor absoluto cuando x aumenta o disminuye sin límite.

Teorema 1.4. *Supongamos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M$*, entonces:*

- *El límite de una suma o resta de funciones:*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L \pm M,$$

- *El límite de un producto de funciones:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L \cdot M,$$

- *El límite de un cociente de funciones:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)} = \frac{L}{M},\ M \neq 0.$$

- *El límite del múltiplo constante:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

Ejemplo 6. Encuentre el $\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{1}{x}\right)$

Solución

Para obtener intuitivamente lo que ocurre con este límite, se evalúa la función

$$f(x) = 5 + \frac{1}{x}$$

en x=0.5, 1, 5, 10, 20 y 50 y se muestran los datos en una tabla:

x	0.5	1	5	10	20	50
$f(x)$	7	6	5.2	5.1	5.05	5.02

Los valores de la función en el renglón inferior de la tabla indican que $f(x)$ se aproxima a 5 cuando x crece más y más (ver figura 10). En este ejemplo observamos que $1/x$ se hace más y más pequeño en valor absoluto cuando x aumenta.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\\ &= 5 + 0 = 5.\end{aligned}$$

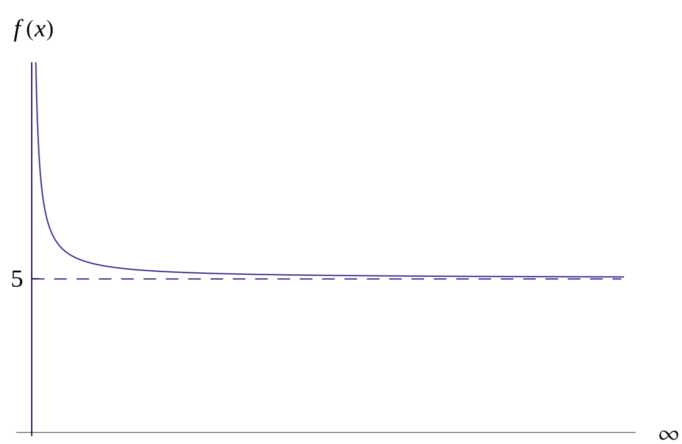

Figura 10: $\lim_{x\to\infty} f \to 5$

Ejemplo 7. Encuentre el $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x+2x^2}$

Solución

Para obtener intuitivamente lo que ocurre con este límite, se evalúa la función

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x + 2x^2}$$

en x=100, 1 000, 10 000 y 100 000 y se muestran los datos en una tabla:

x	100	1 000	10 000	100 000
$f(x)$	0.49749	0.49975	0.49997	0.49999

Los valores de la función en el renglón inferior de la tabla indican que $f(x)$ se aproxima a 0.5 cuando x crece más y más (ver figura 11). Para confirmar esta observación analíticamente, se divide cada término de la ecuación en $f(x)$ entre la potencia más alta que aparece en el denominador $1+x+x^2$; es decir, entre x^2. Esto permite encontrar el $\lim_{x\to\infty} f(x)$; aplicando las reglas del recíproco de la potencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1 + x + 2x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2/x^2}{1\,/x^2 + x\,/x^2 + 2x^2/x^2} \\ &= \frac{1}{0 + 0 + 2} = 0.5 \end{aligned}$$

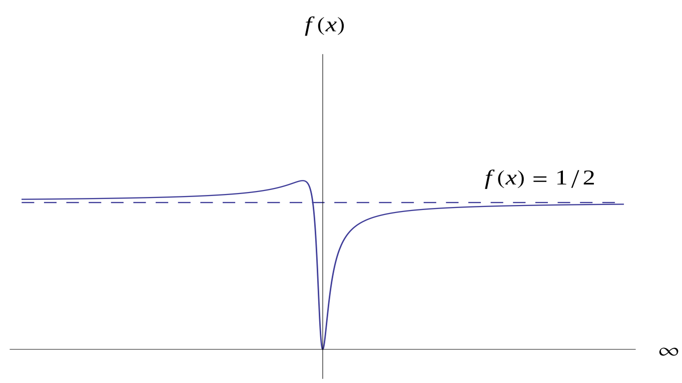

Figura 11: $\lim_{x\to\infty} f \to 0.5$

Problema 2. Una mercancía se introduce en un precio inicial de \$5 por unidad, y t semanas después el precio es:

$$p(t) = 1 + 20e^{-0.1t} - 16e^{-0.2t}$$

por unidad. Determine lo siguiente:

a) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 5 semanas después?

b) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 22 semanas después?

c) ¿Cuál es el precio de "largo plazo" $(t \to \infty)$?

Solución al problema 2

a) Después de 5 semanas $(t = 5)$, el precio es

$$p(5) = 1 + 20e^{-0.1(5)} - 16e^{-0.2(5)} = 7.24454$$

b) Después de 22 semanas $(t = 22)$, el precio es

$$p(22) = 1 + 20e^{-0.1(22)} - 16e^{-0.2(22)} = 3.01963$$

c) Como

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} p(t) &= \lim_{t\to\infty} (1 + 20e^{-0.1t} - 16e^{-0.2t}) \\ &= 1 + 20(0) - 16(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

"**a largo plazo**", el precio tiende a \$1 por unidad. La gráfica de la función de precio unitario $p(t)$ se muestra en la figura 12.

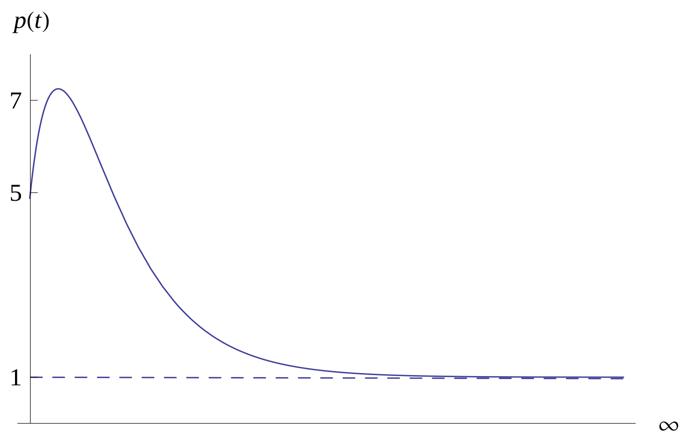

Figura 12: $\lim_{t\to\infty} p \to 1$

TAREA 2: LÍMITES

Trabajo en equipo con dos o tres integrantes.

Grafiquen en excel los siguientes límites y deduzcan el resultado. Posteriormente resuelvan algebraicamente cada uno de los ejercicios argumentando sus resultados obtenidos.

1) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$

3) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$

4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

6) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

7) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

8) $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$

9) $\lim\limits_{t \to \infty} (4 - 4e^{-t})$

10) $\lim\limits_{t \to \infty} (\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}e^{-\frac{1}{2}t})$

11) $\lim\limits_{t \to \infty} (5 + \dfrac{1}{t})$

12) $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{5t^2 + 8t - 3}{3t^2 + 2}$

13) $\lim\limits_{x \to \infty} e^x$

14) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x}$

15) $\lim\limits_{t \to \infty} (5 + 4e^{-0.1t})$

16) $\lim\limits_{t \to \infty} (5 - 4e^{-0.1t})$

17) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^7 - x^2 + 1}{2x^7 + x^3 + 300}$

Problema 1. Una mercancía se introduce en un precio inicial de \$1 por unidad, y t semanas después el precio es:

$$p(t) = 4 - 3e^{-0.1t}$$

por unidad. Determine lo siguiente:

a) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 12 semanas después?

b) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 24 semanas después?

c) ¿Cuál es el precio de "largo plazo" ($t \to \infty$)?

d) Grafique la función de precios.

1.3. Cálculo diferencial

Introducción

Uno de los conceptos más importantes del cálculo es el de la derivada, la cual mide la razón en que cambia la función.

Las derivadas se usan para calcular la velocidad y la aceleración, estimar la razón de propagación de una enfermedad, fijar niveles de producción de manera que pueda maximizar la eficiencia y para muchas otras aplicaciones.

En esta sección continuaremos nuestro estudio, analizando aplicaciones en donde se usan las derivadas para modelar las razones a las que cambian las cosas en nuestro mundo. Hablaremos del movimiento a lo largo de una recta, y examinaremos otras aplicaciones.

1.3.1. Definición de derivada

Definición 1.5. La derivada de f en el punto a de su dominio está dada por la fórmula:

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

El número $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es $y - y_1 = m(x - x_1)$. Por tanto la ecuación de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, es:

$$y - f(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0)(x - x_0).$$

Ejemplo 8. Dada la funcíon $f(x) = 2x+1$, usemos la definición de derivada para calcular la derivada de f:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+1-2x-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Por tanto, la derivada de $f(x)$ es 2. En palabras, por una unidad que cambia el dominio la imagen cambia en dos unidades. Ver figura 13.

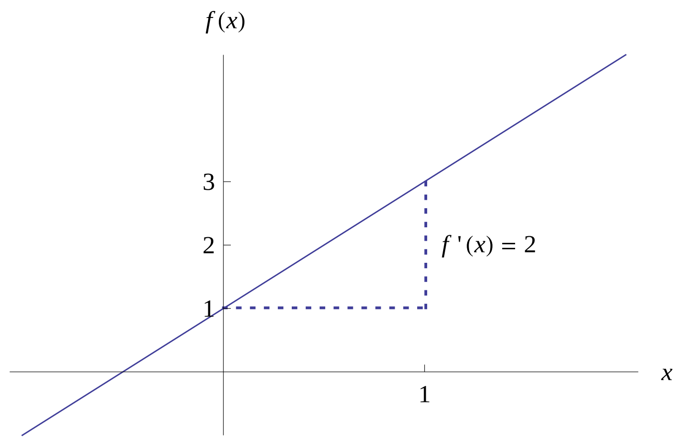

Figura 13: $f(x) = 2x + 1$

1.3.2. Reglas básicas de la derivación.

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$,
- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$,
- $\frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c \cdot \frac{d}{dx}f(x)$,
- $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$,
- $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$,
- $\frac{d}{dx}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$,

Ejemplo 9. Derive el polinomio $y = x^4 + 12x$

Solución

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 12x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) + 12\frac{d}{dx}(x) \\ &= 4x^3 + 12. \end{aligned}$$

Ejemplo 10. Derive el polinomio $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

Solución

$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) - 5\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5. \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Derive el producto

$$y = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3} \\ &= 1 - \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 12. Derive el cociente

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Solución

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x^2-1}{x^2+1} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)\cdot 2x-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{4x}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Análisis marginal

El análisis marginal es el estudio de la razón de cambio de cantidades económicas. La **función de costo total** de un fabricante, $c = f(q)$, nos da el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal**. Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

En general, interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de producir una unidad más de un bien dado.

El análisis anterior no solo se aplica al costo, sino a otras magnitudes económicas. A continuación se presenta un resumen de lo que se entiende por ingreso marginal y utilidad marginal. Sea

$$
\begin{aligned}
R(x) &= \text{Ingreso por venta de } x \text{ unidades} \\
&= (\text{número de unidades vendidas})(\text{precio por unidad}) \\
C(x) &= \text{Costo de producción de } x \text{ unidades} \\
\pi(x) &= R(x)-C(x) = \text{Utilidad de producción de } x \text{ unidades}
\end{aligned}
$$

Llamamos a $R'(x)$ el **ingreso marginal**, a $C'(x)$ el **costo marginal** (en x), y a $\pi'(x)$ la **utilidad marginal**. Los economistas usan a menudo la palabra **marginal** de esta manera con el significado de derivada.

Problema 3. La empresa Elektra fabrica una calculadora de bolsillo programable. La gerencia determinó que el costo total diario de producción de estas calculadoras (en pesos) está dado por $c(q) = \frac{1}{5}q^2 + 4q + 27$, donde q representa las calculadoras producidas y además, que todas las q unidades se venderán, cuando el precio sea $p(q) = 75 - 3q$ pesos por unidad.

1. Encuentre el costo marginal y el ingreso marginal.

2. Utilice el costo marginal para calcular el costo de producir la novena unidad.

3. ¿Cuál es el costo real de producir la novena unidad?.

4. Utilice el ingreso marginal para calcular el ingreso derivado de la venta de la novena unidad.

5. ¿Cuál es el ingreso real de la venta de la novena unidad?.

Solución al problema 3.

1. La función de costo marginal es $C'(q) = \frac{2}{5}q + 4$. Como q unidades del artículo se venden a un precio de $p(q) = 75 - 3q$ pesos por unidad, el ingreso total es

$$R(q) = p \cdot q = (75 - 3q)q = 75q - 3q^2$$

El ingreso marginal es

$$R'(q) = 75 - 6q$$

2. El costo de producir la novena unidad es el cambio en el costo cuando q se incrementa de 8 a 9 y se puede calcular usando el costo marginal

$$C'(8) = \frac{2}{5}(8) + 4 = \frac{36}{5} = \$7.2$$

3. El costo real de producir la novena unidad es

$$C(9) - C(8) = \$7.4$$

que se aproxima razonablemente bien mediante el costo marginal $C'(8) = \$7.2$

4. El ingreso obtenido por la venta de la novena unidad se aproxima usando el ingreso marginal

$$R'(8) = 75 - 6(8) = \$27$$

5. El ingreso real obtenido por la venta de la novena unidad es

$$R(9) - R(8) = \$24$$

Análisis macroeconómico

En un modelo macroeconómico keynesiano simple sin sector gobierno y sin el comercio exterior, supone que:

$$Y = C + I \tag{4}$$

$$C = C_0 + cY \tag{5}$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo y I es la inversión, exógenamente fijas, y $C_0 > 0$ y $0 < c < 1$ son los parámetros.

La propensión marginal del consumo (c) es la tasa de cambio del consumo a medida que se incrementa el ingreso nacional, la cúal es igual a $dC/dY = c$. El multiplicador es el cambio en la tasa de la renta nacional en respuesta a un aumento de la inversión determina de manera exógena, es decir, dY/dI. El multiplicador es igual a

$$k = \frac{1}{1-c}$$

el cual es fácil derivar por diferenciación. Sustitutendo (5) en (4), tenemos

$$\begin{aligned} Y &= C_0 + cY + I \\ Y(1-c) &= C_0 + I \\ Y &= \frac{C_0 + I}{1-c} = \frac{C_0}{1-c} + \frac{I}{1-c} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1-c} = k$$

La cúal es la fórmula para el multiplicador. Este multiplicador se puede utilizar para calcular el aumento de la inversión necesarios para alcanzar un determinado incremento en el ingreso nacional.

Problema 4. En un modelo básico macroeconómico keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $I = 200$ y $C = 50 + 0.75Y$. ¿Cúal es el nivel de equilibrio de Y? ¿Cúal es el aumento en I necesario para hacer que Y aumente a 1,200?.

Solución al problema 4

$$Y = C + I = 50 + 0.75Y + 200$$

$$0.25Y = 250$$

$$\text{Nivel de equilibrio } Y = 1,000$$

Para cualquier crecimiento (ΔI) en I, el crecimiento resultante (ΔY) en Y puede ser determinado por la formula

$$\Delta Y = K\Delta I$$

En este ejemplo, $b = 0.75$. Por tanto,

$$K = \frac{1}{1 - 0.75} = \frac{1}{0.25} = 4$$

El cambio requerido en Y es

$$\Delta Y = 1,200 - 1000 = 200 \tag{6}$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) y (3) en I,

$$200 = 4\Delta I$$

$$\Delta I = 50$$

Esto es el crecimiento requerido en I.

Multiplicadores de las demás variables exógenas en los modelos macroeconomicos más complejos pueden ser creadas usando el mismo método.

1.3.3. Tasas de crecimiento porcentual

Hemos interpretado la derivada de una función como la pendiente de la tangente a su gráfica en el punto de que se trate. En economía hay otras interpretaciones más importantes. Veamos primero cómo se puede interpretar en general la derivada como tasa de variación.

Supongamos que una cantidad y está relacionada con una cantidad x por $y = f(x)$. Si se da a x un valor a, el valor de la función es $f(a)$. Supongamos que se cambia a por $a + h$. El nuevo valor de y es $f(a + h)$ y la variación del valor de la función, cuando x varía de a a $a + h$, es $f(a + h) - f(a)$. La variación de y por unidad de variación de x tiene un nombre especial, **la tasa media de variación de f en el intervalo** $[a, a + h]$, y vale

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Tomando límite cuando h tiende a 0 se obtiene la derivada de f en a. Por tanto:

La tasa instantánea de variación de f *en* a *es* $f'(a)$

Este concepto es muy importante cuando se estudian cantidades que cambian. Cuando la variable independiente es el tiempo, usamos un punto para designar derivación respecto a él. Por ejemplo, si $x(t) = t^2$, escribimos $\dot{x}(t) = 2t$.

Aveces nos interesa estudiar las tasas de crecimiento porcentual $f'(a)/f(a)$. Para ello definimos:

La tasa de crecimiento porcentual f *en* a *es* $[\frac{f'(a)}{f(a)}] \cdot 100$

Ejemplo 13. Pondremos un ejemplo de la regla de derivación de un producto considerando la extracción de petróleo de un pozo. Supongamos que la cantidad de petróleo que se extrae por unidad de tiempo y el precio unitario cambian con el tiempo. Definimos:

$x(t) =$ tasa de extracción de barriles al día en el instante t

$p(t) =$ precio en dólares por barril en el instante t

Entonces obtenemos una expresión para el ingreso $R(t)$ en dólares por día que es la siguiente:

$$R(t) = p(t)x(t) \tag{7}$$

Según la regla del producto (recordando que se usan puntos para indicar derivación con respecto al tiempo),

$$\dot{R}(t) = p(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{p}(t) \tag{8}$$

Se puede interpretar como sigue el miembro de la derecha de (8). Supongamos que $p(t)$ y $x(t)$ crecen con el tiempo por la inflación y por que la compañía petrolera propietaria del pozo aumenta la capacidad de equipo de extracción. Entonces $R(t)$ crece por dos razones. Primeramente $R(t)$ aumenta porque la extracción aumenta y debe ser proporcional al precio y es igual a $p(t)\dot{x}(t)$. También $R(t)$ crece porque el precio lo hace. Este aumento es proporcional a la cantidad extraída $x(t)$ y es igual a $\dot{p}(t)x(t)$. Su contribución a la tasa de variación de $R(t)$, debe ser la ecuación (8) , que expresa el simple hecho de que $\dot{R}(t)$, la tasa total de variación de $R(t)$, es la suma de esas dos partes.

Nótese también que la tasa proporcional de crecimiento del ingreso se calcula dividiendo (8) por (7), obteniéndose:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{p}x + p\dot{x}}{px} = \frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{x}}{x}$$

En palabras: la tasa proporcional de crecimiento del ingreso es la suma de las tasas proporcionales de variación de precio y cantidad.

Problema 5. La cantidad de extracción del petróleo es $x(t) = \frac{1}{4}t$ millones de barriles en el año 2000 y el precio de venta era $p(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5$ miles de millones de dólares en el mismo año.

a) ¿A qué razón porcentual cambio el precio del petróleo respecto al tiempo en 2008?

b) ¿A qué razón porcentual cambio la extracción del petróleo respecto al tiempo en el 2008?

c) ¿A qué razón porcentual cambio el ingreso del petróleo respecto al tiempo en 2008?

Solución al problema 5

a) La tasa de crecimiento porcentual del precio esta dada por

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{t}{\frac{1}{2}t^2 + 5}$$

Como se analiza el periodo del 2000 al 2008 $t = 8$, tenemos

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{8}{\frac{1}{2}(8)^2 + 5} = \frac{8}{37} = (0.2162) \cdot 100 = 21.62\,\%$$

b) La tasa de crecimiento porcentual de la extracción del petróleo esta dada por

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}t}$$

Como se analiza el periodo del 2000 al 2008 $t = 8$, tenemos

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}(8)} = \frac{1}{8} = (0.125) \cdot 100 = 12.5\,\%$$

c) La tasa de crecimiento porcentual del ingreso del petróleo en 2008 es

$$\begin{aligned}\frac{\dot{R}}{R} &= \frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{x}}{x}\\ &= 21.62\,\% + 12.5\,\%\\ &= 34.12\,\%.\end{aligned}$$

Ejemplo 14. Otra aplicación económica es como sigue. Sea $W(t)$ la tasa nominal de salario y $P(t)$ el índice de precios en el instante t. Entonces $w(t) = W(t)/P(t)$ se le llama **tasa de salario real**, si deseamos saber su tasa proporcional de variación de salario real a través del tiempo lo derivamos como con la regla del cociente:

$$\dot{w}(t) = \frac{d\left(\frac{W(t)}{P(t)}\right)}{dt} = \frac{P(t)\dot{W}(t) - W(t)\dot{P}(t)}{[P(t)]^2}$$

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{\dot{W}(t)}{W(t)} - \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}$$

La tasa proporcional de variación del salario real es igual a la diferencia entre las tasas proporcionales de variación del salario nominal y del índice de precios.

1.3.4. Regla de la cadena

Teorema 1.6. ***(La regla de la cadena)*** *Sí $g(y)$ es diferenciable en el punto $y = f(x)$ y $f(x)$ es diferenciable en x, entonces la función compuesta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es diferenciable en x, y*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

En la notación de Leibniz, si $z = g(y)$ y $y = f(x)$, entonces:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

donde dz/dy se evalúa en $y = f(x)$.

Ejemplo 15. Derive la función $f(x) = (2 - 5x)^3$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2-5x)^3 &= 3(2-5x)^2\frac{d}{dx}(2-5x)\\ &= 3(2-5x)^2(-5)\\ &= -15(2-5x)^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 16. Derive la función $f(x) = (5x^3 - x^4)^7$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3).\end{aligned}$$

1.3.5. Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones exponenciales

Definición 1.7. La función definida por:

$$f(x) = b^x, (b > 0, b \neq 1)$$

se le llama **función exponencial con base b y exponente x.**

Propiedades de la función exponencial:

- El dominio de una función exponencial es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- El rango es el intervalo $(0, \infty)$.
- La función exponencial es continua en todo su dominio.

Uno de los números más útiles como base de una función exponencial es el número irracional denotado por e, donde:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71828182845...,$$

La función exponencial con base $b = e$:

$$f(x) = e^x,$$

se le conoce como **función exponencial natural**.

Propiedades de la función exponencial natural:

- Es derivable para todo número real x.
- Es estrictamente creciente para todo número real x.
- Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = f(x) = e^x$.
- La función exponencial natural cumple:

1. $e^s e^t = e^{s+t}$,
2. $\frac{e^s}{e^t} = e^{s-t}$,
3. $(e^s)^t = e^{st}$.

Para cualesquiera exponentes s y t.

Reglas básicas de la derivación exponencial.

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$,
- $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$.

Ejemplo 17. Derive la función $f(x) = e^{x^2+1}$.

Solución

Utilizando la regla de la cadena con $u = x^2 + 1$, se tiene

$$f'(x) = e^{x^2+1}[\frac{d}{dx}(x^2+1)] = 2xe^{x^2+1}$$

Ejemplo 18. Derive la función

$$f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2+1}.$$

Solución

Empleando la regla de la cadena junto con la regla del cociente, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)(-3e^{-3x}) - (2x)e^{-3x}}{(x^2+1)^2} \\ &= e^{-3x}[\frac{-3(x^2+1) - 2x}{(x^2+1)^2}] \\ &= e^{-3x}[\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2+1)^2}] \end{aligned}$$

Funciones exponenciales en economía

Supongamos que el déficit comercial actual es de \$5,345 miles de millones y una tasa de reducción continua de 6 % anual, ¿Cuánto será el déficit dentro de 10 años?

La magnitud del déficit comercial afecta la confianza en la economía de México, tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros. Se cree que para reducir su déficit comercial del gobierno debería reducir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno, o aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Supongamos que es posible reducir el déficit comercial continuamente a una tasa anual fija. Supongamos que el déficit D_0 en el instante $t = 0$, se reduce a una tasa anual r.

El déficit comercial D_0 en el instante $t = 0$ se reduce continuamente a una tasa anual r, y t años después el déficit comercial esta dado por:

$$D = D_0 e^{-rt}.$$

El déficit comercial dentro de t anõs a partir de ahora esta dado por:

$$D = 5,345e^{-0.06t},$$

en donde D esta en miles de millones. Esto significa que dentro de 10 años, el déficit será $5,345e^{-0.6} \approx \$2,933$ miles de millones.

Funciones logarítmicas

Definición 1.8. La función logarítmica de base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, se denota por $\log_b$ y se define por:

$$y = \log_b x \text{ si y sólo si } b^y = x.$$

La función logarítmica de base e se le llama **función logarítmica natural** y se usa la notación $\log_e x = \ln x$.

Propiedades de la Función Logarítmica Natural:

- La función logarítmica natural:

$$g(x) = \ln x,$$

es derivable y estrictamente creciente para todo $x > 0$. Además:

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{1}{x}.$$

- Para todo $x > 0$, $y > 0$:

  1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
  2. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
  3. $\ln x^p = p \ln x$.

- La función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logarítmica natural $g(x) = \ln x$ son funciones inversas la una de la otra, es decir:

  1. $\ln e^x = x$ para toda x,
  2. $e^{\ln y} = y$ para todo $y > 0$.

Reglas básicas de la derivación logarítmica.

- $\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$ para $x > 0$,
- $\frac{d}{dx}[\ln(u)] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ejemplo 19. Derive la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Solución

Utilizando la regla de la cadena con $u = x^2 + 1$, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}[\frac{d}{dx}(x^2+1)] = \frac{2x}{x^2+1}$$

Ejemplo 20. Derive la función $f(x) = x^2 \ln(x)$.

Solución

Utilizando la regla del producto se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2[\frac{d}{dx}\ln(x)] + \ln(x)[\frac{d}{dx}(x^2)] \\ &= x^2\frac{1}{x} + \ln(x)2x \\ &= x + 2x\ln(x). \end{aligned}$$

Funciones logarítmicas en economía

Los modelos económicos suelen emplear transformaciónes logarítmicas de las variables del modelo. Una transformación logarítmica es la conversión de una variable en diferentes valores reales positivos. En esta sección se demuestran propiedades de los logarítmos y demostrar por qué ésta es una herramienta útil para los economistas.

Los modelos económicos suelen incluir relaciones no lineales. Por ejemplo, los saldos monetarios reales están representados por el dinero en circulación (M), entre el nivel de precios (P), es decir, $M^s = \frac{M}{P}$; el tipo de cambio real (S) es igual al producto del tipo de cambio nominal (E) y el nivel de precios extranjeros (P^*), dividido por el nivel de precios internos (P), es decir, $S = \frac{(EP^*)}{P}$. Las relaciones no lineales entre las variables se puede expresar como relaciones lineales entre sus logaritmos. Modelos que incluyen productos o cocientes son más difíciles de resolver que los modelos que son lineales en las variables de interés. Así que expresar estos modelos en términos de sus logaritmos es a menudo una estrategia útil para hacer un análisis más sencillo. Una advertencia, sin embargo, es que cero y números negativos no se puede expresar como logaritmos. Esto limita al conjunto de variables que se puedan expresar como una transformación logarítmica. Resolvamos los ejemplos anteriores.

Saldos monetarios reales

La ecuación de los saldos monetarios reales están representados por:

$$M^s = \frac{M}{P}$$

Aplicando la segunda propiedad de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned}
\ln(M^s) &= \ln(\frac{M}{P}) \\
&= \ln(M) - \ln(P) \\
m^s &= m - p
\end{aligned}$$

De esta forma ya tenemos un modelo lineal que es más fácil de trabajar dentro del análisis económico.

Tipo de cambio real

La ecuación del tipo de cambio real está representada por:

$$S = \frac{EP^*}{P}$$

Aplicando la segunda y primera propiedad de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln(S) &= \ln(\frac{EP^*}{P}) \\ s &= \ln(EP^*) - \ln P \\ &= \ln(E) + \ln(P^*) - \ln(P) \\ s &= e + p^* - p \end{aligned}$$

Nuevamente obtenemos un modelo lineal que es más fácil de trabajar dentro del análisis económico.

Función producción Cobb-Douglas

Suponga una función producción $Q = 15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$, donde Q es la producción, K es el capital y L representa al trabajo. Vamos a linealizar esta función usando logaritmos naturales para transformar esta función exponencial a una función lineal.

$$Q = 15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln(Q) &= \ln(15K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}) \\ &= \ln(15) + \ln(K^{\frac{1}{5}}) + \ln(L^{\frac{4}{5}}) \\ \ln(Q) &= \ln(15) + \frac{1}{5}\ln(K) + \frac{4}{5}\ln(L) \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos una función lineal

Ahora supongamos que $K = 5$ y $L = 10$. ¿Cuál es el valor de Q?

$$\begin{aligned} \ln(Q) &= \ln(15) + \frac{1}{5}\ln(5) + \frac{4}{5}\ln(10) \\ &= 4.87200586 \\ e^{\ln(Q)} &= e^{4.87200586} \\ Q &= 130.582584 \end{aligned}$$

En este ejemplo se aplicaron las propiedades de los logaritmos.

1.3.6. Derivación de funciones trigonométricas

Las derivadas trigonométricas son relativamente fácil de derivar. A continuación se muestran las fórmulas para las derivadas del seno, coseno y tangente. Como estas fórmulas se usan con frecuencia junto con la regla de la cadena, también se indica la versión generalizada de cada fórmula.

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$,
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$,
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$,
- $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$,
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$,
- $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$,

A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran el uso de estas formulas.

Ejemplo 21. Derive la función $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)$.

Solución

Con el uso de la regla de la cadena para la función seno con $u = 3x + 1$, se obtiene

$$f'(x) = 3\cos(3x + 1)$$

Ejemplo 22. Derive la función $f(x) = \cos^2 x$.

Solución

Como $$\cos^2 x = (\cos x)^2$$

se usa la regla de la cadena para potencias y la fórmula para la derivada del coseno para obtener

$$f'(x) = 2\cos x(-\operatorname{sen} x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$$

Ejemplo 23. Derive la función $f(x) = \tan(1 - x^3)$.

Solución

Con el uso de la regla de la cadena para la función tangente con $u = 1 - x^3$, se obtiene

$$f'(x) = \sec^2(1 - x^3)(-3x^2) = -3x^2 \sec^2(1 - x^3)$$

1.4. Derivadas implícitas

Las funciones de la forma $y = f(x)$ expresan a y explícitamente en términos de x y pueden derivarse de acuerdo con las reglas apropiadas al tipo de función que se maneje. Sin embargo, algunas ecuaciones en las que intervienen x y y, de la forma $f(x, y) = 0$, no presentan a y explicítamente en términos de x y no pueden manipularse de manera que se logre ese propósito. Tales ecuaciones definen a y como una función de x en el sentido de que para cada valor de x hay un correspondiente valor de y que satisface la ecuación; por consiguiente, se dice que la ecuación determina a y como una función implícita de x. Es posible calcular $\frac{dy}{dx}$ a partir de tales ecuaciones mediante el método de derivación implícita: Si dos variables x e y están relacionadas por una ecuación, para hallar $\frac{dy}{dx}$:

1. Derívese cada miembro de la ecuación respecto de x, considerando a y como función de x.

2. Despéjese $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación resultante.

Ejemplo 24. Encontrar dy/dx si $x^2 + y^2 = 25$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) &= \frac{d}{dx}(25)\\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0\\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

Problema 6. Los ahorros S de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional Y por medio de la ecuación:

$$S^2 + \frac{1}{4}Y^2 = SY + Y$$

donde S e Y están en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando $Y = 16$ y $S = 12$.

Solución al Problema 6. Diferenciando ambos miembros de la ecuación con respecto a Y y despejando $\frac{dS}{dY}$ obtenemos:

$$\frac{dS}{dY} = \frac{S + 1 - \frac{Y}{2}}{2S - Y}.$$

De la cual si $Y = 16$ y $S = 12$, la propensión marginal al ahorro es $\frac{5}{8}$.

Problema 7. Para un mercado de dinero en equilibrio se tiene que la cantidad de dinero en circulación (M^s) es igual a la demanda de dinero ($M^d = hy - \alpha i$)

$$M^s = hy - \alpha i \qquad h, \alpha > 0$$

Usando la diferenciación implícita, encontrar el efecto del aumento de la oferta de dinero en el ingreso (Y) y en la tasa de interés (i). Interprete resultados.

Solución al Problema 7.

Calculemos $\frac{dY}{dM^s}$.

$$\begin{aligned} 1 &= h\frac{dY}{dM^s} \\ \frac{dY}{dM^s} &= \frac{1}{h} > 0 \end{aligned}$$

Calculemos $\frac{di}{dM^s}$.

$$\begin{aligned} 1 &= -\alpha\frac{di}{dM^s} \\ \frac{di}{dM^s} &= -\frac{1}{\alpha} < 0 \end{aligned}$$

Según este modelo simple, el aumento de la oferta de dinero aumenta el ingreso nacional y disminuye la tasa de interés.

1.5. Derivadas sucesivas o de orden superior

En algunos problemas de Economía se requiere derivar una función más de una vez. El resultado de dos o más derivaciones sucesivas de una función, es una derivada de orden superior. La derivada de $y = f(x)$, con respecto a x es, en general una función de x, y puede derivarse con respecto a esta variable. La derivada de la primera derivada es la segunda derivada; la derivada de esta última es a su vez la tercera derivada; y así sucesivamente.

En general. La derivada de orden n de una función $y = f(x)$ se obtiene al derivar n veces sucesivamente. El resultado de esta derivación, es decir, la derivada n-ésima, se representa por:

$$\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Al igual que la derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a x representa la tasa de cambio de y cuando varía x, la segunda derivada de $y = f(x)$ con respecto a x, representa la tasa de cambio de la primera derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}(x)$ también con respecto a x.

En general, la n-ésima derivada con respecto a x de una función $y = f(x)$, representa la tasa de cambio de la $(n-1)$-ésima derivada de $y = f(x)$ cuando x varía.

Ejemplo 25. Si $y = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, encontrar todas sus derivadas de orden superior.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 18x^2 - 24x + 6,\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 36x - 24,\\
\frac{d^3y}{dx^3} &= 36,\\
\frac{d^4y}{dx^4} &= 0.
\end{aligned}$$

Todas las derivadas sucesivas son también cero: $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$, etcétera.

TAREA 3: DERIVADAS

Trabajo individual.

Ejercicio 1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^{\frac{4}{3}} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = 2x - 5x^{\frac{1}{2}}$
3. $f(x) = (2x+3)(3x-4)$
4. $f(x) = (3x+1)(x^2-2)$
5. $g(x) = \dfrac{3}{2x+4}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$
7. $f(x) = (2x-1)^4$
8. $f(x) = (1-x)^3$
9. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$
10. $f(x) = 3e^{4x+1}$
11. $f(x) = x^2 \ln x$
12. $f(x) = \ln(2x+5)$
13. $f(x) = xe^x$
14. $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2-1)$
15. $f(x) = \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$
16. $f(x) = \cos(3x^2 - x)$

Ejercicio 2. Use diferenciación implícita para encontrar $\frac{dy}{dx}$ en las siguientes funciones.

1. $y^2 = 5x$
2. $y^2 - 2xy = 8$
3. $y + y^4 = x$
4. $x^2 + y^2 = 5$

Ejercicio 3. Si $y = 5x^5 - 3x^2 + 6x$, encontrar $\frac{d^4y}{dx^4}$.

TAREA 4: DERIVADAS APLICADAS A LA ECONOMÍA

Trabajo en equipo con dos o tres integrantes.

Ejercicio 1. Graficar las siguientes funciones de consumo e inversión, y posteriormente obtener las respectivas derivadas, interpretando los resultados.

a) Sea $C = 10 + \frac{1}{2}Y$

Donde:

$Y = Ingreso\ (PIB)$

$C = Consumo$

Obtenga $\frac{dC}{dY}$

b) Sea $I = 15 - 2r$

Donde:

$I = Inversión$

$r = Tasa\ de\ Interés$

Obtenga $\frac{dI}{dr}$

Problema 1. La línea aérea Aeroméxico tiene un ingreso mensual de:

$$R(x) = 8000x - 100x^2,$$

pesos, cuando el precio por pasajero es x pesos.

1. Determinar el ingreso marginal $\frac{dR}{dx}$.
2. Calcular $\frac{dR}{dx}(39)$, $\frac{dR}{dx}(40)$ y $\frac{dR}{dx}(41)$

Problema 2. En un módelo básico macroeconomico Keynesiano se supone que $Y = C + I$, donde $C = 60 + 0.8Y$ y $I = 820$.

(a) ¿Cuál es la propensión marginal al consumo?

(b) ¿Cuál es el nivel de equilibrio de Y?

(c) ¿Cuál es el valor del multiplicador?

(d) ¿Que incremento en la inversión (I) es requerido para un crecimiento de Y en 5,000 ?

Problema 3. En una economía cerrada (es decir, sin comercio exterior) se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{lll} Y = C + I + G & & \\ C = 0.6Y_d & Y_d = (1-t)Y & t = 0.25 \\ I = 120 & G = 210 & \end{array}$$

donde C es el gasto de los consumidores, Y_d el ingreso disponible, Y es el ingreso nacional, I es la inversión, t es la tasa de impuestos y G es el gasto de gobierno.

(a) ¿Cuál es la propensión marginal al consumo?

(b) ¿Cuál es el nivel de equilibrio de Y?

(c) ¿Cuál es el valor del multiplicador del gasto de gobierno?

(d) ¿Que incremento en el gasto de gobierno (G) es requerido para un crecimiento de Y en 700 ?

Problema 4. La ecuación que describe el salario es $W(t) = 36 + \frac{1}{8}t$ milones de personas en el año 2000 y del índice de precios es $P(t) = 26 + \frac{1}{4}t^2$ pesos en el mismo año.

1. ¿A qué razón porcentual cambio el salario respecto al tiempo en 2008?

2. ¿A qué razón porcentual cambio el índice de precios respecto al tiempo 2008?

3. ¿A qué razón porcentual cambio el salario real respecto al tiempo en 2008?

Problema 5. El concepto de crecimiento económico se refiere al incremento porcentual de una economía en un periodo de tiempo. Los valores suelen estar expresados en términos per cápita y en términos reales para tener en cuenta los efectos de las variaciones en los niveles de precios, es decir, deflactando el PIB.

Se tiene que una economía cuenta con ciertas cantidades de capital, K y cierta cantidad de fuerza de trabajo que la denotaremos con L, si queremos obtener el capital per cápita debemos dividir el capital entre el número de trabajadores, es decir:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

a) Obtenga la evolución del capital per cápita en términos porcentuales a través del tiempo.

b) Interprete el resultado obtenido.

1.6. Funciones continuas, crecientes e inversas

Las funciones continuas desempeñarán una importante función en la mayor parte del estudio del cálculo. Cualquier función $y = f(x)$ cuya gráfica puede trazarse sobre su dominio con un movimiento ininterrumpido, es decir, sin levantar el lápiz de la hoja de papel, es un ejemplo de función continua.

Definición 1.9. (Continuidad en un punto). Una función $y = f(x)$ es continua en un punto interior c de su dominio sí

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Condiciones para la continuidad:

Una función $f(x)$ es continua en $x = c$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(c)$ existe.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Una función es continua en un intervalo sí y sólo sí es continua en todos los puntos del mismo.

Teorema 1.10. *Si las funciones f y g son continuas en $x = c$, entonces las combinaciones siguientes son continuas en $x = c$*

1. $f \pm g$

2. $f \cdot g$

3. f/g

Ejemplo 26. Las funciones polinomiales y racionales son continuas.

(a) Cualquier función polinomial $P(x) = a_x x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es continua por que $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$.

(b) Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces la función racional $R(x) = P(x)/Q(x)$ es continua en todo punto x donde $Q(x) \neq 0$.

Funciones crecientes y decrecientes

Definición 1.11. Se dice que una función f es **creciente** en el intervalo I, si para dos números cualesquiera $x_1, x_2 \in I$, donde $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función f es **decreciente** en el intervalo I, donde $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Criterios en terminos de la derivada para funciones crecientes o decrecientes:

- Si $\frac{df}{dx}(x) > 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces f es creciente en (a, b).
- Si $\frac{df}{dx}(x) < 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).
- Si $\frac{df}{dx}(x) = 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

Definición 1.12. Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Entonces se dice que f es **cóncava hacia arriva** [**cóncava hacia abajo**] en (a, b), si f' es creciente [decreciente] en (a, b).

Criterio de la derivada para funciones Concavas hacia arriba o hacia abajo:

1. Si $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) > 0$ para cada valor de x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).
2. Si $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) < 0$ para cada valor de x en (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Funciones inversas y sus derivadas

Como cada valor (salida) de una función, uno a uno proviene de una y sólo una entrada, el efecto de la función puede ser invertido, enviando la salida de regreso a la entrada de la que vino bajo la función.

Definición 1.13. (**Función inversa**) Suponga que f es una fucnión inyectiva en un dominio D con rango R. La **función inversa** f^{-1} se define como

$$f^{-1}(a) = b \text{ si } f(b) = a.$$

El dominio de f^{-1} es R y su rango es D.

El proceso de pasar de f a f^{-1} puede realizarse en dos pasos.

1. Despejar x en la ecuación $y = f(x)$. Esto proporciona una fórmula $x = f^{-1}(y)$ en donde x se expresa como una función de y.

2. Intercambiar x y y para obtener una fórmula $y = f^{-1}(x)$ en donde f^{-1} se expresa en el formato convencional, con x en la variable independiente y y como la variable dependiente.

Ejemplo 27. Determinar la inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, expresada como función de x.

Solución:

1. Despejese x en términos de y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x + 1 \\ 2y &= x + 2 \\ x &= 2y - 2. \end{aligned}$$

2. Intercambie x y y: $y = 2x - 2$

   La inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ es la función $f^{-1}(x) = 2x - 2$. Para comprobarlo, hay que revisar si las dos funciones compuestas producen la función identidad.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \\ f(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - -1 + 1 = x. \end{aligned}$$

El siguiente resultado proporciona las condiciones en las que f^{-1} es diferenciable en su dominio, que es el mismo que el rango de f.

Teorema 1.14. *Si f tiene un intervalo I como dominio y $f'(x)$ existe y nunca es cero en I, entonces f^{-1} es derivable en cada punto de su dominio. El valor de $(f^{-1})'$ en un punto b del dominio de f^{-1} es el recíproco del valor de f' en el punto $a = f^{-1}(b)$:*

$$(f^{-1})(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

o

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

Ejemplo 28. La función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ y su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ tienen derivadas $f'(x) = 2x$ y $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Por el teorema 1.14 tenemos:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Teorema 1.15. *(El teorema del valor intermedio) Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y M es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = M$*

Ejemplo 29. Sea $f(x) = x^3 + x + 2$. Puesto que $f(-2) = -8$ y $f(1) = 4$, es decir, $f(-2)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos, por el teorema 1.15, hay al menos un punto $x = c$, con $-2 < c < 1$ tal que $f(c) = 0$. (Ver figura 14)

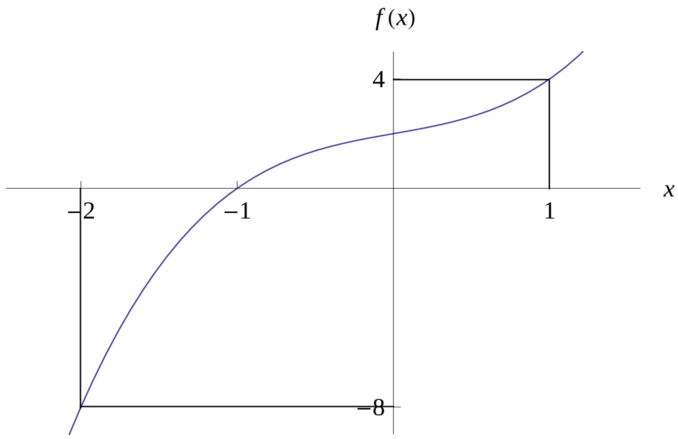

Figura 14: $f(x) = x^3 + x + 2$

2. Optimización libre con una variable

2.1. Máximos y mínimos relativos y absolutos

Introducción

En esta sección resolveremos problemas que impliquen maximizar o minimizar una cantidad. Por ejemplo, podríamos tener que maximizar una ganancia o minimizar un costo. La parte crucial consiste en expresar la cantidad que se debe maximizar o minimizar como función de alguna variable contenida en el problema. Luego diferenciamos y probamos los valores críticos resultantes. Para esto pueden usarse las pruebas de la primera o de la segunda derivada, aunque puede ser obvio por la naturaleza si un valor crítico representa o no una respuesta apropiada. Como nuestro interés estriba en los máximos y mínimos absolutos, a veces tendremos que examinar los puntos extremos del dominio de la función.

2.1.1. Método analítico

Definición 2.1. Una función f tiene un **máximo absoluto** en $x = x_0$, si $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de f. El máximo absoluto es $f(x_0)$. Una función f tiene un **mínimo absoluto** en $x = x_0$, si $f(x_0) \leq f(x)$, para toda x en el dominio de f. El mínimo absoluto es $f(x_0)$.

Los valores máximo y mínimo absoluto se llaman **extremos absolutos**. Los extremos absolutos también suelen denominarse extremos **globales**, para distinguirlos de los extremos locales, que se definen a continuación.

Definición 2.2. Una función f tiene un **máximo relativo** en $x = x_0$, si existe un intervalo abierto que contenga a x_0, sobre el cual $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo. El máximo relativo es $f(x_0)$. Una función tiene un **mínimo relativo** en $x = x_0$, si existe un intervalo abierto que contenga a x_0, sobre el cual $f(x_0) \leq f(x)$, para toda x en el intervalo. El mínimo relativo es $f(x_0)$.

Cuando aludamos a un máximo o un mínimo relativo lo llamaremos a cada uno extremo relativo.

Definición 2.3. Si x_0 está en el dominio de f y $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$ o $\frac{df}{dx}(x_0)$ no está definida, entonces x_0 se denomina valor crítico de f. Si x_0 es un **valor crítico** de f, entonces el punto $(x_0, f(x_0)$ se le llama **punto crítico**.

2.2. Criterios de la primera y segunda derivada

Criterio de la derivada para hallar Máximos y Mínimos:

1er paso. Calcular $\frac{df}{dx}(x)$.

2o. paso. Determinar los valores de x en que $\frac{df}{dx}(x) = 0$ o no está definida (estos valores incluyen valores críticos y puntos de discontinuidad).

3er. paso. Calcular $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$.

4o. paso. Evaluar $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ para cada valor crítico x_0. Entonces

i) Si $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo reativo en x_0.

ii) Si $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

iii) Si $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = 0$, entonces el criterio no es concluyente.

Definición 2.4. Una función f tiene un **punto de inflexión** cuando $x = x_0$, si y sólo si f es continua en x_0, y f cambia de concavidad en x_0.

Ejemplo 30. Encontar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ en $[-3, 1]$

Solución:

1er paso. Calculemos $\frac{df}{dx}(x)$.

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 6x$$

2o. paso. Determinemos los valores de x en que $\frac{df}{dx}(x) = 0$

$$\frac{df}{dx} = 0$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x+2) = 0$$

Resolviendo las ecuaciones $3x = 0$ y $x+2 = 0$, tenemos que los valores críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$.

3er. paso. Hallemos la segunda derivada

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = 6x + 6.$$

4o. paso. Evaluemos $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ en cada valor crítico. Entonces

$$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 6(0) + 6$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 6$$

Por lo que $x_1 = 0$ es la abscisa de un mínimo.

$$\frac{d^2f}{dx^2}(-2) = 6(-2) + 6$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}(-2) = -6$$

En consecuencia el punto $x_2 = -2$ es la abscisa de un máximo.

En conclusión para encontrar los valores que corresponden al máximo y al mínimo se deben realizar varias sustituciones en la función original:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

Para $x_1 = 0$ se tiene

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 2$$
$$f(0) = -2$$

Para $x_2 = -2$ se tiene

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2$$
$$f(-2) = 2$$

Por lo que el máximo es el punto (-2,2) y el mínimo es el punto (0,-2) como se muestra en la figura 15.

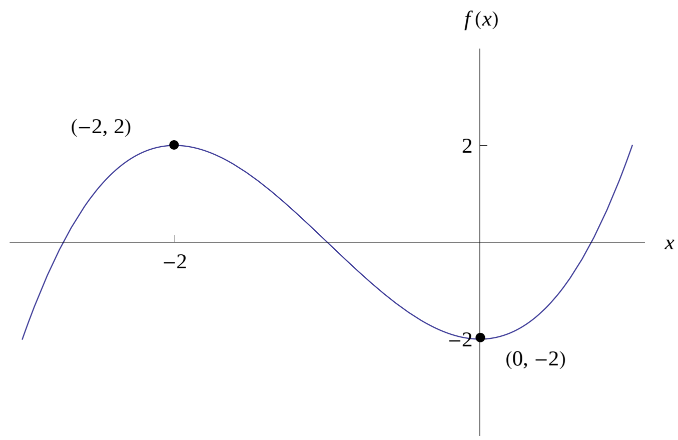

Figura 15: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

Ejemplo 31. Encontar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ en $[-3, 3]$.

Solución:

1er paso. Calculemos $\frac{df}{dx}(x)$.

$$\frac{df}{dx}(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

2o. paso. Determinemos los valores de x en que $\frac{df}{dx}(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= 0 \\ 6x^2 + 6x - 12 &= 0 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones $x + 2 = 0$ y $x - 1 = 0$, tenemos que los valores críticos son $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$.

3er. paso. Hallemos la segunda derivada

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = 12x + 6$$

4o. paso. Evaluemos $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ en cada valor crítico. Entonces

$$\frac{d^2f}{dx^2}(-2) = 12(-2) + 6$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}(-2) = -18$$

Por lo que $x_1 = -2$ es la abscisa de un máximo.

$$\frac{d^2f}{dx^2}(1) = 12(1) + 6$$
$$\frac{d^2f}{dx^2}(1) = 18$$

En consecuencia el punto $x_2 = -2$ es la abscisa de un mínimo.

En conclusión para encontrar los valores que corresponden al máximo y al mínimo se deben realizar varias sustituciones en la función original:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$$

Para $x_1 = -2$ se tiene

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) - 7$$
$$f(-2) = 13$$

Para $x_2 = 1$ se tiene

$$f(1) = 2 + 3 - 12 - 7$$
$$f(1) = -14$$

Por lo que el máximo relativo es el punto(-2,13) y el mínimo relativo es el punto (1,-14). Como referencia, se traza la gráfica de f en la figura 16.

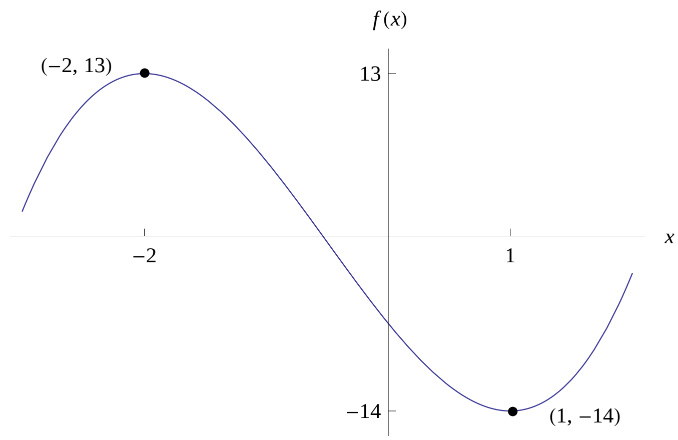

Figura 16: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

Problema 8. Un monopolista tiene una función de demanda inversa $p(q) = 100 - q$. La función de costo total es $C = 25q$.

1. ¿Cuál es la cantidad y el precio que maximiza la utilidad?
2. Hallar el ingreso y el costo marginal.
3. Gráficar conjuntamente las funciones del ingreso, utilidad y costo.
4. Gráficar conjuntamente las funciones del precio, ingreso marginal y costo marginal.

Solución al problema 8.

1. La función del ingreso del monopolista es

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (100 - q)q \\ &= 100q - q^2 \end{aligned}$$

La función de utilidad es

$$\begin{aligned}\pi(q) &= R(q) - C(q)\\ &= 100q - q^2 - 25q\\ &= 75q - q^2\end{aligned}$$

Derivando la función de utilidad obtenemos

$$\begin{aligned}\pi'(q) &= 75 - 2q\\ \pi'(q) &= 0\\ q &= 37.5\end{aligned}$$

Para probar que este punto es un máximo, obtenemos la segunda derivada de la función de la utilidad.

$$\pi''(q) = -2 < 0$$

De acuerdo con el criterio de la segunda derivada este punto es un máximo. Para determinar el precio y la utilidad hacemos:

$$\begin{aligned}p(q) &= 100 - 37.5 = \$62.50\\ \pi(q) &= 75(37.5) - (37.5)^2 = \$1,406.25\end{aligned}$$

2. El ingreso y costo marginal son respectivamente

$$\begin{aligned}R'(q) &= 100 - 2q\\ C'(q) &= 25\end{aligned}$$

Si igualamos el ingreso marginal al costo marginal obtenemos la cantidad que maximiza la utilidad

$$\begin{aligned}R'(q) &= C'(q)\\ 100 - 2q &= 25\\ 75 &= 2q\\ q &= 37.5\end{aligned}$$

3. Gráfica del ingreso, utilidad y costo.

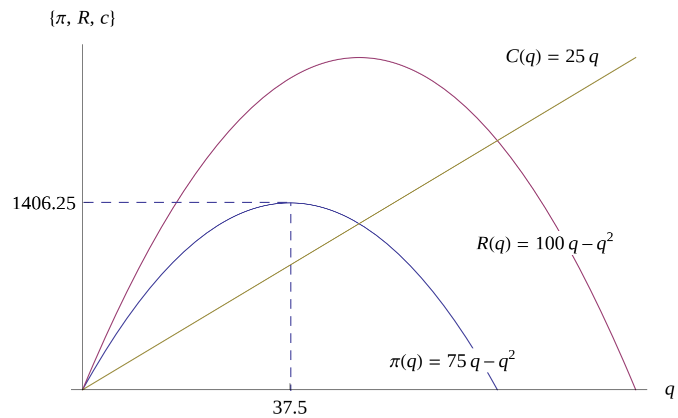

Figura 17: $R(q), \pi(q), C(q)$

4. Gráfica del precio, ingreso marginal y costo marginal.

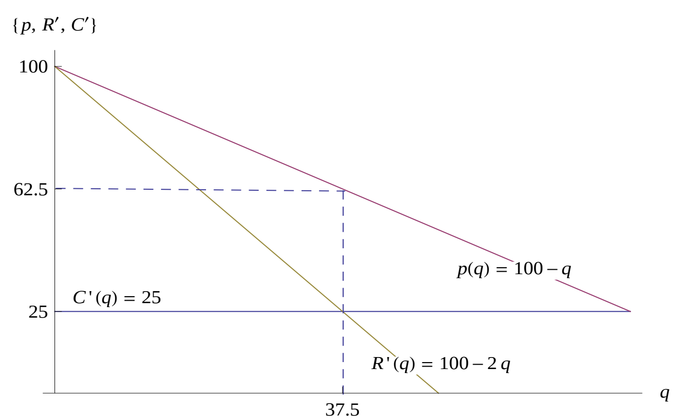

Figura 18: $p(q), C'(q), R'(q)$

Problema 9. La empresa de cablevisión tiene actualmente $100,000$ suscriptores que pagan una couta mensual de \$40 pesos. Una encuesta reveló que se tendrían 1000 suscriptores más por cada \$0.25 de disminución en la cuota.

¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían entonces?

Solución del problema 9. Sea x el número de disminuciones de \$0.25. La couta mensual es entonces de 40 - 0.25x, donde $0 \leq x \leq 160$ y el número de suscriptores nuevos es $1000x$. Por lo tanto, el número total de suscriptores es $100,000 + 1000x$. Entonces queremos maximizar el ingreso, el cuál esta dado por:

$$\begin{aligned} r &= (\text{número de suscriptores})(\text{couta por suscriptor}) \\ &= (100,000 + 1000x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(100 + x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(4000 + 15x - 0.25x^2). \end{aligned}$$

Haciendo $\frac{dr}{dx} = 0$ y despejamos a x, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx} = 1000(15 - 0.5x) &= 0 \\ &= 30. \end{aligned}$$

Como el dominio de r es el intervalo cerrado $[0, 160]$, el valor máximo absoluto de r debe ocurrir en $x = 30$ o en los puntos extremos del intervalo. Ahora calculamos r en estos tres puntos:

1. Si $x = 0$, entonces $r = 4,000,000$;
2. Si $x = 30$, entonces $r = 4,225,000$;
3. Si $x = 160$, entonces $r = 0$.

De esto se sigue que el ingreso máximo ocurre cuando $x = 30$. Esto corresponde a 30 disminuciones de \$0.25, para una disminución total de \$7.5; esto es la couta mensual \$32.50. El número de suscriptores con esa couta son 100,000 + 30(1000) = 130,000.

Problema 10. Una empresa tiene una función dada por $q(L) = aL - bL^2$, donde L es el número de trabajadores empleados por la empresa y $a, b > 0$. El producto de la empresa se vende a un precio de p, y el salario promedio de un trabajador es w. Encontrar el número de trabajadores que maximiza el beneficio de la empresa. Demostrar que el beneficio es, en efecto, un máximo.

Solución al Problema 10.

Expresamos la ganancia como la diferencia entre los ingresos totales y el costo total

$$\begin{aligned}\pi(L) &= p(aL - bL^2) - wL \\ \pi'(L) &= ap - 2bpL - w = 0 \qquad \pi''(L) = -2bp < 0 \text{ implica un máximo} \\ L^* &= \frac{ap - w}{2bp}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número óptimo de trabajadores y el salario promedio se ven relacionados, como dicta la lógica económica.

Problema 11. Una empresa tiene una función de producción Cobb-Douglas $q = 10K^{\frac{3}{5}}L^{\frac{2}{5}}$, y vende sus productos a un precio de 30. La empresa opera en el corto plazo con un número fijo de máquinas en 32. Buscar el máximo beneficio de la empresa, si se sabe que el precio de una máquina es de 120 y el salario de los trabajadores es de 15 unidades.

Solución al Problema 11. Restando el costo total de capital y el trabajo de los ingresos totales da la ecuación de beneficios:

$$\begin{aligned}\pi = pq - rK - wL &= 30(10)32^{\frac{3}{5}}L^{\frac{2}{5}} - 120(32) - 15L \\ \pi(L) &= 300(32)^{\frac{3}{5}}L^{\frac{2}{5}} - 120(32) - 15(L) = 300(8)L^{\frac{2}{5}} - 3840 - 15L \\ &= 2400L^{\frac{2}{5}} - 3840 - 15L\end{aligned}$$

La maximización de beneficios con respecto a la mano de obra

$$
\begin{aligned}
\pi'(L) &= \frac{2400(2)}{5}L^{-\frac{3}{5}} - 15 = 0 \quad \pi''(L) = -576L^{-\frac{8}{5}} < 0 \\
960L^{-\frac{3}{5}} &= 15 \\
L^{\frac{3}{5}} &= 64 \\
L &= 64^{\frac{5}{3}} \\
L^* &= 1024 \;\; \text{trabajadores} \\
\pi(1024) &= 2400(1024)^{\frac{2}{5}} - 3840 - 15(1024) \\
&= 2400(16) - 3840 - 15360 \\
&= 19,200
\end{aligned}
$$

TAREA 1: MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Trabajo individual.

En los ejercicios 1 al 8, encontrar los valores máximos, mínimos absolutos de cada función en el intervalo dado. Después graficar la función en la computadora, comprobando los puntos en donde se alcanzan los extremos absolutos.

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}$	$-3 \leq x \leq 4$	$(-1, 3/2)$ *Máximo*
		$(2, -3)$ *Mínimo*
2. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$	$-3 \leq x \leq 3$	$(-2, 0)$ *Mínimo*
		$(0, 4)$ *Máximo*
		$(2, 0)$ *Mínimo*
3. $f(x) = x^3 - 3x + 3$	$-3 \leq x \leq 3$	$(-1, 5)$ *Máximo*
		$(1, 1)$ *Mínimo*
4. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3$	$-1 \leq x \leq 3$	$(0, -3)$ *Mínimo*
		$(2, 5)$ *Máximo*
5. $f(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{8}$	$-3 \leq x \leq 3$	$(-2, 2)$ *Máximo*
		$(0, 0)$ *Mínimo*
		$(2, 2)$ *Máximo*
6. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$	$-4 \leq x \leq 3$	$(-2, 13)$ *Máximo*
		$(1, -14)$ *Mínimo*
7. $f(x) = x^2 - 8 \ln x$	$0 < x \leq 4$	$(2, -1.5)$ *Mínimo*
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$-5 \leq x \leq 5$	$(0, 0.398942)$ *Máximo*

TAREA 2: MÁXIMOS Y MÍNIMOS APLICADOS A LA ECONOMÍA

Trabajo en equipo con dos o tres integrantes.

Teoría Microeconómica: problemas de maximización del beneficio

En los problemas del 1 al 6, $C(q)$ es el costo total de producir q unidades de un bien y $p(q)$ es el precio al cual se venderán las q unidades.

a) ¿Cuál es la cantidad y el precio que maximiza la utilidad?.

b) Hallar el ingreso y el costo marginal.

c) Utilizar Excel o el software de su preferencia para calcular los valores del ingreso, beneficio, costo, precio, ingreso marginal y costo marginal en el rango solicitado.

d) Graficar conjuntamente las funciones del ingreso, beneficio y costo.

e) Graficar conjuntamente las función del precio, ingreso marginal y costo marginal.

1. $p(q) = 75 - 3q \quad ; \quad C(q) = \frac{1}{5}q^2 + 4q + 27 \quad 0 \leq q \leq 15$
2. $p(q) = 45 - 4q \quad ; \quad C(q) = \frac{1}{4}q^2 + 3q + 7 \quad 0 \leq q \leq 10$
3. $p(q) = 100 - q \quad ; \quad C(q) = 25q \quad 0 \leq q \leq 60$
4. $p(q) = 50 - 2q \quad ; \quad C(q) = 20 + 2q + \frac{1}{2}q^2 \quad 0 \leq q \leq 15$
5. $p(q) = 150 - 2q \quad ; \quad C(q) = \frac{1}{10}q^3 - 3q^2 + 50q + 100 \quad 0 \leq q \leq 35$
6. $p(q) = 200 - 2q \quad ; \quad C(q) = \frac{2}{3}q^3 - 14q^2 + 222q + 50 \quad 0 \leq q \leq 18$

Teoría Macroeconómica: Modelo de demanda de trabajo.

Suponga que para producir el bien q solo se emplea el capital (K) y el trabajo (L). El trabajo puede variar libremente mientras que el capital es fijo. Así que la función de producción toma la forma

$$q = q(L, \bar{K})$$

El objetivo del empresario racional es maximizar el beneficio, la diferencia entre ingresos, Y y costos totales, CT.

$$\pi = Y - CT$$

donde el ingreso esta determinado por:

$$Y = pq$$

y la función de costos totales es:

$$CT = \overline{CF} + CV + \overline{CF} + WL$$

donde W es el salario o precio del trabajo y CF son los costos fijos generados por el uso del capital.

a) Demostrar que la función de beneficios es:

$$\pi = q(L, \bar{K})p - \overline{CF} - WL$$

b) Obtener la demanda óptima de trabajo e interpretar su resultado.

3. Cálculo en varias variables

3.1. Funciones en varias variables

Hasta ahora hemos estudiado mayormente funciones de una variable, esto es, funciones cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es también un conjunto de números reales. Sin embargo la descripción de muchos fenómenos económicos exigen considerar un número grande de variables de manera simultánea. Por ejemplo, la demanda de un bien depende del precio del bien, de los gustos del consumidor, de las rentas de los diferentes consumidores, y de los precios de los bienes complementarios y sustitutos, entre otras cosas. Así esta demanda es esencialmente una función de varias variables.

Definición 3.1. Una **función de n variables** $x_1, x_2, ..., x_n$ con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ es una regla que asigna un número especifico $f(x_1, ..., x_n)$ a cada n-vector $(x_1, ..., x_n) \in D$.

Por ejemplo, la forma general de la función de producción es:

$$Q = f(K, L)$$

Decimos que Q depende de las dos variables independientes, la variable capital (K) y el trabajo (L) . La forma específica de una función nos dice exactamente cómo el valor de la variable dependiente se determina a partir de los valores de la variable independiente. Una forma específica en una función de producción puede ser:

$$Q = 4K^{0.5}L^{0.5}$$

Para cualquier valor dado de K y L la función específica nos permite calcular el valor de Q. Por ejemplo:

$$Si\ K = 1\, y\ L = 1\ entonces\ Q = 4(1)^{0.5}(1)^{0.5} = 4$$
$$Si\ K = 4\, y\ L = 4\ entonces\ Q = 4(4)^{0.5}(4)^{0.5} = 16$$

Ejemplo 32. Otro ejemplo de función de Producción es:

$$Y = F(K, L, T),$$

donde Y es el volumen de cosecha, K es el capital invertido, L el trabajo y T la superficie de explotación agrícola.

Ejemplo 33. Función de Cobb-Douglas:

$$F(x, y) = Ax^a y^b,$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y $A > 0, x > 0, y > 0$.

La gráfica de la función producción Cobb-Douglas se presenta en la figura 19.

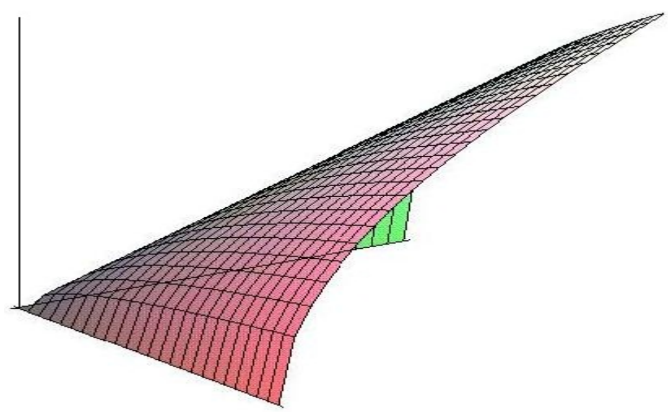

Figura 19: $f(x, y) = Ax^a y^b$ con $a > 0$, $b > 0$ y $A, x, y, > 0$

3.1.1. Curvas de nivel

El correspondiente conjunto de puntos (x, y) del plano xy que satisface $f(x, y) = C$ se llama **curva de nivel** de f en C, cuando C varía sobre un conjunto de números se genera toda una familia de curvas de nivel. Las curvas de nivel aparecen en numerosas aplicaciones diferentes. Por ejemplo, en economía, si la salida $Q(x, y)$ de un proceso de producción está determinada por dos entradas x y y (digamos horas de fuerza laboral e inversión de capital), entonces la curva de nivel $Q(x, y) = C$ se llama **curva de producción constante** C o, más brevemente, **isocuanta**.

Ejemplo 34. Una empresa tiene la siguiente función de producción

$$Q = 4L^{1/2}K^{3/4}$$

Identifique que combinaciones de trabajo (L) y capital (K) generan el mismo nivel de producción (Q) y por lo tanto se encuentran en la misma isocuanta.

Solución

Se construye la siguiente tabla de combinaciones de trabajo y capital

K/L	Trabajo			
Capital	1	16	64	729
1	4	16	32	108
16	32	128	256	864
81	108	432	864	2916

A partir de la tabla anterior se observa que

$$\text{Si } L = 1, K = 16 \text{ y } L = 64, K = 1 \Rightarrow Q = 32$$
$$\text{Si } L = 1, K = 81 \text{ y } L = 729, K = 1 \Rightarrow Q = 108$$
$$\text{Si } L = 64, K = 81 \text{ y } L = 729, K = 16 \Rightarrow Q = 864$$

En la figura 20 se muestran las isocuantas de la función producción Cobb-Douglas.

Otra aplicación de curvas de nivel en economía comprende el concepto de curvas de indiferencia. Un consumidor que esté considerando la compra de varias unidades de cada una de dos mercancías está asociado con una **función de utilidad** $U(x, y)$, que mide la satisfacción total (o **utilidad**) que el consumidor obtiene por tener x unidades de la primera mercancía, así como y unidades de la segunda. Una curva de nivel $U(x, y) = C$ de la función de utilidad se llama **curva de indiferencia** y da todas las combinaciones de x y y que conducen al mismo nivel de satisfacción del consumidor.

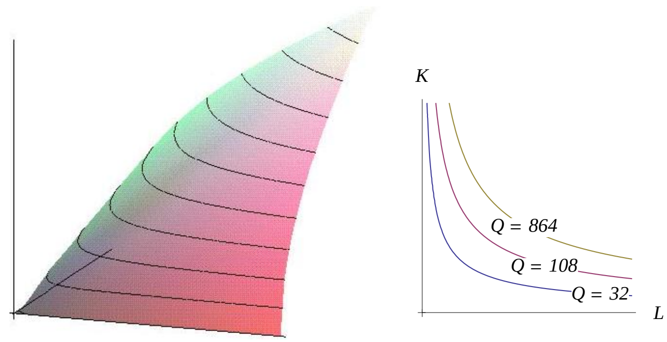

Figura 20: $Q(L,K) = 4L^{1/2}K^{3/4}$

Las funciones que los economistas estudian normalmente tienen más de dos variables, luego necesitamos extender a ellas el concepto de derivadas parciales.

3.2. Derivadas parciales

Cuando se estudia una función $y = f(x)$ de una variable, la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}$ mide la tasa de variación de la función cuando x cambia. Para funciones de dos variables $z = f(x,y)$ queremos ver la velocidad de variación de la función respecto de los cambios de valores en las variables independientes.

Definición 3.2. Sea $z = f(x,y)$. La **derivada parcial de z** con respecto de x, la cual se le denota por $\partial z/\partial x$, es la derivada de $f(x,y)$ con respecto a x cuando y se mantiene constante. La derivada parcial de f con respecto de y, la cual se le denota por $\partial z/\partial y$, es la derivada de f con respecto a y cuando x se mantiene constante.

Definición 3.3. Sea $z = f(x_1,...,x_n)$. Entonces $\partial f/\partial x_i$ es la derivada de $f(x_1,...,x_n)$ con respecto a x_i, considerando las otras variables $x_j\,(i \neq i)$ como constantes.

Ejemplo 35. Encuentre las derivadas parciales f_x y f_y si $f(x,y) = 2xy^5 + 3x^2y + x^2$.

Solución

Para calcular f_x, considere f como una función de x y derive la suma término por término, tratando y como constante para obtener

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(1)y^5 + 3(2x)y + 2x \\ &= 2y^5 + 6xy + 2x \end{aligned}$$

Para calcular f_y, considere f como una función de y y derive término por término, tratando x como constante para obtener

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= 2x(5y^4) + 3x^2(1) + 0 \\ &= 10xy^4 + 3x^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 36. Encuentre las derivadas parciales f_x y f_y si $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$.

Solución

Para simplificar el cálculo, empiece por reescribir la función como

$$f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2}{3}yx^{-1}$$

Para calcular f_x, considere f como una función de x y derive la suma término por término, tratando y como constante para obtener

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x + 2(1)y^2 + \frac{2}{3}y(-x^{-2}) \\ &= 2x + 2y^2 - \frac{2y}{3x^2} \end{aligned}$$

Para calcular f_y, considere f como una función de y y derive término por término, tratando x como constante para obtener

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= 0 + 2x(2y) + \frac{2}{3}(1)(x^{-1}) \\ &= 4xy + \frac{2}{3x} \end{aligned}$$

3.2.1. Derivadas parciales de orden superior

Si $z = f(x, y)$, entonces $\partial f/\partial x$ y , $\partial f/\partial y$ se llaman las **derivadas parciales de primer orden** o **derivadas parciales primeras**. Esas derivadas parciales son, a su vez, funciones de dos variables. A partir de $\partial f/\partial x$, podemos construir dos nuevas funciones tomando las derivadas parciales con respecto a x y y. De la misma manera podemos tomar las derivadas parciales de $\partial f/\partial y$ con respecto a x y y. A continuación se muestra un resumen de la definición y notación para las cuatro posibles derivadas parciales de segundo orden de una función de dos variables.

(a) Si $z = f(x, y)$, la derivada parcial de f_x con respecto a x es

$$f_{xx} = (f_x)_x \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

(b) La derivada parcial de f_x con respecto a y es

$$f_{xy} = (f_x)_y \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$$

(c) La derivada parcial de f_y con respecto a x es

$$f_{yx} = (f_y)_x \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

(d) La derivada parcial de f_y con respecto a y es

$$f_{yy} = (f_y)_y \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})$$

Ejemplo 37. Calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x, y) = xy^3 + 5xy^2 + 2x^2 + 1$.

Solución

Como

$$\begin{aligned} f_x &= y^3 + 5y^2 + 4x \\ f_y &= 3xy^2 + 10xy \end{aligned}$$

se deduce que

$$f_{xx} = 4$$
$$f_{yy} = 6xy + 10x$$

Las derivadas cruzadas son

$$f_{yx} = 3y^2 + 10y$$
$$f_{xy} = 3y^2 + 10y$$

Aplicaciones de diferenciación parcial

La diferenciación parcial es básicamente un aplicación matemática del supuesto de ceteris paribus (es decir, las otras cosas se suponen constantes), que es frecuentemente utilizado en el análisis económico. Debido a que la economía es un sistema complejo de entender, los economistas a menudo ven el efecto de los cambios en una variable asumiendo que todos los demas factores permanecen sin cambios. Cuando la relación entre las distintas variables se puede expresar en forma matemática, el análisis del efecto de los cambios en una variable puede ser descubierto a través de la diferenciación parcial. La diferenciación parcial se puede aplicar a las funciones de utilidad y a modelos macroeconómicos como veremos a continuación.

Función de utilidad del Consumo

La forma general de la función de utilidad del consumo es

$$U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ representan las cantidades de los diferentes bienes consumidos.

La teoría económica moderna asume que la utilidad es un concepto ordinal, lo que significa que diferentes combinaciones de productos se pueden clasificar en orden de preferencia, pero las utilidades en sí mismas no puede ser cuantificados de ninguna manera. Sin embargo, los economistas también trabajan un poco con el concepto de utilidad cardinal donde se supone que, al menos hipotéticamente, cada individuo puede cuantificar y comparar los diferentes niveles de su propia utilidad. Es este concepto de utilidad cardinal el que se utiliza aquí.

Si se supone que sólo los dos bienes x y y son consumidos, la función de utilidad tendrá la forma.

$$U = f(x, y)$$

La utilidad marginal se define como la tasa de cambio de la utilidad total con respecto al aumento en el consumo de un bien. Por lo tanto las funciones de la utilidad marginal de los bienes x y y son respectivamente

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad U_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Dos principios importantes de la teoría de la utilidad son:

1. La ley de la utilidad marginal decreciente dice que si, ceteris paribus, la satisfacción adicional del consumidor disminuye a medida que se consume una mayor cantidad del bien.

2. El consumidor va a consumir un bien hasta el punto de que su utilidad marginal es cero.

Algunos aplicaciones de los dos principios se dan en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 38. Analizar si la ley de la utilidad marginal decreciente es válida para los bienes x y y en la siguiente función de utilidad del tipo Cobb-Douglas: $U = x^\alpha y^\beta$ y $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, x > 0, y > 0$.

Solución

Para la función utilidad $U = x^\alpha y^\beta$ la diferenciación parcial lleva a la función de utilidad marginal

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta > 0 \quad \text{y}$$

$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \beta x^\alpha y^{\beta-1} > 0$$

Cuando aumenta el consumo del bien x manteniendo constante la cantidad del bien y, la utilidad del consumidor U aumenta. Del mismo modo cuando aumenta el consumo del bien y manteniendo constante la cantidad del bien x, la utilidad del consumidor U aumenta. Para analizar los utilidad marginal decreciente hacemos las segundas derivadas de la función de utilidad.

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta} < 0 \quad \text{y}$$

$$U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \beta(\beta-1)x^{\alpha}y^{\beta-2} < 0$$

Así U_{xx} cae a medida que x aumenta y la caída U_{yy} cae a medida que y aumenta.

Modelo macroeconómico keynesiano de una economía abierta

Si se introduce al comercio exterior el modelo macroeconómico keynesiano básico se convierte en la identidad

$$Y = C + I + G + X - M \tag{9}$$

y la relación funcional de la función consumo

$$C = cY_d \tag{10}$$

donde c es la propensión marginal al consumo, más

$$M = mY \tag{11}$$

donde M es la importación y m es la propensión marginal de la importación, y

$$\begin{aligned} Y_d &= Y - T \\ T &= tY \end{aligned} \tag{12}$$

donde Y_d es el ingreso disponible, T son los impuestos y t es la tasa de impuestos.

La inversión I, el gasto público G y las exportaciones X se determinan de manera exógena y c, m y t son parámetros dados. Sustituyendo (10), (11) y (12) en (9) tenemos

$$\begin{aligned} Y &= c(1-t)Y + I + G + X - mY \\ Y[1-c(1-t)+m] &= I + G + X \\ Y &= \frac{I+G+X}{1-c(1-t)+m} \qquad (13) \end{aligned}$$

en el modelo básico keynesiano sin G y X, el multiplicador de la inversión es simplemente dY/dI. Sin embargo, en este modelo extendido también se tiene que asumir que G, I y X son constantes con el fin de obtener el multiplicador de la inversión. Así, el multiplicador de la inversión se encuentra diferenciando parcialmente (13) con respecto a I, lo cúal da

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{1}{1-c(1-t)+m}$$

también debe ser capaz de ver que el gasto público y el multiplicador de exportación también toma esta, ya que

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{1-c(1-t)+m}$$

Ejemplo 39. En un sistema macroeconómico Keynesiano se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} Y = C + I + G + X - M & & & \\ C = 0.8Y_d & Y_d = Y - T & T = 0.2Y & M = 0.16Y \\ G = 400 & I = 300 & X = 288 & \end{array}$$

¿Cuál es el nivel de equilibrio de Y? ¿Que aumento en G sería necesario para que Y tenga un crecimiento de 2,500? Si este aumento del gasto se lleva a cabo, ¿Qué pasará con

(i) el superavit presupuestario o déficit del gobierno, y

(ii) el saldo de la balanza de pagos?

Solución:

Primero derivamos ambas relaciones entre C y Y. Así:

$$C = 0.8Y_d = 0.8(1-t)Y = 0.8(1-0.2)Y \tag{14}$$

A continuación sustituimos (14), las relaciones funcionales y los valores que figuran en la identidad para encontrar el equilibrio Y. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Y &= C + I + G + X - M \\
&= 0.8(1-0.2)Y + 300 + 400 + 288 - 0.16Y \\
&= 0.64Y + 988 - 0.16Y \\
(1-0.48)Y &= 988 \\
Y &= \frac{988}{0.52} = 1,900
\end{aligned}$$

en este nivel de equilibrío de Y, la cantidad total de impuestos recaudados es

$$T = tY = 0.2(1,900) = 380$$

por lo tanto, el déficit presupuestario, que es el monto de impuesto recaudados menos el gasto público, es

$$T - G = 380 - 400 = -20$$

la cantidad gastada en las importaciones es

$$M = 0.16Y = 0.16 \times 1,900 = 304$$

por lo que la balanza de pagos es

$$X - M = 288 - 304 = -16$$

es decir, un deficit de 16.

El multiplicador del gasto público es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial G} &= \frac{1}{1-c(1-t)+m} = \frac{1}{1-0.8(1-0.2)+0.16} \\
&= \frac{1}{1-(0.8)(0.8)+0.16} = \frac{1}{1-0.48} = \frac{1}{0.52}
\end{aligned} \tag{15}$$

como el equilibrio Y es 1,900, el aumento en Y necesario para llegar al nivel deseado de 2,500 es

$$\Delta Y = 2,500 - 1,900 = 600 \tag{16}$$

dado que el impacto del multiplicador sobre Y será siempre igual a

$$\Delta G \frac{\partial Y}{\partial G} = \Delta Y \tag{17}$$

Dónde ΔG es el cambio en el gasto público, sustituyendo (15) y (16) en (17) da

$$\Delta G \frac{1}{0.52} = 600$$
$$\Delta G = 600(0.52) = 312$$

este es el aumento en G necesario para elevar a Y a 2,500.

En el nuevo nivel del ingreso nacional, el importe del impuesto recaudado será

$$T = tY = 0.2(2,500) = 500$$

el nivel de gasto público nuevo, incluyendo el aumento de 312 es

$$400 + 312 = 712$$

por lo tanto, el déficit presupuestario es

$$T - G = 500 - 712 = -212$$

es decir, hay un aumento de 192 en el déficit.

El nuevo nivel de importaciones es

$$M = (0.16)2,500 = 400$$

por lo que el nuevo equilibrío donde figuran los pagos

$$X - M = 288 - 400 = -112$$

es decir, el déficit aumento en 96.

Problema 12. Sea F una función de producción agrícola $Y = F(K, L, T)$, donde Y es el número de unidades producidas, K el capital invertido, L el trabajo y T la superficie de la tierra. Entonces $\frac{\partial Y}{\partial K} = F'_K$ se le llama la **productividad marginal del capital** y es la tasa de variación de la producción de Y con respecto a K cuando L y T se mantienen constantes. De manera análoga $\frac{\partial Y}{\partial L} = F'_L$, es la **productividad marginal del trabajo** y $\frac{\partial Y}{\partial T} = F'_T$ es la **productividad marginal de la tierra**. Supongamos que F es una función de Cobb-Douglas:

$$F(K, L, T) = AK^a L^b T^c$$

Hallar las productividades marginales y las parciales segundas. Estudiar sus signos.

Solución del problema 12. Las productividades marginales son:

$$F'_K = AaK^{a-1}L^bT^c,\ F'_L = AbK^aL^{b-1}T^c,\ F'_T = AcK^aL^bT^{c-1},$$

Si K, L y T son positivas, las productividades marginales son positivas. Así, un aumento de capital, trabajo o tierra se traducirá en un aumento del número de unidades producidas.

Las derivadas parciales cruzadas son:

$$\begin{aligned} F''_{KL} &= AabK^{a-1}L^{b-1}T^c \\ F''_{KT} &= AacK^{a-1}L^bT^{c-1} \\ F''_{LT} &= AbcK^aL^{b-1}T^{c-1} \end{aligned}$$

Además es fácil ver que $F''_{LK} = F''_{KL}, F''_{TK} = F''_{KT}$ y $F''_{LT} = F_{LT}$. Observemos que estas parciales son positivas. Llamamos complementarios a los factores de cada uno de los pares (capital y trabajo, capital y tierra, tierra y trabajo) por que si uno aumenta, aumenta la productividad marginal del otro.

Las parciales directas son:

$$\begin{aligned} F''_{KK} &= Aa(a-1)K^{a-2}L^bT^c \\ F''_{LL} &= Ab(b-1)K^aL^{b-2}T^{c-1} \\ F''_{TT} &= Ac(c-1)K^aL^bT^{c-2} \end{aligned}$$

Por ejemplo, F''_{KK} es la derivada parcial de la productividad marginal del capital respecto a K. Si $a < 1$, entonces $F''_{KK} < 0$ y por lo tanto hay una disminución de la productividad marginal del capital, es decir, un pequeño incremento del capital invertido redunda en una disminución de la productividad marginal del capital. Entonces podemos interpretar esto diciendo que, un pequeño incremento del capital hace que la producción aumente ($F'_k > 0$), este aumento se prouduce a una tasa decreciente ($F''_{kk} < 0$). Lo análogo ocurre para el trabajo si ($b < 1$) y la tierra si $c > 1$.

3.3. La regla de la cadena

Muchos modelos económicos manejan funciones compuestas. Se trata de funciones de una o varias variables que, a su vez, son funciones de otras variables básicas. Por ejemplo, la cantidad producida puede ser función del capital y el trabajo y ambos funciones del tiempo. ¿Cómo varía la cantidad producida con el tiempo?. Más generalmente, ¿qué ocurre al valor de una función compuesta cuando los valores de sus variables básicas cambian?.

Supongamos que

$$z = F(x, y)$$

es una función de x y y donde, a su vez,

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

son funciones de una variable t. Sustituyendo tenemos

$$z = F(f(t), g(t))$$

de tal manera que z es función de t únicamente. Una variación de t producirá en general una variación de $f(t)$ y $g(t)$ y, como resultado, una variación de z. ¿Cómo cambia z cuando varía t? Por ejemplo, ¿producirá un aumento de t un aumento o disminución de z? La respuesta a estas preguntas será mucho más fácil si se puede hallar una expresión de dz/dt, la tasa de variación de z con respecto a t. Esta expresión viene dada por la regla siguiente:

Definición 3.4. Si la funcion esta dada por $z = F(x, y)$, $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = F_x(x, y)\frac{dx}{dt} + F_y(x, y)\frac{dy}{dt}$$

Esta definición suministra la derivada de $z = F(x, y)$ con respecto a t, existen las derivadas parciales de F con respecto a x y y, y x, y son funciones derivables de t. Esta derivada se llama normalmente la **derivada total** de z con respecto a t. Según la definición, el hecho de que la primera variable x depende de t contribuye con el término $F_x(x, y)dx/dt$ a la derivada total. Análogamente, el hecho de que la segunda variable y dependa de t contribuye con el término $F_y(x, y)dy/dt$ a la derivada total. La derivada total dz/dt es la **suma** de las dos contribuciones.

Ejemplo 40. Calcular dz/dt en la función $z = F(x, y) = x^2 + y^3$, donde $x = t^2$, $y = 2t$.

Solución

Se tiene que

$$F_x(x, y) = 2x, \quad F_y(x, y) = 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2$$

Así por la definición obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 2x \cdot 2t + 3y^2 \cdot 2 \\ &= 4tx + 6y^2 \\ &= 4t^3 + 24t^2 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene al sustituir x y y por sus valores en función de t.

Ejemplo 41. Sea $Y = F(K, L)$, donde Y representa la cantidad producida, K capital y L trabajo. Supongamos que K y L son funciones del tiempo. Entonces a partir de la regla de la cadena tenemos que:

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial K}\dot{K} + \frac{\partial Y}{\partial L}\dot{L}$$

Esto se interpreta diciendo que la producción total crece a la tasa obtenida multiplicando la productividad marginal de cada recurso por la tasa de cambio de ese recurso y sumando estos términos.

3.4. Funciones implícitas

A menudo necesitamos derivar funciones definidas implícitamente por una ecuación o un sistema de ecuaciones.

Sea F una función de dos variables y consideremos la ecuación:

$$F(x,y) = c \quad \text{(c es constante)} \tag{18}$$

Vemos que (18) representa una curva de nivel de F. Supongamos que esta ecuación define a y como una función $y = f(x)$ de x en cierto intervalo I. Esto significa que:

$$F(x, f(x)) = c \quad \text{para todo}\, x \in I \tag{19}$$

Si f es derivable ¿cuál es la derivada de $y = f(x)$?, el problema geométrico es hallar su pendiente en el punto P.

Para hallar la expresión de la pendiente se introduce la función auxiliar u definida por:

$$u(x) = F(x, f(x))$$

Para todo $x \in I$. Entonces por la regla de la cadena tenemos $u'(x) = F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x)$. Ahora bien, (19) dice que $u(x) = c$ para todo $x \in I$ y, como la derivada de una constante es cero, tenemos:

$$u'(x) = F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$

Si $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, entonces $f'(x) = \frac{-F_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$.

Así, después de simplificar la notación, tenemos:

$$F(x,y) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \quad (F'_y(x,y) \neq 0) \tag{20}$$

Este resultado es importante. Notese que, cuando (18) define a y como función implícita de x, la formula (20) da la derivada de y con respecto a x, aun cuando sea imposible resolver la ecuación en y.

Ejemplo 42. Usar (20) para calcular y' si $xy^{1/2} = 2$.

Solución: Escribimos $F(x, y) = xy^{1/2}$. Entonces $F'_x(x, y) = y^{1/2}$ y $F'_y(x, y) = 1/2xy^{-1/2}$. Por tanto (20) da:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{y^{1/2}}{1/2xy^{-1/2}} = -\frac{2y}{x}$$

Ejemplo 43. Dada la curva de ecuación:

$$x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y = 0$$

Hallar la pendiente y la ecuación de la tangente en el punto $(x, y) = (2, 1)$.

Solución: Se comprueba primero que $x = 2$ e $y = 1$ satisfacen la ecuación, luego $(2, 1)$ es un punto de la curva. Sea $F(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y$; la ecuación dada es equivalente a $F(x, y) = 0$, que es la curva de nivel de F. Como $F'_x(x, y) = 3x^2 + 2xy$ y $F'_y(x, y) = x^2 - 4y - 10$, (20) implica que:

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 4y - 10}$$

Para $x = 2$ e $y = 1$ se tiene que $y' = 8/5$. Por la formula punto-pendiente la ecuación de la tangente en $(2, 1)$ es $y - 1 = (8/5)(x - 2)$, o bien $y = (1/5)(8x - 11)$.

Ejemplo 44. En el modelo de ingreso $Y = C(Y) + I(Y) + G_0$, utilice la regla de la función implícita para encontrar el multiplicador del gasto del gobierno, es decir, $\frac{\partial Y}{\partial G_0}$. Todas las derivadas son conocidas por ser continuas, ademas se tiene que, $0 < C_Y < 1$ y $I' > 0$. ¿Qué otra condición es necesaria para escribir una identidad de equilibrio?

Utilizar el resultado para encontrar el equilibrio de ingreso, si $C = 65$ millones, $I = 12$ millones, $G_0 = 5$ millones. Use diferenciales para encontrar el aumento del ingreso nacional, cuando el gasto público se duplica.

Solución:

$$F = Y - C(Y) - I(Y) - G_0 = 0$$

De acuerdo con la regla de la función implícita:

$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}$, donde $F_y \neq 0$ y F_x, F_y son continuas. Para este ejemplo se tiene $F'_{G_0} = -1$ y $F'_Y = 1 - C_Y - I'$

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = -\frac{-1}{1 - C_Y - I'} = \frac{1}{1 - C_Y - I'}$$

Necesitamos tener $C_Y - I' \neq 1$ a fin de que la regla de funciones implícitas se pueda aplicar y obtener una solución viable. Para encontrar el equilibrio de ingreso nacional, sustituimos en la fórmula

$$\bar{Y} = 65 + 12 + 5 = 82 \text{ millones}$$

Para el multiplicador del gasto del gobierno,

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - C_Y - I'} = \frac{1}{1 - 0.75 - 0.05} = \frac{1}{0.2} = 5$$

Cuando el gasto público se duplicó, lo que tenemos $dG_0 = 5$. Utilizando las reglas de los diferenciales, expresamos el aumento del ingreso nacional:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial G_0} dG_0 = 5(5) = 25 \text{ millones}$$

Debido al efecto estimulante de los gastos del gobierno, el ingreso nacional se incrementa por 25 millones para un total de 107 millones.

Ejemplo 45. Sea el siguiente modelo:

$$S(Y, i) + T(Y) = I(i) + G_0 \qquad 0 < S_y < 1 \qquad S_i, T' > 0 \qquad I'_i < 0$$

Donde S, Y, i, T, I y G_0 son el ahorro, la renta nacional, la tasa de interés, los impuestos, la inversión y el gasto público, respectivamente. Todas las derivadas son continuas. Usando la regla de la función implícita, dar el efecto del gasto de gobierno G_0 sobre el ingreso nacional Y ($\frac{\partial Y}{\partial G_0}$) y de la tasa de interés i ($\frac{\partial i}{\partial G_0}$). Interpretar los resultados.

Solución:

$$F = S(Y, i) + T(Y) - I(i) - G_0 = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = -\frac{F_{G_0}}{F_Y} = \frac{1}{S_Y + T'} > 0 \qquad \frac{\partial i}{\partial G_0} = -\frac{F_{G_0}}{F_i} = \frac{1}{S_i - I'} > 0$$

El aumento del gasto del gobierno aumenta el ingreso y la tasa de interés.

TAREA 1: DERIVADAS PARCIALES

Trabajo individual.

Ejercicio 1. Halle las derivadas parciales indicadas $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ de las siguientes funciones.

1. $f(x, y) = 2xy^5 + 3x^2 + y^2$
2. $f(x, y) = (3x + 2y)^5$
3. $f(x, y) = \cos 4xy + \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}$
4. $f(x, y) = xe^y$

Ejercicio 2. Use diferenciación implícita para encontrar $\frac{dy}{dx}$ en los siguientes ejercicios.

1. $x^2y + xy^2 = 6$
2. $x^3 + y^3 = 18x$
3. $x^2 + 3xy + 2y^2 = 48$
4. $e^{xy} + 2(x + y) = 5$

Problema 1. Supongamos que una empresa tiene un función de producción $Q(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, donde $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$. Demostrar que el producto marginal del trabajo $\partial Q/\partial L$ es positivo y que es una función decreciente de L cuando K es fija.

Problema 2. En un modelo macroeconómico keynesiano con sector externo y con la terminología usual,

$$
\begin{gathered}
Y = C + I + G + X - M \\
Y_d = (1 - t)Y \qquad C = 0.75Y_d \qquad M = 0.25Y \\
I = 820 \qquad G = 960 \qquad t = 0.3 \qquad X = 650
\end{gathered}
$$

¿cuál será el valor de equilibrio de Y? ¿Use el multiplicador de exportación para saber qué pasará con la balanza de pagos si la variable exógena exportación aumenta en 100 unidades?.

Problema 3. Sea el siguiente modelo:

$$S(Y,i) + M(Y) = I(i) + X_0 \qquad 0 < S_y, M' < 1 \qquad S_i > 0 \qquad I_i' < 0$$

donde S, Y, i, M, I y X_0 son el ahorro, la renta nacional, la tasa de interés, importaciones, inversión y exportaciones, respectivamente. Todas las derivadas son continuas. Usando la regla de funciones implícita, dar el efecto de las exportaciones de X_0 sobre la renta nacional Y (es decir, el multiplicador de las exportaciones) y sobre la tasa de interés i. Interpretar los resultados.

Problema 4. Para un mercado de dinero en equilibrio se tiene que la cantidad de dinero en circulación (M^s) es igual a la demanda de dinero ($M^d = L(Y,i)$)

$$M^s = L(Y,i) \qquad L_Y > 0 \qquad L_i < 0$$

Usando la diferenciación implícita, encontrar el efecto del aumento de la oferta de dinero en el ingreso (Y) y en la tasa de interés (i). Interprete resultados.

4. Optimización libre y restringida en varias variables

Introducción

Los problemas de optimización se pueden describir usualmente de la siguiente forma matemática. Hay una **función objetivo** $f(x_1, ..., x_n)$, que es una función real de n variables de la que hay que hallar los valores máximos o mínimos. También hay un **conjunto de restricciones** o un **conjunto de oportunidades** S que es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Se pueden abarcar varios tipos de distintos problemas de optimización dando el conjunto S adecuadamente. Si f tiene un punto óptimo en el interior de S se habla del caso clásico. Si S es el conjunto de todos los puntos $(x_1, ..., x_n)$ que verifican un cierto número de ecuaciones tenemos un problema lagrangiano, que es maximizar o minimizar una función sujeta a restricciones de igualdad.

4.1. Optimización libre

Sea f una función de n variables $x_1, ..., x_n$ definida en un dominio $S \subset \mathbb{R}^n$. Sea $c = (c_1, ..., c_n) \in S$ y supongamos que f toma un valor en c que es mayor o igual que todos los valores de f en los otros puntos $x = (x_1, ..., x_n)$ de S, es decir:

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \in S.$$

Entonces se llama a c un **máximo global** de f en S y a $f(c)$ el **valor máximo**. De forma análoga definimos un **mínimo global** y el **valor mínimo** invirtiendo el signo de la desigualdad. Conjuntamente se usarán los nombres de óptimos y valores óptimos para significar máximos o mínimos. El vector c se llama **un punto estacionario** de $f(x_1, ..., x_n)$ si $x = c$ es una solución de las n ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0, ..., \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

Teorema 4.1. *Sea f una función definida en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $c = (c_1, ..., c_n)$ un punto interior de S en el que f es diferenciable. Una* *condición necesaria para que c sea un máximo o un mínimo para f es que c sea un punto estacionario para f, es decir,*

$$f_i'(c) = 0 \ (i = 1, ..., n).$$

En particular se tiene el siguiente

Teorema 4.2. *Una condición necesaria para que una función $f(x, y)$ diferenciable tenga un máximo o un mínimo en un punto interior (x_0, y_0) de su dominio es que (x_0, y_0) sea un punto estacionario de f, esto es,*

$$f_x'(x_0, y_0) = 0, \ f_y'(x_0, y_0) = 0. \tag{21}$$

Teorema 4.3. *(Condiciones suficientes de óptimos globales) Si $f(x, y)$ es una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un dominio convexo S, y sea (x_0, y_0) un punto estacionario de f interior a S, entonces la condición suficiente para que la función $f(x, y)$ tenga un máximo o un mínimo respectivamente es:*

(a) Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:

$$D(x, y) = f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2 < 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un punto de silla de $f(x, y)$ en S.

(b) Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:

$$D(x, y) = f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2 > 0, \ y \ f''_{xx}(x, y) < 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un máximo de $f(x, y)$ en S.

(c) Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:

$$D(x, y) = f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2 > 0, \ y \ f''_{xx}(x, y) > 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un mínimo de $f(x, y)$ en S.

Ejemplo 46. Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y clasifique cada uno como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

Solución

Como

$$f_x = 2x \quad \text{y} \quad f_y = 2y$$

el único punto crítico de f es $(0, 0)$. Para poner a prueba este punto, use las derivadas parciales de segundo orden

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2 \quad \text{y} \quad f_{xy} = 0$$

y obtenga

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - 0^2 = 4$$

Esto es , $D(x, y) = 4$, para todos los puntos (x, y), en particular,

$$D(0, 0) = 4 > 0$$

Por tanto f tiene un extremo relativo en $(0, 0)$. Además, como

$$f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$$

se deduce que el extremo relativo en $(0, 0)$ es un mínimo relativo. Como referencia, la grafica de f aparece en la figura 21.

Ejemplo 47. Encuentre todos los puntos críticos de la funcion $f(x, y) = 12x - x^3 - 4y^2$ y clasifique cada uno como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto silla.

Solución

Como

$$f_x = 12 - 3x^2 \quad \text{y} \quad f_y = -8y$$

los puntos críticos se encuentran resolviendo simultaneamente las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 12 - 3x^2 &= 0 \\ -8y &= 0 \end{aligned}$$

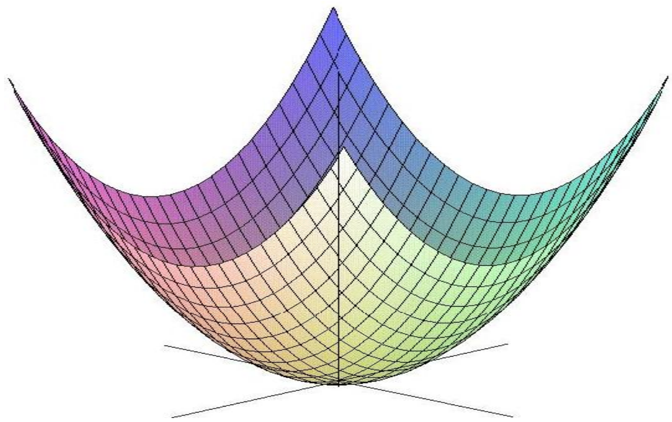

Figura 21: $f(x, y) = x^2 + y^2$

De la segunda ecuación obtenemos $y = 0$ y, de la primera,

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 12 \\ x &= 2 \text{ o } -2 \end{aligned}$$

Por tanto, hay dos puntos críticos, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Para determinar la naturaleza de estos puntos, primero se calcula

$$f_{xx} = -6x \quad f_{yy} = -8 \quad \text{y} \quad f_{xy} = 0$$

y luego se forma la función

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6x)(-8) - 0 = 48x$$

Al aplicar la prueba de las segundas derivadas parciales a los dos puntos críticos, se obtiene

$$D(2, 0) = 48(2) = 96 > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(2, 0) = -6(2) = -12 < 0$$

y

$$D(-2, 0) = 48(-2) = -96 < 0$$

de modo que hay un máximo realtivo en $(2, 0)$ y un punto silla en $(-2, 0)$. Ver figura 22.

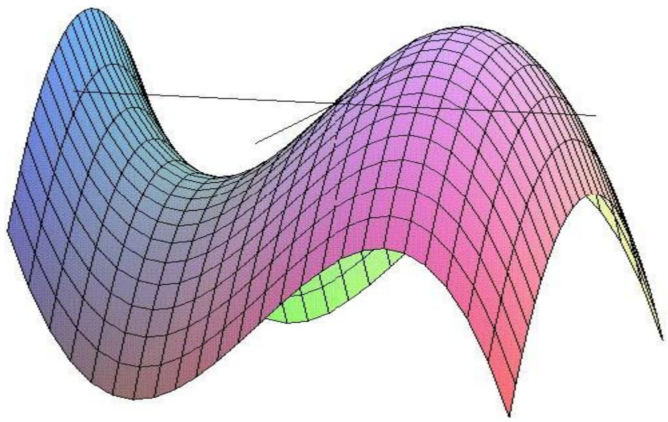

Figura 22: $f(x,y) = 12x - x^3 - 4y^2$

Ejemplo 48. Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$ y clasifique cada uno como máximo relativo, mínimo relativo o punto silla.

Solución

Como

$$f_x = 3x^2 + 6y \quad \text{y} \quad f_y = -3y^2 + 6x$$

los puntos críticos de f se encuentran resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones

$$3x^2 + 6y = 0 \quad \text{o} \quad -3y^2 + 6x = 0$$

De la primera ecuación se obtiene $y = -\frac{x^2}{2}$ que se puede sustituir en la segunda ecuación para encontrar

$$\begin{aligned} -3\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2 + 6x &= 0 \\ -\frac{3x^4}{4} + 6x &= 0 \\ -x(x^3 - 8) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de dicha ecuación son $x = 0$ y $x = 2$. Estas son las coordenadas x de los puntos críticos de f. Para obtener las coordenadas y correspondientes, sustituya estos valores de x en la ecuación $y = -\frac{x^2}{2}$ (o en cualquiera de las dos ecuaciones originales).

Así encontrara que $y = 0$ cuando $x = 0$ y $y = -2$ cuando $x = 2$. De ahí se deduce que los puntos críticos de f son $(0, 0)$ y $(-2, 2)$.

Las derivadas parciales de segundo orden de f son

$$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = -6y \quad \text{o} \quad f_{xy} = 6$$

Por tanto,

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -36xy - 36 = -36(xy + 1)$$

Como

$$D(0, 0) = -36[(0)(0) + 1] = -36 < 0$$

se deduce que f tiene un punto silla en $(0, 0)$. Como

$$D(2, -2) = -36[2(-2) + 1] = 108 > 0$$

y

$$f_{xy}(2, -2) = 6(2) = 12 > 0$$

se ve que f tiene un mínimo relativo en $(2, -2)$.

Ejemplo 49. Sea $Y = F(K, L)$ es una función de producción, donde K es el capital y L es el trabajo. Designemos por p el precio por unidad de producción, por r el costo por unidad de capital y w el precio (o tasa de salario) por unidad de trabajo. El beneficio de producir y vender $F(K, L)$ unidades es entonces:

$$\pi(K, L) = pF(K, L) - rK - wL,$$

Si F es diferenciable y π tiene un máximo con $K > 0$ y $L > 0$, entonces por el teorema (4.2) las parciales de π deben anularse. Por tanto, las condicione de primer orden son:

$$\pi'_K(K, L) = pF'_K(K, L) - r = 0$$
$$\pi'_L(K, L) = pF'_L(K, L) - w = 0.$$

Así una condición necesaria para que el beneficio tenga un máximo para $K = K^*$ y $L = L^*$ es que:

$$pF'_K(K^*, L^*) = r,\ pF_L(K^*, L^*) = w$$

otra forma de interpretarlo es

$$F'_K(K^*, L^*) = \frac{r}{p},\ F_L(K^*, L^*) = \frac{w}{p}$$

Supongamos que incrementamos el capital en una unidad desde el nivel K^*. ¿Cuánto ganaremos? La producción crece en, aproximadamente, $F'_K(K^*, L^*)$ unidades. Como cada una de esas unidades tiene un precio p, el aumento de ingresos es de $pF'_K(K^*, L^*)$ aproximadamente.¿Cúanto se pierde en este aumento unitario de capital? Se pierde r, que es el costo de una unidad de capital. Estas dos cantidades deben ser iguales. La segunda ecuación tiene una interpretación análoga: incrementando el trabajo en una unidad desde el nivel L^* se tendrá un aumento aproximado de los ingresos de $pF'_L(K^*, L^*)$, mientras que el costo del trabajo extra es w, y esas dos cantidades son iguales. El punto (K^*, L^*) que maximiza el beneficio tiene la propiedad de que el ingreso extra generado por un aumento unitario de capital o trabajo se compensa con el aumento del costo.

Problema 13. Supongamos que:

$$Y = F(K, L) = 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}},$$

es una función de producción, donde K es el capital y L es el trabajo. Sean $p = 0.5$ el precio por unidad de producción, $r = 0.1$ el costo por unidad de capital y $w = 1$ el precio por unidad de trabajo. Hallar el beneficio máximo en este caso.

Solución del problema 13: La función de beneficios es:

$$\pi(K, L) = 0.5 \cdot 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1K - 1 \cdot L = 3K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1K - L,$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\pi'_K(K, L) = 1.5 \cdot K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1 = 0,$$
$$\pi'_L(K, L) = K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} - 1 = 0.$$

La primera ecuación da $K^{-1/2} = L^{1/3}$. Sustitutendo este valor de $K^{\frac{1}{2}}$ en la segunda ecuación obtenemos $15L^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = 1$. Así $15L^{-\frac{1}{3}} = 1$, ó $L = 15^3$. Veamos que el punto estacionario $(K, L) = (50.625, 3.375)$ maximiza los beneficios.

Tenemos que:

$$\pi(K, L) = 3K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1k - L,$$

con $K > 0$ y $L > 0$, luego:

$$\pi''_{KK} = -\frac{3}{4}K^{-3/2}L^{1/3}\ \pi''_{KL} = \frac{1}{2}K^{-1/2}L^{-2/3}, \text{y}$$
$$\pi''_{LL} = -\frac{2}{3}K^{1/2}L^{-5/3}.$$

Por tanto, $\pi''_{KK} < 0$ y $\pi''_{LL} < 0$ para todo $K > 0$ y $L > 0$. Además,

$$\pi''_{KK}\pi''_{LL} - (\pi''_{KL})^2 = \frac{1}{2}K^{-1}L^{-4/3} - \frac{1}{4}K^{-1}L^{-4/3} > 0$$

Por el teorema 4.3 el punto $(50.625, 3.375)$ es un máximo de $\pi(K, L)$. Entonces, para maximizar los beneficios, hay que tomar:

$$L = 15^3 = 3.375 \text{ y } K = 15^2L^{2/3} = 15^4 = 50.625$$

El valor de la función de beneficios es $\pi(50.625, 3.375) = 1687.5$.

TAREA 1: OPTIMIZACIÓN LIBRE EN VARIAS VARIABLES

Trabajo en equipos con dos o tres integrantes.

En los ejercicios 1 a 6, encontrar los valores máximos, mínimos o puntos de silla de cada función.

1. $f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 35$

3. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

4. $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$

5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$

6. $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$

4.2. Optimización restringida

El Método de los multiplicadores de Lagrange

Las variables que aparecen en los problemas económicos de optimización estan casi siempre sometidas a ciertas restricciones. Por ejemplo, precios y cantidades son a menudo no negativos por definición, y la escasez impone que las cantidades que se consumen estén acotadas superiormente. Además cuotas de producción, limitaciones presupuestarias y otras condiciones pueden restringir el rango de elección.

Cuando la restricción es una función complicada, o cuando hay todo un sistema de ecuaciones para expresar restricciones, los economistas usan el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para hallar las soluciones del problema:

$$\text{máx(mín) } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y) = c \tag{22}$$

se usa el método de los multiplicadores de Lagrange el cual consiste en:

1. Escribir la función lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

   donde λ es una constante.

2. Derivar $\mathcal{L}$ con respecto a x e y, e igualar a cero las parciales.

3. Escribir el sistema formado por las dos ecuaciones de 2 junto con la restricción:

$$\begin{aligned} f_1'(x,y) &= \lambda g_1'(x,y) \\ f_2'(x,y) &= \lambda g_2'(x,y) \\ g(x,y) &= c \end{aligned}$$

4. Resolver esas tres ecuaciones en las tres incógnitas x, y y λ.

Consideremos el problema:

$$\text{máx } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y) = c$$

Sean x^* e y^* los valores de x y y que resuelven el problema. En general x^* y y^* dependen de c. Vamos a suponer que $x^* = x^*(c)$ e $y^* = y^*(c)$ son funciones diferenciables de c. Entonces:

$$f^*(c) = (x^*(c), y^*(c)),$$

es también función de c. A $f^*(c)$ se le llama **función valor óptimo** para el problema. Cuando se usa el método lagrangiano, el valor correspondiente del multiplicador de Lagrange también depende de c. Si se satisfacen ciertas condiciones de regularidad tenemos el siguiente resultado:

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda(c) \tag{23}$$

Así el multiplicador de Lagrange $\lambda = \lambda(c)$ es la tasa de variación del valor óptimo de la función objetivo cuando la constante de restricción c cambia.

Teorema 4.4. *(Teorema de Lagrange) Supongamos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en un dominio A del plano xy y que (x_0, y_0) es un punto interior de A y un óptimo local para $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y) = c$. Supongamos además que no se anulan a la vez $g_1'(x_0, y_0)$ y $g_2'(x_0, y_0)$. Existe un número único λ tal que la función lagrangiana:*

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

tiene un punto estacionario en (x_0, y_0).

Bajo las hipótesis del Teorema 4.4 el método de los multiplicadores de Lagrange para el problema:

$$\text{máx(mín) } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y) = c$$

da condiciones necesarias para la solución del problema. El siguiente resultado da condiciones suficientes para resolver el problema.

Teorema 4.5. *(Suficiencia global) Supongamos que las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continuamente diferenciables en un conjunto abierto convexo A de $\mathbb{R}^2$ y sea $(x_0, y_0) \in A$ un punto estacionario para la función lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

Supongamos además que $g(x_0, y_0) = c$. Entonces:

1. *$\mathcal{L}$ es concava $\Longrightarrow$ resuelve el problema de maximización de (22).*
2. *$\mathcal{L}$ es convexa $\Longrightarrow$ resuelve el problema de minimización de (22).*

Problema 14. Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar Q unidades de su producto, con

$$Q = F(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

Le cuesta a la empresa \$100 por cada unidad de mano de obra y \$300 por cada unidad de capital empleado. La empresa dispone de una suma de \$45,000 para propósitos de producción.

i) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con objeto de maximizar su producción.

ii) Gráfique a través de las curvas de nivel los resultados obtenidos.

Solución del problema 14

i) Aquí la función a maximizar es

$$\text{máx}\, Q(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

El costo de emplear L unidades de mano de obra a \$100 cada una y K unidades de capital a \$300 cada una es de $(100L + 300K)$ pesos. Puesto que deseamos disponer por completo de la suma de \$45 000, debemos tener que

$$100L + 300K = 45,000$$

Maximizaremos $Q(L, K)$ sujeta a esta restricción. La función lagrangeana es

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = 50L^{2/3}K^{1/3} - \lambda(100L + 300K - 45,000).$$

A fin de obtener un máximo de $Q(L, K)$, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \frac{100}{3}L^{-1/3}K^{1/3} - 100\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \frac{50}{3}L^{2/3}K^{-2/3} - 300\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(100L + 300K - 45,000) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ, obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Ahora igualamos los dos valores de λ

$$\frac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} = \frac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Despejando en ambos lados L, obtenemos

$$L = 6K$$

Sustituyendo esto en la expresión de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$ resulta que

$$600K + 300K - 45,000 = 0 \quad \text{o bien} \quad K = 50$$

Por consiguiente, $L = 6K = 300$ y la empresa maximiza su producción si emplea 300 unidades de mano de obra y 50 de capital.

ii) La gráfica de las curvas de nivel se muestra en la figura 23.

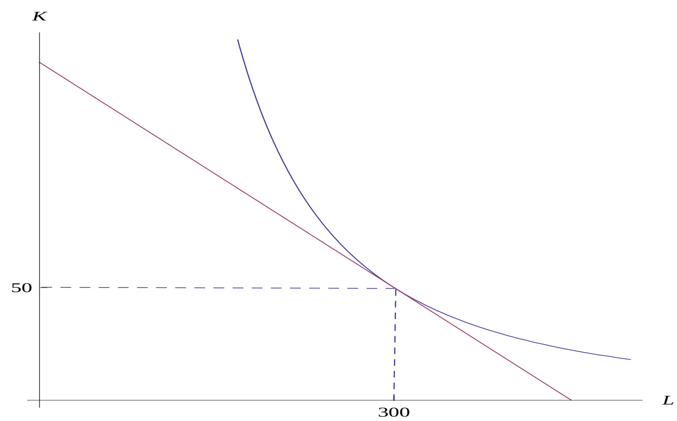

Figura 23: $50L^{2/3}K^{1/3}$ sujeto a $100L + 300K = 45,000$

Problema 15. Un consumidor tiene \$600 para gastar en dos mercancias, la primera de las cuales cuesta \$20 por unidad y, la segunda, \$30 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor con x unidades de la primera mercancía y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la **función de utilidad de Cobb-Douglas** $U(x, y) = 10x^{3/5}y^{2/5}$.

i) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de cada mercancía que debe comprar el consumidor para maximizar su utilidad.

ii) Gráfique a través de las curvas de nivel los resultados obtenidos.

Solución al problema 15

i) Aquí la función a maximizar es

$$\max U(x, y) = 10x^{3/5}y^{2/5}$$

El costo total de comprar x unidades de la primera mercancía a \$20 por unidad y, y unidades de la segunda mercancía a \$30 por unidad, es $20x + 30y$. Como el consumidor tiene sólo \$600 para gastar, la meta es maximizar la utilidad $U(x,y)$ sujeta a la restricción presupuestal

$$20x + 30y = 600$$

Maximizaremos $U(x,y)$ sujeta a esta restricción. La función lagrangeana es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 10x^{3/5}y^{2/5} - \lambda(20x + 30y - 600).$$

A fin de obtener un máximo de $U(x,y)$, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 6x^{-2/5}y^{2/5} - 20\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4x^{3/5}y^{-3/5} - 30\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(20x + 30y - 600) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ, obtenemos

$$\lambda = \frac{3}{10}x^{-2/5}y^{2/5} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Ahora igualamos los dos valores de λ

$$\frac{3}{10}x^{-2/5}y^{2/5} = \frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Despejando en ambos lados y, obtenemos

$$y = \frac{4}{9}x$$

Sustituyendo esto en la expresión de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$ resulta que

$$20x + 30(\frac{4}{9}x) = 600 \quad \text{o bien} \quad x = 18$$

Por consiguiente, $y = \frac{4}{9}(18) = 8$. Esto es, para maximizar la utilidad, el consumidor debe comprar 18 unidades de la primera mercancía y 8 unidades de la segunda.

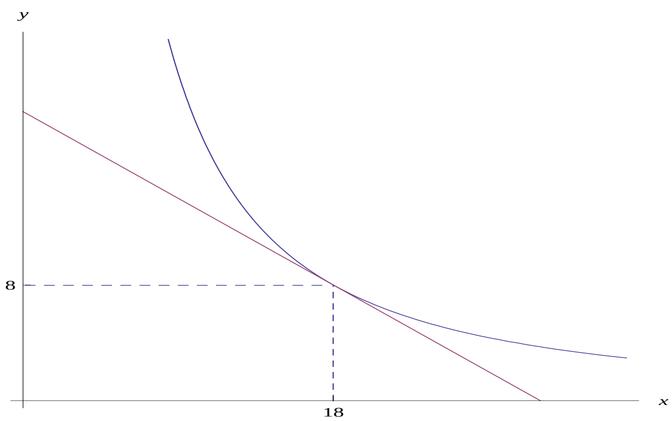

Figura 24: $10x^{3/5}y^{2/5}$ sujeto a $20x + 30y = 600$

ii) La gráfica de las curvas de nivel se muestran en la figura 24

Problema 16. Una empresa usa cantidades K y L de capital y trabajo, respectivamente para producir una cantidad Q de un solo producto, siguiendo la función de producción:

$$Q = F(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}.$$

Los precios de capital y trabajo son r y w respectivamente.

i) Hallar las cantidades K y L que minimizan los costos, así como el costo mínimo, como funciones de r, w y Q. Designemos por K^*, L^*, y C^* a estos valores.

ii) Comprobar que:

$$K^* = \frac{\partial C^*}{\partial r},\ L^* = \frac{\partial C^*}{\partial w},\ \lambda = \frac{\partial C^*}{\partial Q},\ \frac{\partial K^*}{\partial w} = \frac{\partial L^*}{\partial r}.$$

Solución del problema 16

i) La empresa tiene que resolver el siguiente problema de minimización de costo:

$$\text{mín}\, C = rK + wL \text{ sujeta a } Q = K^{1/2}L^{1/4}$$

La función lagrangiana es:

$$\mathcal{L}(K, L) = rK + wL - \lambda(K^{1/2}L^{1/4} - Q).$$

Igualando las derivadas parciales a cero obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2}L^{1/4} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \frac{1}{4}\lambda K^{1/2}L^{-3/4} = 0.$$

Así, $r = \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2}L^{1/4}$ y $w = \frac{1}{4}\lambda K^{1/2}L^{-3/4}$. Despejando λ de estas dos ecuaciones e igualando los resultados:

$$\lambda = 2r\lambda K^{1/2}L^{-1/4} = 4wK^{-1/2}L^{3/4}$$

Simplificando por $K^{1/2}L^{1/4}$ obtenemos $2rK = 4wL$, luego $L = (r/2w)K$. Llevando este valor a la restricción $K^{-1/2}L^{1/4} = Q$ tenemos que $K^{1/2}(r/2w)^{1/4}K^{1/4} = Q$, luego:

$$K^{3/4} = 2^{1/4}r^{-1/4}w^{1/4}Q \tag{24}$$

Elevando ambos miembros de la igualdad (24) a 4/3 y usando superíndices $(*)$ se tiene:

$$K^* = 2^{1/3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3}$$

y así:

$$L^* = (r/2w)K^* = 2^{-2/3}r^{2/3}w^{-2/3}Q^{4/3}$$

La función lineal $rK + wL$ es convexa y la función de Cobb-Douglas $K^{1/2}L^{1/4}$ es cóncava. Como $\lambda \geq 0$, la función lagrangiana:

$$\mathcal{L}(K, L) = rK + wL + (-\lambda)(K^{1/2}L^{1/4} - Q)$$

es suma de dos funciones convexas y, por tanto, es convexa. Por el Teorema 4.5, el punto (K^*, L^*) minimiza el costo. El costo mínimo correspondiente es:

$$C^* = rK^* + wL^* = 3 \cdot 2^{-2/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{4/3} \tag{25}$$

Finalmente, usando (24) otra vez, hallamos $\lambda = 2^{4/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{1/3}$.

ii) Por (25) tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^*}{\partial r} &= 3 \cdot 2^{-2/3}\frac{2}{3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3} \\ &= 2^{1/3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3} \\ &= K^*\end{aligned}$$

Observemos que la tercera igualdad de ii) es un caso particular de (23), y vemos que el valor común es $\lambda = \partial C^*/\partial Q = 2^{4/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{1/3}$. Se comprueban fácilmente las demás igualdades.

TAREA 2: OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

Trabajo en equipo con dos o tres integrantes.

1. Emplendo K unidades de capital y L unidades de mano de obra, una empresa puede elaborar Q unidades de su producto, con

$$Q(K, L) = 50K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

Le cuesta a la empresa \$300 por cada unidad de capital y \$100 por cada unidad de mano de obra empleado. La empresa dispone de una suma de \$ 45,000 para propositos de producción.

   a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de capital y trabajo que la empresa debería utilizar con objeto de maximizar su producción.

   b) Grafique las curvas de nivel de la función de restricción presupuestaria y de la función de producción.

2. Emplendo K unidades de capital y L unidades de mano de obra, una empresa puede elaborar Q unidades de su producto, con

$$Q(K, L) = 12K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{2}{5}}$$

Le cuesta a la empresa \$40 por cada unidad de capital y \$5 por cada unidad de mano de obra empleado. La empresa dispone de una suma de \$ 800 para propositos de producción.

   a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de capital y trabajo que la empresa debería utilizar con objeto de maximizar su producción.

   b) Grafique las curvas de nivel de la función de restricción presupuestaria y de la función de producción.

3. Supongamos que tenemos dos bienes con unos precios de $p_1 = 2$ y $p_2 = 5$, con un ingreso $m = 40$ y una función de utilidad:

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$$

a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades del bien uno y del bien dos que el consumidor debería utilizar con objeto de maximizar su utilidad.

b) Grafique las curvas de nivel de la función de restricción presupuestaria y de la función de utilidad.

4. Supongamos que tenemos dos bienes con unos precios de $p_1 = 20$ y $p_2 = 5$, con un ingreso $m = 600$ y una función de utilidad:

$$u(x, y) = 40x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades del bien uno y del bien dos que el consumidor debería utilizar con objeto de maximizar su utilidad.

b) Grafique las curvas de nivel de la función de restricción presupuestaria y de la función de utilidad.

5. Integral definida e indefinida

Introducción

Hemos analizado como encontrar la derivada de una función. Sin embargo, muchos problemas exigen como recuperar una función a partir de su derivada conocida. Por ejemplo, supongamos que una función de costo marginal $C'(x)$ se da, es decir, se sabe cómo el costo está cambiando de acuerdo a la cantidad producida x, y estamos en busca de la correspondiente función de costos $C(x)$. Esta función se puede encontrar por medio de la integración, que es lo contrario al proceso de diferenciación. De manera más general, queremos encontrar una función F a partir de su derivada f. Si tal función F existe, se llama una antiderivada de f y al conjunto de todas las antiderivadas de f se le llama la integral indefinida de f.

Antiderivadas

Definición 5.1. Sea f una función. Una antiderivada de f es una función F diferenciable tal que $F'(x) = f(x)$.

Si F y G son primitivas de f, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$, tal que:

$$F(x) = G(x) + c.$$

5.1. Integral indefinida.

Las antiderivas de una función f se les llama integrales indefinidas de la función f y se denotan: Si F es una primitiva de f,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

5.1.1. Reglas de integración.

1. $\int (c \cdot f(x))\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$

2. $\int dx = x + c$

3. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$

4. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$

5. $\int e^x dx = e^x + c$

6. $\int sen\, x dx = -cos\, x + c$

7. $\int cos\, x dx = sen\, x + c$

8. $\int tg\, x\, dx = -\ln(cos\, x) + c$

9. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int\ f(x)dx + \int g(x)\, dx$

10. $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int\ f(x)dx - \int g(x)\, dx$

Ejemplo 50.

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\, dx &= \int x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx \\ &= \int x^2\, dx - 2\int x\, dx + 5\int 1\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.\end{aligned}$$

5.2. Técnicas de integración.

- **Sustitución o Cambio de Variable**:

$$\int f(\mu)\, d\mu = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

donde $\mu = \varphi(x)$.

Ejemplo 51. Evaluar:

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx.$$

Solución:

Sean:

$$\begin{aligned} u &= x^2-9x+1, \\ du &= (2x-9)\,dx. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \int u^{-\frac{1}{2}}\,du \\ &= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C \\ &= 2u^{1/2} + C \\ &= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 52. Evaluar:

$$\int \frac{2}{2x+1}\,dx.$$

Solución

Sean:

$$\begin{aligned} u &= 2x+1 \\ du &= 2\,dx. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{2x+1}\,dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln u \\ &= \ln(2x+1) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 53. Evaluar:

$$\int e^{3x}\,dx.$$

Solución

Sean:

$$\begin{aligned} u &= 3x \\ du &= 3\,dx. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int e^{3x}\,dx &= \frac{1}{3}\int e^u\,du \\ &= \frac{e^u}{3} \\ &= \frac{e^{3x}}{3} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 54. Evaluar:

$$\int sen(5x)\,dx.$$

Solución

Sean:

$$\begin{aligned} u &= 5x \\ du &= 5\,dx. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int sen(5x)\,dx &= \frac{1}{5}\int sen\,u\,du \\ &= -\frac{\cos u}{5} \\ &= -\frac{\cos(5x)}{5} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 55. Evaluar:

$$\int 3\cos(4x)\,dx.$$

Solución

Sean:

$$u = 4x$$
$$du = 4\,dx.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int 3\cos(4x)\,dx &= \frac{3}{4}\int \cos u\,du\\ &= \frac{3}{4}\cos u\\ &= \frac{3}{4}\cos(4x) + C\end{aligned}$$

- **Por Partes**: Sean f, g funciones derivables. Entonces:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

En ocasiones es más fácil recordar la fórmula si la escribimos en forma diferencial. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$. Utilizando la regla de sustitución, la fórmula de integración por partes se transforma en:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ejemplo 56. Evaluar la integral:

$$\int xe^x\,dx.$$

Hacemos:

$$\begin{aligned} u &= x, & dv &= e^x\,dx,\\ du &= dx, & v &= e^x\,dx.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x + e^x = e^x(x-1) + C$$

Ejemplo 57. Evaluar la integral:

$$\int x\cos x\,dx.$$

Hacemos:

$$\begin{aligned} u &= x, & dv &= \cos x\,dx, \\ du &= dx, & v &= \operatorname{sen} x\,dx. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Problema 17. El costo marginal, como la función de las unidades producidas x, esta dado por $C' = 10 + 40x - 12x^2$. Hallar la función de costo total, sabiendo que \$100 es el costo fijo.

Solución al problema 17

Para determinar la función de costo total se calcula la integral indefinida siguiente:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (10 + 40x - 12x^2)\,dx \Rightarrow \\ C(x) &= 10\int dx + 40\int x\,dx - 12\int x^2\,dx \Rightarrow \\ C(x) &= 10x + 40\frac{x^2}{2} - 12\frac{x^3}{3} + k \Rightarrow \\ C(x) &= 10x + 20x^2 - 4x^3 + k \end{aligned}$$

Para determinar k se utiliza el dato del costo fijo, vale decir: si $x = 0$, entonces $C(0) = 100$.

Por lo tanto: $C(0) = 10\cdot 0 + 20\cdot 0^2 - 4\cdot 0^3 + k \Rightarrow \quad 100 = k$

Luego: $C(x) = 10x + 20x^2 - 4x^3 + 100$.

Problema 18. Una empresa advierte que un incremento en el precio de \$1 provoca una caída en las ventas de 5 unidades. Además, la empresa puede vender \$100 unidades a un precio de \$10 cada una. Encontrar la función de demanda de la empresa.

Solución al problema 18

Sea q es la cantidad demandada con respecto al precio, entonces la función de demanda es

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dp} &= -5\\ dq &= -5\,dp\\ \int dq &= -5\int dp\\ q &= -5p + k\end{aligned}$$

Entonces, para encontrar el valor de k, tenemos que

$$\begin{aligned}100 &= -5(10) + k\\ 100 &= -50 + k\\ k &= 100 + 50 = 150\end{aligned}$$

Por lo tanto la función de demanda es $q = -5p + 150$.

Problema 19. La propensión marginal al consumo para México está dada por:

$$\frac{dC}{dY} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3Y}},$$

donde el consumo C es una función del ingreso nacional Y. En esta caso Y se expresa en miles de millones de pesos. Determinar la función de consumo para México si se sabe que el consumo es de 10 mil millones de pesos ($C = 10$) cuando $Y = 12$.

Solución al problema 19: Como la propensión marginal al consumo es $\frac{dC}{dY}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
C &= \int \frac{dC}{dY} dY \\
&= \int \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3Y}} \right) dY \\
&= \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2} \int (3Y)^{-\frac{1}{2}} \, dY \\
&= \frac{3}{4}Y - \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \int (3Y)^{-\frac{1}{2}} [3 \, dY] \\
&= \frac{3}{4}Y - \frac{\sqrt{3Y}}{3} + C_1
\end{aligned}$$

Como $C = 10$ cuando $Y = 12$, de la última ecuación se sigue que $C_1 = 3$, por tanto la función de consumo es:

$$C = \frac{3}{4}Y - \frac{\sqrt{3Y}}{3} + 3.$$

TAREA 1: INTEGRAL INDEFINIDA

Trabajo individual.

a) Calcular las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int (x^3 + 2x^2 + x + 2)dx$

2) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})\, dx$

3) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

4) $\displaystyle\int \frac{ax^2}{\sqrt{x^3+8}}\, dx$

5) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2+1}\, dx$

6) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-4}\, dx$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 3x}\, dx$

8) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

9) $\displaystyle\int xe^{2x}\, dx$

10) $\displaystyle\int \ln(x)dx$

b) El costo marginal, como la función de las unidades producidas x, esta dado por $C' = 2 + 60x - 5x^2$. Hallar la función de costo total, sabiendo que \$65 es el costo fijo.

c) La propensión marginal al consumo en miles de millones está dada por:

$$\frac{dC}{dY} = \frac{7}{10} + \frac{0.2}{\sqrt{Y}},$$

Determinar la función de consumo si se sabe que el consumo es de 8 mil millones de pesos ($C = 8$) cuando $Y = 0$.

5.3. Integral definida

Introducción

El área de la región con una frontera curva puede ser aproximada sumando áreas de un conjunto de rectángulos. Al usar más rectángulos podemos aumentar la exactitud de la aproximación. El proceso de límite nos conduce a la definición de integral definida de una función en un intervalo cerrado.

La integral definida tiene muchas aplicaciones en estadística y economía. Nos permite calcular rangos de cantidades de probabilidad y promedios de consumo de energía.

5.4. Definición de integral definida

Sea f una función continua no negativa en $[a, b]$. Entonces el área A de la región bajo la gráfica de f es:

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right] \Delta x,$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son puntos arbitrarios en los n subintervalos de $[a, b]$ del mismo ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Definición 5.2. Sea f una función continua definida en $[a, b]$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right] \Delta x,$$

existe para todas las elecciones de puntos representativos $x_1, x_2, ..., x_n$ en los n subintervalos de $[a, b]$ del mismo ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, entonces este límite se llama la **integral definida** de f en $[a, b]$ y se le denota por $\int_a^b f(x)dx$. Así :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right] \Delta x.$$

Interpretación geométrica de la integral definida

- Si f es no negativa y continua en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx$$

es el área de la región bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$.

- Si f es continua en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx$$

  es el área de la región por arriba del intervalo $[a, b]$ menos el área de la región por debajo de $[a, b]$.

Ejemplo 58. Trazar la gráfica y hallar el área de la región acotada por debajo de la gráfica de la función f y arriba del eje x donde:

$$f(x) = -x^2 + 4$$

Solución

Igualando a cero la f obtenemos los puntos de intersección con el eje x

$$\begin{aligned} -x^2 + 4 &= 0 \\ 4 &= x^2 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Los puntos de intersección son -2 y 2, entonces el área entre esta gráfica y el eje x es (ver figura 25):

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)dx &= \int_{-2}^{2} [-x^2 + 4]dx \\ &= (-\frac{x^3}{3} + 4x)\Big|_{-2}^{2} \\ &= (-\frac{2^3}{3} + 4(2)) - (-\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2)) \\ &= \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

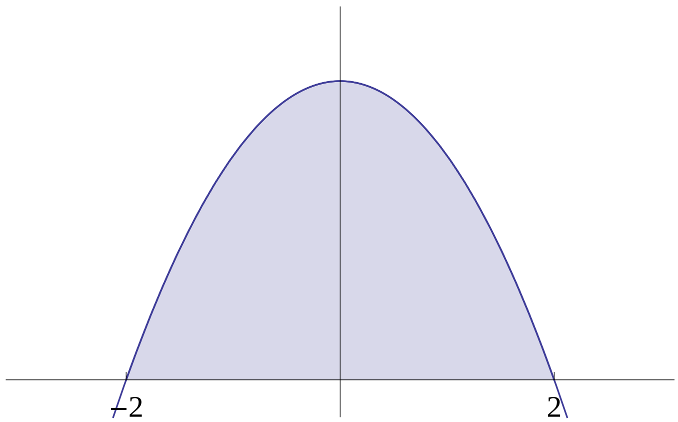

Figura 25: $f(x) = -x^2 + 4$

Ejemplo 59. En estadística, una función de densidad (de probabilidad) f de una variable x, donde x toma todos los valores en el intevalo $[a, b]$, tiene las siguientes propiedades:

1. $f(x) \geq 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = 1$.

   Si f es una función de densidad de probabilidad continua, la media μ de f en el intervalo $[a, b]$ está definida por:

   $$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)]dx,$$

   y la varianza σ^2 está dada por

   $$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)dx,$$

   La probabilidad de que x tome un valor entre c y d, lo cual se escribe $P(c \leq x \leq d)$, donde $a \leq c \leq x \leq d \leq b$, se representa por el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x entre $x = c$ y $x = d$. Por tanto:

   $$P(c \leq x \leq d) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

La función $f(x) = 6(x - x^2)$, donde $0 \leq x \leq 1$, satisface que es una función de densidad, por:

$$f(x) = 6(x - x^2) = 6x(1 - x) \geq 0$$

en $[0, 1]$ ya que $6x \geq 0$ si $x \geq 0$ y $1 - x \geq 0$ si $x \leq 1$, lo cual se cumple pues $x \in [0, 1]$, ademas:

$$\int_0^1 6(x - x^2)dx = 6\int_0^1 (x - x^2)dx = 6(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = 6(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{6}) = 1$$

con media μ

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^1 [x \cdot f(x)]dx = \mu = 6\int_0^1 [x(x - x^2)]dx \\ &= 6\int_0^1 [x^2 - x^3]dx = 6(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\Big|_0^1 = 6(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 6(\frac{1}{12}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

y varianza σ^2

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})(6(x - x^2))dx \\ &= 6\int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})(x - x^2)dx = 6\int_0^1 (x^3 - x^2 + \frac{x}{4} - x^4 + x^3 - \frac{x^2}{4}) \\ &= 6(-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{8})\Big|_0^1 \\ &= 6(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{20}\end{aligned}$$

Para esta función, podemos encontrar las siguientes probabilidades:

a) $P(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$.

Solución: Por la propiedad 3:

$$\begin{aligned}
P(0 \leq x \leq \frac{1}{4}) &= \int_0^{\frac{1}{4}} 6(x - x^2)\, dx \\
&= 6 \int_0^{\frac{1}{4}} (x - x^2)\, dx \\
&= 6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\
&= (3x^2 - 2x^3) \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{5}{32}.
\end{aligned}$$

b) $P(x \geq \frac{1}{2})$.

Solución:

$$\begin{aligned}
P(x \geq \frac{1}{2}) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 6(x - x^2)\, dx \\
&= 6 \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x - x^2)\, dx \\
&= 6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= (3x^2 - 2x^3) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5.5. Área entre dos curvas

Sean f y g funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces el área de la región acotada por arriba por $y = f(x)$ y por abajo por $y = g(x)$ en $[a, b]$ está dada por:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Ejemplo 60. Trazar la gráfica de las funciones f y g y determine el área de la región encerrada entre estas gráficas donde:

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^3$$

Solución

Igualando ambas funciones f y g obtenemos los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones

$$\begin{aligned} x^2 &= x^3 \\ x^2 - x^3 &= 0 \\ x^2(1-x) &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ (1-x) &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(1, 1)$, entonces el área entre estas graficas es (ver figura 26):

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx &= \int_0^1 [x^2 - x^3]dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

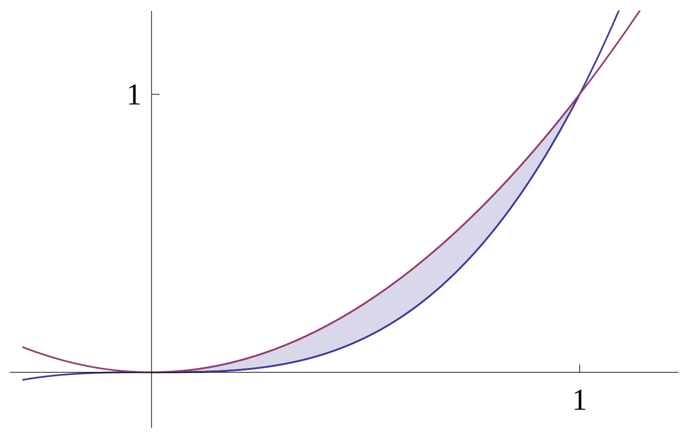

Figura 26: $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$

Ejemplo 61. Una curva de Lorenz $y = L(x)$ se utiliza para estudiar las distribuciones de ingresos. Si x es el porcentaje acumulativo de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulativo de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta $y = x$, donde x y y se expresan como decimales. Por ejemplo, 10 % de la gente recibe 10 % de los ingresos totales, 20 % de la gente recibe 20 % de los ingresos, etcétera.

Si $y = L(x)$ es la ecuación de una curva de Lorentz, entonces la desigualdad en la distribución de riqueza correspondiente se mide mediante el índice de Gini G, cuya formula esta dada por

$$G = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx$$

El índice de Gini siempre se situa entre 0 y 1. Un índice de 0 corresponde a una igualdad completa. Cuanto más pequeño sea el índice, más equitativa será la distribución de la riqueza; cuanto más grande sea el índice, más riqueza estará concentrada en pocas manos. Ver figura 27.

Suponga que la distribución real esta dada por la curva de Lorenz definida por

$$L(x) = \frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x.$$

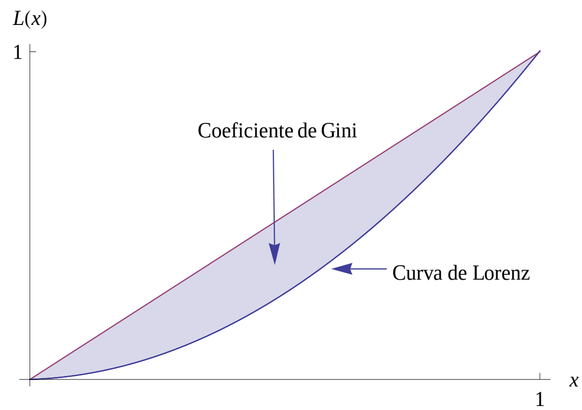

Figura 27: Curva de Lorenz y coeficiente de Gini

$$
\begin{aligned}
G &= 2\int_0^1 [x - L(x)]dx = 2\int_0^1 (x - (\frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x))dx \\
&= 2\int_0^1 (-\frac{20}{21}x^2 + \frac{20}{21}x)dx = 2(-\frac{20}{63}x^3 + \frac{20}{42}x^2)\Big|_0^1 \\
&= 2(-\frac{20}{63} + \frac{20}{42}) = 0.3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor (0,3 , 0,1) significa que el 30 % de la población posee el 10 % de la riqueza total en la sociedad. Ver figura 28.

Problema 20. La función de demanda para un producto es:

$$p = D(q) = 100 - 0.05q,$$

donde p es el precio por unidad (en pesos) de q unidades. La función de oferta es:

$$p = S(q) = 10 + 0.1q.$$

Determinar el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio de mercado.

Supongamos que el mercado para un producto está en equilibrio y que (q_0, p_0) es el punto de equilibrio (el punto de intersección de las curvas de

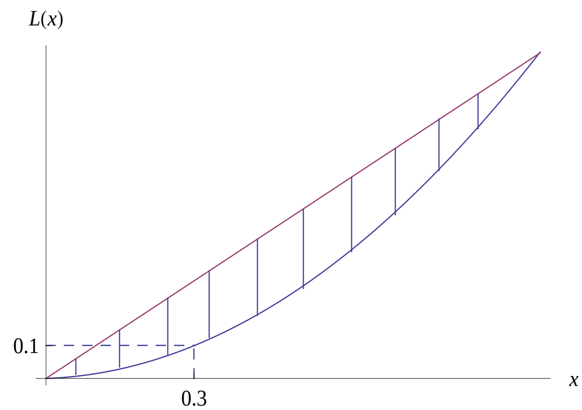

Figura 28: $\frac{20}{21}x^2 + \frac{1}{21}x$

demanda y oferta para el producto). El excedente de los consumidores, y se abrevia EC, corresponde al área entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la curva de demanda y abajo por la recta $p = p_0$. Entonces,

$$\mathrm{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq,$$

donde f es la función de demanda. El excedente de los productores, y se abrevia EP, corresponde al área, entre $q = 0$ y $q = q_0$. limitada por arriba por la recta $p = p_0$ y abajo por la curva de oferta. Entonces:

$$\mathrm{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq,$$

donde g es la función de oferta.

Solución del problema 20: Primero debemos encontrar el punto de equilibrio (p_0, q_0) resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$p = 100 - 0.05q$$
$$p = 10 + 0.1q.$$

Por el método de igualación, tenemos que:

$$\begin{aligned}
10 + 0.1q &= 100 - 0.05q, \\
0.15q &= 90, \\
q &= 600.
\end{aligned}$$

Cuando $q = 600$, $p = 10 + 0.1(600) = 70$. Así, $q_0 = 600$ y $p_0 = 70$. El excedente de los consumidores es:

$$\begin{aligned}
\text{EC} &= \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq, \\
&= \int_0^{600} [100 - 0.05q - 70]\, dq, \\
&= \left(30q - 0.05\,\frac{q^2}{2}\right)\Big|_0^{600} \\
&= 9000.
\end{aligned}$$

El excedente de los productores es:

$$\begin{aligned}
\text{EP} &= \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq, \\
&= \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)]\, dq, \\
&= \left(60q - 0.1\,\frac{q^2}{2}\right)\Big|_0^{600} \\
&= 18000.
\end{aligned}$$

Por tanto, el excedente de los consumidores es de \$9,000 y el de los productores es de \$18,000.

5.6. Integral impropia

La definición de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ requiere que el intervalo de integración $a \leq x \leq b$ este acotado, pero en ciertas aplicaciones es útil considerar integrales sobre intervalos no acotados como $x \geq a$. A este tipo de integrales se les llaman **integrales impropias**.

Definición 5.3. (**La integral impropia**). Si $f(x)$ es continua para $x \geq a$, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx$$

Si el límite existe, se dice que la integral **converge** al valor del límite. Si no existe el límite, se dice que la integral impropia **diverge**.

Ejemplo 62. Evalué o demuestre que converge la integral impropia:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Solución: Primero calcule la integral de 1 a N y luego haga que N tienda al infinito. Continúe su trabajo de este modo:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^N \right) = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{N} + 1 \right) = 1$$

Ejemplo 63. Evalué o demuestre que diverge la integral impropia:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución: Primero calcule la integral de 1 a N y luego haga que N tienda al infinito. Continúe su trabajo de este modo:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-1/2}\,dx = \lim_{N\to\infty} 2x^{1/2}\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty} \left(2\sqrt{x} - 1\right) = \infty.$$

Por lo tanto la integral impropia diverge.

Un test de comparación para la convergencia

El siguiente test de convergencia de integrales suele ser útil por que no requiere el cálculo de la integral.

Teorema 5.4. ***(Un test de comparación para la convergencia)*** *Supongamos que f y g son continuas para toda $x \geq a$ y que*

$$\mid f(x) \mid \leq g(x) \quad (para\ todax \leq a)$$

Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

Ejemplo 64. Para todo $x \geq 1$, se tiene $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Como $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ converge, por el Teorema (5.4), la integral $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ también converge.

Ejemplo 65. En la teoría de crecimiento económico aparecen frecuentemente integrales de la forma

$$\int_{t_0}^\infty U(c(t))e^{-\alpha t}\,dt \tag{26}$$

En la expresión, $c(t)$ designa el consumo en el momento t, U es la función de utilidad instantánea y α es una tasa positiva de descuento. Supongamos que existen números M y β, con $\beta \leq \alpha$, tales que

$$\mid U(c(t)) \mid \leq Me^{\beta t} \tag{27}$$

pata todo $t \geq t_0$ y para todo nivel posible de consumo $c(t)$ en el tiempo t. Así, el valor absoluto de la utilidad de consumo crece a una tasa menor que la de descuento α. Probar que, entonces (26) converge.

Solución: De (27) obtenemos

$$\mid U(c(t))e^{-\alpha t} \mid \leq Me^{-(\alpha-\beta)t} \quad (\text{parea todo} t \geq t_0)$$

Además,

$$\int_{t_0}^T Me^{(\alpha-\beta)t}\,dt = \Big|_{t_0}^T \frac{-M}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)t} = \frac{M}{\alpha-\beta}\left[e^{-(\alpha-\beta)t_0} - e^{-(\alpha-\beta)T}\right]$$

Como $\alpha - \beta > 0$, la última expresión tiende a $[M/(\alpha-\beta)]e^{-(\alpha-\beta)t_0}$ cuando $T \to \infty$. Se deduce del Teorema (5.4) que (26) converge.

TAREA 2: INTEGRAL DEFINIDA

Trabajo individual

1. Trazar la gráfica y hallar el área de la región acotada por debajo de la gráfica de la función f y por arriba del eje x, de $x = a$ a $x = b$, donde:

   a) $f(x) = 2x - x^2$; $a = 0, b = 2$.

   b) $f(x) = 4 - x^2$; $a = -2, b = 2$.

   c) $f(x) = xe^{-x^2}$; $a = 0, b = 3$.

2. Trazar la gráficas de las funciones f y g y determine el área de la region encerrada entre estas gráficas donde:

   a) $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x^2$.

   b) $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2$.

   c) $f(x) = 5x - x^2$ y $g(x) = x$.

3. Cálcule el índice de Gini para las siguientes curvas de Lorenz e interprete:

   a) $L(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x$.

   b) $L(x) = 0.8x^2 + 0.2x$.

4. Encuentre el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio de mercado de las siguientes funciones de demanda y oferta

   a) $D(q) = 16 - q^2$ y $S(q) = 4 + q$.

   b) $D(q) = 14 - q^2$ y $S(q) = 2q^2 + 2$.

5. Demuestre la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

$$a) \int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx \qquad b) \int_1^\infty x^{-3/2} dx \qquad c) \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Referencias

[1] Sydsaeter Knut, Peter J. Hammond, 2008. Matemáticas para el Análisis Económico. Pearson Educación. 3a. edición.

[2] Darell A. Turkington, 2007. Mathematical Tools for Economics, Blackwell Publishing.

[3] Mike Rosser, 2003. Basic Mathematics for Economists, Routledge. 2da. edición.

[4] Jean Soper, 2004. Mathematics for Economics and Business. Blackwell. 2da. Edition

[5] Gustavo Zorzoli, 2006. Análisis Matemático utilizando Mathematica. Omicron.