

### 3.2. Combinación lineal de vectores, dependencia e independencia lineal

**Definición 3.4** Un vector  $\beta \in V$ , se dice **combinación lineal** de los vectores  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ , si existen escalares  $a_1, \dots, a_n \in K$ , tales que:

$$\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i.$$

**Ejemplo 43** El vector  $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$  en  $\mathbb{R}^2$  es combinación lineal de los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ya que:

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**Definición 3.5** Sea  $S$  es cualquier colección de vectores de  $V$ . **El subespacio generado por  $S$**  se define como

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i \mid a_i \in K, \alpha_i \in S \text{ y } k = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

Cuando  $L(S) = V$ , decimos que  $S$  genera a  $V$

**Definición 3.6** Un subconjunto  $S$  de  $V$  se dice **linealmente dependiente**, si existen vectores distintos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $S$  y escalares  $a_1, \dots, a_n \in K$ , no todos cero, tales que:

$$a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice **linealmente independiente**. Si el conjunto  $S$  solo tiene un número finito de vectores  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , se dice a veces que los  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son dependientes (o independientes), en vez de decir que  $S$  es dependiente (o independiente).

**Ejemplo 44** Los siguientes vectores en  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes.

**Solución:** Sea

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de lo anterior obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$2a_1 - a_2 = 0$$

$$3a_1 + 5a_2 = 0$$

el cual tiene como solución:  $a_1 = 0$  y  $a_2 = 0$ .

**Ejemplo 45** Los vectores

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes. Esto se sigue de

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 46** Los vectores  $(1, 2, 3)$  y  $(1, 1, 0)$  son linealmente independientes en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea:

$$a_1 \cdot (1, 2, 3) + a_2 \cdot (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Entonces

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$2a_1 + a_2 = 0$$

$$3a_1 = 0$$

Es fácil ver que el sistema de ecuaciones anterior tiene como única solución  $a_1 = a_2 = 0$ .

**Ejemplo 47** Demostrar

- (a) Si  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  son linealmente dependientes.
- (b) Si  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  son linealmente independientes.

**Solución:**

- (a) Se ve que  $\alpha_2 = 2\alpha_1$ , luego  $2\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ . Tomando  $a_1 = 2$  y  $a_2 = -1$  se obtiene  $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ , lo cual prueba que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son linealmente dependientes.
- (b) La ecuación  $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ , da lugar al sistema

$$\begin{aligned} 3a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución única  $a_1 = a_2 = 0$ . Por tanto  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son linealmente independientes.

### 3.3. Base y dimensión

**Definición 3.7** Una **base** de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^n$  y que genera el espacio  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.8** Sea  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  es una base.
2. El conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  es linealmente independiente.
3. El conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  genera a  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 48** Los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son una base de  $\mathbb{R}^2$ . Si

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces de la combinación lineal anterior, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$a_1 - a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 = 0$$

El cual tiene como única solución:  $a_1 = a_2 = 0$ . Ahora, sea  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , veamos que existen  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $a_1 \cdot (1, 1) + a_2 \cdot (-1, 1) = (x, y)$ . Es fácil ver que  $a_1 = \frac{x+y}{2}$  y  $a_2 = \frac{y-x}{2}$ . De lo anterior se sigue que los vectores  $(1, 1)$  y  $(-1, 1)$  son linealmente independientes y que generan a  $\mathbb{R}^2$ , por lo tanto son una base de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.9** Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial  $V$  contiene el mismo número de vectores. Este número que es compartido por todas las bases y expresa el número de grados de libertad del espacio, es la dimensión de  $V$ .

**Ejemplo 49** En  $\mathbb{R}^n$ , sean  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  donde el 1 aparece en el  $i$ -ésimo lugar y todas las otras coordenadas son cero. El conjunto  $\{e_i\}_{i=1}^n$  es una base de  $\mathbb{R}^n$  llamada la **base canónica**, por lo tanto la dimensión del espacio  $\mathbb{R}^n$  es  $n$ .

**Ejemplo 50** Si  $A$  es una matriz 3 por 2 con rango  $r$ , entonces:

- a) La dimensión del espacio columna  $C(A)$  es el rango  $r$ .
- b) La dimensión del espacio nulo de  $A$  es  $2 - r$ .
- c) La dimensión del espacio renglón  $C(A^T)$  es también  $r$ .
- d) La dimensión del espacio nulo izquierdo  $N(A^T) = 3 - r$ .