1. Derivadas

2. Optimización libre con una variable

3. Cálculo en varias variables

4. Optimización libre y restringida en varias variables

Introducción

Los problemas de optimización se pueden describir usualmente de la siguiente forma matemática. Hay una **función objetivo** $f(x_1, ..., x_n)$, que es una función real de n variables de la que hay que hallar los valores máximos o mínimos. También hay un **conjunto de restricciones** o un **conjunto de oportunidades** S que es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Se pueden abarcar varios tipos de distintos problemas de optimización dando el conjunto S adecuadamente. Si f tiene un punto óptimo en el interior de S se habla del caso clásico. Si S es el conjunto de todos los puntos $(x_1, ..., x_n)$ que verifican un cierto número de ecuaciones tenemos un problema lagrangiano, que es maximizar o minimizar una función sujeta a restricciones de igualdad.

4.1. Optimización libre

Sea f una función de n variables $x_1, ..., x_n$ definida en un dominio $S \subset \mathbb{R}^n$. Sea $c = (c_1, ..., c_n) \in S$ y supongamos que f toma un valor en c que es mayor o igual que todos los valores de f en los otros puntos $x = (x_1, ..., x_n)$ de S, es decir:

$$f(x) \leq f(c) \text{ para todo } x \in S.$$

Entonces se llama a c un **máximo global** de f en S y a $f(c)$ el **valor máximo**. De forma análoga definimos un **mínimo global** y el **valor mínimo** invirtiendo el signo de la desigualdad. Conjuntamente se usarán los nombres de óptimos y valores óptimos para significar máximos o mínimos. El vector c se llama **un punto estacionario** de $f(x_1, ..., x_n)$ si $x = c$ es una solución de las n ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0, ..., \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

Teorema 4.1. *Sea f una función definida en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $c = (c_1, ..., c_n)$ un punto interior de S en el que f es diferenciable. Una* *condición necesaria para que c sea un máximo o un mínimo para f es que c sea un punto estacionario para f, es decir,*

$$f_i'(c) = 0 \ (i = 1, ..., n).$$

En particular se tiene el siguiente

Teorema 4.2. *Una condición necesaria para que una función $f(x, y)$ diferenciable tenga un máximo o un mínimo en un punto interior (x_0, y_0) de su dominio es que (x_0, y_0) sea un punto estacionario de f, esto es,*

$$f_x'(x_0, y_0) = 0, \ f_y'(x_0, y_0) = 0. \tag{1}$$

Teorema 4.3. *(Condiciones suficientes de óptimos globales) Si $f(x, y)$ es una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un dominio convexo S, y sea (x_0, y_0) un punto estacionario de f interior a S, entonces la condición suficiente para que la función $f(x, y)$ tenga un máximo o un mínimo respectivamente es:*

(a) Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:

$$D(x, y) = f_{xx}''(x, y) f_{yy}''(x, y) - [f_{xy}''(x, y)]^2 < 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un punto de silla de $f(x, y)$ en S.

(b) Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:

$$D(x, y) = f_{xx}''(x, y) f_{yy}''(x, y) - [f_{xy}''(x, y)]^2 > 0, \ y \ f_{xx}''(x, y) < 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un máximo de $f(x, y)$ en S.

(c) Si para todo $(x, y) \in S$ se cumplen las siguientes condiciones:

$$D(x, y) = f_{xx}''(x, y) f_{yy}''(x, y) - [f_{xy}''(x, y)]^2 > 0, \ y \ f_{xx}''(x, y) > 0,$$

entonces (x_0, y_0) es un mínimo de $f(x, y)$ en S.

Ejemplo 1. Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ y clasifique cada uno como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

Solución

Como

$$f_x = 2x \quad \text{y} \quad f_y = 2y$$

el único punto crítico de f es $(0,0)$. Para poner a prueba este punto, use las derivadas parciales de segundo orden

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2 \quad \text{y} \quad f_{xy} = 0$$

y obtenga

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - 0^2 = 4$$

Esto es , $D(x,y) = 4$, para todos los puntos (x,y), en particular,

$$D(0,0) = 4 > 0$$

Por tanto f tiene un extremo relativo en $(0,0)$. Además, como

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$

se deduce que el extremo relativo en $(0,0)$ es un mínimo relativo. Como referencia, la grafica de f aparece en la figura 21.

Ejemplo 2. Encuentre todos los puntos críticos de la funcion $f(x,y) = 12x - x^3 - 4y^2$ y clasifique cada uno como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto silla.

Solución

Como

$$f_x = 12 - 3x^2 \quad \text{y} \quad f_y = -8y$$

los puntos críticos se encuentran resolviendo simultaneamente las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 12 - 3x^2 &= 0 \\ -8y &= 0 \end{aligned}$$

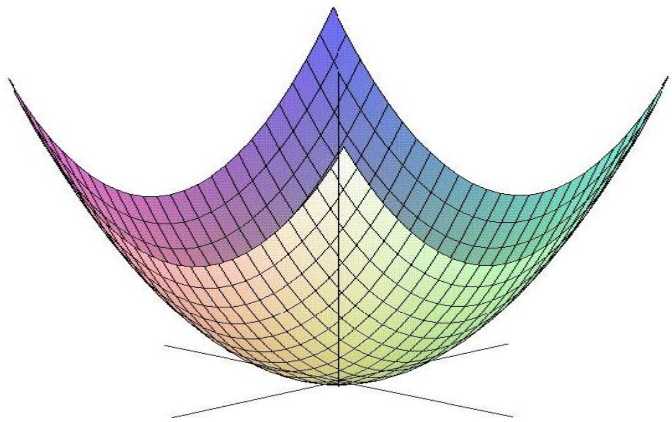

Figura 1: $f(x, y) = x^2 + y^2$

De la segunda ecuación obtenemos $y = 0$ y, de la primera,

$$3x^2 = 12$$
$$x = 2 \text{ o } -2$$

Por tanto, hay dos puntos críticos, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Para determinar la naturaleza de estos puntos, primero se calcula

$$f_{xx} = -6x \quad f_{yy} = -8 \quad \text{y} \quad f_{xy} = 0$$

y luego se forma la función

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6x)(-8) - 0 = 48x$$

Al aplicar la prueba de las segundas derivadas parciales a los dos puntos críticos, se obtiene

$$D(2, 0) = 48(2) = 96 > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(2, 0) = -6(2) = -12 < 0$$

y

$$D(-2, 0) = 48(-2) = -96 < 0$$

de modo que hay un máximo realtivo en $(2, 0)$ y un punto silla en $(-2, 0)$. Ver figura 22.

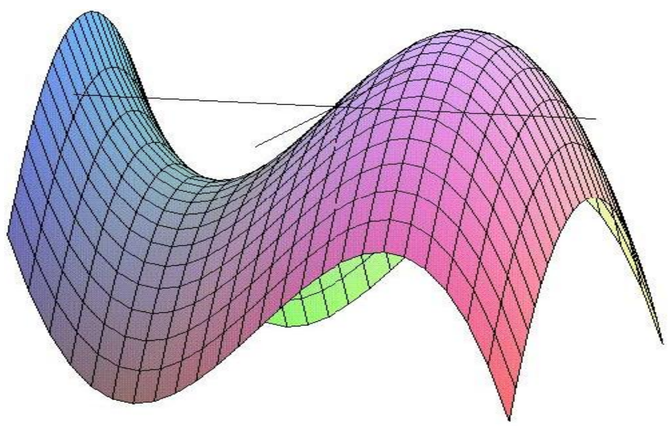

Figura 2: $f(x,y) = 12x - x^3 - 4y^2$

Ejemplo 3. Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$ y clasifique cada uno como máximo relativo, mínimo relativo o punto silla.

Solución

Como

$$f_x = 3x^2 + 6y \quad \text{y} \quad f_y = -3y^2 + 6x$$

los puntos críticos de f se encuentran resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones

$$3x^2 + 6y = 0 \quad \text{o} \quad -3y^2 + 6x = 0$$

De la primera ecuación se obtiene $y = -\frac{x^2}{2}$ que se puede sustituir en la segunda ecuación para encontrar

$$\begin{aligned} -3\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2 + 6x &= 0 \\ -\frac{3x^4}{4} + 6x &= 0 \\ -x(x^3 - 8) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de dicha ecuación son $x = 0$ y $x = 2$. Estas son las coordenadas x de los puntos críticos de f. Para obtener las coordenadas y correspondientes, sustituya estos valores de x en la ecuación $y = -\frac{x^2}{2}$ (o en cualquiera de las dos ecuaciones originales).

Así encontrara que $y = 0$ cuando $x = 0$ y $y = -2$ cuando $x = 2$. De ahí se deduce que los puntos críticos de f son $(0, 0)$ y $(-2, 2)$.

Las derivadas parciales de segundo orden de f son

$$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = -6y \quad \text{o} \quad f_{xy} = 6$$

Por tanto,

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -36xy - 36 = -36(xy + 1)$$

Como

$$D(0, 0) = -36[(0)(0) + 1] = -36 < 0$$

se deduce que f tiene un punto silla en $(0, 0)$. Como

$$D(2, -2) = -36[2(-2) + 1] = 108 > 0$$

y

$$f_{xy}(2, -2) = 6(2) = 12 > 0$$

se ve que f tiene un mínimo relativo en $(2, -2)$.

Ejemplo 4. Sea $Y = F(K, L)$ es una función de producción, donde K es el capital y L es el trabajo. Designemos por p el precio por unidad de producción, por r el costo por unidad de capital y w el precio (o tasa de salario) por unidad de trabajo. El beneficio de producir y vender $F(K, L)$ unidades es entonces:

$$\pi(K, L) = pF(K, L) - rK - wL,$$

Si F es diferenciable y π tiene un máximo con $K > 0$ y $L > 0$, entonces por el teorema (**??**) las parciales de π deben anularse. Por tanto, las condicione de primer orden son:

$$\pi'_K(K, L) = pF'_K(K, L) - r = 0$$
$$\pi'_L(K, L) = pF'_L(K, L) - w = 0.$$

Así una condición necesaria para que el beneficio tenga un máximo para $K = K^*$ y $L = L^*$ es que:

$$pF'_K(K^*, L^*) = r, \; pF_L(K^*, L^*) = w$$

otra forma de interpretarlo es

$$F'_K(K^*, L^*) = \frac{r}{p}, \; F_L(K^*, L^*) = \frac{w}{p}$$

Supongamos que incrementamos el capital en una unidad desde el nivel K^*. ¿Cuánto ganaremos? La producción crece en, aproximadamente, $F'_K(K^*, L^*)$ unidades. Como cada una de esas unidades tiene un precio p, el aumento de ingresos es de $pF'_K(K^*, L^*)$ aproximadamente.¿Cúanto se pierde en este aumento unitario de capital? Se pierde r, que es el costo de una unidad de capital. Estas dos cantidades deben ser iguales. La segunda ecuación tiene una interpretación análoga: incrementando el trabajo en una unidad desde el nivel L^* se tendrá un aumento aproximado de los ingresos de $pF'_L(K^*, L^*)$, mientras que el costo del trabajo extra es w, y esas dos cantidades son iguales. El punto (K^*, L^*) que maximiza el beneficio tiene la propiedad de que el ingreso extra generado por un aumento unitario de capital o trabajo se compensa con el aumento del costo.

Problema 1. Supongamos que:

$$Y = F(K, L) = 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}},$$

es una función de producción, donde K es el capital y L es el trabajo. Sean $p = 0.5$ el precio por unidad de producción, $r = 0.1$ el costo por unidad de capital y $w = 1$ el precio por unidad de trabajo. Hallar el beneficio máximo en este caso.

Solución del problema 13: La función de beneficios es:

$$\pi(K, L) = 0.5 \cdot 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1K - 1 \cdot L = 3K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1K - L,$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\pi'_K(K, L) = 1.5 \cdot K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1 = 0,$$
$$\pi'_L(K, L) = K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} - 1 = 0.$$

La primera ecuación da $K^{-1/2} = L^{1/3}$. Sustitutendo este valor de $K^{\frac{1}{2}}$ en la segunda ecuación obtenemos $15L^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = 1$. Así $15L^{-\frac{1}{3}} = 1$, ó $L = 15^3$. Veamos que el punto estacionario $(K, L) = (50.625, 3.375)$ maximiza los beneficios.

Tenemos que:

$$\pi(K, L) = 3K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} - 0.1k - L,$$

con $K > 0$ y $L > 0$, luego:

$$\pi''_{KK} = -\frac{3}{4}K^{-3/2}L^{1/3}\,\pi''_{KL} = \frac{1}{2}K^{-1/2}L^{-2/3}, \text{y}$$
$$\pi''_{LL} = -\frac{2}{3}K^{1/2}L^{-5/3}.$$

Por tanto, $\pi''_{KK} < 0$ y $\pi''_{LL} < 0$ para todo $K > 0$ y $L > 0$. Además,

$$\pi''_{KK}\pi''_{LL} - (\pi''_{KL})^2 = \frac{1}{2}K^{-1}L^{-4/3} - \frac{1}{4}K^{-1}L^{-4/3} > 0$$

Por el teorema **??** el punto $(50.625, 3.375)$ es un máximo de $\pi(K, L)$. Entonces, para maximizar los beneficios, hay que tomar:

$$L = 15^3 = 3.375 \text{ y } K = 15^2L^{2/3} = 15^4 = 50.625$$

El valor de la función de beneficios es $\pi(50.625, 3.375) = 1687.5$.

TAREA 1: OPTIMIZACIÓN LIBRE EN VARIAS VARIABLES

Trabajo en equipos con dos o tres integrantes.

En los ejercicios 1 a 6, encontrar los valores máximos, mínimos o puntos de silla de cada función.

1. $f(x,y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 35$

3. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

4. $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$

5. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$

6. $f(x,y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$

4.2. Optimización restringida

El Método de los multiplicadores de Lagrange

Las variables que aparecen en los problemas económicos de optimización estan casi siempre sometidas a ciertas restricciones. Por ejemplo, precios y cantidades son a menudo no negativos por definición, y la escasez impone que las cantidades que se consumen estén acotadas superiormente. Además cuotas de producción, limitaciones presupuestarias y otras condiciones pueden restringir el rango de elección.

Cuando la restricción es una función complicada, o cuando hay todo un sistema de ecuaciones para expresar restricciones, los economistas usan el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para hallar las soluciones del problema:

$$\text{máx(mín) } f(x, y) \text{ sujeta a } g(x, y) = c \tag{2}$$

se usa el método de los multiplicadores de Lagrange el cual consiste en:

1. Escribir la función lagrangiana:

   $$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

   donde λ es una constante.

2. Derivar $\mathcal{L}$ con respecto a x e y, e igualar a cero las parciales.

3. Escribir el sistema formado por las dos ecuaciones de 2 junto con la restricción:

   $$\begin{aligned} f_1'(x, y) &= \lambda g_1'(x, y) \\ f_2'(x, y) &= \lambda g_2'(x, y) \\ g(x, y) &= c \end{aligned}$$

4. Resolver esas tres ecuaciones en las tres incógnitas x, y y λ.

Consideremos el problema:

$$\text{máx } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y)=c$$

Sean x^* e y^* los valores de x y y que resuelven el problema. En general x^* y y^* dependen de c. Vamos a suponer que $x^* = x^*(c)$ e $y^* = y^*(c)$ son funciones diferenciables de c. Entonces:

$$f^*(c) = (x^*(c), y^*(c)),$$

es también función de c. A $f^*(c)$ se le llama **función valor óptimo** para el problema. Cuando se usa el método lagrangiano, el valor correspondiente del multiplicador de Lagrange también depende de c. Si se satisfacen ciertas condiciones de regularidad tenemos el siguiente resultado:

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda(c) \tag{3}$$

Así el multiplicador de Lagrange $\lambda = \lambda(c)$ es la tasa de variación del valor óptimo de la función objetivo cuando la constante de restricción c cambia.

Teorema 4.4. *(Teorema de Lagrange) Supongamos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en un dominio A del plano xy y que (x_0,y_0) es un punto interior de A y un óptimo local para $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y)=c$. Supongamos además que no se anulan a la vez $g_1'(x_0,y_0)$ y $g_2'(x_0,y_0)$. Existe un número único λ tal que la función lagrangiana:*

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y)-c)$$

tiene un punto estacionario en (x_0,y_0).

Bajo las hipótesis del Teorema **??** el método de los multiplicadores de Lagrange para el problema:

$$\text{máx(mín) } f(x,y) \text{ sujeta a } g(x,y)=c$$

da condiciones necesarias para la solución del problema. El siguiente resultado da condiciones suficientes para resolver el problema.

Teorema 4.5. *(Suficiencia global) Supongamos que las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continuamente diferenciables en un conjunto abierto convexo A de $\mathbb{R}^2$ y sea $(x_0, y_0) \in A$ un punto estacionario para la función lagrangeana:*

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$$

Supongamos además que $g(x_0, y_0) = c$. Entonces:

1. *$\mathcal{L}$ es concava $\Longrightarrow$ resuelve el problema de maximización de (**??**).*

2. *$\mathcal{L}$ es convexa $\Longrightarrow$ resuelve el problema de minimización de (**??**).*

Problema 2. Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar Q unidades de su producto, con

$$Q = F(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

Le cuesta a la empresa \$100 por cada unidad de mano de obra y \$300 por cada unidad de capital empleado. La empresa dispone de una suma de \$45,000 para propósitos de producción.

i) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con objeto de maximizar su producción.

ii) Gráfique a través de las curvas de nivel los resultados obtenidos.

Solución del problema 14

i) Aquí la función a maximizar es

$$\max Q(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

El costo de emplear L unidades de mano de obra a \$100 cada una y K unidades de capital a \$300 cada una es de $(100L + 300K)$ pesos. Puesto que deseamos disponer por completo de la suma de \$45 000, debemos tener que

$$100L + 300K = 45,000$$

Maximizaremos $Q(L, K)$ sujeta a esta restricción. La función lagrangeana es

$$\mathcal{L}(L, K, \lambda) = 50L^{2/3}K^{1/3} - \lambda(100L + 300K - 45,000).$$

A fin de obtener un máximo de $Q(L, K)$, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \frac{100}{3}L^{-1/3}K^{1/3} - 100\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \frac{50}{3}L^{2/3}K^{-2/3} - 300\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(100L + 300K - 45,000) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ, obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Ahora igualamos los dos valores de λ

$$\frac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} = \frac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Despejando en ambos lados L, obtenemos

$$L = 6K$$

Sustituyendo esto en la expresión de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$ resulta que

$$600K + 300K - 45,000 = 0 \quad \text{o bien} \quad K = 50$$

Por consiguiente, $L = 6K = 300$ y la empresa maximiza su producción si emplea 300 unidades de mano de obra y 50 de capital.

ii) La gráfica de las curvas de nivel se muestra en la figura 23.

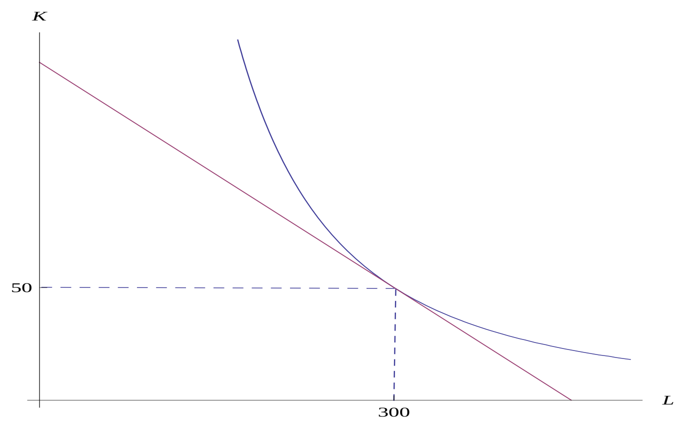

Figura 3: $50L^{2/3}K^{1/3}$ sujeto a $100L + 300K = 45,000$

Problema 3. Un consumidor tiene \$600 para gastar en dos mercancias, la primera de las cuales cuesta \$20 por unidad y, la segunda, \$30 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor con x unidades de la primera mercancía y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la **función de utilidad de Cobb-Douglas** $U(x, y) = 10x^{3/5}y^{2/5}$.

i) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de cada mercancía que debe comprar el consumidor para maximizar su utilidad.

ii) Gráfique a través de las curvas de nivel los resultados obtenidos.

Solución al problema 15

i) Aquí la función a maximizar es

$$\text{máx}\, U(x, y) = 10x^{3/5}y^{2/5}$$

El costo total de comprar x unidades de la primera mercancía a \$20 por unidad y, y unidades de la segunda mercancía a \$30 por unidad, es $20x + 30y$. Como el consumidor tiene sólo \$600 para gastar, la meta es maximizar la utilidad $U(x, y)$ sujeta a la restricción presupuestal

$$20x + 30y = 600$$

Maximizaremos $U(x, y)$ sujeta a esta restricción. La función lagrangeana es

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 10x^{3/5}y^{2/5} - \lambda(20x + 30y - 600).$$

A fin de obtener un máximo de $U(x, y)$, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 6x^{-2/5}y^{2/5} - 20\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4x^{3/5}y^{-3/5} - 30\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(20x + 30y - 600) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ, obtenemos

$$\lambda = \frac{3}{10}x^{-2/5}y^{2/5} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Ahora igualamos los dos valores de λ

$$\frac{3}{10}x^{-2/5}y^{2/5} = \frac{2}{15}x^{3/5}y^{-3/5}$$

Despejando en ambos lados y, obtenemos

$$y = \frac{4}{9}x$$

Sustituyendo esto en la expresión de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$ resulta que

$$20x + 30(\frac{4}{9}x) = 600 \quad \text{o bien} \quad x = 18$$

Por consiguiente, $y = \frac{4}{9}(18) = 8$. Esto es, para maximizar la utilidad, el consumidor debe comprar 18 unidades de la primera mercancía y 8 unidades de la segunda.

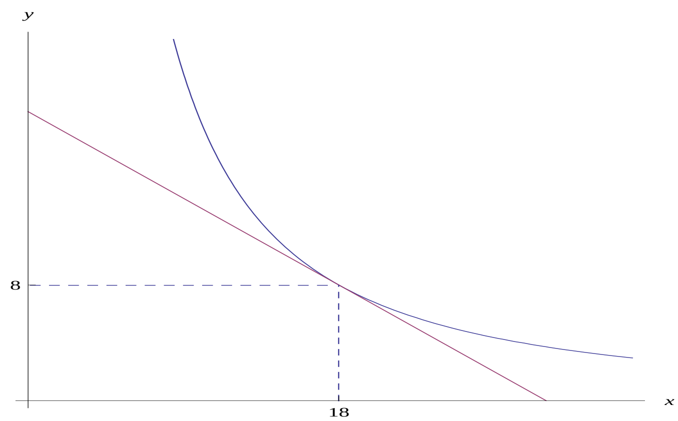

Figura 4: $10x^{3/5}y^{2/5}$ sujeto a $20x + 30y = 600$

ii) La gráfica de las curvas de nivel se muestran en la figura 24

Problema 4. Una empresa usa cantidades K y L de capital y trabajo, respectivamente para producir una cantidad Q de un solo producto, siguiendo la función de producción:

$$Q = F(K, L) = K^{1/2}L^{1/4}.$$

Los precios de capital y trabajo son r y w respectivamente.

i) Hallar las cantidades K y L que minimizan los costos, así como el costo mínimo, como funciones de r, w y Q. Designemos por K^*, L^*, y C^* a estos valores.

ii) Comprobar que:

$$K^* = \frac{\partial C^*}{\partial r},\ L^* = \frac{\partial C^*}{\partial w},\ \lambda = \frac{\partial C^*}{\partial Q},\ \frac{\partial K^*}{\partial w} = \frac{\partial L^*}{\partial r}.$$

Solución del problema 16

i) La empresa tiene que resolver el siguiente problema de minimización de costo:

$$\min C = rK + wL \text{ sujeta a } Q = K^{1/2}L^{1/4}$$

La función lagrangiana es:

$$\mathcal{L}(K, L) = rK + wL - \lambda(K^{1/2}L^{1/4} - Q).$$

Igualando las derivadas parciales a cero obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2}L^{1/4} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \frac{1}{4}\lambda K^{1/2}L^{-3/4} = 0.$$

Así, $r = \frac{1}{2}\lambda K^{-1/2}L^{1/4}$ y $w = \frac{1}{4}\lambda K^{1/2}L^{-3/4}$. Despejando λ de estas dos ecuaciones e igualando los resultados:

$$\lambda = 2r\lambda K^{1/2}L^{-1/4} = 4wK^{-1/2}L^{3/4}$$

Simplificando por $K^{1/2}L^{1/4}$ obtenemos $2rK = 4wL$, luego $L = (r/2w)K$. Llevando este valor a la restricción $K^{-1/2}L^{1/4} = Q$ tenemos que $K^{1/2}(r/2w)^{1/4}K^{1/4} = Q$, luego:

$$K^{3/4} = 2^{1/4}r^{-1/4}w^{1/4}Q \qquad (4)$$

Elevando ambos miembros de la igualdad (**??**) a 4/3 y usando superíndices $(*)$ se tiene:

$$K^* = 2^{1/3}r^{-1/3}w^{1/3}Q^{4/3}$$

y así:

$$L^* = (r/2w)K^* = 2^{-2/3}r^{2/3}w^{-2/3}Q^{4/3}$$

La función lineal $rK + wL$ es convexa y la función de Cobb-Douglas $K^{1/2}L^{1/4}$ es cóncava. Como $\lambda \geq 0$, la función lagrangiana:

$$\mathcal{L}(K, L) = rK + wL + (-\lambda)(K^{1/2}L^{1/4} - Q)$$

es suma de dos funciones convexas y, por tanto, es convexa. Por el Teorema **??**, el punto (K^*, L^*) minimiza el costo. El costo mínimo correspondiente es:

$$C^* = rK^* + wL^* = 3 \cdot 2^{-2/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{4/3} \qquad (5)$$

Finalmente, usando (**??**) otra vez, hallamos $\lambda = 2^{4/3}r^{2/3}w^{1/3}Q^{1/3}$.

ii) Por (**??**) tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^*}{\partial r} &= 3 \cdot 2^{-2/3} \frac{2}{3} r^{-1/3} w^{1/3} Q^{4/3} \\ &= 2^{1/3} r^{-1/3} w^{1/3} Q^{4/3} \\ &= K^*\end{aligned}$$

Observemos que la tercera igualdad de ii) es un caso particular de (**??**), y vemos que el valor común es $\lambda = \partial C^*/\partial Q = 2^{4/3} r^{2/3} w^{1/3} Q^{1/3}$. Se comprueban fácilmente las demás igualdades.

TAREA 2: OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

Trabajo en equipo con dos o tres integrantes.

1. Emplendo K unidades de capital y L unidades de mano de obra, una empresa puede elaborar Q unidades de su producto, con

   $$Q(K, L) = 50K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

   Le cuesta a la empresa \$300 por cada unidad de capital y \$100 por cada unidad de mano de obra empleado. La empresa dispone de una suma de \$ 45,000 para propositos de producción.

   a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de capital y trabajo que la empresa debería utilizar con objeto de maximizar su producción.

   b) Grafique las curvas de nivel de la función de restricción presupuestaria y de la función de producción.

2. Emplendo K unidades de capital y L unidades de mano de obra, una empresa puede elaborar Q unidades de su producto, con

   $$Q(K, L) = 12K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{2}{5}}$$

   Le cuesta a la empresa \$40 por cada unidad de capital y \$5 por cada unidad de mano de obra empleado. La empresa dispone de una suma de \$ 800 para propositos de producción.

   a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de capital y trabajo que la empresa debería utilizar con objeto de maximizar su producción.

   b) Grafique las curvas de nivel de la función de restricción presupuestaria y de la función de producción.

3. Supongamos que tenemos dos bienes con unos precios de $p_1 = 2$ y $p_2 = 5$, con un ingreso $m = 40$ y una función de utilidad:

   $$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$$

a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades del bien uno y del bien dos que el consumidor debería utilizar con objeto de maximizar su utilidad.

b) Grafique las curvas de nivel de la función de restricción presupuestaria y de la función de utilidad.

4. Supongamos que tenemos dos bienes con unos precios de $p_1 = 20$ y $p_2 = 5$, con un ingreso $m = 600$ y una función de utilidad:

$$u(x, y) = 40x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

a) Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades del bien uno y del bien dos que el consumidor debería utilizar con objeto de maximizar su utilidad.

b) Grafique las curvas de nivel de la función de restricción presupuestaria y de la función de utilidad.