# ÁLGEBRA LINEAL

## ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMIA

México, D.F., 10 de marzo de 2010

## Contenido

**1. Diagonalización de matrices** **2**

1.1. Valores y vectores propios . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.1.1. Obtención de los valores y vectores propios de una matriz y sus propiedades . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.2. Diagonalización de matrices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

1.3. Matrices simétricas y formas cuadráticas . . . . . . . . . . . . 18

1.4. Matrices hermitianas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

1.5. Forma canónica de Jordan . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

# 1. Diagonalización de matrices

La obtención de valores y vectores propios es fundamental para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, que seran tema principal en el curso de sistemas dinamicos. En el análisis de series de tiempo la diagonalización de matrices juega un papel fundamental en los vectores autorregresivos.

## 1.1. Valores y vectores propios

### 1.1.1. Obtención de los valores y vectores propios de una matriz y sus propiedades

**Definición 1.1** *Si $A$ es una matriz $n \times n$, un vector columna $X$, $n \times 1$, se llama* ***vector propio*** *de $A$ si y solo si $AX = \lambda X$ para algún escalar $\lambda$. $\lambda$ se llama* ***valor propio*** *de $A$ que corresponde al vector $X$.*

**Ejemplo 1** *a) Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$.*

*b) Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.*

*c) Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*son complejos.*

*d) Los valores propios de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*son $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.*

**Teorema 1.2** *Sea $A$ una matriz $n \times n$ y sea $X$ un vector columna $n \times 1$ no nulo.*

1. *$X$ es un vector propio de $A$ perteneciente a $\lambda_0$ si y solo si $(A - \lambda_0 I_n) = 0$*

2. *Un escalar $\lambda_0$ es un valor propio de $A$ si y solo si $\lambda_0$ es una raíz real de la ecuación polinómica $\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$.*

**Definición 1.3** *Sea $A$ una matriz $n \times n$. El polinomio $\det(A - \lambda I_n)$ de grado $n$ se llama **polinomio característico** de $A$ y se le denota por $p_A(\lambda)$. A la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se llama la **ecuación característica** de $A$. Las raíces reales de la ecuación característia de $A$ son los valores propios reales o los valores característicos de $A$.*

Un pregunta natural es si existe una manera simple de encontrar el polinomio característico de una matriz. Para el caso de una matriz $2 \times 2$ la respuesta es afirmativa y el polinomio característico puede ser calculado con base en la traza y el determinante.

Si $A$ una matrix $2 \times 2$, entonces

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

**Teorema 1.4** *Si $A$ es una matriz $2 \times 2$ Entonces*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A).$$

*además, si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, entonces*

$$\begin{aligned} tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

**Ejemplo 2** *Sea*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

*Resolvemos la ecuación $Ax = \lambda x$ aplicando los siguientes pasos:*

1. *Calcular el determinante de $A - \lambda I$:*

$$det(A - \lambda I) = det \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & \\ 3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

*o sea, el polinomio característico de la matriz $A$ es:*

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 6$$

*Otra forma de calcularlo es usando el teorema anterior:*

$$\begin{aligned} tr(A) &= 4 + 3 = 7 \\ \det(A) &= 12 - 6 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \end{aligned}$$

2. *Encontrar las raíces del polinomio característico:*

$$\begin{aligned} p(\lambda) = det(A - \lambda I) &= 0 \\ (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 6 &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 6 &= 0 \\ (\lambda - 6)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

*entonces las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda)$ son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$ las cuales cumplen*

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= tr(A) \\ 7 = 6 + 1 &= tr(A) \\ \lambda_1 \lambda_2 &= \det(A) \\ 6 = 6 \cdot 1 &= \det(A) \end{aligned}$$

3. *Para cada valor característico, resolvemos la ecuación* $(A - \lambda I)x = 0$. *Buscamos ahora los correspondientes vectores propios asociados a los valores propios* $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 6$ *respectivamente.*

   *Para* $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

   *cuyas soluciónes son de la forma* $x_1 = -2/3x_2$.

   *Por lo tanto , para* $\lambda_1 = 1$, *los vectores propios son de la forma* $v_1 = \alpha \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   *Para* $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

   *cuya solución es* $x_1 = x_2 = 1$.

   *Por lo tanto , para* $\lambda_2 = 6$, *el vector propio es* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Teorema 1.5** *Si* $A$ *es una matriz* $3 \times 3$, *entonces su polinomio característico es de la forma*

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(tr(A^2) - tr(A)^2\right)\lambda + det(A).$$

Los vectores propios también poseen una representación sencilla en el caso de una matriz $A$ de $2 \times 2$ como la anterior. Para encontrar el vector propio $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda$, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda_1 x_1, \\ ax_1 + dx_2 &= \lambda_1 x_2. \end{aligned}$$

Por construcción, las ecuaciones son dependientes, y el sistema no es originalmente diagonal. Tenemos que alguno de los coeficientes $b$ o $c$ es diferente de cero. Supongamos que $b \neq 0$; suponiendo que $x_1 = b$ en la primera ecuación, es fácil ver que $x_2 = \lambda - a$, de manera que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$ es un vector propio con valor propio $\lambda$. En el caso en que $b = 0$ y $c \neq 0$, utilizamos la segunda ecuación y obtenemos que $\begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$ es el vector propio buscado.

**Ejemplo 3** *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

*notemos que la matriz es singular y que por lo tanto $\lambda = 0$ es una raíz del polinomio característico. El polinomio esta dado por*

$$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 3),$$

*con raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 0$. es fácil ver que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 3$ y que $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector no nulo que satisface la ecuación $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, o sea un vector propio con valor propio $\lambda = 0$.*

**Ejemplo 4** *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Entonces el polinomio característico es*

$$p_A(\lambda) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2).$$

*Por lo tanto los valores propio de $A$ son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -2$. Ahora encontraremos los vectores propios correspondientes a estos valores propios. Si $\lambda_1 = 1$, resolvemos el sistema $(A - \lambda I)v = 0$. Estos es, si $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ entonces*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Al resolver estas ecuaciones y escoger $a = -1$, obtenemos $b = 4$ y $c = 1$. En concluisión,*

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*es vector propio con valor propio $\lambda_1 = 1$. Para verificarlo consideramos*

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

*De modo semejante se obtiene que el vector $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de $\lambda_2 = 3$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_3 = -2$.*

En el caso de raíces repetidas, es que no tiene una base de vectores propios y por lo tanto la matriz no puede ser diagonalizada. Sin embargo puede obtenerse una matriz triangular de la forma

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{1}$$

Para obtener la matriz $T$, lo que se necesita es el vector propio $\mathbf{v}$ correspondiente al valor propio  y otro vector $\mathbf{w}$ tal que la matriz

$$P = [\ \mathbf{v} \quad \mathbf{w}\ ]$$

cumpla $P^{-1}AP = T$, donde $T$ es la matriz triangular dada en 1. Para obtener el vector $\mathbf{w}$ se procede como sigue.

**Definición 1.6** *Sea $\boldsymbol{v}$ un vector propio con valor propio $\lambda$. Se dice que $\boldsymbol{w}$* ***es un vector propio generalizado*** *si satisface*

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}.$$

Si la matriz $A$ está dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y $b \neq 0$, entonces un vector propio asociado al valor propio $\lambda$ está dado por

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}.$$

El valor propio es una raíz del polinomio $\lambda^2 - \lambda tr(A) + det(A)$ y si es una raíz doble debe ser de la forma $\lambda = \frac{tr(A)}{2} = \frac{a+d}{2}$. Resolvamos ahora el sistema $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$, con estos valores específicos de $\mathbf{v}$ y $\lambda$. Si $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

se tiene que

$$\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{d-a}{2} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto es fácil ver que $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ siempre es solución. Si en la matriz $A$, $b = 0$ pero $c \neq 0$, entonces se utiliza $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$ como vector propio y procediendo de manera análoga tenemos que $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

es un vector propio generalizado.

**Ejemplo 5** *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Como*

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 2$$

*entonces:*

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= (3-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = 0 \\ &= -3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 4 = 0 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

*Por lo tanto la ecuación característica de la matriz $A$ es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, cuya única raíz es $\lambda = 1$. El los vectores propios correspondientes son*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*de donde*

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

*es decir, los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$ son de la forma $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces escogemos al vector propio $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y el vector propio generalizado, que se encuentra resolviendo*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

*es simplemente*

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

***Teorema 1.7*** *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

*Entonces la ecuación característica de la matriz $A$ es:*

$$p(\lambda)_A = (-1)^m \left(\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) = 0$$

*y para cada valor propio $\lambda_k$, el vector*

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ (\lambda_k)^2 \\ \vdots \\ (\lambda_k)^{m-1} \end{pmatrix}$$

*es un vector propio.*

***Ejemplo 6*** *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Por el Teorema (1.7), la ecuación característica es $\lambda^3 - \lambda = 0$, los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$ y para $\lambda_1 = 0$,*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ (\lambda_1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*es vector propio. Del mismo modo,*

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ (\lambda_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*es vector propio con valor propio $\lambda_2 = 1$. Finalmente,*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 \\ (\lambda_3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*es vector propio con valor propio* $\lambda_3 = -1$.

***Ejemplo 7*** *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*El polinomio característico de la ecuación es* $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, *por lo que los valores propios son*

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i,$$

*Es decir,*

$$\lambda_1 = \lambda = 1 + i, \lambda_2 = \bar{\lambda} = 1 - i.$$

*Tomemos* $\lambda = 1+i$. *Encontraremos vectores propios de la manera usual; esto es, si*

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

*entonces,*

$$(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Si escogemos* $a = 1$ *obtenemos que* $b = 1 + i$, *y por lo tanto*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

*es vector propio con valor propio* $1 + i$.

***Ejemplo 8*** *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Entonces el polinomio característico es*

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

*Las raíces de $p_A$ son $\lambda = i$ y $\bar{\lambda} = -i$. Encontraremos un vector propio $v$ para el valor propio $\lambda = i$ usando el teorema (1.7). Así*

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

*es un vector propio con valor propio $\lambda$.*

***Valores y vectores propios***

*Tarea individual.*

*Obtener los valores y vectores propios de las siguientes matrices.*

1.
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.
$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

4.
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.
$$E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

6.
$$F = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

7.
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

8.
$$H = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

## 1.2. Diagonalización de matrices

***Definición 1.8*** *Dos matrices cuadradas $A$ y $B$ de orden $n$ son equivalentes si existe una matriz $P$ de orden $n$, no singular (det($P \neq 0$)) tal que $A = P^{-1}AP$.*

***Ejemplo 9*** *Las matrices* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *son equivalentes pues:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

***Definición 1.9*** *Una matriz cuadrada $A$ es diagonalizable si posee una matriz equivalente $B$ que sea diagonal.*

*Suponga que la matriz $A$ de orden $n$ tiene $n$ vectores característicos linealmente independientes. Si estos vectores característicos son las columnas de una matriz $S$, entonces $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal $\Lambda$, es decir $A$ es diagonalizable y los valores característicos de $A$ están sobre la diagonal de $\Lambda$:*

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

***Diagonalización de matrices de orden 2***

*Consideremos la matriz* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *y calculemos sus valores propios, los cuales son las soluciones de:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

*Entonces tenemos los siguientes casos:*

1. ***Dos raíces reales distintas*** $\lambda_1$ *y* $\lambda_2$*: Entonces la matriz $A$ es equivalente a la matriz* $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *y por tanto es diagonalizable.*

***Ejemplo 10*** *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

*Hallar*

a) *Los valores propios de A.*

b) *Los vectores propios A.*

c) *Diagonalizar la matriz A*

*La ecuación característica es*

$$\mid A - \lambda I \mid = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

*cuyas soluciones* $\lambda_1 = -2$ *y* $\lambda_2 = 3$ *son los valores propios de A. Para* $\lambda = \lambda_1 = -2$ *da*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

*Tomando* $x_2 = t$ *tenemos* $x_1 = -\frac{2}{3}t$*. Por lo tanto los vectores propios a* $\lambda_1 = -2$ *son*

$$x = t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

*Para* $\lambda_2 = 3$*,* $x_1 = x_2$*. Luego los vectores propios son:*

$$x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

*Finalmente, como los lo valores propios de A son* $\lambda_1 = -1$ *y* $\lambda_2 = 3$*, podemos tomar los vectores propios respectivos*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Así*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{para la cual} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

*Multiplicando deducimos que* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. ***Una raíz doble*** $\lambda$ *y el rango de* $A - \lambda I$ *igual a 1; entonces la matriz* $A$ *es equivalente a la matriz:* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ *y no es diagonalizable. Observemos que si el rango de* $A - \lambda I$ *es 0, entonces* $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *que ya es diagonal.*

   ***Ejemplo 11*** *Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   *La ecuación característica es*

   $$| A - \lambda I | = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0$$

   *cuyas soluciones* $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$*, es decir,* $\lambda = 0$ *es un valor característico doble y el rango de la matriz* $A - \lambda I$ *es 1, entonces la matriz* $A$ *es equivalente a la matriz* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*. la cual no es diagonal.*

3. ***Dos raíces complejas conjugadas*** $a + bi$ *y* $a - bi$*: entonces la matriz* $A$ *es equivalente a la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *y no es diagonalizable.*

   ***Ejemplo 12*** *Sea*

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$| A - \lambda I | = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

   *cuyas raíces son* $\lambda_1 = \lambda = i$ *y* $\lambda_2 = \bar{\lambda} = -i$*. Entonces la matriz* $A$ *es equivalente a la matriz*

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   *y no es diagonalizable.*

## ***DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES***

*Tarea individual.*

1. *Para la matriz:*
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
   a) *Escribir la ecuación característica y calcular los valores propios.*
   b) *Calcular los vectores propios correspondientes a la equación característica.*
   c) *Diagonalize $A$.*

2. *Consteste las mismas preguntas del problema 1 para la matriz $A$ dada por:*
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. *Obtener los valores propios de la matriz $P = X(X^T X)^{-1} X^T$, si:*
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

## 1.3. Matrices simétricas y formas cuadráticas

*Sea $A$ una matriz cuadradada simetrica. En este caso, si postmultiplicamos $A$ por un vector $x$ y la premultiplicamos por el transpuesto de ese mismo vector $x$, tenemos una **forma cuadrática**. Por ejemplo,*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{21} + a_{12})x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

*Supongamos que $A$ es la matriz identidad. En este caso, no es dificíl ver que cualesquiera que sean los valores de $x_1$ y $x_2$, la forma cuadrática debe ser no negativa. De hecho, si $x_1$ y $x_2$ no son cero, $xAx$ será estrictamente positiva. La matriz identidad es un ejemplo de **matriz definida positiva**.*

***Matrices definidas**. Una matriz cuadrada $A$ es:*

*(a) **definida positiva** si $x^tAx > 0$ cualquiera que sea $x \neq 0$;*

*(b) **definida negativa** si $x^tAx < 0$ cualquiera que sea $x$;*

*(c) **semidefinida positiva** si $x^tAx \geq 0$ cualquiera que sea $x$;*

*(d) **semidefinida negativa** si $x^tAx \leq 0$, cuaquiera que sea $x$.*

***Ejemplo 13** Considere el $n$-vector de variables aleatorias*

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

*y sea*

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y_1 - E(y_1) \\ y_2 - E(y_2) \\ \vdots \\ y_n - E(y_n) \end{bmatrix}$$

*la matriz covarianza de $y$ es definida como*

$$V = E \begin{bmatrix} \tilde{y_1}^2 & \tilde{y_1}\tilde{y_2} & \dots & \tilde{y_1}\tilde{y_n} \\ \tilde{y_2}\tilde{y_1} & \tilde{y_2}^2 & \dots & \tilde{y_2}\tilde{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y_n}\tilde{y_1} & \tilde{y_n}\tilde{y_2} & \dots & \tilde{y_n}^2 \end{bmatrix}$$

*La matrix covarianza es simetrica y semidefinida positiva. Para demostrar esta afirmación, primero notemos que $V$ se puede escribir como*

$$V = E(\tilde{y}\tilde{y}^T)$$

*Así, para cualquier $x \neq 0$, tenemos*

$$\begin{aligned} x^T V x &= x^T E(\tilde{y}\tilde{y}^T)x \\ &= E x^T(\tilde{y}\tilde{y}^T)x \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{y}_j\right)^2 \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j (y_j - E(y_j))\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

*En algunos casos no es necesario que $x^t A x$ tenga un signo definido en el caso de todos los valores de $x$, si no sólo de un conjunto restringido de ellos. Decimos que $A$ es definida positiva sujeta a la restricción $bx = 0$. Las otras definiciones se amplían de manera natural al caso con restricciones.*

*Las **matrices menores** de la matriz $A$ son las matrices que se forman eliminando $k$-columnas y $k$-filas de la misma numeración. Los menores principales naturalmente ordenados o encadenados de la matriz $A$ vienen dados por*

$$a_{11} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

*etc. Los determinantes menores o menores de una matriz o menores principales, son los determinantes de las matrices menores*

$$D_1 = a_{11} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

*etc.*

*Supongamos que se nos da una matriz cuadrada $A$ y un vector $b$. Podemos orlar $A$ por medio de $b$ de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Esta matriz se denomina* ***matriz orlada****. La útil generalización a las matrices menores genera los* ***menores principales que conservan la orla****. Son las submatrices que se forman eliminando las filas y las columnas adecuadas de $A$ y los elementos de la orla que tienenla misma numeración, pero sin eliminar la propia orla. Por lo tanto, las eliminaciones pueden provenir de filas y columnas de 1 al $n$, pero no de la fila o la columna $n + 1$, que es donde se encuentra la orla. Dada esta terminología, para que una matriz sea definida positiva o negativa.*

***Teorema 1.10*** *. Una matriz cuadrada $A$ es:*

*(a) definida positiva si y sólo si los menores principales son todos positivos.*

*(b) definida negativa si y sólo si los menores principales tienen el signo $(-1)^k$ siendo $k = 1, ..., n$.*

*(c) definida positiva sujeta a la restricción $bx = 0$ si y sólo si los menores principales que conservan la orla son todos ellos negativos;*

*(d) definida negativa sujeta a la restricción $bx = 0$ si y sólo si los menores principales que generan la orla tienen el signo $(-1)^k$ siendo $k = 2, ..., n$.*

***Definición 1.11*** *Una forma cuadratica en dos variables es un polinomio de la forma*

$$q = au^2 + 2huv + bv^2$$

***Definición 1.12*** *Una forma cuadrática $q$ se dice*

*(a) positiva definida si $q > 0$.*

*(b) semidefinida positiva si $q \geq 0$.*

*(c) semidefinida negativa si $q \leq 0$*

*(d) definida negativa si $q < 0$.*

*Una forma cuadrática se puede expresar en términos de matrices. Sea*

$$q = au^2 + 2huv + bv^2$$

*entonces*

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

*luego, si*

$$A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$$

*la forma cuadrática $q$ es*

*(a) positiva definida si y solo si la matriz $A$ es definida positiva.*

*(b) semi-definida positiva definida si y solo si la matriz $A$ es semi-definida positiva.*

*(c) definida negativa si y solo si la matriz $A$ es definida negativa.*

*(d) semi-definida negativa si y solo si la matriz $A$ es semi-definida negativa.*

***Ejemplo 14*** *¿La forma cuadrática $q = 5u^2 + 3uv + 2v^2$ es positiva definida o negativa definida ?*

*En forma de matrices:*

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

*Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Como*

$$D_1 = 5 > 0 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 2.25 = 7.75 > 0$$

*entonces la matriz $A$ es definida positiva, por tanto la forma cuadrática $q$ es definida positiva.*

***Ejemplo 15*** *Con el fin de conseguir una reducción del déficit público, el gobierno esta estudiando la posibilidad de introducir un nuevo impuesto complementario del impuesto sobre la renta de las personas físicas y el impuesto sobre el patrimonio, pero de tal forma que dependa de ellos, según:*

$$T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$$

*donde $R$ y $P$ son, respectivamente, las cantidades ingresadas por el impuesto sobre la renta y el de patrimonio.*

*Justifique que ningún contibuyente conseguirá, con este nuevo impuesto, que su declaración le salga devolver.*

***Solución:***

*El nuevo impuesto puede considerarse como una forma cuadrática en las variables $R$ y $P$:*

$$T(R, P) = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$$

*que, por tanto tiene como matriz simétrica asociada:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

*El hecho de que el gobierno no quiera devolver dinero se traduce en que la forma cuadrática no debe tomar valores negativos para ningún $R, P$, es decir, tiene que verificarse que:*

$$T(R, P) \geq 0 \quad \text{para cualesquiera } R \text{ y } P$$

*Por tanto $T$ debe ser al menos semidefinida positiva. Veamos si esto es así, calculando los menores principales de $A$*

$$D_1 = 2 > 0$$
$$D_2 = \det(A) = 4 > 0$$

*luego $T$ es definida positiva, por lo que se verifica lo pedido. Así pues , el impuesto reúne las condiciones exigidas para su aplicación.*

## 1.4. Matrices hermitianas

***Definición 1.13*** *Una matriz $A$ se le llama hermitiana si es igual a su traspuesta conjugada, es decir $A = \bar{A}^T = A^H$.*

***Ejemplo 16***

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} = A^H$$

*Las tres propiedades básicas de las matrices hermitianas son:*

1. *Si $A = A^H$, entonces para todos los vectores compelejos $x$ , el número $x^H Ax$ es real.*

   ***Ejemplo 17*** *Cada elemento de $A$ contibuye a $x^H Ax$. Si $x = (u, v)$, entonces*

   $$x^H Ax = x^H \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$
   $$= 2\bar{u}u + 5\bar{v}v + (3-3i)\bar{u}v + (3+3i)u\bar{v},$$

   *el cual es un número real.*

2. *Si $A = A^H$, todo valor característico es real.*

   ***Ejemplo 18*** *Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$, entonces:*

   $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1).$$

   *de donde sus valores característicos son los números reales $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = -1$.*

3. *Dos vectores característicos de una matriz hermitiana, si provienen de valores característicos distintos, son ortogonales entre sí:*

   ***Ejemplo 19*** *Para la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$*, obtenemos los valores característicos asociados a* $\lambda_1 = 8$ *y* $\lambda_2 = 1$*. De las siguientes ecuaciones*

$$(A-8I)x = \begin{pmatrix} -6 & 3-3i \\ 3+3i & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(A+I)y = \begin{pmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   *se obtienen los vectores característicos asociados a* $\lambda_1$ *y* $\lambda_2$ *respectivamente:*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$
$$y = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$$

   *Estos vectores son ortogonales:*

$$x^H y = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

## 1.5. Forma canónica de Jordan

*Dada una matriz cuadrada* $A$*, se quiere escoger* $M$ *de forma que* $M^{-1}AM$ *sea lo más diagonalmente posible. En el caso más sencillo,* $A$ *tiene un conjunto completo de vectores característicos que se convierten en las columnas de* $M$*, la cual la denotamos por* $S$*. La forma de Jordan es* $J = M^{-1}AM = \Lambda$*; se construyo completamente a partir de bloques* $J_i = \lambda_i$ *de 1 por 1, y el objeto de una matriz diagonal se ha alcanzado por completo. En el caso más general y difícil, faltan algunos vectores característicos y una forma diagonal es imposible. Ese caso constituye ahora nuestro principal interés.*

***Teorema 1.14*** *Si una matrizx $A$ tiene $s$ vectores característicos linealmente independientes, entonces es semejante a una matriz $J$ que es la **forma de Jordan**, con $s$ bloques cuadrados en la diagonal:*

$$J = M^{-1}AM = \Lambda = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

*Cada bloque tiene un vector característico, un valor característico y unos justo arriba de la diagonal:*

$$J_i = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

***Ejemplo 20*** *Un ejemplo de esta forma de Jordan es la matriz $J$, con*

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}.$$

*donde $J_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $J_3 = [0]$. El valor característico dobre $\lambda = 8$ sólo tiene un simple vector característico, en la primera dirección de coordenadas $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$; como resultado $\lambda = 8$ sólo aparece en un simple bloque $J_1$. El valor característico triple $\lambda = 0$, tiene dos vectores característicos, $e_3$ y $e_5$ que corresponden a los dos bloques de Jordan $J_2$ y $J_3$.*

***En términos de operadores.*** *Sea $T$ un operador en $\mathbb{R}^n$ y $m_T(x) = p_1^{e_1}(x) \cdots p_r^{er}(x)$ la representación del polinomio mínimo de $T$ como productos de irreducibles. Entonces*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, \quad con W_i = V_{pi^{e_i}}$$

*También sabemos que el polinomio mínimo de $T$ restringido a $W_j$ es $p_j{}^{e_j}(x)$. Entonces:*

$$W_j = W_{1j} \oplus \cdots \oplus W_{ij}$$

*donde cada $W_{ij}$ es $T$-cíclico con anulador $p_j{}^{e_{ij}(x)}$, los exponentes satisfacen: $e_j = e_{1j} \geq \cdots \geq e_{ij}$.*

***Definición 1.15*** *Los polinomios $p_j{}^{e_j}(x)$ se llaman divisores elementales de $T$.*

*Ahora, supongamos que algún $p_j(x)$ es lineal y que el anulador y que el anulador de $W_{ij}$ es $(x - c_j)^{e_{ij}}$. Si $v$ es un vector cíclico de $W_{ij}$ entonces:*

$$\{v, (T - c_jI)v, ..., (T - c_jI)^{e_{ij-1}}\}$$

*es una base.*

*La matriz de $T$ restringida a $W_{ij}$ respecto a la base $\{v, (T-c_jI)v, ..., (T-c_jI)^{e_{ij-1}}$ se obtiene aplicando $T$ a cada elemento.*

$$\begin{aligned} T(v) &= c_jv + (T - c_jI)v \\ T(T - c_jI)v &= c_j(T - c_jI)v + (T - c_jI)^2v \\ &\vdots \\ T((T - c_jI)^{e_{ij}-1}(v)) &= c_j(T - c_jI)^{e_{ij}-1}(v) \end{aligned}$$

*De estas ecuaciones se tiene que la matriz asociada a la restricción de $T$ en $W_{ij}$ es:*

$$\begin{bmatrix} c_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_j \end{bmatrix}$$

*Por tanto existe una base de $W_j$ respecto de la cual la matriz asociada a $T$ restringida a $W_j$ es diagonal por bloques con cada bloque de la forma , llamado bloque de Jordan. Si el polinomio mínimo se expresa como un producto de factores lineales, entonces el anulador en cada $W_{ij}$ es de la forma $(x-c_j)^{e_{ij}}$ y procediendo como en el caso anterior se tiene que la restricción de $T$ a cada $W_j$ es diagonal por bloques con cada bloque de la forma. Resumiendo se tiene el siguiente resultado:*

***Teorema 1.16 (Forma Canónica de Jordan)*** *Sobre* $\mathbb{R}^n$, *sea* $T$ *un operador lineal. Supongamos que el polinomio mínimo de* $T$ *se expresa como* $m_T(x) = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_k)^{e_k}$. *Entonces existe una base* $\mathbb{R}^n$ *respecto de la cual* $T$ *se representa por una matriz de la forma* $J = diag\{j_1, ..., j_k\}$, *con cada* $J_m$ *a la vez diagonal por bloques:* $J_m = diag\{j_1, ..., j_{i_m m}\}$ *y cada* $J_{rm}$ *un bloque de Jordan de orden* $e_{rm}$, *los cuales satisfacen* $e_m = e_{1m} \geq \cdots e_{r_m m}$.

***Ejemplo 21*** *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*El polinomio característico de* $A$ *es* $(x-2)^4$. *Como* $A$ *es suma directa de dos matrices* $2 \times 2$, *es claro que el polinomio minimal de* $A$ *es* $(x-2)^2$. *Luego* $A$ *está en forma de Jordan.*

## *TAREA: FORMAS CUADRATICAS, MATRICES HERMITIANAS Y FORMA CANONICA DE JORDAN*

*Trabajo en equipo*

1. *Calcular la matriz Q (cuyas columnas son los vectores característicos ortonormales), y diagonaliza las siguientes matrices simétricas:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. *Encontrar y diagonalizar la matriz simétrica A que corresponde a la forma cuadrática.*

   a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4 + x_4^2$

   b) $x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_4 + x_4^2$

   c) $4x^2 + 4xy + y^2 = 9$

   d) $3x^2 - 6xy + 5y^2 = 36$

3. *Diagonalizar las siguientes matrices hermitianas*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3+4i \\ -2i & 4 & 5 \\ 3-4i & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Diagonalizar las siguientes matrices de Jordan:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}$$

# Referencias


[1] *Gilbert Strang, 2007. Algebra Lineal y sus aplicaciones, Thomson. 4a edición.*

[2] *Darell A. Turkington, 2007. Mathematical Tools for Economics, Blackwell Publishing.*

[3] *Mike Rosser, 2003. Basic Mathematics for Economicsts, Routledge. Routledge. 2da. edición.*

[4] *Nakos George, 2004. Algebra Lineal con aplicaciones. Internacional Thomson Editores. 2a Ed, México.*