1. Ecuaciones diferenciales de primer orden y orden superior

1.1. Introducción

Una ecuación diferencial es una ecuación que específica derivadas de una función desconocida y cantidades o funciones desconocidas. En economía diversas variables involucran ecuaciones diferenciales, por ejemplo, la inversión representa un flujo de capital, los cambios en los precios constituyen la inflación, el cambio en el dinero es la tasa de crecimiento del dinero y así surgen diversos ejemplos en economía.

Las notas solo examinan ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones cuyas funciones desconocidas dependen de una sola variable. El orden de una ecuación diferencial se determina por el número de veces que ocurre la derivada en la ecuación.

Notación: Se utiliza a t como la variable independiente y a x como función desconocida. En adelante

$$x' = \frac{dx}{dt}, x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, ..., x^n = \frac{d^nx}{dt^n}$$

En forma general, una ecuación diferencial de orden n de forma implícita es,

$$F(t, x, x', ..., x^n) = 0$$

Una ecuación diferencial es lineal si es lineal en sus desconocidas derivadas, por ejemplo, la siguiente ecuación es lineal y de orden n.

$$x^n + a_1(t)x^{n-1} + \cdots + a_n(t)x = f(t)$$

donde $a_i(t)$ y x son funciones continuas en algún intervalo

$$I = \{t : a < t < b\}$$

donde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Si $f(t) = 0$ entonces la ecuación diferencial lineal de orden n es homogénea.

Por último, una ecuación diferencial es no lineal, si no es lineal. El siguiente par de ecuaciones son no lineales: $(x')^2 + x = 0$ y $x'x = e^t$.

1.2. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Sea f una función definida para todo t en un intervalo I y para x en un conjunto S. El valor de f en (t, x) se representa por $f(t, x)$, y el objetivo es encontrar una función $\phi(t)$ tal que:

a) $\phi(t) \in S$

b) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$

Los siguientes ejemplos presentan la idea básica de encontrar una función que sea la solución a una ecuación diferencial.

Ejemplo 1.1. *La función* $\phi(t) = ke^{-5t} + \frac{2}{5}$ *es la solución a la ecuación* $x' + 5x = 2$.

Primero derivar ϕ con respecto a t,

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{d}{dt}(ke^{-5t} + 2/5) \\ &= -5ke^{5t}\end{aligned}$$

después, sustituir en la ecuación del problema,

$$\begin{aligned}\phi' + 5\phi &= -5ke^{-5t} + 5(ke^{-5t} + 2/5) \\ &= -5ke^{-5t} + 5ke^{-5t} + 10/5 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. *La función* $\phi(t) = e^{-sen(t)}$ *es una solución a* $x' + (cost)x = 0$.

La derivada de $\phi(t)$ es

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= e^{-sent}\frac{d}{dt}(-sent) \\ \phi'(t) &= (-cost)e^{-sent}\end{aligned}$$

al sustituir se obtiene,

$$-(cost)e^{-sent} + (cost)e^{-sent} = 0.$$

1.2.1. Ecuaciones lineales de primer orden

El punto de partida es resolver ecuaciones diferenciales lineales de la forma,

$$x' + a(t)x = b(t) \tag{1.1}$$

donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones definidas en un intervalo I.

De entrada, asumir que la solución de la ecuación diferencial existe, es la función $\phi(t)$ que satisface $\phi(t)' + a(t)\phi(t) = b(t)$. Aunque la forma específica de la ecuación se desconoce, es fácil deducirla si empieza el análisis con una ecuación diferencial sencilla, el caso de una ecuación diferencial homogénea donde a es una constante y $b = 0$.

$$x' + ax = 0 \tag{1.2}$$

La solución se obtiene al aplicar el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Sea* $x' + ax = 0$ *una ecuación diferencial, donde* a *es una constante. Si* c *es un número, entonces la función* $\phi(t)$ *definida por*

$$\phi(t) = ce^{-at}$$

es la solución. Más aún, toda solución de la ecuación (1.2) tiene esta forma.

Demostración. Sea $\phi(t)$ una solución de $x' + ax = 0$, entonces se cumple

$$\phi' + a\phi = 0$$

multiplicar ambos lados de la ecuación por e^{at},

$$\begin{aligned} e^{at}\left(\phi' + a\phi\right) &= 0(e^{at}) \\ e^{at}\left(\phi' + a\phi\right) &= 0 \end{aligned}$$

en virtud que la derivada de un producto de funciones es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{at}\phi\right) &= e^{at}\frac{d}{dt}\phi + \phi\frac{d}{dt}e^{at} \\ &= e^{at}\phi' + a\phi e^{at} \\ &= e^{at}\left(\phi' + a\phi\right) \end{aligned}$$

el lado derecho de la ecuación es cero y, por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{at}\phi\right) = 0.$$

del cálculo integral existe una constante c,

$$e^{at}\phi = c$$

al despejar en términos de ϕ, finaliza la demostración.

Ejemplo 1.3. *Encontrar la solución a la ecuación diferencial,*

$$x' + 3x = 0$$

El coeficiente $a = 3$, y de acuerdo al teorema (1.1) la solución es $x(t) = ce^{-3t}$.

Considerar que a y b en la ecuación (1.1) son constantes distintas de cero, la ecuación diferencial que da lugar se define como ecuación diferencial con coeficiente y término constante,

$$x' + ax = b$$

Teorema 1.2. *Sea $x' + ax = b$ una ecuación diferencial donde a y b son constantes. Si c es una constante y $a \neq 0$, entonces la solución a la ecuación está definida por*

$$\phi(t) = ce^{-at} + \frac{b}{a}$$

Demostración. Al igual que el teorema (1.1) considerar que la solución es ϕ, tal que

$$e^{at}\left(\phi' + a\phi\right) = be^{at}$$

el término de la izquierda es igual a $\frac{d}{dt}(e^{at}\phi)$ de forma que

$$\frac{d}{dt}(e^{at}\phi) = be^{at}$$

al integrar ambos términos,

$$\int \frac{d}{dt}(e^{at}\phi) = \int be^{at}$$

por ser operaciones inversas la integral y la derivada, entonces

$$e^{at}\phi = b\int e^{at}$$

la integral del lado derecho es

$$e^{at}\phi = \frac{b}{a}e^{at} + c$$

multiplicando por e^{-at},

$$\begin{aligned} e^{-at}(e^{at}\phi) &= e^{-at}\left[\frac{b}{a}e^{at} + c\right] \\ e^{-at+at}\phi &= \frac{b}{a}e^{-at+at} + ce^{-at} \\ \phi &= ce^{-at} + \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4. *Encontrar la solución a,*

$$x' + x = 2$$

En este caso $a = 1$ y $b = 2$, la solución al problema es

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^{-t} + \frac{2}{1} \\ x(t) &= ce^{-t} + 2 \end{aligned}$$

Otra forma eficiente de demostrar el teorema (1.2), es descomponer la solución de la ecuación en dos partes: la solución a lo homogéneo, $\phi(t)^h$, y la solución particular, ϕ^p.

La solución a la homogéneo consiste en resolver

$$x' + ax = 0$$

y, de acuerdo al teorema (1.1), el resultado es: $\phi(t) = ce^{-at}$. La solución a lo particular exige que la propuesta como tal sea constante,

$$x_p = k$$

la derivada es cero, y sustituir en la ecuación original

$$\begin{aligned} x_p + a x_p &= b \\ 0 + ac &= b \\ c &= \frac{b}{a} = x_p \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general es la suma ambas soluciones:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi^h + \phi^p \\ \phi(t) &= ce^{-at} + \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5. *Encontrar la solución a*

$$x' + x = 2$$

En este caso $a = 1$ y $b = 2$, por lo tanto la solución al problema es

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^{-t} + \frac{2}{1} \\ x(t) &= ce^{-t} + 2 \end{aligned}$$

Los teoremas (1.1) y (1.2) facilitan en gran medida encontrar la solución a la ecuación diferencial (1.1), debido a que la solución a éste tipo de ecuaciones es de la misma estructura de los teoremas previos.

Teorema 1.3. *Sean a y b funciones continuas en un intervalo I. Sea A una función tal que $A' = a$. Entonces la función ϕ dada por*

$$\phi(t) = e^{-A(t)} \left[c + \int e^{A(t)} b(t) dt \right]$$

es la solución a la ecuación

$$x' + a(t)x = b(t)$$

Demostración: Sea ϕ la solución al problema, de forma que

$$\phi' + a\phi = b$$

multiplicar ambos lados de la ecuación por e^A,

$$e^A(\phi' + a\phi) = be^A$$

observar el lado izquierdo de la ecuación, es equivalente a

$$(e^A\phi)' = e^A(\phi + a\phi)$$

y se comprueba derivando

$$(e^A\phi)' = e^A\phi' + \phi e^A A'$$

dado que $A' = a$, entonces

$$(e^A\phi) = e^A\left[\phi' + a\phi e^A\right]$$

De modo que,

$$(e^A\phi)' = be^A$$

al integrar ambos lados

$$\int (e^A\phi)'dt = \int be^A + c$$

o bien

$$e^A\phi = k + \int be^A$$

lo cual conduce

$$\phi(t) = e^{-A}\left[c + \int be^A\right]$$

dado que $A = \int a$, entonces

$$\phi(t) = e^{-\int adt}\left[c + \int be^{\int adt}\right]$$

Ejemplo 1.6. *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$x' + x = e^{3t}$$

Solución. Dado que $a = 1$ y $b = 3t$, aplicar el teorema (1.3) conduce a,

$$x(t) = e^{-\int 1dt}\left[c + \int e^{3t}e^{\int 1dt}dt\right]$$

Como $\int 1\,dt = t$ (omitiendo la constante), entonces

$$x(t) = e^{-t}\left[c + \int e^{3t}e^{t}dt\right]$$

o bien,

$$x(t) = e^{-t}\left[c + \int e^{4t}dt\right]$$

De momento, es importante resolver la integral que está dentro del corchete, el método de sustitución es el adecuado,

$$\int e^{4t}dt = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^{4t}$$

donde $u = 4t$ y $du = 4dt$ Por lo tanto

$$x(t) = e^{-t}\left[c + \frac{1}{4}e^{4t}\right]$$
$$x(t) = ce^{-t} + 1/4e^{3t}$$

Para verificar que es la solución deseada, derivar la función con respecto de t e introducir en la ecuación

$$x' = -ce^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t}$$

$$x' + x = \left(-ce^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t}\right) + \left(ce^{-t} + 1/4e^{3t}\right)$$
$$x' + x = -ce^{-t} + ce^{-t} + (3/4 + 1/4)e^{3t}$$
$$= e^{3t}.$$

Ejemplo 1.7. *Resolver la ecuación diferencial*

$$x' + 2tx = t$$

En este caso $a = 2t$ y $b = t$

$$x(t) = e^{-\int 2t\,dt}\left[c + \int te^{\int 2t\,dt}dt\right]$$

Dado que $\int 2t\,dt = t^2$

$$x(t) = e^{-t^2}\left[c + \int te^{t^2}\,dt\right]$$

Resolver la integral $\int te^{t^2}\,dt$ es fácil si se emplea el método de sustitución. Dado que la diferencial de t^2 es $2tdt$, entonces

$$\int te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{t^2}$$

donde $u = t^2 \quad du = 2tdt$

La solución es,

$$x(t) = e^{-t^2}\left[c + \frac{1}{2}e^{t^2}\right]$$
$$x(t) = ce^{-t^2} + \frac{1}{2}e^{-t^2}e^{t^2}$$
$$x(t) = ce^{-t^2} + 1/2$$

Ejemplo 1.8. *Resolver*

$$x' + x = t$$

Dado que $a = 1$ y $b = t$,

$$x(t) = e^{-\int dt}\left[c + \int te^{\int dt}dt\right]$$
$$x(t) = e^{-t}\left[c + \int te^{t}dt\right]$$

Como es el producto de dos funciones: t y e^t, el método apropiado es integrar por partes.

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t$$

donde

$$u = t \quad dv = e^t$$
$$du = dt \quad v = e^t$$

la solución es

$$x(t) = e^{-t}\left[c + te^t - e^t\right]$$
$$x(t) = ce^{-t} + t - 1$$

1.2.2. La ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli permite transformar una ecuación diferencial no lineal en lineal, y entonces resolver la ecuación transformada utilizando el teorema (1.3). Esto es importante en el análisis económico, porque una de las aplicaciones más recurrente en la teoría del crecimiento económico es el modelo Solow bajo una función de producción del tipo Cobb-Douglas.

Sea la siguiente ecuación diferencial

$$x' + ax = bx^n \tag{1.3}$$

donde a y b son funciones definidas en un intervalo I. Asumir que $n \neq 1$ y así garantizar la existencia de una ecuación diferencial no lineal. Ahora proceder a multiplicar ambos lados de la ecuación por x^{-n},

$$x'x^{-n} + ax^{1-n} = b$$

Definir $z = x^{1-n}$, cuya derivada con respecto a t es $z' = (1-n)x^{-n}x'$. La ecuación (1.3) se reescribe como:

$$z' + a(1-n)z = (1-n)b \tag{1.4}$$

Tiene la misma estructura de la ecuación (1.1), y por el teorema (1.3),

$$z(t) = e^{-(1-n)\int adt}\left[c + (1-n)\int e^{(1-n)\int adt}bdt\right]$$

la solución de (1.4) está en términos de z, cuando en realidad se busca a la solución a (1.3). Un simple procedimiento algebraico de $z = x^{1-n}$ a $x = z^{\frac{1}{1-n}}$ conduce a la solución deseada.

$$x(t) = \left[e^{-(1-n)\int a dt} \left(c + (1-n) \int e^{(1-n)\int a dt} b(t) dt \right) \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Ejemplo 1.9. *Sea la ecuación diferencial*

$$x' - x = x^3$$

Multiplicar la ecuación por x^{-3}

$$x' x^{-3} - x x^{-3} = x^3 x^{-3}$$
$$x' x^{-3} - x^{-2} = 1$$

Si $z = x^{-2}$ entonces $z' = -2x^{-3}x'$, o bien $-\frac{z'}{2} = x^{-3}x'$. Por lo tanto, la ecuación se expresa de la siguiente forma

$$-\frac{z'}{2} - z = 1$$

multiplicar por -2 la ecuación anterior

$$z' + 2z = -2$$

La solución se obtiene utilizando el teorema (1.3)

$$z(t) = e^{-\int 2dt} \left[c + \int (-2) e^{\int 2dt} dt \right]$$

$$z(t) = e^{-2t} \left[c + \int (-2) e^{2t} dt \right]$$

resolver mediante el método de sustitución. Sea $u = 2t$ y $dt = \frac{du}{2}$,

$$z(t) = e^{-2t} \left[c - e^{2t} \right]$$
$$z(t) = ce^{-2t} - 1$$

La solución está en términos de z, despejar $z = x^{-2}$ en términos de $x = z^{-1/2}$ conduce a la solución deseada,

$$x(t) = \left[ce^{-2t} - 1 \right]^{-1/2}$$

Ejemplo 1.10. *Resolver la ecuación diferencial*

$$tx' + 2x = tx^2$$

dividir entre t y multiplicar por x^{-2} para obtener

$$x'x^{-2} + \frac{2}{t}x^{-1} = 1$$

sea $z = x^{-1}$ y por tanto $z' = -x^{-2}x'$. La ecuación se escribe

$$z' - \frac{2}{t}z = -1$$

al resolver la ecuación diferencial,

$$z(t) = e^{-\int -\frac{2}{t}dt}\left[c - e^{\int -\frac{2}{t}dt}dt\right]$$

$$z(t) = e^{2\ln t}\left[c - e^{-2\ln t}dt\right]$$

$$z(t) = t^2[c + t^{-2}] = ct^2 + 1$$

La solución en términos de x es,

$$x(t) = \frac{1}{ct^2 + 1}$$

Ejemplo 1.11. *Resolver la ecuación diferencial*

$$x' + tx = t^3x^3$$

Multiplicar por x^{-3}

$$x'x^{-3} + tx^{-2} = t^3$$

Definir $z = x^{-2}$ y la derivada de la función es $z' = -2x^{-3}x'$. La ecuación se transforma en

$$z' - 2tz = -2t^3$$

La solución de la ecuación es,

$$z(t) = e^{-\int -\frac{2}{t}dt}\left[c + \int (-2t^3)e^{\int -\frac{2}{t}dt}dt\right]$$

$$z(t) = e^{t^2}\left[c - \int 2t^3e^{-t^2}dt\right]$$

Integrar por partes y simplificar,

$$z(t) = ce^{t^2} + t^2 + 1$$
$$x(t) = (ce^{t^2} + t^2 + 1)^{-1/2}$$

1.3. El problema de valor inicial. El teorema de existencia y unicidad

La sección anterior tiene el propósito de encontrar la solución a la ecuación diferencial $x' + ax = b$, donde a y b son funciones en el intervalo I. Aunque en realidad, se puede afirmar sin problema alguno, que existen infinitas soluciones a la ecuación diferencial, una por cada valor que se asigne a la constante, c.

$$x(t) = e^{-\int a dt}\left[c + \int b e^{\int a dt}\right]$$

Por ejemplo, la solución a la ecuación diferencial $x' + x = 5$ es $x(t) = ce^{-t} + 5$; y, por cada valor que se asigne a c, existe una trayectoria en el plano (t, x) determinado por I. Entonces, para cualquier ecuación diferencial de la forma

$$x' + ax = b,$$

y cualquier valor inicial x_0, el problema de valor inicial consiste en encontrar una solución de la forma $x = \phi(t)$ tal que $x(t_0) = x_0$.

Es sencillo calcular el valor inicial de la función solución, basta con igualar $x(t_0) = x_0$ y despejar c en términos de estos valores. En el ejemplo previo, la solución a $x' + x = 5$ es $x(t) = ce^{-t} + 5$. Si la condición inicial es $x(0) = 10$, entonces

$$\begin{aligned} x(0) &= ce^{-0} + 5 = 10 \\ &= c + 5 = 10 \end{aligned}$$

De tal manera que $c = 5$. En adelante se denomina a ésta solución como solución particular, y la solución general queda definida,

$$x(t) = 5e^{-t} + 5$$

Bajo la condición inicial $x(0) = 15$, se obtiene el valor de $c = 10$ y la solución general es $x(t) = 10e^{-t} + 5$. Por último, si la condición es $x(0) = 0$, entonces $c = -5$ y $x(t) = -5e^{-t} + 5$.

Continuar asignando valores distintos a la condición inicial x_0, provoca que el plano (t, x) se cubra con infinitas trayectorias, cada una de ellas con un valor distinto de c. Esta situación no es casual, detrás se encuentra el teorema de unicidad de la solución.

Teorema 1.4. *Todo problema de valor inicial para una ecuación diferencial lineal de primer orden, tiene solución única.*

Demostración. Suponer que el enunciado es falso, entonces existen dos soluciones al problema, sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tales que satisfacen

$$\begin{aligned} x' + ax &= b \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Si $(x_1 - x_2)$ se sustituye en el problema,

$$(x_1' + ax_1) - (x_2' + ax_2) = b - b = 0$$

entonces la diferencia del par de soluciones constituye una solución a lo homogéneo. La condición inicial es,

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)(t_0) &= x_1(t_0) - x_2(t_0)\\ &= x_0 - x_0\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego $(x_1 - x_2)(t_0)$ es una solución al problema inicial de lo homogéneo. De otra manera si $x = x_1 - x_2$, entonces la solución al problema $x' + ax = 0$

$$x(t) = (x_1(t) - x_2(t)) = ce^{-\int a dt}$$

cuya condición inicial

$$x(t_0) = ce^{-\int a(t_0)dt} = 0$$

Como $e^{-\int a(t_0)dt} \neq 0$, entonces $c = 0$. Lo cual implica que $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$.

La conclusión que se deriva es: una vez asignado el valor inicial al problema, se asegura un único valor de c.