3.2. Combinacion lineal de vectores, dependencia e independencia lineal

Definición 3.4 *Un vector $\beta \in V$, se dice* ***combinación lineal*** *de los vectores $\alpha_1, ..., \alpha_n \in V$, si existen escalares $a_1, ..., a_n \in K$, tales que:*

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i.$$

Ejemplo 43 *El vector $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ya que:

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Definición 3.5 *Sea S es cualquier colección de vectores de V.* ***El subespacio generado*** *por S se define como*

$$L(S) = \{\sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i \mid a_i \in K, \alpha_i \in S \ y \ k = 1, 2, 3, ...\}$$

Cuando $L(S) = V$, decimos que S genera a V

Definición 3.6 *Un subconjunto S de V se dice* ***linealmente dependiente****, si existen vectores distintos $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de S y escalares $a_1, ..., a_n \in K$, no todos cero, tales que:*

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice ***linealmente independiente****. Si el conjunto S solo tiene un número finito de vectores $\alpha_1, ..., \alpha_n$, se dice a veces que los $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son dependientes (o independientes), en vez de decir que S es dependiente (o independiente).*

Ejemplo 44 *Los siguientes vectores en* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes.

Solución*: Sea*

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de lo anterior obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_2 &= 0 \\ 3a_1 + 5a_2 &= 0 \end{aligned}$$

el cual tiene como solución: $a_1 = 0$ *y* $a_2 = 0$.

Ejemplo 45 *Los vectores*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes. Esto se sigue de

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 46 *Los vectores* $(1, 2, 3)$ *y* $(1, 1, 0)$ *son linealmente independientes en* $\mathbb{R}^3$.

Sea:

$$a_1 \cdot (1, 2, 3) + a_2 \cdot (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 &= 0 \\ 3a_1 &= 0 \end{aligned}$$

Es fácil ver que el sistema de ecuaciones anterior tiene como única solución $a_1 = a_2 = 0$.

Ejemplo 47 *Demostrar*

(a) *Sí* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ *son linealmente dependientes.*

(b) *Sí* $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *son linealmente independientes.*

Solución:

(a) *Se ve que* $\alpha_2 = 2\alpha_1$, *luego* $2\alpha_1 - \alpha_2 = 0$. *Tomando* $a_1 = 2$ *y* $a_2 = -1$ *se obtiene* $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$, *lo cual prueba que* a_1 *y* a_2 *son linealmente dependientes.*

(b) *La ecuación* $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$, *da lugar al sistema*

$$\begin{aligned} 3a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución única $a_1 = a_2 = 0$. *Por tanto* α_1 *y* α_2 *son linealmente independientes.*

3.3. Base y dimensión

Definición 3.7 *Una* ***base*** *de* $\mathbb{R}^n$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes de* $\mathbb{R}^n$ *y que genera el espacio* $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.8 *Sea* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es una base.*
2. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *es linealmente independiente.*
3. *El conjunto* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *genera a* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 48 *Los vectores*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son una base de $\mathbb{R}^2$. *Si*

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces de la combinación lineal anterior, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

El cual tiene como única solución: $a_1 = a_2 = 0$. *Ahora, sea* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *veamos que existen* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *tales que* $a_1 \cdot (1, 1) + a_2 \cdot (-1, 1) = (x, y)$. *Es fácil ver que* $a_1 = \frac{x+y}{2}$ *y* $a_2 = \frac{y-x}{2}$. *De lo anterior se sigue que los vectores* $(1, 1)$ *y* $(-1, 1)$ *son linealmente independientes y que generan a* $\mathbb{R}^2$, *por lo tanto son una base de* $\mathbb{R}^2$.

Definición 3.9 *Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial* V *contiene el mismo número de vectores. Este número que es compartido por todas las bases y expresa el número de grados de libertad del espacio, es la dimensión de* V.

Ejemplo 49 *En* $\mathbb{R}^n$, *sean* $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ *donde el 1 aparece en el i-ésimo lugar y todas las otras coordenadas son cero. El conjunto* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *es una base de* $\mathbb{R}^n$ *llamada la* ***base canónica***, *por lo tanto la dimensión del espacio* $\mathbb{R}^n$ *es* n.

Ejemplo 50 *Si* A *es una matriz 3 por 2 con rango* r, *entonces:*

a) La dimensión del espacio columna $C(A)$ *es el rango* r.

b) La dimensión del espacio nulo de A *es* $2 - r$.

c) La dimensión del espacio renglón $C(A^T)$ *es también* r.

d) La dimensión del espacio nulo izquierdo $N(A^T) = 3 - r$.