3. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

3.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Sean $x_1, ..., x_n$ funciones diferenciales desconocidas en un conjunto Ω, mientras que las a_{ij} y b_i son funciones conocidas $\forall i, j \in n$, entonces un sistema de ecuaciones diferenciales es,

$$\begin{array}{lllll} x_1' & = a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & + b_1 \\ \vdots & \quad \vdots & & \quad \vdots & \vdots \\ x_n' & = a_{n1}x_1 + & \cdots & + a_{nn}x_n & + b_n \end{array} \tag{3.1}$$

Escrito en forma matricial,

$$x' = Ax + b$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$ y $b = (b_1, ..., b_n)$ son vectores de $n \times 1$ y A es una matriz de orden $n \times n$.

El análisis que sigue se limita a matrices de coeficientes constantes, es decir, todos los elementos $a_{ij} \in A$ son fijos. Y, por el momento, cuando $b = 0$, el caso de sistemas homogéneos, $b = 0$.

$$x' = Ax \tag{3.2}$$

Es interesante comprobar que cualquier ecuación diferencial de orden superior se puede expresar en términos matriciales. Por ejemplo, considerar el caso de una ecuación diferencial de orden 3.

$$x''' + a_1x'' + a_2x' + a_3x = 0$$

Definiendo a $x' = y$ y $z = y'$, entonces $x'' = y' = z$ y $z' = y'' = x'''$. La ecuación diferencial se reescribe,

$$\begin{aligned} z' + a_1z + a_2y + a_3x &= 0 \\ x' &= y \\ y' &= z \end{aligned}$$

y de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

No representa ningún problema expresar en forma matricial cualquier ecuación diferencial de orden superior. Ni tampoco resulta exagerado afirmar que empezar cualquier curso con estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales lo que permitiría ahorrar toda la sección relativa a ecuaciones diferenciales de primer y orden superior.

El sistema de ecuaciones (3.2) tiene la misma estructura de una ecuación diferencial lineal de primer orden. Al proceder de manera análoga como en ecuaciones diferenciales, proponer la función exponencial como solución al sistema,

$$x(t) = e^{At}x(0) \tag{3.3}$$

La solución es plausible, pero a diferencia de las ecuaciones diferenciales, aquí se utilizan matrices y no escalares. El exponente de la función es una matriz de $n \times n$ y $x(0)$ es un vector de condiciones iniciales. La situación obliga a explicar de manera breve los polinomios de matrices.

3.2. Matrices exponenciales

En los cursos básicos de álgebra el lector aprendió a trabajar con polinomios algebraicos, ahora se amplia el concepto al considerar polinomios asociados a matrices.

Definición 3.1. *(Polinomio). Un polinomio $f(z)$ sobre un campo $\mathbb{C}$ es una función sobre si misma tal que existen elementos $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$f(x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

Si A es una matriz cuadrada, entonces el polinomio de una matriz A,

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n \tag{3.4}$$

Se sustituye el coeficiente de a_0 por la matriz I, para ser consistente con la suma de matrices.

Ejemplo 3.1. *Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y el polinomio $f(z) = 2 - 3z + z^2$.*

Entonces el polinomio asociado a la matriz es:

$$p(A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

De la misma forma que se encuentran las raíces de una función polinómica, en álgebra lineal es posible encontrar raíces de la función (3.4). El siguiente teorema es útil para tal motivo.

Teorema 3.1. *(**?**). Sea A una matriz de orden $n \times n$ en un campo k. Entonces existe un polinomio no cero $f \in k(t)$ tal que $f(A) = 0$.*

Ejemplo 3.2. *Continuación del ejemplo 4.1.*

A partir de la propiedad de multiplicación de matrices

$$f(A) = 2I - 3A + A^2 = (A - 2I)(A - I)$$

las raíces son: $A = 2I$ y $A = I$, ya que en ambos casos $f(A) = 0$.

Del cálculo diferencial se conoce que los coeficientes $a_0, a_1, a_2, ...$ de un polinomio se pueden sustituir por las derivadas sucesivas de la función (evaluadas en cero). resultado que se conoce como *Expansión de Taylor*,

$$f(x) = f(0) + f'(0)z + \frac{1}{2}f''(0)z^2 + \frac{1}{6}f'''(0)z^3 + \cdots$$

En el caso de la función exponencial, e^z, todas las derivadas son iguales $f' = f'' = \cdots = e^z$ y la expansión de Taylor es,

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots \tag{3.5}$$

Sustituir la matriz At por la variable z en la función (3.5) da como resultado,

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \cdots$$

Utilizar la última expresión en la ecuación(3.3), permite pasar de una solución que involucra la exponencial de una matriz a una suma infinita de matrices.

$$x(t) = [I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \cdots]x(0) \tag{3.6}$$

Antes de continuar, es necesario comprobar que la suma infinita de matrices está definida, o bien que la suma sea un número finito. El *criterio de convergencia* garantiza que bajo ciertas condiciones la suma existe. Al respecto, consultar el *teorema* 7.2 en (**?**). Una vez resuelto el problema de convergencia, el siguiente problema es operativo: sumar una cantidad infinita de matrices con potencias elevadas. La teoría de la diagonalización de matrices permite resolver el problema, pero exige el supuesto que la matriz A sea **diagonalizable**.

Sean $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ los valores propios de la matriz A y $(v_1, ..., v_n)$ sus respectivos vectores propios. Entonces,

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \ ..., \quad Av_n = \lambda_n v_n$$

En forma matricial

$$[Av_1, ..., Av_n] = [\lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n]$$
$$A[v_1, ..., v_n] = [v_1, ..., v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sea $N = [v_1, ..., v_n]$ una matriz no singular y Λ una matriz diagonal que contiene los valores propios,

$$AN = N\Lambda$$

Al multiplicar la inversa de N por la derecha

$$A = N\Lambda N^{-1}$$

La importancia del resultado es obtener de manera inmediata la potencia de la matriz A. Por ejemplo, A^2 se obtiene de

$$\begin{aligned} A^2 &= (N\Lambda N^{-1})(N\Lambda N^{-1}) \\ &= N\Lambda N^{-1} N\Lambda N^{-1} \\ &= N\Lambda\Lambda N^{-1} \\ &= N\Lambda^2 N^{-1} \end{aligned}$$

y por inducción,

$$A^t = N\Lambda^t N^{-1} \quad t \geq 1 \tag{3.7}$$

Encontrar la potencia de una matriz en términos de los valores y vectores propios es fundamental para simplificar la solución al sistema de ecuaciones dada por la ecuación (3.6).

$$x(t) = [I + N\Lambda N^{-1}t + \frac{1}{2}N\Lambda^2 N^{-1}t^2 + \frac{1}{6}N\Lambda^3 N^{-1}t^3 + \cdots]x(0)$$

el factor común por la izquierda es la matriz N y por la derecha es N^{-1},

$$x(t) = \{N(I + \Lambda t + \frac{1}{2}\Lambda^2 + \frac{1}{6}\Lambda^3 t^3 + \cdots)N^{-1}\}x(0)$$

el término entre paréntesis es la expansión de Taylor (3.5) para Λ,

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{1}{2}\Lambda^2 t + \frac{1}{6}\Lambda^3 t + \cdots$$

En conclusión, la solución al sistema de ecuaciones diferenciales (3.2) es:

$$x(t) = (N e^{\Lambda t} N^{-1})x(0) \tag{3.8}$$

siempre y cuando la matriz A sea diagonalizable.

Tal vez resulte al lector que la solución (3.8) es poco atractiva de manejar. Involucra la exponencial de una matriz y tal parece que se regresó al problema inicial. Sin embargo, debido a que la matriz Λ es diagonal, es simple obtener su valor.

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^2 t^2 + \cdots$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2}\lambda_1^2 t^2 + \cdots \\ \vdots \\ 1 + \lambda_n t + \frac{1}{2}\lambda_n^2 t^2 + \cdots \end{pmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2. *Sea un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo, con una matriz A de coeficientes constantes (3.2) que es diagonalizable, entonces la solución al sistema es:*

$$x(t) = [v_1, ..., v_n] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} [v_1, ..., v_n]^{-1} \tag{3.9}$$

Donde λ_ℓ y v_ℓ son lo valores y vectores propios.

Ejemplo 3.3. *Sea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= x_2 \end{aligned}$$

La condiciones iniciales son: $x_1(0) = 5$ y $x_2(0) = -2$.

La forma matricial del problema es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz A se obtienen del polinomio característico

$$\begin{aligned} p(A) &= |A - \lambda I| \\ &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (4-\lambda)(1-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$, y los vectores propios correspondientes son.

Para $\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0a + 3b &= 0 \\ 0a - 3b &= 0 \end{aligned}$$

La solución al sistema exige que $b = 0$ y a pueda tomar cualquier valor. Así el vector propio es $v_1 = (1,0)$. En el caso de $\lambda_2 = 1$, el vector propio es $v_2 = (3,-3)$. La matriz de vectores propios es

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

La solución al problema utilizando el teorema (3.2) es:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 3e^{t} \\ 0 & -3e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ &x_1(t) = 3e^{4t} + 2e^{t} \\ &x_2(t) = -2e^{t} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_2 \end{aligned}$$

Condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -1$.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

El polinomio características es $(1-\lambda)^2 = 0$, por lo que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Existe un valor propio repetido, y al obtener los valores propios,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0a + b = 0$$
$$0a + 0b = 0$$

a puede tomar cualquier valor, sin embargo b debe ser igual a cero. El único vector propio es $v = (1,0)$.

La matriz N no puede construirse porque falta un vector linealmente independiente. La matriz A no es diagonalizable y el teorema (3.2) no aplica. La única opción para resolver el problema es calcular cada una de las matrices $A, A^2, ...$ y sustituir en la ecuación (3.3). Desde luego, esto genera un trabajo muy arduo, afortunadamente existe un mecanismo para obtener una matriz lo más diagonal posible. Por el momento queda pendiente tal método, y se ofrece una perspectiva que simplifica los cálculos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.

3.3. Solución mediante el método de valores y vectores propios

Considerar de nuevo el sistema de ecuaciones diferenciales (3.2), suponer que la solución es de la forma:

$$x(t) = ve^{\lambda t} \tag{3.10}$$

donde v es un vector en el campo de los números complejos y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Derivar (3.10) respecto a t,

$$x'(t) = \lambda v e^{\lambda t}$$

sustituir en el sistema (3.2),

$$\lambda v e^{\lambda t} = A(\lambda v e^{\lambda t})$$
$$(A - \lambda I) v e^{\lambda t} = 0$$

Dado que $e^{\lambda t} \neq 0 \;\forall\; t$ entonces

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Para evitar soluciones no triviales ($v \neq 0$), es necesario que el sistema homogéneo

$$A - \lambda I = 0$$

tenga un núcleo no nulo y, por ende, no sea invertible. En otras palabras, λ_ℓ es un valor propio de A si y solo si λ_ℓ es una raíz del polinomio característico de A. Y se asocia a cada valor propio un vector propio correspondiente , v_ℓ.

El polinomio se expresa como $P(A) = |A - \lambda I| = 0$. Si la matriz A es $n \times n$, entonces el $P(A) = \lambda^n +$ términos de menor grado. Lo que permite establecer que a lo más existen n- raíces. Desde luego, las n-raíces pueden ser una combinación de raíces repetidas y distintas; o bien, tener solo raíces distintas (reales y complejas). A continuación se presenta el análisis de los posibles casos.

Caso A. Raíces distintas y reales

Si la matriz A tiene $\lambda_1,...,\lambda_n$ valores propios distintos: $\lambda_i \neq \lambda_j \; \forall i \neq j$. Los respectivos vectores propios $v_1,...,v_n$ tienen la propiedad de ser linealmente independientes, forman una base del espacio vectorial. La matriz A es diagonalizable como en el caso de la sección anterior.

En este sentido, se afirma que el conjunto de soluciones $x_1 = v_1 e^{\lambda_1} t,...,x_n = v_n e^{\lambda_n t}$ constituyen una base. Y se demuestra aplicando el wronskiano,

$$w[x_1,...,x_n] = det|x_1,...,x_n|$$

nunca es cero, y las x_i son linealmente independientes.

Teorema 3.3. *Sea el sistema de ecuaciones diferenciales (3.2), con valores propios reales y distintos $\lambda_\ell \neq \lambda_k$, entonces la solución al sistema es:*

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

Ejemplo 3.5. *Resolver de nuevo el ejemplo 4.3.*

Los valores y vectores propios de la matriz A son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 \quad v_1 = (1,0) \\ \lambda_2 &= 1 \quad v_2 = (3,-3) \end{aligned}$$

La solución de acuerdo al teorema (3.3),

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{4t} + 3c_2 e^t \\ x_2 &= -3c_2 e^t \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} x_1(0) &= c_1 + 3c_2 = 5 \\ x_2(0) &= -3c_2 = -2 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene $c_2 = 2/3$, sustituyendo en la primera

$$c_1 + 3(2/3) = 5, \quad c_1 = 3$$

Donde $c_1 = 3$ y $c_2 = \frac{2}{3}$, por lo que la solución es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3e^{4t} + 2e^t \\ x_2(t) &= -2e^t \end{aligned}$$

La solución es idéntica al ejemplo 4.3, y con ello se ha ahorrado el calculo de la inversa de N.

Caso B. Raíces complejas.

El análisis de raíces complejas se simplifica al considerar que la matriz A pertenece al campo de los reales, ya que toda raíz compleja aparece en par conjugado; lo mismo sucede los vectores propios. Esto es, si $\lambda_1 = h + iw$ con vector propio v, entonces $\lambda_2 = \bar{\lambda_1} = h - iw$ con vector $\bar{v}$.

El par de soluciones $x_1 = ve^{(h+iw)t}$ y $x_2 = \bar{v}e^{(h-iw)t}$, son linealmente independientes y, además, la presencia de pares conjugados permite solo trabajar con una de ellas, por ejemplo $x = ve^{(h+iw)t}$.

Dado que el vector propio v es complejo, escribir la forma $v = (\alpha + i\beta)$, donde i es un número imaginario y α y β son vectores reales. La solución es:

$$x = (\alpha + i\beta)e^{(h+iw)t}$$

o bien,

$$x = (\alpha + i\beta)e^{ht}e^{iwt}$$

De la sección anterior se conoce que $e^{ivt} = cos\ vt + isen\ wt$. De forma que,

$$x = e^{ht}[(\alpha + i\beta)(cos\ wt + isen\ wt)]$$

al desagregar los factores del corchete,

$$x = e^{ht}\left[\alpha cos\ wt + i\alpha sen\ wt + i\beta cos\ wt + i^2\beta sen\ wt\right]$$

Debido a que $i^2 = -1$,

$$x = e^{ht}\left[\alpha\ cos\ wt - \beta\ sen\ wt + i(\alpha\ sen\ wt + \beta cos\ wt)\right]$$

La última ecuación permite obtener el siguiente par de soluciones

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{ht}(\alpha\ cos\ wt - \beta\ sen\ wt) \\ x_2 &= e^{ht}(\beta\ cos\ wt + \alpha\ sen\ wt). \end{aligned}$$

son linealmente independientes y constituyen una base del espacio de soluciones.

Teorema 3.4. *Sea el sistema de ecuaciones diferenciales (3.2), la matriz A es real con raíces λ_1 y λ_2 complejas y $\lambda_3, ..., \lambda_n$ reales y distintas. La solución al problema es:*

$$x(t) = e^{ht}\left[(c_1\alpha + c_2\beta)\ cos\ wt + (c_2\alpha - c_1\beta)\ sen\ wt\right] + c_3v_3e^{\lambda_1 t} + \cdots c_nv_ne^{\lambda_n t}$$

Observación: Si existen más raíces complejas, el procedimiento es el mismo. Deben incluirse los conjuntos de solución para los conjugados.

Ejemplo 3.6. *Considerar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

La forma matricial del sistema es,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es,

$$p(A) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(1-\lambda) + 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Las raíces son $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$, de forma que $h = 1$ y $w = 1$. Los vectores propios son:

Para $\lambda_1 = 1 + i$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -ia - b &= 0 \\ a - ib &= 0 \end{aligned}$$

En la segunda ecuación, si $b = 1$ entonces $a = i$. El vector propio es $v_1 = (i, 1)$.

Para $\lambda_2 = 1 - i$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ia - b &= 0 \\ a + ib &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación si $b = 1$ entonces $a = -i$. Por ende, $v_2 = (-i, 1)$.

Observar que λ_2 es el conjugado λ_1 y w_2 es el conjugado de w_1. En adelante, solo basta referirse a un valor propio o vector propio, ya que el otro es su conjugado.

Considerar el valor propio $\lambda = 1 + i$ y el vector propio $v = (i,1)$. Este último se expresa en la forma

$$v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

definir $\alpha = (0,1)$ y $\beta = (1,0)$. La solución al sistema de ecuaciones diferenciales de acuerdo al teorema (3.4)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= e^t \left\{ \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cos t + \left[c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \ sen\ t \right\} \\ x_1 &= e^t (c_2 \cos t - c_1\ sen\ t) \\ x_2 &= e^t (c_1 \cos t + c_2\ sen\ t) \end{aligned}$$

Caso C. Raíces repetidas

Sea A una matriz de $n \times n$ con un polinomio que puede descomponerse en un conjunto de factores

$$P(A) = (A - \lambda_1 I)^{m_1} (A - \lambda_2 I)^{m_2} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r}$$

donde λ_i son las raíces distintas entre sí, pero cada una de ellas se repite m_i veces, tienen multiplicidad aritmética m_i. Además, resulta claro que $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$.

Existen dos situaciones a considerar. Primera, cada valor propio genera la cantidad de vectores propios equivalente a su multiplicidad. En otras palabras, la multiplicidad geométrica de los vectores es igual a la multiplicidad aritmética de los valores propios. Entonces, es posible construir la base del espacio vectorial y diagonalizar la matriz A.

Segunda situación, cada valor propio no genera la multiplicidad geométrica necesaria, no es posible diagonalizar la matriz A. El camino a seguir es diagonalizar lo más posible la matriz, a través de la base canónica de Jordan.

Ejemplo 3.7. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

El polinomio asociado a la matriz se descompone en el par de factores,

$$(\lambda - 9)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Existen dos valores propios distintos: $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ con multiplicidad aritmética dos.

El vector propio asociado a $\lambda_1 = 9$,

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones elementales reduce la matriz a,

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Existen dos renglones distintos de cero, el rango es dos y el *Ker* es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que se obtiene a partir de $-7a = -7c = 0$ y b es arbitrario.

Para $\lambda = 2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

solo existe un renglón distinto de cero, el *ker*= 2. Es posible generar dos vectores a partir del valor propio, la multiplicidad geométrica es igual la aritmética. A partir del segundo renglón $a = b + c$,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, se han generado tres vectores propios linealmente independientes. Es posible diagonalizar la matriz de coeficientes y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, que por cierto la solución es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

o bien,

$$\begin{aligned} x_1 &= (k_2 + k_3)e^{2t} \\ x_2 &= k_1 e^{at} + k_2 e^{2t} \\ x_3 &= k_3 e^{2t} \end{aligned}$$

La conclusión que se deriva del ejemplo es que aún y cuando existan valores propios repetidos, es posible diagonalizar la matriz de coeficientes, solo basta que los valores propios repetidos sean capaces de generar la cantidad suficiente de vectores que constituyan la base del espacio vectorial y diagonalizar.

Ejemplo 3.8. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

Los vectores propios son para $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

la forma reducida de la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solo hay un vector en el núcleo de la forma,

$$v_1 = (-1,3,1,2).$$

Para $\lambda = 2$, los vectores propios son:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -6 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

la forma reducida,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

existe un vector en el núcleo, $v = (0,-1,1,0)$. Al final, se han obtenido dos vectores linealmente independientes y son insuficientes para diagonalizar la matriz. La siguiente sección aborda el método para resolver este tipo de problemas.

3.4. Matrices no diagonalizables: la base de Jordan

La imposibilidad de obtener una matriz diagonal, obliga a buscar matrices que sean al menos triangulares. En este sentido, La base canónica de Jordan consiste en obtener una matriz que sea lo más diagonal posible. No existe intensión de desarrollar a plenitud la teoría de la base canónica de Jordan, el lector interesado puede encontrar en (**?**) y (**?**) una exhaustiva exposición y demostración de los teoremas que se utilizan a continuación.

Definición 3.2. *Sea A una matriz cuadrada, se dice que A es nilpotente si existe un número $r \geq 1$ tal que $A^r = 0$.*

Las siguientes matrices son ejemplos de matrices nilpotentes. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es nilpotente de orden 4, y se comprueba al elevar la matriz a la cuarta potencia.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$B = \begin{pmatrix} -46 & -3 & 26 & -48 \\ 70 & 4 & -39 & 76 \\ -40 & -3 & 23 & -41 \\ 18 & 1 & -10 & 19 \end{pmatrix}$$

es nilpotente de orden 4: $B^4 = 0$.

Otros ejemplos importantes de matrices nilpotentes surgen en el estudio de matrices con un valor propio. La matriz del ejemplo 4. 4 tiene un único valor propio $\lambda = 1$. El polinomio asociado es,

$$P(A) = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resulta sencillo comprobar que $P(A)^2 = (A - I)^2 = 0$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene un único valor propio de multiplicidad aritmética 3, $\lambda = 2$. El polinomio caraterístico es,

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 17 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

comprobando que $(A - 2I)^3 = 0$

Los resultados anteriores no son casuales, surgen de la aplicación de un importante teorema en álgebra lineal.

Teorema 3.5 (Hamilton-Cayley). *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo, y sea $A : V \to V$ un aplicación lineal. Sea P el polinomio característico, entonces $P(A) = 0$.*

El teorema de Hamilton-Cayley es fundamental, si la matriz $A_{n\times n}$ tiene un solo valor propio λ^* de multiplicidad aritmética n, entonces la ecuación característica es $P(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^n$. Es evidente que $P(A) = (A - \lambda^* I)^n = 0$ y $A - \lambda^* I$ es nilpotente de orden n.

A continuación se definen dos matrices importantes: el bloque elemental y la matriz de Jordan.

Definición 3.3. *Una caja o bloque elemental de Jordan es una matriz de la forma:*

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

con $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

Cada bloque elemental consiste en la suma de dos matrices: una diagonal y una matriz que tiene unos por encima de la diagonal principal.

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Visto de esta manera, cada bloque elemental de Jordan es la suma de dos matrices nilpotentes de orden n.

Definición 3.4. *La matriz de Jordan es una matriz de bloques elementales en la diagonal principal,*

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

La misma definición permite deducir que la matriz de Jordan es nilpotente, lo que simplifica en gran medida el análisis. Con el fin de mantener la exposición en un plano comprensible para el lector, se toman ciertas libertades sobre el carácter general de los teoremas, para adaptarlos a las necesidades de la exposición.

Suponer que la matriz $A_{n\times n}$ tiene un valor propio de multiplicidad aritmética n. De acuerdo al teorema de Hamilton-Cayley (3.5) el polinomio $P(A) = (A - \lambda^* I)^n = 0$ es nilpoltente de orden n. Además, al elegir un $v \in V$ con $v \neq 0$ entonces decimos que v es $(A - \lambda^* I)$ cíclico si existe un entero $n \geq 1$ tal que $(A - \lambda^* I)v = 0$. El valor de n se denomina periodo, y tiene la propiedad que $(A - \lambda^* I)^r v \neq 0$ para todo $1 \leq r < n$.

Teorema 3.6. *Sea $A : V \to V$, si $v \neq 0$ es $(A - \lambda I)$ cíclico con periodo n, entonces los elementos*

$$\{(A - \lambda I)^{n-1} v, ..., (A - \lambda I)v, v\}$$

son linealmente independientes.

Surge la pregunta: ¿Qué representa el conjunto de vectores linealmente independientes respecto a la matriz A? En primer lugar, dado que $A : V \to V$ es una aplicación lineal, entonces cualquier elemento $(A - \lambda I)^k v$ para $k = 0, 1, ..., n - 1$, es un vector propio asociado al valor propio λ.

Segundo, la matriz asociada a A con respecto a esta base es la matriz de Jordan. La demostración se infiere de inmediato, sin embargo, es posible ofrecer los elementos necesarios para probar este hecho.

El primer vector de derecha a izquierda genera

$$Av$$

El segundo vector,

$$\begin{aligned} A(A - \lambda)v &= A(A - \lambda)v + \lambda(A - \lambda I)v - \lambda(A - \lambda I)v \\ &= (A - \lambda I)(A - \lambda I)v + \lambda(A - \lambda I)v \\ &= (A - \lambda I)^2 v + \lambda(A - \lambda I)v \end{aligned}$$

El tercer elemento,

$$\begin{aligned} A(A - \lambda)^2 v &= A(A - \lambda)^2 v + \lambda(A - \lambda I)^2 v - \lambda(A - \lambda I)^2 v \\ &= (A - \lambda I)(A - \lambda I)^2 v + \lambda(A - \lambda I)^2 v \\ &= (A - \lambda I)^3 v + \lambda(A - \lambda I)^2 v \end{aligned}$$

sucesivamente,

$$\begin{aligned} A(A - \lambda)^{n-1} v &= A(A - \lambda)^{n-1} v + \lambda(A - \lambda I)^{n-1} v - \lambda(A - \lambda I)^{n-1} v \\ &= (A - \lambda I)(A - \lambda I)^{n-1} v + \lambda(A - \lambda I)^{n-1} v \\ &= (A - \lambda I)^n v + \lambda(A - \lambda I)^{n-1} v \end{aligned}$$

Con el fin de ahorrar notación sea

$$v_1 = v, \quad v_2 = (A - \lambda I)v, \quad ... \quad v_n = (A - \lambda I)^{n-1} v$$

Los elementos de la base se reescriben como,

$$
\begin{aligned}
Av_1 &= Av \\
Av_2 &= v_3 + \lambda v_2 \\
Av_3 &= v_4 + \lambda v_3 \\
&\vdots \\
Av_n &= v_{n+1} + \lambda v_n
\end{aligned}
$$

Se ha establecido una cadena de vectores, enseguida se verá que existe una relación con las matrices triangulares superiores. Sea B una matriz triangular superior,

$$
B = \begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\
0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\
0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Si A es una matriz con una base abanico $(v_1, v_2, ...v_n)$, entonces se puede demostrar que existe una matriz triangular superior relativa a A. Es decir, los elementos b_{ij} se relacionan de la forma:

$$
\begin{aligned}
Av_1 &= b_{11}v_1. \\
Av_2 &= b_{12}v_1 + a_{22}v_2. \\
Av_3 &= b_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3. \\
Av_4 &= b_{14}v_1 + a_{24}v_2 + a_{34}v_3 + a_{44}v_4. \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dos observaciones: primera, si la matriz A es una aplicación lineal $A : V \to V$, con un valor propio de multiplicidad n, entonces los elementos de la diagonal principal es el valor propio. Segunda, el bloque elemental de Jordan es un caso particular de una matriz triangular superior. La comprobación es sencilla, deben satisfacerse las siguientes restricciones,

$$
\begin{aligned}
b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn} = \lambda \\
b_{12} = 1, \quad b_{13} = \ldots = b_{1n} = 0 \\
b_{23} = 1, \quad b_{24} = \ldots = b_{2n} = 0
\end{aligned}
$$

y sucesivamente, entonces

$$
\begin{aligned}
Av_1 &= \lambda v_1. \\
Av_2 &= v_1 + \lambda v_2. \\
Av_3 &= v_2 + \lambda v_3. \\
Av_4 &= v_3 + \lambda v_4. \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observar la cadena de vectores encontrada, es la misma secuencia que los vectores propios generados por el teorema de Jordan. Por lo tanto, queda demostrado la matriz relativa a A es una caja elemental de Jordan.

Corolario 3.1. *La matriz asociada a A, con respecto a la base*

$$\{(A-\lambda I)^{n-1}v, ..., (A-\lambda I)v, v\}$$

es la base canónica de Jordan,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.9. *Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la matriz del ejemplo 4.4, que se reproduce para comodidad del lector.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene un valor propio de multiplicidad aritmética 2 y multiplicidad geométrica uno.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \text{y} \quad v = (1,0)$$

La matriz no es diagonalizable, pero es posible encontrar la matriz de Jordan. El polinomio de la matriz asociada al valor propio es,

$$(A-\lambda I) = (A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por simple inspección $(A-I)^2 = 0$. Por lo tanto, el vector $v \in \mathbb{R}^2$ es $(A-I)$ cíclico con periodo dos.

$$(A-I)^2 v = 0 \quad con \quad v \neq 0$$

los vectores propios asociados a la matriz A son,

$$\{(A-I)v, \quad v\}$$

El vector v pertenece al ker de $(A-I)^2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0a + 0b &= 0 \\ 0a + 0b &= 0 \end{aligned}$$

la elección de a y b es arbitraria, sea el vector $v = v_1 = (0, 1)$. El segundo vector se calcula de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

La matriz de vectores propios es

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de Jordan,

$$\begin{aligned} J = N^{-1}AN &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.10. *Encontrar la base canónica de la matriz,*

$$\begin{pmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El valor propio $\lambda = 2$ tiene multiplicidad aritmética tres y multiplicidad geométrica uno. No es diagonalizable. La potencia de los polinomios son:

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} -4 & 17 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector $v \in \mathbb{R}^3$ es $(A - I)$ cíclico con periodo tres.

$$(A - I)^3 v = 0 \quad con \quad v \neq 0$$

los vectores propios asociados a la matriz A son,

$$\{(A - 2I)^2, \quad (A - 2I)v, \quad v\}$$

El vector propio v es fácil de calcular, se elige uno arbitrario que es $v = (0,0,1)$. Los vectores que faltan son,

$$\begin{aligned} (A - 2I)v &= \begin{pmatrix} -4 & 17 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (A - 2I)^2 v &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz N tiene los vectores propios y N^{-1} es la inversa,

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de Jordan,

$$\begin{aligned} J = N^{-1}AN &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11. *Encontrar la base canónica de Jordan de la matriz.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica se obtiene de resolver el determinante,

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Después de manipular, $(\lambda - 1)^4 = 0$. El valor propio $\lambda = 1$ tiene multiplicidad aritmética de 4. La matriz,

$$(A - I) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango dos. Al realizar operaciones elementales por renglones y columnas a la matriz, la reduce a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto de soluciones es de la forma $(a,b,c,d) = (0,0,c,d)$, existen dos vectores propios linealmente independientes: $v_1 = (0,0,1,0)$ y $v_2 = (0,0,0,1)$. La multiplicidad geométrica es dos, y no puede diagonalizarse la matriz. Proceder igual que en los ejemplos anteriores, la potencias del polinomio son:

$$(A-I)=\begin{pmatrix}-2&-4&0&0\\1&2&0&0\\1&2&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad (A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix},\quad (A-I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

El vector $v\in\mathbb{R}^4$ es $(A-I)$ cíclico con periodo tres.

$$(A-I)^3v=0 \quad con \quad v\neq 0$$

los vectores propios asociados a la matriz A son,

$$\{(A-2I)^2, \quad (A-2I)v, \quad v\}$$

El vector propio v se elige al resolver$(A-I)^3v=0$. Un candidato es cualquiera que satisfaga $(0a,0b,0c,0d)=(0,0,0,0,0)$. Sin embargo, hay que proceder con cuidado, los vectores de la forma $(0,0,c,d)$ bajo $(A-I)v$ son cero. Entonces se acuden a vectores de la forma $(a,b,0,0)$. Un candidato es $v=(1,0,0,0)$. El resto de los vectores son:

$$(A-I)v=\begin{pmatrix}-2&-4&0&0\\1&2&0&0\\1&2&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2v=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Los vectores que se obtienen del proceso son $v_1=(0,0,0,1)$, $v_2=(-2,1,1,0)$ y $v_3=(1,0,0,0)$. El cuarto vector se toma de los generados por el valor propio al inicio del ejemplo. Desde luego, no puede ser el vector $(0,0,0,1)$, porque se ha calculado. En su lugar, utilizar el vector $(0,0,1,0)$. La matriz N tiene a los vectores propios y N^{-1} es la inversa,

$$N=\begin{pmatrix}0&-2&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},\quad N^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&2&0&0\\-1&3&1&0\end{pmatrix}$$

La matriz de Jordan es,

$$J=N^{-1}AN=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&2&0&0\\-1&3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-4&0&0\\1&3&0&0\\1&2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Observar que la matriz de Jordan tiene dos bloques elementales,

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta ahora, el estudio de la base de Jordan se ha limitado a matices $A_{n\times n}$ con un valor propio de multiplicidad n. Es el momento, de considerar matrices con valores propios distintos pero con multiplicidades aritméticas en cada uno de ellos.

Teorema 3.7. *Sea un espacio vectorial V sobre el campo $\mathbb{C}$ y sea $A : V \to V$ una aplicación lineal sobre si misma. En particular, la aplicación consiste en valores y vectores propios. Si la función polinómica satisface $P(A) = 0$ y se descompone en el producto de factores,*

$$P(A) = (A - \lambda_1 I)^{m_1}(A - \lambda_2 I)^{m_2} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r} = 0$$

Sea V_i el núcleo de $(A - \lambda_i I)^{m_i}$. Entonces la suma directa de los subespacios $V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ es V.

Corolario 3.2. *Suponer que V se puede expresar como la suma directa de subespacios invariantes*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

y cada V_i es cíclico $\forall \quad i \in r$. Si se selecciona la base para cada V_i entonces la base para V es la base de Jordan

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix} = J_1 \oplus \cdots \oplus J_r.$$

La idea básica del teorema es construir una base V_i para cada valor propio λ_i, de forma que el bloque resultante sea un subespacio *A-cíclico* invariante. La suma directa de los subespacios constituye V y la matriz relativa a A en términos de la base es la matriz de Jordan.

Ejemplo 3.12. *Diagonalizar la matriz,*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico asociado a la matriz es $P(A) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^2 = 0$. Los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, cada uno con multiplicidad aritmética dos.

El polinomio asociado al valor propio $\lambda_1 = -1$,

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

es de rango tres. Existe un vector propio y no es suficiente para diagonalizar la matriz A. La búsqueda de un par de vectores linealmente independientes exige trabajar con el núcleo del polinomio al cuadrado, debido a que el periodo es dos.

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & -9 & 12 \\ 21 & 0 & 9 & 6 \\ 18 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Realizar operaciones elementales a las filas y columnas de la matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base del conjunto de soluciones,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5d \\ b \\ 0.5d \\ d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cualquiera de los vectores puede ser utilizado para construir la base $\{(A - \lambda I)v, v\}$. Por ejemplo, usar $v = (0,1,0,0)$

$$(A+I)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El par de vectores son: $v_1 = (0,1,0,0)$ y $v_2 = (1,-3,-1,-2)$.

Con respecto al valor propio $\lambda = 2$, el núcleo asociado al polinomio con periodo 2 es,

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -6 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 & 12 \\ -27 & 27 & 27 & -54 \\ -9 & 6 & 6 & -12 \\ -18 & 12 & 12 & -24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Realizar operaciones elementales a las filas y columnas de la matriz,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La base del conjunto de soluciones,

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-c+2d\\c\\d\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Proceder con cautela al elegir el vector para construir la base $\{(A-\lambda I)v, v\}$. Por ejemplo, el vector $v=(0,-1,1,0)$ conduce a un vector cero: $(A-2I)^2v=0$, así que utilizar el vector $v=(0,2,0,1)$.

$$(A+I)v=\begin{pmatrix}0&1&1&-2\\7&-3&-6&11\\5&-1&2&3\\6&-2&-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

El par de vectores son: $v_3=(0,-1,1,0)$ y $v_4=(0,2,0,1)$. La matriz N tiene al conjunto de vectores y N^{-1} es la respectiva inversa.

$$N=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&-1&2\\-1&0&1&0\\-2&0&0&1\end{pmatrix},\quad N^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&-2\\1&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}$$

La matriz de Jordan es,

$$\begin{aligned}J=N^{-1}AN&=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&-2\\1&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1&-2\\7&-4&-6&11\\5&-1&1&3\\6&-2&-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&-1&2\\-1&0&1&0\\-2&0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Observar que la matriz de Jordan tiene dos bloques elementales,

$$J=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\\hline 0&0&2&1\\0&0&0&2\end{array}\right)$$

Cada bloque elemental de Jordan es

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se deduce que J_1 y J_2 son matrices *J-cíclicas* de periodo dos.

$$(J_1 + I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_2 - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De acuerdo al corolario (3.2), $J_1 \oplus J_2 = J$.

3.5. Solución de sistemas no diagonalizables

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = Bx \tag{3.11}$$

donde B es una matriz de coeficientes fijos que puede o no ser diagonalizable. Si J es la matriz canónica de Jordan asociada a la matriz con

$$B = NJN^{-1}$$

La matriz N contiene los vectores propios y es una matriz no singular.

La potencia de la matriz B se determina,

$$B^t = (NJN^{-1}) \cdots (NJN^{-1})$$
$$B^t = NJ^tN^{-1}$$

La matriz de Jordan elevada a la t-ésima potencia es,

$$J^t = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{pmatrix} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & \begin{pmatrix} \lambda_r & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_r & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}^t$$

Cada bloque elemental de Jordan se expresa como la suma de dos matrices nilpontentes,

$$J_i^t = \left[\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right]^t$$

Sin pérdida de continuidad, la solución al sistema (3.11) es análoga al caso (3.8)

$$x = (Ne^{Jt}N^{-1})x(0)$$

donde

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= e^{(\Lambda+M)t} \\ &= e^{\Lambda t}e^{Mt} \end{aligned}$$

La segunda ecuación es cierta porque satisface una de las propiedades de la exponencial de matrices: $\Lambda M = M\Lambda$.

El término $e^{\Lambda t}$ es una matriz diagonal y no representa problema alguno. Mientras que e^{Mt} se calcula a través de expansión de Taylor (3.5)

$$e^{Mt} = I + Mt + \frac{1}{2}M^2t^2 + \frac{1}{6}M^3t^3 + \cdots$$

Por lo tanto, la solución al sistema (3.11) es,

$$x(t) = N[e^{\Lambda t}(I + Mt + \frac{1}{2}M^2t^2 + \cdots)]N^{-1}x(0) \tag{3.12}$$

La ecuación (3.12) se simplifica al conocer la matriz M. Por ejemplo, sea

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es nilpotente de orden 3,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La expansión de Taylor de la matriz Mt es,

$$\begin{aligned} e^{Mt} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si la matriz M es,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La razón de nilpotencia es 4,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La expansión de Taylor de la matriz Mt es,

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la secuencia en la exponencial de la matriz corresponde al $\frac{t^k}{k!}$ coeficiente de la expansión de Taylor dispuesto en forma ascendente a la diagonal principal.

Ejemplo 3.13. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$x_1(0) = 1$ *y* $x_2(0) = 2$.

La matriz de coeficientes es la misma del ejemplo 4.7. La matriz de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base del espacio vectorial son los vectores canónicos, por lo tanto, la matriz $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y es obvio que $N = N^{-1}$. La matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se deduce que $M^2 = 0$ y, en general, $M^t = 0 \quad \forall t \geq 2$. La solución conforme a la ecuación (3.12) es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En forma de ecuaciones,

$$x_1 = (1 + 2t)e^t$$
$$x_2 = 2e^t$$

Ejemplo 3.14. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Las condiciones iniciales son: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ *y* $x_3(0) = -1$

La matriz de coeficientes es la misma del ejemplo 4.10. La base canónica de Jordan es,

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de vectores propios y su respectiva inversa,

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz M es nilpotente de razón 3. La solución es,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & e^{2t} & t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} - t^2 \\ -2t \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{2t} - t^2 - 8t \\ x_2 &= -2t \\ x_3 &= -e^{2t} - t^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

La condición inicial: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$ *y* $x_4(0) = 0$

La matriz de coeficientes corresponde al ejemplo 4. 11. La matriz de Jordan es,

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz M es nilpotente de razón 3,

$$M^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema de ecuaciones diferenciales es,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & t & \frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & e^t & t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2t + e^t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= t \\ x_4 &= \frac{1}{2}t^2 + e^t \end{aligned}$$

Ejemplo 3.16. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

La condición inicial: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$ *y* $x_4(0) = 0$

La matriz de coeficientes corresponde al ejemplo 4. 12. La matriz de Jordan es,

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz M es nilpotente de razón 2,

$$M \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema de ecuaciones diferenciales es,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & t \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} + t \\ e^{-t} \\ 2e^{2t} + 2t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-t} + t \\ x_2 &= -2e^{-t} + 2e^{2t} - 5t \\ x_3 &= -e^{-t} + 2e^{2t} + t \\ x_4 &= -2e^{-t} + 2e^{2t} - 2t \end{aligned}$$

Calcular la base canónica de Jordan representa un largo trabajo; no obstante, cuando la matriz tiene un solo valor propio de multiplicidad r, los cálculos se facilitan utilizando el siguiente procedimiento.

Considerar de nuevo el ejemplo 4.10,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Se conoce que $\lambda = 1$ y $v_1 = (1,0)$. Al proceder por analogía como en el caso de raíces repetidas de ecuaciones diferenciales de orden superior, entonces el par de soluciones tienen la forma $x_1 = e^t v_1, \quad x_2 = te^t v_1$. Sin embargo la segunda solución es incorrecta,

$$\begin{aligned} x_2' &= Ax_2 \\ e^t v_1 + te^t v_1 &= Ate^t v_1 \\ v_1 + tv_1 &= Atv_1 \\ v_1 &= (A-I)v_1 t \end{aligned}$$

pero $(A-I)v_1 = \mathbf{0}$, y obliga a $v_1 = \mathbf{0}$. Lo cual es falso.

Otro mecanismo es ensayar con la solución

$$x_2 = (tv_1 + v_2)e^t$$

el vector v_2 se desconoce, pero se obtiene derivando la solución propuesta y agrupando términos

$$\begin{aligned} e^t v_1 + te^t v_1 + v_2 e^t &= A[te^t v_1 + v_2 e^t] \\ v_1 + tv_1 + v_2 &= Atv_1 + Av_2 \\ v_1 &= (A-I)v_1 t + (A-I)v_2 \\ v_1 &= (A-I)v_2 \end{aligned}$$

Al sustituir $v_1 = (1,0)$ y definiendo $v_2 = (a,b)$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Una solución es $v_2 = (0,1)$, y por ende el segundo vector linealmente independiente es:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

La solución general,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + k_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \right]$$

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 e^t + k_2 te^t \\ x_2 &= k_2 e^t \end{aligned}$$

las condiciones iniciales: $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 2$ determinan los valores de k_1 y k_2,

$$\begin{aligned} x_1 &= (1+2t)e^t \\ x_2 &= 2e^t \end{aligned}$$

Observar que se obtiene el mismo resultado. La pregunta es: ¿ Por qué funciona el método?, más aún, ¿puede generalizarse? De entrada, suponer que B es una matriz 2×2, con un valor propio repetido: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ y un único vector v_1 que satisface $(B - \lambda I)v_1 = 0$. Al proponer como solución $x_2 = (v_1 t + v_2)e^{\lambda t}$ entonces se debe cumplir:

i) $(B - \lambda I)v_1 = 0$

ii) $(B - \lambda I)v_2 = v_1$

De hecho, la condición $ii)$ implica que multiplicar $(B - \lambda I)$ en ambos lados

$$(B - \lambda I)(B - \lambda I)v_2 = (B - \lambda I)v_1$$
$$(B - \lambda I)^2 v_2 = 0$$

Así el vector v_2 se elige de manera arbitraria cuando se encuentra ante una matriz nilpotente de razón 2. Sin embargo, debe satisfacer la condición 2.

Si la matriz B es de 3×3 y tiene un valor propio de multiplicidad 3, y ún único vector propio $v_1 \neq 0$ tal que $(B - \lambda I)v_1 = 0$. Entonces las soluciones que se proponen para los vectores que faltan son:

$$x_2 = (v_1 t + v_2)e^{\lambda t}$$
$$x_3 = (\frac{1}{2}v_1 t^2 + v_2 t + v_3)e^{\lambda t}$$

En el caso de x_2, al sustituir en (3.11) lleva a las condiciones $i)$ y $ii)$. El caso de x_3 implica que

$$x_3' = (\frac{1}{2}v_1 t^2 + v_2 t + v_3)\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}[v_1 t + v_2]$$

De forma que

$$(\frac{1}{2}v_1 t^2 + v_2 t + v_3)\lambda + [v_1 t + v_2] = B[1/2 v_1 t^2 + v_2 t + v_3]$$

$$v_1 t + v_2 = \frac{1}{2}[B - \lambda I]v_1 t^2 + [B - \lambda I]v_2 t + (B - \lambda I)v_3$$

Dado que $(B - \lambda I)v_2 t = v_1 t$, por la condición $ii)$, entonces $v_2 = (B - \lambda I)v_3$ la cadena de vectores es:

$$(B - \lambda I)v_1 = 0$$
$$(B - \lambda I)v_2 = v_1$$
$$(B - \lambda I)v_3 = v_2$$

Con $(B - \lambda I)^3 v_3 = 0$, $(B - \lambda I)^2 v_2 = 0$ y $(B - \lambda I)v_2 = v_1$.

En conclusión, sea B una matriz con valor propio de multiplicidad k, entonces

$$(B - \lambda I)^k v = 0$$
$$(B - \lambda I)^{k-1} \neq 0$$

Es decir, $(B-\lambda I)$ es nilpotente con razón r. La cadena de vectores es de la forma

$$\begin{aligned}(B-\lambda I)v_2 &= v_1\\ (B-\lambda I)v_3 &= v_2\\ \vdots \quad & \quad \vdots\\ (B-\lambda I)v_k &= v_{k-1}\end{aligned}$$

Los vectores $v_1,...,v_k$ son la base deseada, y cada x_k propuesta tiene la forma

$$x_k = \left(\frac{v_1 t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + v_{k-1}t + v_k\right)e^{\lambda t}.$$

3.6. Sistemas no homogéneos

El problema a resolver es un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes pero con término variable que está definido en un intervalo I.

$$x' = Ax + b(t) \tag{3.13}$$

A estas alturas, es común expresar que la solución adopta la forma:

$$x(t) = x^h(t) + x^p(t)$$

donde $x^h(t)$ es la solución a lo homogéneo y se ha estudiado a lo largo de este capitulo, y no hay que agregar mas. En cambio hay que centrarse la solución de lo particular $x^p(t)$. Como primera aproximación, suponer que $b(t)$ es un vector constante, entonces la solución propuesta deberá ser una constante, x^p, que se sustituye en la ecuación (3.13),

$$\begin{aligned}0 &= Ax^p + b\\ x^p &= -A^{-1}b\end{aligned}$$

Siempre y cuando exista la inversa de A.

Si $b(t)$ no es constante, entonces el método de los coeficientes indeterminados es adecuado. Debido a que esencialmente es equivalente al presentado en la sección de ecuaciones diferenciales superiores. Solo basta recordar que se trabaja con vectores y no escalares. Por ejemplo, cuando $b(t)$ es lineal, la conjetura adecuada es $x^p(t) = \alpha + \beta t$, donde α y β son vectores a determinar.

Por último, de existir una raíz duplicada, es decir, cuando una de las raíces del sistema homogéneo es equivalente a la de $b(t)$ entonces multiplicar por t la expresión particular propuesta.

Ejemplo 3.17. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + 2x_2 + 3\\ x_2' &= 2x_1 + x_2 - 2\end{aligned}$$

Primero resolver la solución a lo homogéneo que consiste en,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios asociados son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$, con respectivos vectores propios $v_1 = (-1,1)$ y $v_2 = (1,1)$.

Segundo, proponer una solución particular de la forma constante: $x^p = (x_1^p, x_2^p)$, tal que $(x^p)' = (0,0)$. El sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es sencillo resolver el par de ecuaciones lineales, $x_1^p = \frac{7}{3}$ y $x_2^p = \frac{8}{3}$. La solución general al sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{aligned} x_1 &= -k_1 e^{-t} + k_2 e^{t} + \frac{7}{3} \\ x_2 &= k_1 e^{-t} + k_2 e^{t} + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.18. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 + 5 \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 - 2t \end{aligned}$$

La solución a lo homogéneo genera los valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$, con respectivos vectores propios $v_1 = (1.5,1)$ y $v_2 = (-1,1)$.

La solución a lo particular exige la conjetura,

$$x^p = \alpha + \beta t$$
$$\begin{pmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} t$$

En virtud que $(x^p)' = \beta$, entonces sustituir en el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} b_1 &= 2(a_1 + b_1 t) + 3(a_2 + b_2 t) + 5 \\ b_2 &= 2(a_1 + b_1 t) + (a_2 + b_2 t) - 2t \end{aligned}$$

proceder a factorizar términos,

$$\begin{aligned} b_1 &= (2a_1 + 3a_2 + 5) + (2b_1 + 3b_2)t \\ b_2 &= (2a_1 + a_2) + (2b_1 + b_2 - 2)t \end{aligned}$$

Igualar los términos constantes y los coeficientes asociados a t, genera 4 ecuaciones a resolver,

$$\begin{aligned} b_1 &= (2a_1 + 3a_2 + 5) \\ b_2 &= (2a_1 + a_2) \\ 0 &= 2b_1 + 3b_2 \\ 0 &= 2b_1 + b_2 - 2 \end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones permiten obtener $b_1 = \frac{3}{2}$ y $b_2 = -1$. Sustituir el resultado en las dos primeras ecuaciones permite obtener $a_1 = \frac{1}{8}$ y $a_2 = -\frac{10}{8}$. La solución al problema es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{10}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} t$$

Ejemplo 3.19. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_2 + e^t \\ x_2' &= -x_1 + 3x_2 - e^t \end{aligned}$$

La solución a lo homogéneo genera los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, con respectivos vectores propios $v_1 = (2,1)$ y $v_2 = (1,1)$.

Lo adecuado sería proponer la solución particular $x^p = \alpha e^t$, sin embargo, el primer valor propio es igual al coeficiente del exponente de e^t, así que la conjetura adecuada es $x^p = \alpha t e^t + \beta e^t$. Obtener la derivada de la solución particular y sustituir en el sistema,

$$\begin{aligned} a_1 te^t + (a_1 + b_1)e^t &= 2(a_2 te^t + b_e^t) + e^t \\ a_2 te^t + (a_2 + b_2)e^t &= -(a_1 te^t + b_1 e^t) + 3(a_2 te^t + b_e^t) - e^t \end{aligned}$$

proceder a factorizar términos e igualar coeficientes conlleva al siguiente sistema,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a_2 \\ a_1 + b_1 &= 2b_2 + 1 \\ a_2 &= -a_1 + 3a_2 \\ a_2 + b_2 &= -b_1 + 3b_2 - 1 \end{aligned}$$

Resolver el conjunto de ecuaciones permite obtener: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $b_1 = 3$ y $b_2 = 4$. La solución al problema es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} te^t$$

3.7. Aplicaciones a la economía

Existen diversas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales en el campo de las matemáticas y la economía. En ésta última rama de la ciencia se encuentra, por ejemplo, el modelo de inflación y desempleo conocido como el *modelo de Phillips con expectativas*, el cual no solo permite establecer la relación de largo plazo entre inflación y desempleo, sino también su relación con el dinero: la teoría cuantitativa del dinero.

Ejemplo 3.20. *Modelo de Inflación-desempleo.*

El modelo de Phillips postula que existe una relación estable pero inversa entre inflación (π) y desempleo (u). Un problema de los hacedores de política económica consiste en decidir entre una menor inflación con alto desempleo o menor desempleo con inflación alta. Escrito en forma de función,

$$\pi = \alpha - \beta u, \qquad \beta > 0$$

La figura (1) captura la idea de Phillips.

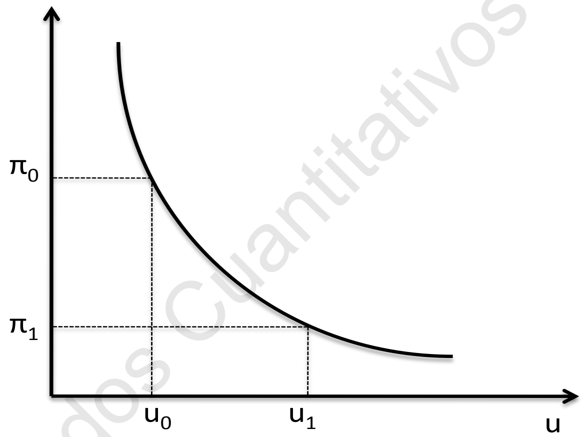

Figura 1: Curva de Phillips

La década de los $70's$ evidenció que no existía tal relación inversa, por el contrario la relación era positiva. Milton Friedman dedujo que la curva de Phillips era incompatible con la evidencia empírica porque dejaba de lado el papel de las expectativas que los agentes económicos se formaban respecto a la inflación. Resultado de ello, es la curva de Phillips aumentada con expectativas,

$$\pi = \alpha - \beta u + \delta \pi^e, \qquad 0 < \delta \leq 1 \tag{3.14}$$

El mecanismo para modelar la inflación esperada, π^e, son las expectativas adaptativas. El cambio en la inflación esperada obedece a la revisión de los agente entre la inflación que da lugar y la que esperaban. Si la inflación corriente es superior a la esperada, entonces los agentes ajustan su expectativa en una fracción positiva. En caso contrario, ajustan hacia la baja. La ecuación de ajuste es,

$$\frac{\partial \pi^e}{\partial t} = \dot{\pi}^e = h(\pi - \pi^e) \qquad 0 < h \leq 1 \tag{3.15}$$

Por otro lado, la economía satisface la ecuación cuantitativa del dinero,

$$MT = PY \tag{3.16}$$

donde:
$M =$ cantidad de dinero
$T =$ Número de transacciones, la cual se considera fija
$P =$ Nivel de precios
$Y =$ Ingreso Derivando la ecuación (3.16) respecto al tiempo,

$$M\frac{\partial T}{\partial t} + T\frac{\partial M}{\partial t} = P\frac{\partial Y}{\partial t} + Y\frac{\partial P}{\partial t}$$
$$T\dot{M} = P\dot{Y} + Y\dot{P}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $T = \frac{PY}{M}$, simplificando términos y dado que la tasa de crecimiento del dinero es $m = \frac{\dot{M}}{M}$ y la inflación es $\pi = \frac{\dot{P}}{P}$, entonces la tasa de crecimiento de la economía es,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = m - \pi \tag{3.17}$$

La ley de Okun establece que un aumento de un punto porcentual en el crecimiento de la economía va unido con un decrecimiento de tres puntos porcentuales del desempleo. En forma de ecuación,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' = -a\frac{\dot{Y}}{Y} \qquad a > 0 \tag{3.18}$$

Sustituir la ecuación (3.17) en la Ley de Okun (3.18) se obtiene,

$$\dot{u} = -a(m - \pi)$$

Debido a que π sigue la trayectoria que marca la ecuación (3.14), entonces al sustituir en la última ecuación, la evolución del cambio en el desempleo es,

$$\dot{u} = -a(m - \alpha + \beta u - \delta\pi^e) \tag{3.19}$$

De la misma manera, la ecuación de expectativas adaptativas (3.15) se simplifica al introducir la ecuación (3.14),

$$\dot{\pi}^e = h(\alpha - \beta u + \delta\pi^e - \pi^e)$$

$$\dot{\pi}^e = \alpha h - h\beta u - h(1-\delta)\pi^e \tag{3.20}$$

Las ecuaciones (3.19) y (3.20) forman un sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{pmatrix} \dot{\pi}^e \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\delta)h & -\beta h \\ a\delta & -a\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^e \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha h \\ -a(m-\alpha) \end{pmatrix}$$

El sistema se resuelve encontrando la solución a lo homogéneo y a lo particular. En primer lugar, se obtiene la solución a lo homogéneo. El polinomio característico asociado a la matriz de coeficientes A es,

$$P(A) = \begin{pmatrix} -(1-\delta)h - \lambda & -\beta h \\ a\delta & -a\beta - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-(1-\delta)h - \lambda)(-a\beta - \lambda) + a\delta\beta h = 0$$

$$(1-\delta)ha\beta + (1-\delta)h\lambda + a\beta\lambda + \lambda^2 + a\beta h\delta = 0$$

$$\lambda^2 + [(1-\delta)h + a\beta]\lambda + (1-\delta)ha\beta + a\delta\beta h = 0$$

$$\lambda^2 + [(1-\delta)h + a\beta]\lambda + ha\beta = 0$$

$$\lambda = \frac{-[(1-\delta)h + a\beta] \pm \sqrt{[(1-\delta)h + a\beta]^2 - 4ha\beta}}{2}$$

para evitar el manejo de varias literales, definir $x = (1-\delta)h + a\beta$ y $y = 4ha\beta$. Observar que tanto x y y son positivas, entonces

$$\lambda = -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{x^2 - y}}{2}$$

Se deduce de la ecuación cuadrática las siguientes posibilidades:

i) Raíces distintas si $x^2 > y$. Además, debido a que $x > \sqrt{x^2 - y}$, entonces λ_1 y λ_2 son negativas.

ii) Raíces repetidas si $x^2 = y$. Dado que $-\frac{x}{2} < 0$, la raíz es negativa.

iii) Si $x^2 < y$, raíces complejas. La parte real de la raíz es negativa: $h = -\frac{x}{2} < 0$

Conclusión: independientemente del tipo de raíces que se presenten, la solución a lo homogéneo es dinámicamente estable.

$$\lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} \pi^e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Respecto a la solución particular, elegir una función vectorial constante tal que,$(\dot{\pi}^e, \dot{u}) = (0,0)$ En ese sentido, el sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a,

$$\begin{pmatrix} -(1-\delta)h & -\beta h \\ a\delta & -a\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\pi}^e \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha h \\ a(m-\alpha) \end{pmatrix}$$

El sistema puede resolverse por cualquier método que desee el lector, en este caso se obtiene mediante la inversa,

$$\begin{pmatrix} \bar{\pi}^e \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{h} & \dfrac{1}{a} \\ -\dfrac{\delta}{h\beta} & -\dfrac{(1-\delta)}{a\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha h \\ a(m-\alpha) \end{pmatrix}$$

Multiplicando los elementos de las matrices se obtiene,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^e &= \alpha + (m-\alpha) = m \\ \bar{u} &= \frac{\alpha\delta}{\beta} - \frac{(1-\delta)}{\beta}(m-\alpha) \end{aligned}$$

Las trayectorias temporales de π^e y u son:

$$\begin{aligned} \pi^e &= \pi^e_h + m \\ u &= u_h + \bar{u} \end{aligned}$$

Dado que π^e y u son dinámicamente estables, entonces convergen a:

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} \pi^e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

Solo falta encontrar la trayectoria asintótica de la inflación, $\pi(t)$. De acuerdo a la ecuación (3.14),

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \pi(t) &= \alpha - \beta \lim_{t\to\infty} u(t) + \delta \lim_{t\to\infty} \pi^e(t) \\ &= \alpha - \beta\left(\frac{\alpha\delta}{\beta} - \frac{(1-\delta)}{\beta}(m-\alpha)\right) + \delta m \\ &= \alpha(1-\delta) + (1-\delta)m - \alpha(1-\delta) + \delta m \\ &= m \end{aligned}$$

La conclusión es: *la inflación es un fenómeno monetario*; es decir, en el largo plazo, cualquier incremento de la masa monetaria se traduce en un incremento de los precios. Un gobierno que incurre en incrementos permanentes del dinero genera una expectativa de incremento en los precios y los agentes esperan mayores niveles de inflación. De esta manera, recurrir a políticas que aumenten los precios y así incentivar la producción, terminan siendo ineficaces.