## 4.3. Matrices simétricas y formas cuadráticas

Sea $A$ una matriz cuadradada simetrica. En este caso, si postmultiplicamos $A$ por un vector $x$ y la premultiplicamos por el transpuesto de ese mismo vector $x$, tenemos una ***forma cuadrática***. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{21} + a_{12})x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Supongamos que $A$ es la matriz identidad. En este caso, no es dificíl ver que cualesquiera que sean los valores de $x_1$ y $x_2$, la forma cuadrática debe ser no negativa. De hecho, si $x_1$ y $x_2$ no son cero, $xAx$ será estrictamente positiva. La matriz identidad es un ejemplo de ***matriz definida positiva***.

***Matrices definidas***. Una matriz cuadrada $A$ es:

(a) ***definida positiva*** si $x^tAx > 0$ cualquiera que sea $x \neq 0$;

(b) ***definida negativa*** si $x^tAx < 0$ cualquiera que sea $x$;

(c) ***semidefinida positiva*** si $x^tAx \geq 0$ cualquiera que sea $x$;

(d) ***semidefinida negativa*** si $x^tAx \leq 0$, cuaquiera que sea $x$.

***Ejemplo 72*** Considere el $n$-vector de variables aleatorias

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

y sea

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y_1 - E(y_1) \\ y_2 - E(y_2) \\ \vdots \\ y_n - E(y_n) \end{bmatrix}$$

la matriz covarianza de $y$ es definida como

$$V = E\begin{bmatrix} \tilde{y_1}^2 & \tilde{y_1}\tilde{y_2} & \dots & \tilde{y_1}\tilde{y_n} \\ \tilde{y_2}\tilde{y_1} & \tilde{y_2}^2 & \dots & \tilde{y_2}\tilde{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y_n}\tilde{y_1} & \tilde{y_n}\tilde{y_2} & \dots & \tilde{y_n}^2 \end{bmatrix}$$

*La matrix covarianza es simetrica y semidefinida positiva. Para demostrar esta afirmación, primero notemos que $V$ se puede escribir como*

$$V = E(\tilde{y}\tilde{y}^T)$$

*Así, para cualquier $x \neq 0$, tenemos*

$$\begin{aligned} x^T V x &= x^T E(\tilde{y}\tilde{y}^T)x \\ &= E x^T(\tilde{y}\tilde{y}^T)x \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{y}_j\right)^2 \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{n} x_j(y_j - E(y_j))\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

*En algunos casos no es necesario que $x^t A x$ tenga un signo definido en el caso de todos los valores de $x$, si no sólo de un conjunto restringido de ellos. Decimos que $A$ es definida positiva sujeta a la restricción $bx = 0$. Las otras definiciones se amplían de manera natural al caso con restricciones.*

*Las* ***matrices menores*** *de la matriz $A$ son las matrices que se forman eliminando k-columnas y k-filas de la misma numeración. Los menores principales naturalmente ordenados o encadenados de la matriz $A$ vienen dados por*

$$a_{11} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

*etc. Los determinantes menores o menores de una matriz o menores principales, son los determinantes de las matrices menores*

$$D_1 = a_{11} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

*etc.*

*Supongamos que se nos da una matriz cuadrada $A$ y un vector $b$. Podemos orlar $A$ por medio de $b$ de la siguiente manera:*

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Esta matriz se denomina* ***matriz orlada****. La útil generalización a las matrices menores genera los* ***menores principales que conservan la orla****. Son las submatrices que se forman eliminando las filas y las columnas adecuadas de $A$ y los elementos de la orla que tienenla misma numeración, pero sin eliminar la propia orla. Por lo tanto, las eliminaciones pueden provenir de filas y columnas de 1 al $n$, pero no de la fila o la columna $n+1$, que es donde se encuentra la orla. Dada esta terminología, para que una matriz sea definida positiva o negativa.*

***Teorema 4.10*** *. Una matriz cuadrada $A$ es:*

*(a) definida positiva si y sólo si los menores principales son todos positivos.*

*(b) definida negativa si y sólo si los menores principales tienen el signo $(-1)^k$ siendo $k = 1, ..., n$.*

*(c) definida positiva sujeta a la restricción $bx = 0$ si y sólo si los menores principales que conservan la orla son todos ellos negativos;*

*(d) definida negativa sujeta a la restricción $bx = 0$ si y sólo si los menores principales que generan la orla tienen el signo $(-1)^k$ siendo $k = 2, ..., n$.*

***Definición 4.11*** *Una forma cuadratica en dos variables es un polinomio de la forma*

$$q = au^2 + 2huv + bv^2$$

***Definición 4.12*** *Una forma cuadrática $q$ se dice*

*(a) positiva definida si $q > 0$.*

*(b) semidefinida positiva si $q \geq 0$.*

*(c) semidefinida negativa si $q \leq 0$*

*(d) definida negativa si $q < 0$.*

*Una forma cuadrática se puede expresar en términos de matrices. Sea*

$$q = au^2 + 2huv + bv^2$$

*entonces*

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

*luego, si*

$$A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$$

*la forma cuadrática $q$ es*

*(a) positiva definida si y solo si la matriz $A$ es definida positiva.*

*(b) semi-definida positiva definida si y solo si la matriz $A$ es semi-definida positiva.*

*(c) definida negativa si y solo si la matriz $A$ es definida negativa.*

*(d) semi-definida negativa si y solo si la matriz $A$ es semi-definida negativa.*

***Ejemplo 73*** *¿La forma cuadrática $q = 5u^2 + 3uv + 2v^2$ es positiva definida o negativa definida ?*

*En forma de matrices:*

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

*Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Como*

$$D_1 = 5 > 0 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 2.25 = 7.75 > 0$$

*entonces la matriz $A$ es definida positiva, por tanto la forma cuadrática $q$ es definida positiva.*

***Ejemplo 74*** *Con el fin de conseguir una reducción del déficit público, el gobierno esta estudiando la posibilidad de introducir un nuevo impuesto complementario del impuesto sobre la renta de las personas físicas y el impuesto sobre el patrimonio, pero de tal forma que dependa de ellos, según:*

$$T = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$$

*donde $R$ y $P$ son, respectivamente, las cantidades ingresadas por el impuesto sobre la renta y el de patrimonio.*

*Justifique que ningún contibuyente conseguirá, con este nuevo impuesto, que su declaración le salga devolver.*

***Solución:***

*El nuevo impuesto puede considerarse como una forma cuadrática en las variables $R$ y $P$:*

$$T(R, P) = 2R^2 + 4P^2 - 4RP$$

*que, por tanto tiene como matriz simétrica asociada:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

*El hecho de que el gobierno no quiera devolver dinero se traduce en que la forma cuadrática no debe tomar valores negativos para ningún $R, P$, es decir, tiene que verificarse que:*

$$T(R, P) \geq 0 \quad \text{para cualesquiera } R \text{ y } P$$

*Por tanto $T$ debe ser al menos semidefinida positiva. Veamos si esto es así, calculando los menores principales de $A$*

$$D_1 = 2 > 0$$
$$D_2 = \det(A) = 4 > 0$$

*luego $T$ es definida positiva, por lo que se verifica lo pedido. Así pues , el impuesto reúne las condiciones exigidas para su aplicación.*

## 4.4. Matrices hermitianas

***Definición 4.13*** *Una matriz $A$ se le llama hermitiana si es igual a su traspuesta conjugada, es decir $A = \bar{A}^T = A^H$.*

***Ejemplo 75***

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} = A^H$$



*Las tres propiedades básicas de las matrices hermitianas son:*

1. *Si $A = A^H$, entonces para todos los vectores compelejos $x$ , el número $x^H Ax$ es real.*

   ***Ejemplo 76*** *Cada elemento de $A$ contibuye a $x^H Ax$. Si $x = (u, v)$, entonces*

   $$x^H Ax = x^H \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$
   $$= 2\bar{u}u + 5\bar{v}v + (3-3i)\bar{u}v + (3+3i)u\bar{v},$$

   *el cual es un número real.*

2. *Si $A = A^H$, todo valor característico es real.*

   ***Ejemplo 77*** *Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$, entonces:*

   $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1).$$

   *de donde sus valores característicos son los números reales $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = -1$.*

3. *Dos vectores característicos de una matriz hermitiana, si provienen de valores característicos distintos, son ortogonales entre sí:*

   ***Ejemplo 78*** *Para la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$*, obtenemos los valores característicos asociados a* $\lambda_1 = 8$ *y* $\lambda_2 = 1$*. De las siguientes ecuaciones*

$$(A-8I)x = \begin{pmatrix} -6 & 3-3i \\ 3+3i & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(A+I)y = \begin{pmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   *se obtienen los vectores característicos asociados a* $\lambda_1$ *y* $\lambda_2$ *respectivamente:*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$
$$y = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$$

   *Estos vectores son ortogonales:*

$$x^H y = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$



## 4.5. Forma canónica de Jordan

*Dada una matriz cuadrada A, se quiere escoger M de forma que* $M^{-1}AM$ *sea lo más diagonalmente posible. En el caso más sencillo, A tiene un conjunto completo de vectores característicos que se convierten en las columnas de M, la cual la denotamos por S. La forma de Jordan es* $J = M^{-1}AM = \Lambda$*; se construyo completamente a partir de bloques* $J_i = \lambda_i$ *de 1 por 1, y el objeto de una matriz diagonal se ha alcanzado por completo. En el caso más general y difícil, faltan algunos vectores característicos y una forma diagonal es imposible. Ese caso constituye ahora nuestro principal interés.*

***Teorema 4.14*** *Si una matrizx $A$ tiene $s$ vectores característicos linealmente independientes, entonces es semejante a una matriz $J$ que es la* ***forma de Jordan****, con $s$ bloques cuadrados en la diagonal:*

$$J = M^{-1}AM = \Lambda = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

*Cada bloque tiene un vector característico, un valor característico y unos justo arriba de la diagonal:*

$$J_i = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

***Ejemplo 79*** *Un ejemplo de esta forma de Jordan es la matriz $J$, con*

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}.$$

*donde $J_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $J_3 = [0]$. El valor característico dobre $\lambda = 8$ sólo tiene un simple vector característico, en la primera dirección de coordenadas $e_1 = (1,0,0,0,0)$; como resultado $\lambda = 8$ sólo aparece en un simple bloque $J_1$. El valor característico triple $\lambda = 0$, tiene dos vectores característicos, $e_3$ y $e_5$ que corresponden a los dos bloques de Jordan $J_2$ y $J_3$.*

***En términos de operadores.*** *Sea $T$ un operador en $\mathbb{R}^n$ y $m_T(x) = p_1^{e_1}(x) \cdots p_r^{er}(x)$ la representación del polinomio mínimo de $T$ como productos de irreducibles. Entonces*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, \quad con\, W_i = V_{pi^{e_i}}$$

También sabemos que el polinomio mínimo de $T$ restringido a $W_j$ es $p_j{}^{e_j}(x)$. Entonces:

$$W_j = W_{1j} \oplus \cdots \oplus W_{ij}$$

donde cada $W_{ij}$ es $T$-cíclico con anulador $p_j{}^{e_{ij}(x)}$, los exponentes satisfacen: $e_j = e_{1j} \geq \cdots \geq e_{ij}$.

***Definición 4.15*** *Los polinomios $p_j{}^{e_j}(x)$ se llaman divisores elementales de $T$.*

Ahora, supongamos que algún $p_j(x)$ es lineal y que el anulador y que el anulador de $W_{ij}$ es $(x - c_j)^{e_{ij}}$. Si $v$ es un vector cíclico de $W_{ij}$ entonces:

$$\{v, (T - c_j I)v, ..., (T - c_j I)^{e_{ij-1}}\}$$

es una base.

La matriz de $T$ restringida a $W_{ij}$ respecto a la base $\{v, (T - c_j I)v, ..., (T - c_j I)^{e_{ij-1}}$ se obtiene aplicando $T$ a cada elemento.

$$\begin{aligned} T(v) &= c_j v + (T - c_j I)v \\ T(T - c_j I)v &= c_j (T - c_j I)v + (T - c_j I)^2 v \\ &\vdots \\ T((T - c_j I)^{e_{ij}-1}(v)) &= c_j (T - c_j I)^{e_{ij}-1}(v) \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se tiene que la matriz asociada a la restricción de $T$ en $W_{ij}$ es:

$$\begin{bmatrix} c_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_j \end{bmatrix}$$

Por tanto existe una base de $W_j$ respecto de la cual la matriz asociada a $T$ restringida a $W_j$ es diagonal por bloques con cada bloque de la forma , llamado bloque de Jordan. Si el polinomio mínimo se expresa como un producto de factores lineales, entonces el anulador en cada $W_{ij}$ es de la forma $(x - c_j)^{e_{ij}}$ y procediendo como en el caso anterior se tiene que la restricción de $T$ a cada $W_j$ es diagonal por bloques con cada bloque de la forma. Resumiendo se tiene el siguiente resultado:

***Teorema 4.16 (Forma Canónica de Jordan)*** *Sobre* $\mathbb{R}^n$*, sea* $T$ *un operador lineal. Supongamos que el polinomio mínimo de* $T$ *se expresa como* $m_T(x) = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_k)^{e_k}$*. Entonces existe una base* $\mathbb{R}^n$ *respecto de la cual* $T$ *se representa por una matriz de la forma* $J = diag\{j_1, ..., j_k\}$*, con cada* $J_m$ *a la vez diagonal por bloques:* $J_m = diag\{j_1, ..., j_{i_m m}\}$ *y cada* $J_{rm}$ *un bloque de Jordan de orden* $e_{rm}$*, los cuales satisfacen* $e_m = e_{1m} \geq \cdots e_{r_m m}$*.*

***Ejemplo 80*** *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*El polinomio característico de* $A$ *es* $(x-2)^4$*. Como* $A$ *es suma directa de dos matrices* $2 \times 2$*, es claro que el polinomio minimal de* $A$ *es* $(x-2)^2$*. Luego* $A$ *está en forma de Jordan.*