4.5. Diagrama de fases

Existe un método cualitativo para analizar la estabilidad de un sistema dinámico, se conoce como *Diagrama de Fases* y por experiencia, la mejor manera de entender el método es resolver ejemplos.

Ejemplo 4.11. *Analizar la estabilidad del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 1 \\ x_2' &= x_1 - x_1 x_2 \end{aligned}$$

Paso 1: Encontrar los puntos críticos.

$$\begin{aligned} x_1 - 1 &= 0 \\ x_1 - x_1 x_2 &= 0 \\ (x_1, x_2) &= (1,1) \end{aligned}$$

Paso 2: Obtener las curvas de demarcación o isoclinas. Representar el resultado en el espacio de fases.

La curva de demarcación o isoclinas son el conjunto de puntos que satisfacen

$$x_1' = 0 \quad \text{y} \quad x_2' = 0.$$

Para $x_1' = 0$, la curva de demarcación es $x_1 = 1$. En el caso de $x_2' = 0$, $x_1 - x_1 x_2 = 0$, y por ende $x_2 = 1$. La representación gráfica de ambas funciones en el espacio de fases tiene un punto de equilibrio en $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. De tal forma, se ha generado un nuevo plano cartesiano con origen en el punto de equilibrio.

Paso 3: Determinar el movimiento temporal de las variables.

a) $\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = 1$. Un aumento de x produce que x_1' aumente. Al situarse en la curva de demarcación generada por $x_1' = 0$, se observa que tanto x_1' y x_1 crecen a la derecha. Esto se representa con los signos de $(-,+)$.

b) $\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = -x_1\big|_{(1,1)} = -1$. Un aumento de x_2 produce una disminución de x_2'. Por lo que la curva de demarcación presenta el comportamiento de *mas* a *menos*.

Paso 4: Análisis de las trayectorias.

En el cuadrante (I) se observa que x_1 crece mientras que x_2 decrece. En el cuadrante (II) ambas variables decrecen. En el cuadrante (III), x_1 decrece y x_2 crece. En el último cuadrante x_2 crece y x_1 decrece.

El comportamiento alrededor del punto crítico es inestable, cualquier perturbación alrededor del punto crítico termina alejando al sistema del equilibrio.

El análisis cualitativo es consistente con el análisis cuantitativo. La matriz Jacobiana del problema es,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

al evaluar en el punto crítico

$$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema es inestable, la Traza $J = 2$ y el $|J| = 1$. La figura (5) exhibe el comportamiento del sistema.

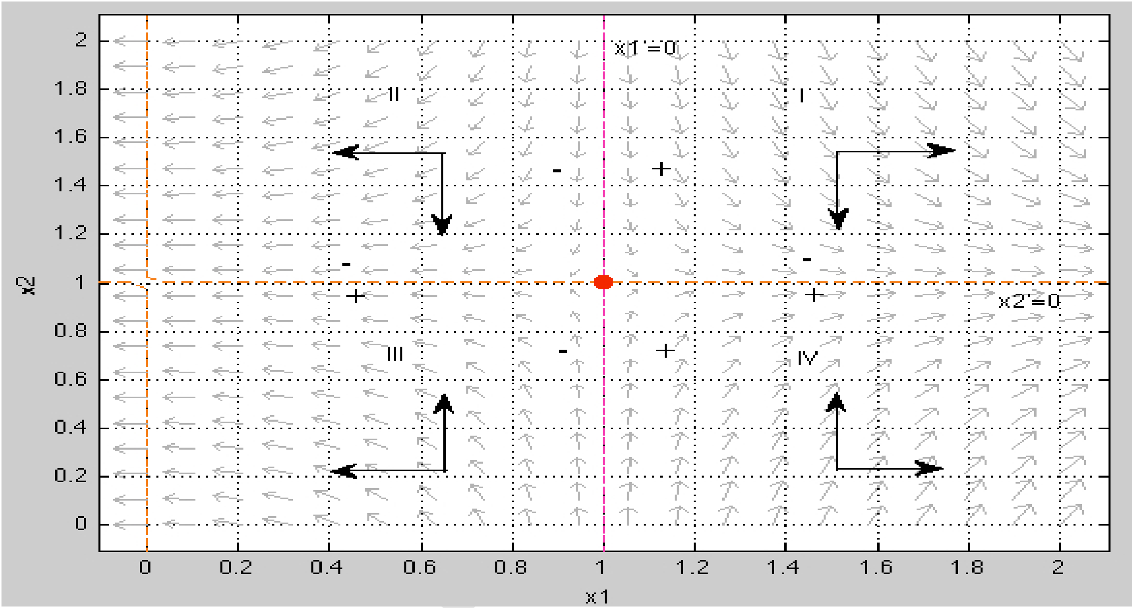

Figura 5: Diagrama de fases

Ejemplo 4.12. *Analizar el siguiente sistema de ecuaciones*

$$x_1' = 1 - x_1 x_2$$
$$x_2' = x_1^3 - x_2$$

Puntos críticos.

$$1 = x_1 x_2$$
$$x_1^3 - x_2 = 0$$

La solución al sistema lineal es sencilla, y se obtienen los puntos de equilibrio: $a = (1,1)$, $b = (-1,-1)$. Curvas de demarcación:

$$\text{Para} \quad x_1' = 0 \quad x_2 = 1/x_1$$
$$\text{Para} \quad x_2' = 0 \quad x_2 = x_1^3$$

Son las gráficas de una hipérbola y una función cúbica.

Análisis de las zonas de crecimiento.

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = -x_2$$
$$\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = -1$$

En el punto crítico $a = (1,1)$ se observa que

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = -1$$

De tal manera que $\uparrow x_1 \Rightarrow \downarrow x_1'$ y $\uparrow x_2 \Rightarrow \downarrow x_2'$. La trayectoria es la de un foco asintóticamente estable.

En el punto crítico $b = (-1,-1)$ se observa

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = -1$$

por ende, $\uparrow x_1 \Rightarrow \uparrow x_1'$ y $\uparrow x_2 \Rightarrow \downarrow x_2'$. El equilibrio es un punto silla.

Utilizando el criterio de la matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}$$

En el punto $a = (1,1)$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

El punto crítico es estable: Traza$J = -2$ y $|J| = 4$. Y dado que $(\text{Traza}\,|J|)^2 < 4|J|$ es un foco estable. Respecto al punto $b = (-1,-1)$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Es un punto de silla: Traza$J = 0$ y $|J| = -4$.

Ejemplo 4.13. *En un ambiente cerrado coexisten dos especies: lobos (l) y conejos (c). Los lobos son depredadores en la medida que se alimentan de la otra especie. Mientras que la fuente de alimento de la presa (conejos) es la vegetación. En esta situación, la ausencia del depredador aumenta la población de la presa, y la ausencia de la presa termina por extinguir a los depredadores por falta de alimento. Las ecuaciones que modelan el comportamiento de las especies son:*

$$l' = l(-0.25 + 0.5c)$$
$$c' = c(1 - 0.5l)$$

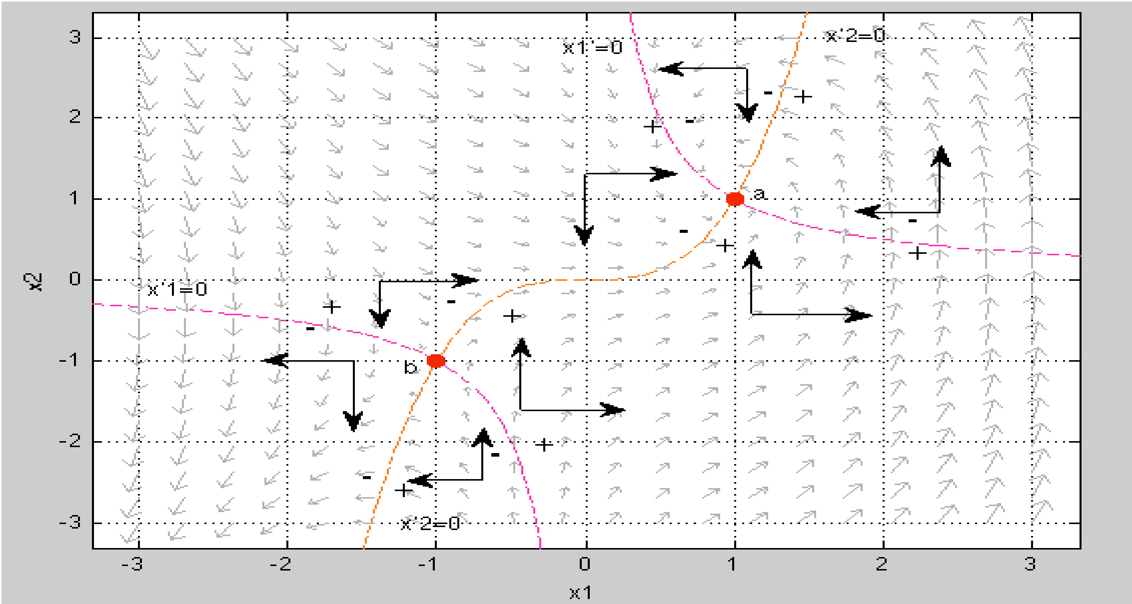

Figura 6: Diagrama de fases del ejemplo 6.2

Los puntos críticos se obtienen a partir de $l' = c' = 0$. El primero es simple, $l = c = 0$. El segundo solo es posible cuando l y c son distintos de cero, es decir, cuando $c = \frac{1}{2}$ y $l = 2$. La matriz jacobiana asociada al problema es,

$$J(l,c) = \begin{pmatrix} -0.25 + 0.5c & 0.5l \\ -0.5c & 1 - 0.5l \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana evaluada en el primer punto crítico, $J(0,0)$, genera una *Traza* J=$\lambda_1 + \lambda_2 = 0.75$ y determinante $|J| = \lambda_1\lambda_2 = -0.25$. Resultando un punto de silla alrededor de $l = c = 0$. Respecto al segundo punto crítico $J(2,0.5)$, la *Traza*$= 0$ y $|J| = \frac{1}{16}$. Debido a que *Traza* $J^2 \leq 4|J|$ es un nodo estable, pero no asintótico.

La figura (7) es el diagrama de fases correspondientes.

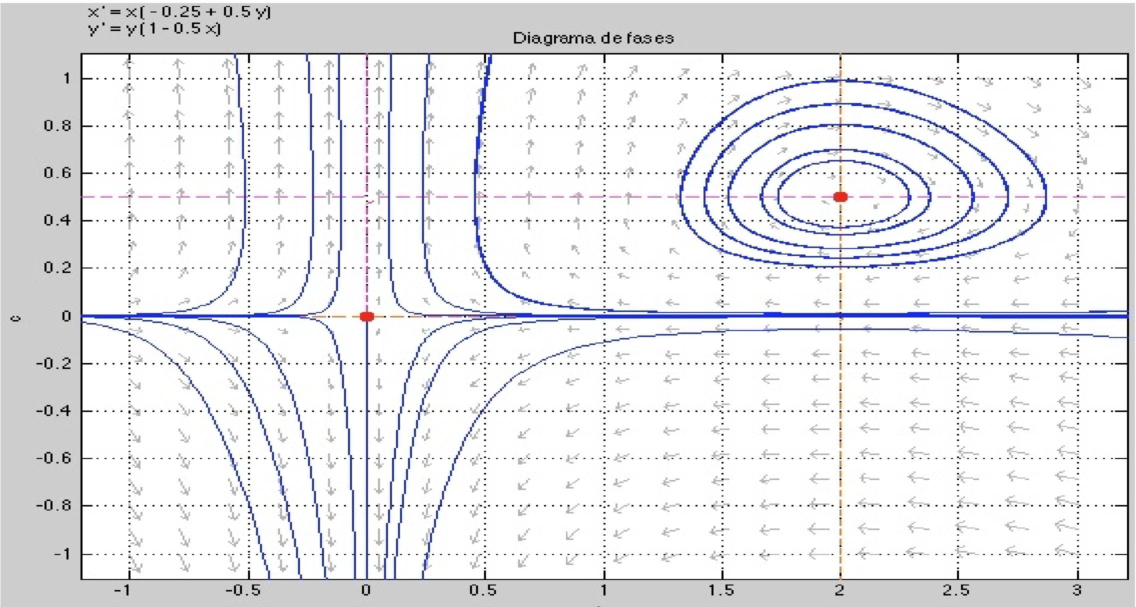

Figura 7: Diagrama de fases del ejemplo 6.3