5.3. Sistemas de ecuaciones en diferencia

El sistema de ecuaciones en diferencia

$$\begin{array}{lllll} x_{1,t+1} & = a_{11}x_{1,t} + & \cdots & + a_{1n}x_{n,t} & + b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{2,t+1} & = a_{n1}x_{1,t} + & \cdots & + a_{nn}x_{n,t} & + b_n \end{array}$$

se expresa en forma matricial,

$$x_{t+1} = Ax_t + b_t$$

donde $x_t = (x_{1,t}, \cdots, x_{n,t}), A$ es una matriz de coeficientes fijos y b es un vector de funciones. Por el momento, considerar que $b_t = 0$ lo que reduce a un sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo.

$$x_{t+1} = Ax_t \tag{5.13}$$

Si la matriz A es diagonalizable, entonces la solución involucra el uso de valores y vectores propios, tal y como se analiza en la sección 4.3. Sea $N = [v_1, \cdots, v_n]$ la matriz de vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ no se impone el supuesto de que los valores propios son distintos, pero si que se generan los suficientes vectores para diagonalizar la matriz A. Es decir, es posible encontrar

$$N^{-1}AN = \Lambda$$

donde Λ es la matriz diagonal de los valores propios.
Multiplicar por N^{-1} la ecuación (5.13).

$$\begin{aligned} N^{-1}X_{t+1} &= N^{-1}AX_t \\ &= N^{-1}ANN^{-1}X_t \end{aligned}$$

$$\hat{x}_{t+1} = \Lambda \hat{x}_t \tag{5.14}$$

donde $\hat{x} = N^{-1}x_t$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{1,t+1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{n,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,t} \\ \vdots \\ \hat{x}_{n,t} \end{pmatrix}$$

Observar que $\hat{x}_{l,t+1} = \lambda_l \hat{x}_{l,t}$ para todo $l \in n$. La solución es simple:

$$\hat{x}_{l,t} = c_l \lambda_l^t$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{1,t} \\ \vdots \\ \hat{x}_{n,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1^t \\ \vdots \\ c_n \lambda_n^t \end{pmatrix}$$

en forma matricial

$$\begin{aligned} N^{-1}X_t &= \Lambda^t C \\ X_t &= N\Lambda^t C \\ X_t &= (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X_t = c_1\lambda_1^t v_1 + \cdots + c_n\lambda_n^t v_n \tag{5.15}$$

Teorema 5.3. *Sea el sistema de ecuaciones en diferencia (5.13), con valores propios reales y distintos $\lambda_l \neq \lambda_R$, entonces la solución al sistema es (5.15).*

Teorema 5.4. *Sea el sistema de ecuaciones en diferencia (5.13), con matriz A en el campo de los reales. Entonces para cada par conjugado de valores propios la solución es:*

$$\begin{aligned} x_1 &= r^t(\alpha cos\theta t - \beta sen\theta t) \\ x_2 &= r^t(\beta cos\theta t - \alpha sen\theta t) \end{aligned}$$

donde r es el módulo.

Ejemplo 5.9. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia*

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 4$ con respectivos vectores propios: $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$ y $v_3 = (1, 1, 1)$. La solución general al problema,

$$\begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (-1)^t + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (4)^t$$

Ejemplo 5.10. *La sucesión de Fibonacci es ampliamente conocida, un número es resultado de sus dos predecesores,*

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Encontrar el k-ésimo término de la sucesión.

Observar que la sucesión toma la forma $x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$. Definiendo $y_t = x_{t+1}$,

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t \\ y_{t+1} &= y_t + x_t \end{aligned}$$

la forma matricial del sistema de ecuaciones es,

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

Los valores y vectores propios asociados a la matriz de coeficientes son: $\lambda_1 = -0.618$, $v_1 = (1, -0.618) = (1, \lambda_1)$ y $\lambda_2 = 1.618$, $v_1 = (1, 1.618) = (1, \lambda_2)$. La solución al problema es:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -0.618 \end{pmatrix} (-0.618)^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.618 \end{pmatrix} (1.618)^t$$

Las constantes k_1 y k_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales. El valor de $x_0 = 0$ y $y_0 = x_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.618 & 1.618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema es $k_1 = -0.4472$ y $k_2 = 0.4472$. De forma que la solución general al problema es:

$$x_t = -0.4472(-0.618)^t + 0.4472(1.618)^t$$
$$y_t = 0.2764(-0.618)^t + 0.7236(1.618)^t$$

El $k-$ ésimo término de la sucesión es: $x_k = -0.4472(-0.618)^k + 0.4472(1.618)^k$

Ejemplo 5.11. *Los cuenta-habientes disponen de tres bancos para depositar su ahorros: Banamex, Bancomer y Banorte. En un mes cualquiera, algunos clientes se cambian de instituciones bancarias obedeciendo el siguiente patrón:*

El 10 % de clientes de Bancomer y el 20 % de Banorte se cambian a Banamex.

El 5 % de Banamex y el 15 % de Banorte se mueven a Bancomer.

El 15 % de Banamex y el 25 % de Bancomer se mueven a Banorte.

Si en el momento inicial los cuenta-habientes están distribuidos de la forma $(80, 60, 40)$ *cómo quedarán distribuidos después de 10 meses.*

Sean x_t, y_t, z_t los cuenta-habientes de Banamex, Bancomer y Banorte en el periodo t, respectivamente. El número de cuenta-habientes de Banamex en el periodo $t+1$ se obtiene como sigue: salen de Banamex $0.05 + 0.15 = 0.20$, de forma que permanecen $1 - 0.20 = 0.80$. Mientras que entran a Banamex 0.10 de Bancomer y 0.20 de Banorte. Es decir, la ecuación de movimiento es:

$$x_{t+1} = 0.80x_t + 0.10y_t + 0.20z_t$$

de la misma forma se obtiene para Bancomer y Banorte,

$$y_{t+1} = 0.05x_t + 0.65y_t + 0.15z_t$$
$$z_{t+1} = 0.15x_t + 0.25y_t + 0.65z_t$$

La representación matricial del problema es,

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.10 & 0.20 \\ 0.05 & 0.65 & 0.15 \\ 0.15 & 0.25 & 0.65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

Antes de continuar observar: i) cada entrada de la matriz es no negativa, $0 \leq a_{ii} \leq 1$ y ii) la suma de los elementos de cada columna es la unidad. Lo cual permite obtener un valor propio igual a uno y los restantes menores a la unidad. La matriz diagonal es,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.66 & 0 \\ 0 & 0 & 0.44 \end{pmatrix}$$

La matriz de vectores propios,

$$N = \begin{pmatrix} -0.74 & -0.81 & -0.31 \\ -0.35 & 0.50 & -0.50 \\ -0.57 & 0.31 & 0.48 \end{pmatrix}$$

La solución al problema,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.74 & -0.81 & -0.31 \\ -0.35 & 0.50 & -0.50 \\ -0.57 & 0.31 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.66 & 0 \\ 0 & 0 & 0.44 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} -0.74 & -0.81 & -0.31 \\ -0.35 & 0.50 & -0.50 \\ -0.57 & 0.31 & 0.48 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 80.3634 \\ 38.0011 \\ 61.6355 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considerar el caso donde la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones en diferencia es no diagonalizable. Por ejemplo, en el sistema,

$$X_{t+1} = BX_t \tag{5.16}$$

si la matriz B es no diagonalizable, entonces es posible obtener una matriz lo mas diagonal posible utilizando la matriz canónica de Jordan, J, tal que

$$N^{-1}BN = J$$

La matriz N contiene los vectores propios linealmente independientes. Si la condición inicial X_0 es conocida, entonces el sistema (5.16) toma la forma:

$$X_1 = BX_0$$

en el momento $t = 1$

$$X_2 = B(BX_0)$$

sucesivamente

$$X_t = B^t X_0$$

Sustituir el valor de la matriz B,

$$\begin{aligned} X_t &= (NJN^{-1})^t X_0 \\ X_t &= (NJN^{-1})^{(}NJN^{-1}) \cdots (NJN^{-1}) X_0 \end{aligned}$$

La solución a un sistema de ecuaciones en diferencia con valores propios repetidos es:

$$X_t = NJ^t N^{-1} X_0 \tag{5.17}$$

Determinar la matriz J^t no es complicado, se trata de una matriz triangular superior. Por ejemplo, si la matriz de Jordan de 2×2,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces la matriz J elevada a varias potencias es,

$$J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \ldots, J^t = \begin{pmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix}$$

Cuando la matriz de Jordan es de 3×3, y es de la forma,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces es fácil comprobar que,

$$J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \ldots, J^6 = \begin{pmatrix} \lambda^6 & 6\lambda^5 & 15\lambda^4 \\ 0 & \lambda^6 & 6\lambda^5 \\ 0 & 0 & \lambda^6 \end{pmatrix}$$

Encontrar la t-ésima es simple porque todo se reduce a encontrar los coeficientes binomiales.

$$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!(t-k)!}$$

De forma que la matriz

$$J^t = \begin{pmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2!}\lambda^{t-2} \\ 0 & \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & 0 & \lambda^t \end{pmatrix}$$

En general el procedimiento es aplicable a matrices de Jordan de orden superior. Más aún, se extiende al caso de valores propios distintos pero cada uno de ellos con multiplicidades aritméticas.

Ejemplo 5.12. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia*

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

con valor inicial $(x_{1,0}, x_{2,0}) = (3,2)$.

La matriz de Jordan, la de vectores propios y su respectiva inversa son:

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La solución al problema es:

$$\begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Desarrollar la potencia de la matriz de Jordan conduce a,

$$\begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^t & t(-3)^{t-1} \\ 0 & (-3)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El producto de todas las matrices permite obtener la solución al problema,

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= 3(-3)^t + 4t(-3)^{t-1} \\ x_{2,t} &= 2(-3)^t + 4t(-3)^{t-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.13. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia*

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

con valor inicial $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}) = (1,1,1)$.

Igual que el ejemplo anterior la matriz de Jordan, de vectores propios y su respectiva inversa son:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución al problema es:

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollar la potencia de la matriz de Jordan conduce a,

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^t & t2^{t-1} & 0 \\ 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El producto de todas las matrices permite obtener la solución al problema,

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= 3(2)^t - 2(2)^t \\ x_{2,t} &= (2)^t \\ x_{3,t} &= (2)^t + 3t(2)^{t-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.14. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia*

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

con valor inicial $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}) = (-1, 2, -30)$.

La forma canónica de Jordan evidencia que existen dos valores propios distintos $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. El segundo valor propio tiene una multiplicidad aritmética y geométrica igual a uno.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución al problema es:

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -21 & 24 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{21} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Desarrollar la potencia de la matriz de Jordan en éste caso es mas sencillo, ya que es la suma directa de subespacios invariantes. Es decir, el primer valor propio se eleva a la potencia t, mientras que el segundo subespacio se eleva a la potencia t en la forma estudiada en los ejemplos anteriores. La solución es:

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ x_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -21 & 24 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{21} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$$

El producto de todas las matrices da la solución,

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= -1 \\ x_{2,t} &= 2 + 4t \\ x_{3,t} &= 3(2)^t - 24t - 33 \end{aligned}$$