2. Ecuaciones diferenciales de orden superior

2.1. Ecuaciones diferenciales de segundo orden: la solución fundamental

Una ecuación diferencial de segundo orden toma la forma

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = b(t)$$

donde $a_1(t)$, $a_2(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas de valor real en el intervalo I.

En lo siguiente, se limita el análisis a valores constantes de a_1 y a_2; y de momento, cuando $b(t) = 0$, lo cual constituye una ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes,

$$x'' + a_1x' + a_2x = 0 \tag{2.1}$$

Antes de encontrar la solución a (2.1), es conveniente introducir el concepto de operador lineal, el cual consiste en transformar una función f en una nueva función g. Estrictamente hablando, es la transformación de una familia que tiene n derivadas (en este caso solo 2) de un intervalo I a otra familia de funciones. Tal transformación se denomina operador diferencial, y permite escribir (2.1) en forma

$$L(x) = x'' + a_1x' + a_2x = 0.$$

El operador diferencial es útil para resolver ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la solución a $x' + ax = 0$, donde a es constante, es de la forma $x(t) = ce^{-at}$, al escribir la ecuación diferencial en forma de operador

$$L(x) = x' + ax = 0.$$

al suponer que la solución al problema es de la forma $x = e^{rt}$, entonces

$$\begin{aligned} L(e^{rt}) &= re^{rt} + ae^{rt} = 0 \\ &= e^{rt}(r + a) = 0 \end{aligned}$$

En virtud que $e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$, entonces la raíz es $r = -a$ y la solución es $x = e^{-at}$. Tal y como se deduce en la sección *2.2.*

El razonamiento anterior se aplicar a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Por analogía, sea $\phi(r) = e^{rt}$ la posible solución, entonces el operador lineal

$$\begin{aligned} L(e^{rt}) &= r^2e^{rt} + a_1re^{rt} + a_2e^{rt} = 0 \\ &= e^{rt}(r^2 + a_1r + a_2) = 0 \end{aligned}$$

El problema se reduce a encontrar las raíces de la ecuación cuadrática

$$r^2 + a_1r + a_2 = 0$$

que por álgebra elemental son:

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Si $a_1^2 - 4a_2 \neq 0$, entonces existen raíces distintas $r_1 \neq r_2$, y el par de soluciones son: $x_1 = e^{r_1 t}$ y $x_2 = e^{r_2 t}$. Resulta claro, que las dos soluciones satisfacen el operador diferencial. Por ejemplo, para la primera raíz, r_1,

$$\begin{aligned} L(e^{r_1 t}) &= r_1^2 e^{r_1 t} + a_2 r_1 e^{r_1 t} + a_2 e^{r_1 t} \\ &= e^{r_1 t}(r_1^2 + a_1 r + a_2) = 0 \end{aligned}$$

Lo mismo sucede con r_2, $L(e^{r_2 t}) = 0$.

Cuando $a_1^2 = 4a_2$ entonces $r_1 = r_2 = r = -\frac{a_1}{2}$. Existe una raíz repetida, y solo una solución: $x_1 = e^{rt}$. Aunque es posible encontrar otra solución a la ecuación diferencial; para ello, derivar el operador diferencial con respecto a r,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} L(e^{rt}) &= L(\frac{d}{dr} e^{rt}) \\ &= L(te^{rt}) \end{aligned}$$

donde $x_2 = te^{rt}$ es una solución a la ecuación diferencial. Para demostrar que efectivamente es una solución, derivar dos veces consecutivas la función solución

$$\begin{aligned} x' &= e^{rt} + rte^{rt} \\ x'' &= 2^r e^{rt} + r^2 te^{rt} \\ L(te^{rt}) &= [r^2 te^{rt} + 2re^{rt}] + a_1[e^{rt} + rte^{rt}] + a_2 te^{rt} \\ &= te^{rt}[r^2 + a_1 r + a_2] + [A_1 + +2r]e^{rt} \end{aligned}$$

dado que $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ y $r = -\frac{a_1}{2}$, entonces

$$L(te^{rt}) = 0.$$

De esta manera, a pesar de tener una raíz repetida, es posible encontrar dos soluciones a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{rt} \\ x_2(t) &= te^{rt} \end{aligned}$$

El siguiente teorema resume lo expuesto hasta el momento.

Teorema 2.1. *Sea la siguiente ecuación diferencial*

$$L(x) = x'' + a_1 x' + a_2 = 0$$

donde a_2 y a_2 son constantes.

Si r_1 y r_2 son las raíces del polinomio

$$p(r) = r^2 + a_1 r + a_2$$

entonces

i) Si $r_1 \neq r_2$, las funciones ϕ_1 y ϕ_2 definidas por $\phi_1(t) = e^{r_1 t}$ y $\phi_2(t) = e^{r_2 t}$ son soluciones de $L(x) = 0$.

ii) Si $r_1 = r_2 = r$, las funciones definidas por $\phi_1(t) = e^{rt}$ y $\phi_2(t) = te^{rt}$ son soluciones de $L(x) = 0$.

Por definición, una aplicación es lineal si satisface

$$L(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1 L(\phi_1) + c_2 L(\phi_2).$$

para c_1 y c_2 constantes.

Corolario 2.1. *Si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones a $L(x) = 0$, entonces para las constantes c_1 y c_2, $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ es también una solución a $L(x) = 0$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} L(\phi) &= L(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \\ &= c_1 L(\phi_1) + c_2 L(\phi_2) \\ &= c_1 0 + c_2 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

El corolario establece que si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación diferencial, entonces la combinación lineal de ambas funciones también es una solución. Lo cual constituye el principio de *superposición*.

2.2. La base de una solución

Dos funciones f_1 y f_2, definidas en el intervalo I, son linealmente dependientes si para dos constantes c_1 y c_2 distintas de cero se cumple

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$$

cuando las funciones no son linealmente dependientes, entonces son linealmente independientes. Existe una forma sencilla para probar la independencia lineal de dos funciones.

Definición 2.1. *(Wronskiano) El wronskiano para dos funciones diferenciables, f y g, se define como:*

$$w[f,g;t] = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

Teorema 2.2. *Si f y g son funciones que pueden derivarse, entonces son linealmente dependientes si y solo si el wronskiano es cero.*

El wronskiano es útil para verificar si las soluciones a la ecuación diferencial son independientes.

Teorema 2.3. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 soluciones de $L(x) = 0$ en el intervalo I, ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes si el wronskiano es distinto de cero.*

Demostración. Considerar primero el caso cuando $r_1 \neq r_2$ y $\phi_1 = e^{r_1 t}$ y $\phi_2 = e^{r_2 t}$

$$\begin{aligned} w[\phi_1, \phi_2; t] &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} \\ &= r_2 e^{r_1 t} e^{r_2 t} - R_1 e^{r_1 t} e^{r_2 t} \\ &= e^{(r_1 + r_2)t}(r_2 - r_1) \neq 0. \end{aligned}$$

la última línea utiliza el hecho de que $r_2 - r_1 \neq 0$, y que $e^{(r_1+r_2)t} \neq 0$. Cuando $r_1 = r_2 = r$, el par de soluciones es $\phi_1 = e^{rt}$ y $\phi_2 = te^{rt}$

$$\begin{aligned} w[\phi_1, \phi_2; t] &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & te^{rt} \\ re^{rt} & r_2 e^{rt}(1 + rt) \end{vmatrix} \\ &= e^{2rt}(1 + rt) - rte^{2rt} \\ &= e^{2rt}(1 + rt - rt) \\ &= e^{2rt} \neq 0. \end{aligned}$$

La importancia del teorema (2.3) es que si ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes, entonces forman la base del espacio de soluciones de la ecuación diferencial.

Teorema 2.4. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 soluciones linealmente independientes a $L(x) = 0$ en el intervalo I. Entonces toda solución a $L(x) = 0$ se escribe de la forma*

$$\phi = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t).$$

Ejemplo 2.1. *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$x'' - 4x = 0$$

El polinomio asociado al problema es $r^2 - 4 = 0$ y las raíces: $r_1 = 2$ y $r_2 = -2$. Dado que $r_1 \neq r_2$, entonces el par de soluciones es $\phi_1 = e^{2t}$ y $\phi_2 = e^{-2t}$ son linealmente independientes, el wronskiano

$$\begin{aligned} w[e^{2t}, e^{-2t}; t] &= \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 2e^{2t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= -2e^{2t}e^{-2t} - 2e^{2t}e^{-2t} \\ &= -4 \neq 0. \end{aligned}$$

en consecuencia, la solución a la ecuación diferencial es:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

La solución satisface la ecuación diferencial, y la manera de comprobar es obtener la primera y segunda derivada de la misma,

$$\begin{aligned} x' &= 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} \\ x'' &= 4c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-2t} \end{aligned}$$

al sustituir en la ecuación,

$$\begin{aligned} x'' - 4x &= (4c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-2t}) - 4(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2. *Resolver* $x'' + 6x' + 9x = 0$

El polinomio asociado es $r^2 + 6r + 9 = 0$, y por simple inspección existe una raíz repetida $r_1 = r_2 = r = -3$. El par de soluciones es $\phi_1 = e^{-3t}$ y $\phi_2 = te^{-3t}$. La combinación lineal de las mismas es la solución general,

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 te^{-3t}.$$

Corresponde al lector comprobar que el $w(\phi_1, \phi_2, t) \neq 0$ y verificar que la solución satisface la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.3.

$$x'' + x' + \frac{1}{2}x = 0$$

El polinomio es

$$r^2 + r + \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(\frac{1}{2})}}{2} \\ r &= \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2} \end{aligned}$$

Dado que $\sqrt{-1} = i$, un numero imaginario, entonces las raíces son

$$\begin{aligned} r_1 &= -1/2 + 1/2i \\ r_2 &= -1/2 - 1/2i \end{aligned}$$

las soluciones son:

$$\phi_1 = e^{(-1/2+1/2i)t}$$
$$\phi_2 = e^{(-1/2-1/2i)t}$$

son linealmente independientes y la solución general es,

$$x(t) = c_1 e^{(-1/2+1/2i)t} + c_2 e^{(-1/2-1/2i)t}$$

El problema de la solución es que involucra números complejos, situación que en principio no debería preocupar. Pero de ser el caso, existe una manera simple de expresar la solución sin la presencia de complejos.

De inicio, reescribir la ecuación de segundo grado en la forma $r = h \pm vi$ donde $h = -\frac{a_1}{2}$, $v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$ e $i = \sqrt{-1}$, lo que permite trabajar en el campo de los números complejos.

A continuación, es posible representar un número complejo si se utiliza el diagrama de Argand, donde el módulo del número complejo es $h^2 + v^2$. Al establecer un círculo unitario, el seno y coseno del ángulo θ se determinan como:

$$sen(\theta) = v \quad \text{y} \quad cos(\theta) = h$$

Entonces el número complejo también se escribe de la forma,

$$r = h \pm vi = cos(\theta) \pm isen(\theta)$$

una de las propiedades de la función exponencial es que para un θ real,

$$e^{\pm i\theta} = cos\ \theta \pm isen\ \theta$$

Más aún, se puede demostrar que

$$e^{\pm i\theta t} = cos\ \theta t \pm isen\ \theta t.$$

De esta manera, cuando las raíces del polinomio son complejas, el par de soluciones son: $x_1 = e^{(h+iv)t}$ y $x_2 = e^{(h-iv)t}$. Finalmente, la solución general es:

$$x = k_1 e^{(h+iv)t} + k_2 e^{(h-iv)t}$$

o bien,

$$x = k_1 e^{ht} e^{ivt} + k_2 e^{ht} e^{-ivt}$$

El factor común es e^{ht},

$$x = e^{ht}[k_1 e^{ivt} + k_2 e^{-ivt}]$$

En términos de senos y cosenos, se obtiene

$$x = e^{ht}[k_1(\cos v\theta t + isenv\theta t) + k_2(\cos v\theta t - isenv\theta t)]$$

factorizando,

$$x = e^{ht}[(k_1 + k_2)\cos v\theta t + i(k_1 - k_2)senv\theta t]$$

donde se tienen sumas de constantes, $k_1 + k_2 = c_1$ y $(k_1 - k_2)i = c_2$. La solución es

$$x = e^{ht}[c_1 \cos v\theta t + c_2 vsen\theta t]$$

Después del largo recorrido, una solución accesible al ejemplo 3.3 es:

$$x = e^{-\frac{1}{2}t}(c_1 \cos \frac{1}{2}\theta t + c_2 sen \frac{1}{2}\theta t)$$

Es momento de establecer el teorema general para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden homogénea y con coeficientes constantes.

Teorema 2.5. *Sean a_1 y a_2 constantes de la ecuación*

$$L(x) = x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$$

y sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio

$$r^2 + a_1 r + a_2$$

Caso a: $r_1 \neq r_2$

a.1) *Si r_1 y r_2 son reales la solución es:*

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

a.2) *Si r_1 y r_2 son complejas*

$$x = e^{ht}[c_1 cos\ \theta t + c_2 sen\ \theta t]$$

Caso b: $r_1 = r_2$

$$x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$

2.3. Teorema de existencia y unicidad

Dado el problema

$$L(x) = x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$$

y las condiciones iniciales

$$\phi(t_0) = x_0$$
$$\phi'(t_0) = x_1$$

para $t_0 \in \mathbb{R}$ y las constantes x_0 y x_1: ¿Es posible encontrar una solución al problema?

El teorema de existencia garantiza que existe una función $\phi(t)$ que resuelve el problema. Y ás importante aún, el teorema de unicidad expresa que en cualquier intervalo I que contenga a t_0 existe una única solución al problema.

Teorema 2.6. *Sean a_1 y a_2 constantes de la ecuación*

$$L(x) = x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$$

tal que ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones al problema. Si c_1 y c_2 son constantes cualquiera, la función

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$

es una solución a $L(x) = 0$ en el intervalo I, y existen dos constantes únicas c_1 y c_2 tales que $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.

2.4. Ecuaciones diferenciales de segundo orden con término variable

Sea

$$L(x) = x'' + a_1 x + a_2 x = b(t)$$

donde a_1 y a_2 son constantes y $b(t)$ es una función continua en el intervalo I. Suponer que ϕ_p es una solución particular y ϕ es otra cualquiera, tal que

$$L(\phi) = b(t) \quad \text{y} \quad L(\phi_p) = b(t)$$

Dado que L es un operador lineal entonces,

$$\begin{aligned} L(\phi - \phi_p) &= L(\phi) - L(\phi_p) \\ &= b(t) - b(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que $\phi - \phi_p$ es una solución a lo homogéneo

$$\phi - \phi_p = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \phi_p$$

tal que

$$L(\phi) = b(t)$$

Encontrar ϕ_p es el propósito de esta sección. La solución a lo homogéneo se realizó en el apartado anterior, y no hay nada que agregar.

El procedimiento adecuado para encontrar ϕ_p es el de variación de parámetros. Sin embargo, es un método poco eficiente porque involucra mayor trabajo y el conocimiento de la solución homogénea. El lector interesado puede consultar dicho método en un libro de ecuaciones diferenciales, porque aquí solo se emplea el *método de coeficientes indeterminados*.

El caso más sencillo surge cuando $b(t)$ es constante,

$$L(x) = x'' + a_1 x' + a_2 x = b \tag{2.2}$$

La conjetura adecuada es,

$$\phi_p = k$$

La primera y segunda derivada de una constante es cero,

$$\phi_p' = \phi_p'' = 0$$

Por lo que al sustituir en (2.2)

$$0 + a_1(0) + a_2 k = b$$

$$k = \phi_p = \frac{b}{a_2}$$

La solución general es: $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \frac{b}{a_2}$, siempre y cuando $a_2 \neq 0$. De ser el caso, observar que la ecuación (2.2) se reduce a

$$L(x) = x'' + a_1 x' = b \tag{2.3}$$

El polinomio característico es $r^2 + a_1 r = 0$. Una de las raíces es cero, y por ende

$$\phi_h = c_1 e^{-at} + c_2$$

Observar que aparece una constante similar a la de la solución particular. Por lo que el camino adecuado es proponer

$$\phi_p = kt$$

con $\phi_p' = k$ y $\phi_p'' = 0$ que al sustituir en (2.3) da como resultado $k = \frac{b}{a_1}$. Por lo tanto, la solución general es:

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \frac{b}{a_1}t.$$

¿Que sucede cuando $a_1 = a_2 = 0$?

Ampliar el método al considerar que $b(t)$ adopta una forma polinómica. Por ejemplo, sea $b(t)$ lineal en t.

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = t \tag{2.4}$$

La conjetura de solución particular es: $\phi_p = At + B$, donde A y B son constantes a determinar. La primera y segunda derivada de la solución propuesta son respectivamente: $\phi_p' = A$ y $\phi_p'' = 0$, que al sustituir en la ecuación (2.4)

$$\begin{aligned} 0 + a_1 A + a_2(At + B) &= t \\ a_1(A + B) + a_2 At &= t \end{aligned}$$

al igualar los coeficientes

$$\begin{aligned} a_1(A + B) &= 0 \\ a_2 A &= 1 \end{aligned}$$

la solución a este sistema de ecuaciones es $A = \frac{1}{a_2}$ y $B = -\frac{1}{a_2}$.Por lo tanto, la solución particular es

$$\phi_p = \frac{1}{a_2}t - \frac{1}{a_2}$$

Se deja al lector comprobar que ésta solución satisface la ecuación (2.4).

En forma general, si $b(t)$ tiene una forma polinómica, la conjetura adecuada es:

$$x_p = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

donde las a_i son coeficientes a determinar.

Si $b(t)$ de la forma exponencial,

$$L(x) = e^{at}$$

la conjetura adecuada es

$$x_p = Ae^{at} + B.$$

donde A y B son constantes a determinar, y a no es una raíz del polinomio de la ecuación $L(x) = 0$.

Por último, cuando $b(t)$ involucra funciones de seno y coseno, entonces la conjetura es

$$x_p = A\ cos\ \alpha t + B\ cos\ \alpha t$$

para α real y A, B constantes.

El método de coeficientes indeterminados es simple, ya que no involucra ninguna integral a resolver (contrario al caso de variación de parámetros) y se reduce a resolver un problema algebraico.

Ejemplo 2.4. *Resolver* $x'' - 3x' + 2x = 5$

Primero encontrar la solución a lo homogéneo. El polinomio es $r^2 - 3r + 2 = 0$ y las raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$. La solución es,

$$x^h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Para obtener la solución particular se propone,

$$x^p = A$$

al derivar dos veces consecutivamente, $x' = 0$ y $x'' = 0$, y sustituyendo en la ecuación se deduce que $A = \frac{5}{2}$. Por lo tanto la solución general es:

$$x(t) = c_1 e^t r + c_2 e^2 t + \frac{5}{2}$$

Ejemplo 2.5. *Sea* $x'' - x' - 2x = 3t + 4$

La ecuación característica asociada a la solución homogénea es $r^2 - r - 2 = 0$, y las raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$. Para obtener la solución particular se utiliza la conjetura,

$$x^p = At + B$$

la primera y segunda derivada son $x' = A$ y $x'' = 0$.Al sustituir en la ecuación,

$$0 - A - 2(At + B) = 3t + 4$$

agrupando términos

$$-2At - (A + 2B) = 3t + 4$$

entonces $A = -\frac{3}{2}$ y $B = -\frac{5}{4}$. La solución general es:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

2.5. Ecuaciones diferenciales de orden n

Suponer que $a_1, ..., a_n$ son coeficientes constantes en la ecuación diferencial

$$L(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n x = 0$$

donde $x^n = \frac{d^n x}{dt^n}$ es la n-ésima derivada con respecto a t de la variable x.

Igual que una ecuación diferencial de segundo orden, ensayar con la solución $\phi = e^{rt}$.

$$\begin{aligned} L(\phi) &= r^n e^{rt} + a_1 r^{n-1} e^{rt} + \cdots + a_n e^{rt} = 0 \\ &= e^{rt}(r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n) = 0 \end{aligned}$$

Todo se reduce al resolver el polinomio

$$p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$$

El *teorema fundamental del álgebra* garantiza que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces.

$$p(r) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

Por ejemplo, si todas las raíces son reales y distintas

$$r_1 \neq r_2 \neq \cdots \neq r_n$$

entonces el conjunto de soluciones

$$\phi_1 = e^{r_1 t}, ..., \phi_n = e^{r_n t}$$

son funciones linealmente independientes, ya que el wronskiano $w(\phi_1, ..., \phi_n) \neq 0$, y por ende se forma la base del espacio de soluciones

$$x = c_1 e^{r_1 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}.$$

Cundo existen raíces complejas el análisis no cambia mucho. En primer lugar las raíces complejas aparecen en pares conjugados. Esto es, suponer el siguiente polinomio

$$r(r^2+1)=0$$

las raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = i$ y $r_3 = -i$. El par conjugado es r_2 y r_3. Por lo tanto, en ausencia de las raíces repetidas se concluye que todas las raíces son distintas, y la base del espacio de soluciones combina funciones de seno y coseno. Por ejemplo, suponer que solo existe una raíz compleja en la ecuación diferencial de orden n.La solución en ese caso es:

$$x = c_1 e^{r_1 t} + \cdots + c_{n-1} e^{r_{n-2} t} + e^{ht}(c_{n-1}\, cos\ t + c_n\, sen\ t)$$

El problema se complica cuando existen raíces repetidas. Suponer que las dos primeras raíces son iguales: $r_1 = r_2 = r$. En este caso, la solución es:

$$x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} + c_3 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}.$$

Si existen tres raíces repetidas, por ejemplo $r_1 = r_2 = r_3 = r$, se procede de la siguiente manera: derivar respecto a t el operador diferencial para la solución $\phi_1 = e^{rt}$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} L(e^{rt}) &= L(\frac{d}{dt} e^{rt}) \\ &= L(te^{rt})\end{aligned}$$

Así se obtiene una segunda solución linealmente independiente: $\phi_2 = te^{rt}$. Al introducir la segunda solución en el operador diferencial y derivando respecto a t,

$$\frac{d}{dt} L(te^{rt}) = L(t^2 e^{rt} + e^{rt})$$

Como e^{rt} aparece en la primera solución, entonces se utiliza $\phi_3 = t^2 e^{rt}$. Las 3 soluciones son linealmente independientes y junto con las restantes generan el espacio de soluciones,

$$x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} + c_3 t^2 e^{rt} + \cdots + c_n e^{r_n t}$$

En el caso de existir j-raíces repetidas, el procedimiento continua hasta obtener

$$\phi_k = t^{k-1} e^{rt} \quad k = 1, ..., j.$$

$$x = \sum_{k=1}^{j} c_k t^{k-1} e^{rt} + \cdots + c_n e^{r_n t}$$

Teorema 2.7. *Sea la siguiente ecuación diferencial de orden n*

$$L(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n x = 0$$

Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ constantes y $t_0 \in \mathbb{R}$. En un intervalo I que contenga a t_0 existe a lo más una solución ϕ que satisface

$$L(x) = 0$$

con las condiciones

$$\phi(t_0) = \alpha_1, ..., \phi_{n-1}(t_0) = \alpha_n$$

la solución ϕ puede obtenerse al resolver el polinomio

$$p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$$

y, de esta manera, establecer la base del espacio de soluciones.

Ejemplo 2.6. *Resolver la ecuación diferencial*

$$x''' + x'' - x' - x = 0$$

El polinomio es

$$r^3 + r^2 - r - 1 = 0$$

el cual tiene como raíces

$$r_1 = 1, \quad r_2 = r_3 = -1$$

por consiguiente la solución a la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}$$

Ejemplo 2.7. *Resolver*

$$x^{vi} - x'' = 0$$

La ecuación característica es,

$$r^6 - r^2 = 0$$

el factor común es r^2,

$$r^2(r^4 - 1) = 0$$

entonces $r_1 = r_2 = 0$. A continuación, trabajar con $(r^4 - 1)$ que resulta una diferencia de cuadrados: $(r^2 + 1)(r^2 - 1) = 0$. De $r^2 - 1 = 0$ se tiene $r^2 = 1$, entonces las raíces son $r_3 = 1$ y $r_4 = -1$. Mientras que de $(r^2 + 1) = 0$, se obtiene $r = \pm\sqrt{-1}$, por tanto las raíces son $r_5 = i \quad$ y $\quad r_6 = -i$.

Una vez que se obtienen las seis raíces del polinomio, la solución a la ecuación diferencial es,

$$x(t) = c_1 e^{0t} + c_2 t e^{0t} + c_3 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 e^{it} + c_6 e^{-it}$$

simplificar la solución,

$$x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 \cos\theta t + c_6 sen\theta t$$