3.4. Transformación lineal

Definición 3.10 *Sean V y W dos espacios vectoriales. Una transformación lineal es una función $T : V \to W$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$, *para todos* $\alpha, \beta \in V$.

2. $T(r\alpha) = rT(\alpha)$, *para todo escalar* $r \in \mathbb{R}$ *y para todo* $\alpha \in V$.

Un operador lineal sobre V es una transformación lineal de V en si mismo.

Ejemplo 51 *La función $0 : V \to W$ definida por $0(v) = 0$ que mapea todos los elementos del espacio vectorial V al elemento cero del espacio W, es claramente una función lineal, llamada la transformación cero.*

Ejemplo 52 *La función $1V : V \to V$ dada por $1V(v) = v$ es un operador lineal denominado operador identidad sobre V.*

Ejemplo 53 *Si $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$ las trasformaciones lineales entre V y W corresponden a las matrices A de $m \times n$. En particular, si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \textit{entonces}$$

$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_A(x) = Ax$ es lineal, dada por:

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + z \end{pmatrix}$$

Teorema 3.11 *Si $T : V \to W$ es una tranformación lineal, y si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son vectores de V, entonces dados los escalares $a_1, a_2, ..., a_n$,*

$$T(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n) = a_1T(\alpha_1) + \cdots + a_nT(\alpha_n).$$

Teorema 3.12 *Sea $T : V \to W$ una tranformación lineal, si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es una base para V, y si $T(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, 2, ...n$ entonces para cualquier vector $\alpha \in V$, $T(\alpha)$ está determinada y $T(\alpha) = a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son escalares tales que $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$.*

Teorema 3.13 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, sea $\alpha_1, ..., \alpha_n$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial y $\beta_1, ..., \beta_n$ vectores cualesquiera en W. Entonces existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que*

$$T(\alpha_j) = \beta_j. \quad j = 1, ..., n.$$

Ejemplo 54 *Consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ formada por lo vectores $\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (3, 4)$. Por el Teorema 7 existe una transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$\begin{aligned} T(\alpha_1) &= (3, 2, 1) \\ T(\alpha_2) &= (6, 5, 4) \end{aligned}$$

Encontremos $T(1, 0)$. Si $(1, 0) = c_1(1, 2) + c_2(3, 4)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces $c_1 = -2$ y $c_2 = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} T((1, 0)) &= T(c_1(1, 2) + c_2(3, 4)) \\ &= c_1T(1, 2) + c_2T(3, 4) \\ &= -2(3, 2, 1) + (6, 5, 4) \\ &= (0, 1, 2). \end{aligned}$$

3.5. Nucleo e imagen

Definición 3.14 *Sea $T : V \to W$ una tranformación lineal. Definimos el núcleo de T como el conjunto $N_T = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = 0\}$. La imagen de T, denotada R_T, se define como $R_T = \{\beta \in W \mid \text{existe un} \, \alpha \in V \, y \text{ satisface} \, T(\alpha) = \beta\}$.*

Ejemplo 55 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (-x + 3y + z, y + 2z)$. Entonces $(x, y, z) \in N_T$ si y solo si*

$$\begin{aligned} -x + 3y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

La forma escalonada reducida de la matriz de los coeficientes de este sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el núcleo de T, $N_T = \{(-5z, -2z, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en la teoría de espacios vectoriales de dimensión finita.

Teorema 3.15 *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, $T : V \to W$ una tranformación lineal, entonces la siguiente ecuación se cumple:*

$$dim(V) = dim(N_T) + dim(R_T)$$

3.6. Matriz de una tranformación lineal

Sabemos que una tranformación lineal queda completamente determinada en una base. Si $T : V \to W$ es una tranformación lineal, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ son bases de V y W respectivamente, entonces para cada $j = 1, ..., n$, $T(\alpha_j)$ se representa como combinación linel de los elementos de la base $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$, es decir. existen escalares $a_{1j}, ..., a_{mj}$, únicos, tales que:

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$$

Los escalares a_{ij} solamente dependen de la tranformación lineal y de las bases elegidas, con ellos formamos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 56 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$. Entonces la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas es*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 57 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x + y, x - y)$. Entonces la matriz asociada a T respecto de las bases canónicas es*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.7. Cambio de base

Teorema 3.16 *Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F, y W un espacio vectorial de dimensión n sobre F. Sean B una base ordenada de V y B' una base ordenada de W. Para cada transformación lineal T de V en W, existe una matriz $m \times n$, A, cuyos elementos pertenecen a F, tal que*

$$[T\alpha]_{B'} = A[\alpha]_B$$

Para todo vector $\alpha \in V$.

Definición 3.17 *La matriz A se llama* ***la matriz asociada a la transformación T respecto a las bases $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$.***

Ejemplo 58 *Sea B la base de $\mathbb{R}^2$ formada por lo vectores $\alpha_1 = (1,1)$ y $\alpha_2 = (3,-2)$. Por el Teorema 7, existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\alpha_1) = (4,5)$ y $T(\alpha_2) = (6,-1)$. Encontremos la matriz A asociada a T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Para determinar A, debemos determinar $T(e_1) = (a,b)$ y $T(e_2) = (c,d)$. De las ecuaciones*

$$\begin{aligned} T(1,1) &= T(e_1) + T(e_2) \ \text{y} \\ T(3,-2) &= 3T(e_1) - 2T(e_2) \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} (4,5) &= (a+c, b+d) \\ (6,-1) &= (3a-2c, 3b-2d) \end{aligned}$$

de donde se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + c &= 4 \\ b + d &= 5 \\ 3a - 2c &= 6 \\ 3b - 2d &= -1 \end{aligned}$$

de cuya solución se sigue que $T(e_1) = \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)$ y $T(e_2) = \left(\frac{6}{5}, \frac{16}{5}\right)$, por lo tanto la matriz asociada a T respecto a la base canónica es:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la expresión que define a $T(x,y)$ se obtiene del siguiente producto de matrices:

$$AX = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{16}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5}x + \frac{6}{5}y \\ \frac{9}{5}x + \frac{16}{5}y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $T(x,y) = (\frac{14}{5}x + \frac{6}{5}y, \frac{9}{5}x + \frac{16}{5}y)$.

Teorema 3.18 *(Cambio de base). Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que A es la matriz asociada a T respecto a bases dadas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ en V y $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ en W. Si las bases anteriores se cambian a nuevas bases $\{\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n\}$ y $\{\beta'_1, ..., \beta'_n\}$, con matrices de cambio de base P y Q respectivamente y B es la matriz asociada a T en estas nuevas bases, entonces se tiene:*

$$B = Q^{-1}AP.$$

Si $T : V \to V$ es una transformación lineal, $\alpha_i = \beta_i$ y $\alpha'_i = \beta'_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Entonces la matriz asociada a T respecto a la nueva base es $P^{-1}AP$, P la matriz de cambio de base.

Ejemplo 59 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x+y-z, 2x-y+3z, x-z)$. Para encontrar la matriz asociada a T respecto a la base $\{(1,2,0), (1,-1,0), (1,1,1)\}$, primero encontramos la matriz asociada a T respecto a la base canónica, la cual se obtiene evaluando a T en los vectores canónicos. Tenemos que $T(1,0,0) = (1,2,1)$, $T(0,1,0) = (1,-1-0)$ y $T(0,0,1) = (-1,3,-1)$, por lo que la matriz asociada a T respecto de la base canónica es:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aplicando el Teorema anterior obtenemos que la matriz asociada a T respecto de la base $\{(1,2,0),(1,-1,0),(1,1,1)\}$ es:

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$