Aplicación de los cuaterniones en el análisis matricial

Implementación de pyFEM

Cristian Ramirez   Martín Estrada

Facultad de ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

IX seminario permanente de divulgación de resultados de investigación
grupo INDETEC, Noviembre de 2020

Tabla de contenido

Introducción

Tabla de contenido

pyFEM y FEM.js

pyFEM: programa de computador para el análisis de estructuras en tres dimensiones tipo pórtico sometidas a cargas estáticas.

Tabla de contenido

FEM.js

FEM.js: programa de computador para visualizar estructuras tridimensionales.

pyFEM

Tabla de contenido

Elemento tipo pórtico

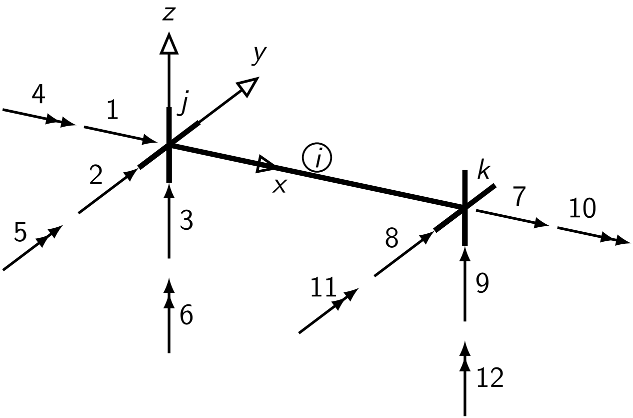

Figura: Elemento tipo pórtico en coordenadas locales.

Matriz de rigidez

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 & & & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 & & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 & & & & & & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
 & & & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
\text{sim.} & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad (1)
$$

Tabla de contenido

Teorema de rotación de Euler

Definición

Según el *teorema de rotación de Euler* (véase Akademiia nauk SSSR., 1763), siempre es posible encontrar un diámetro de una esfera cuya posición es la misma después de rotarla alrededor de su centro, por lo que cualquier secuencia de rotaciones de un sistema coordenado tridimensional es equivalente a una única rotación alrededor de un eje que pase por el origen.

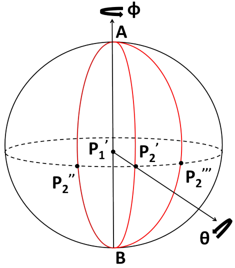

Tabla de contenido

Rotación del sistema de coordenadas

El ángulo θ y el vector n que definen la rotación del eje x del sistema de coordenadas global hacia el eje x_m del sistema de coordenadas de un elemento se puede calcular como

$$\begin{aligned} \mathsf{n} &= (1,0,0) \times \mathsf{x_m} \\ \theta &= \operatorname{arc\,sen}((1,0,0) \cdot \mathsf{x_m}) \end{aligned} \tag{2}$$

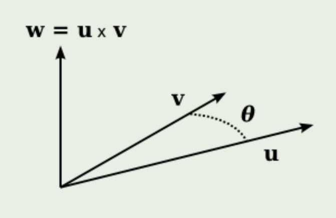

Tabla de contenido

Representación de la rotación como un cuaternión

Según Dunn, 2002, la rotación de un sistema de coordenadas tridimensionales alrededor del eje $\boldsymbol{n}$ una cantidad $\boldsymbol{\theta}$ se puede describir mediante un *cuaternión* como

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} cos(\theta/2) & sin(\theta/2)\boldsymbol{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & x & y & z \end{bmatrix} \tag{3}$$

y se puede obtener la matriz de rotación a partir de un cuaternión de la siguiente manera

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy+2wz & 2xz-2wy \\ 2xy-2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz+2wx \\ 2xz+2wy & 2yz-2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$