Clan comportamiento de gráficas con vecindad pequeña

Rafael Villarroel Flores, UAEH
Trabajo conjunto con Paco Larrión y Miguel Pizaña

XXIX Coloquio Víctor Neumann-Lara

13 de marzo de 2014

Nuestras gráficas:

En esta plática consideraremos solo gráficas simples

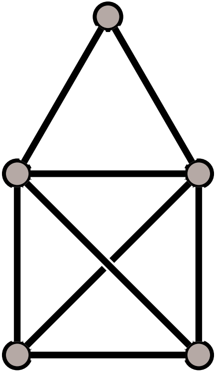
Nuestras gráficas:

En esta plática consideraremos solo gráficas simples

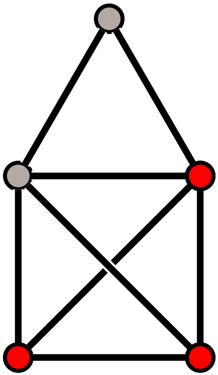
i.e. sin aristas dirigidas, sin lazos, sin aristas múltiples

Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.

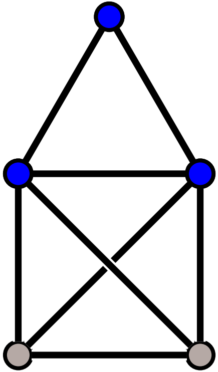
Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.



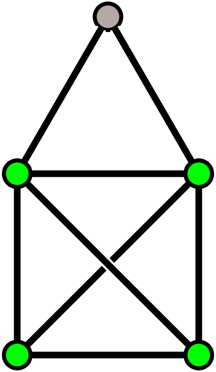
Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.



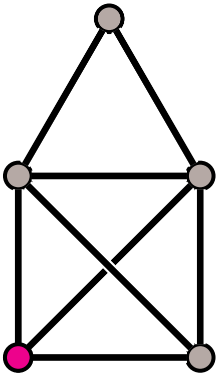
Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.



Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.

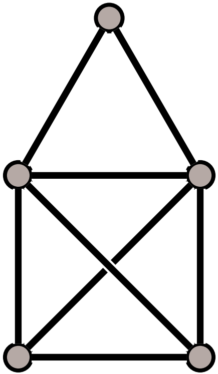


Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.

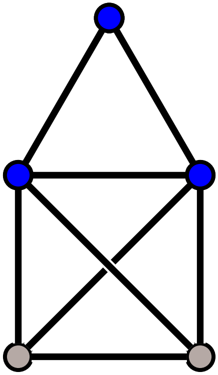


Un clan es una completa maximal.

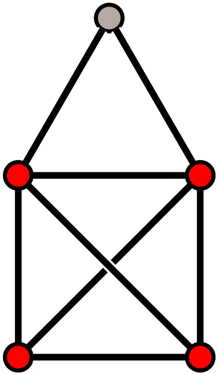
Un clan es una completa maximal.



Un clan es una completa maximal.



Un clan es una completa maximal.



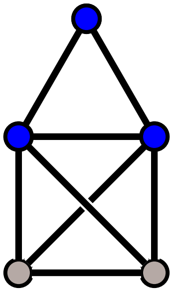
La gráfica de clanes de G es la gráfica $K(G)$ tal que:

- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$, La gráfica de clanes de G es la gráfica $K(G)$ tal que:

- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \big\{\, \{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2, Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \,\big\}$.

La gráfica de clanes de G es la gráfica K(G) tal que:

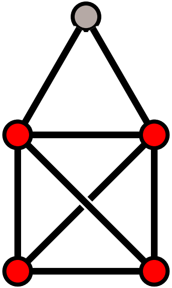
- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \big\{ \{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2, Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \big\}$.



G

La gráfica de clanes de G es la gráfica K(G) tal que:

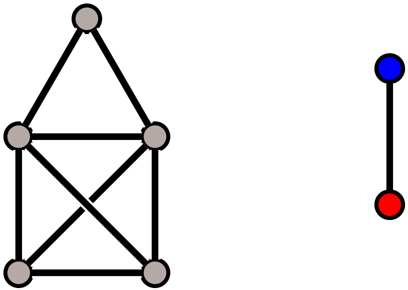
- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \big\{\, \{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2,\ Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \,\big\}$.



G

La gráfica de clanes de G es la gráfica K(G) tal que:

- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \big\{\, \{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2,\, Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \,\big\}$.



G

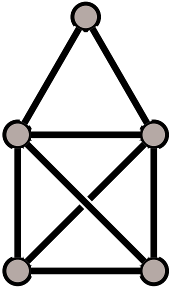
K(G)

Las gráficas iteradas de clanes se definen como:

$$K^0(G) = G, \qquad K^n(G) = K\big(K^{n-1}(G)\big), \quad n \geq 1.$$

Las gráficas iteradas de clanes se definen como:

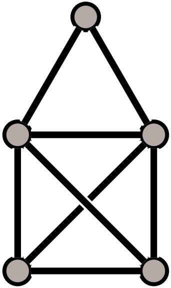
$$K^0(G) = G, \qquad K^n(G) = K\left(K^{n-1}(G)\right), \quad n \geq 1.$$



G

Las gráficas iteradas de clanes se definen como:

$$K^0(G) = G, \qquad K^n(G) = K\left(K^{n-1}(G)\right), \quad n \geq 1.$$

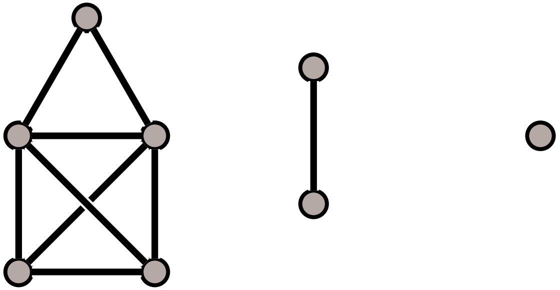


G

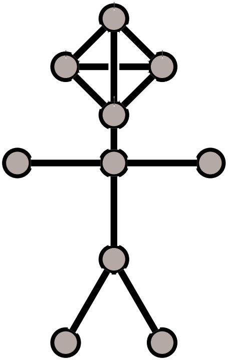
K(G)

Las gráficas iteradas de clanes se definen como:

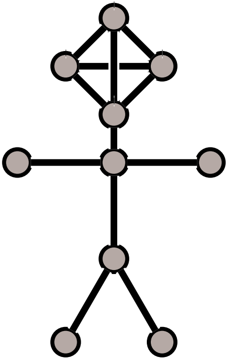
$$K^0(G) = G, \qquad K^n(G) = K\left(K^{n-1}(G)\right), \quad n \geq 1.$$



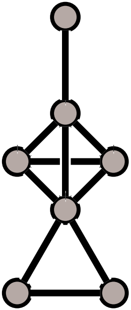
G K(G) $K^2(G)$



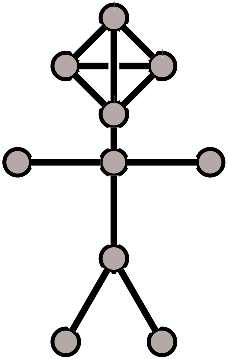
G



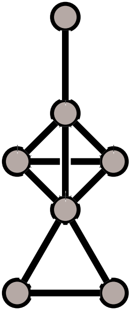
G



K(G)

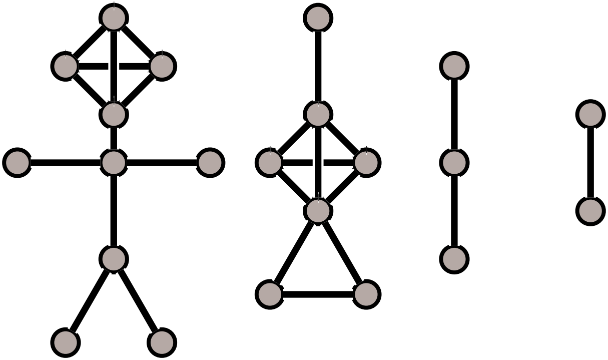


G

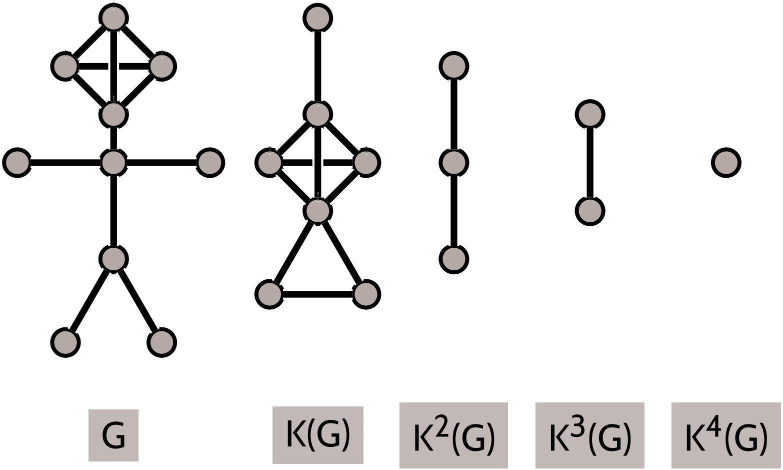


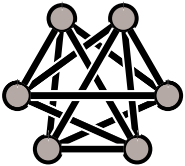
K(G)

$K^2(G)$

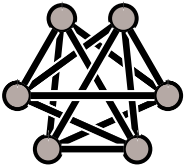


G $K(G)$ $K^2(G)$ $K^3(G)$

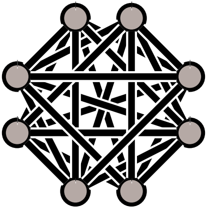

G
K(G)
K2(G)
K3(G)
K4(G)



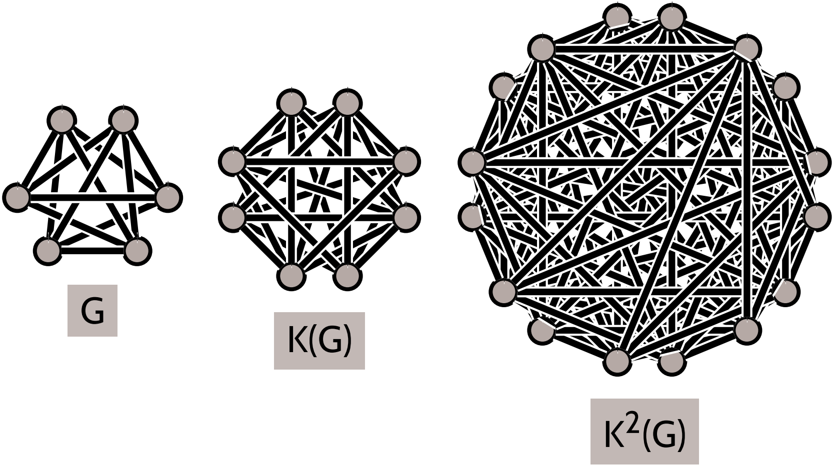
G

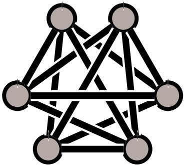


G

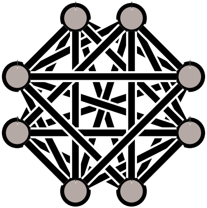


K(G)

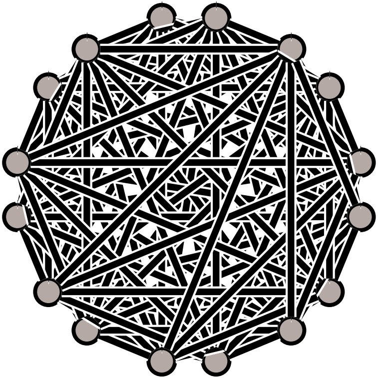

G
K(G)
$K^2(G)$



G

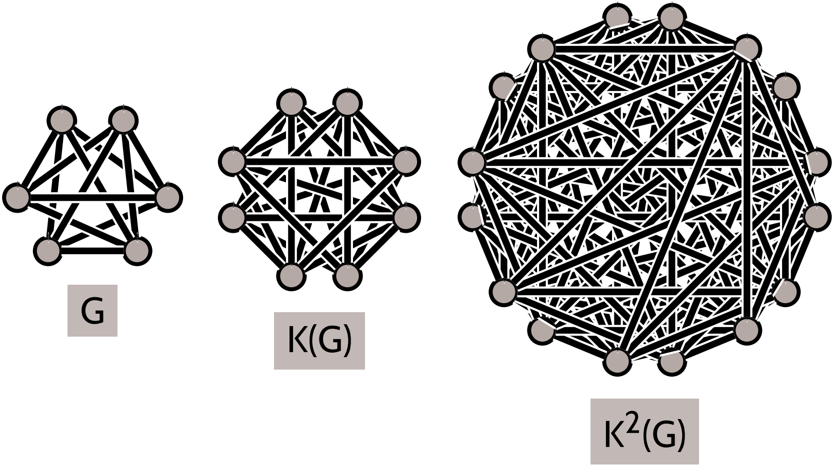


$K(G)$



$K^2(G)$

$$|K^3(G)| = 256,$$



$$|K^3(G)| = 256, \qquad |K^4(G)| = 2^{128}$$

Gráfica divergente:

Si el conjunto

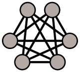
$$\{\, |K^n(G)| \mid n = 0, 1, 2, \ldots \,\}$$

no está acotado superiormente,

G *es divergente.*

Gráfica divergente:

Si el conjunto



$$\{\, |K^n(G)| \mid n = 0, 1, 2, \ldots \,\}$$

no está acotado superiormente,

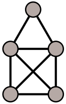
G *es divergente.*

Gráfica convergente:

Si G *no es divergente, entonces es convergente.*

Gráfica convergente:

Si G *no es divergente, entonces es convergente.*



Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

$\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

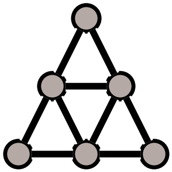
$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

Una gráfica G es Helly si cualquier colección $\mathcal{C}$ intersecante de clanes es tal que $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

$\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

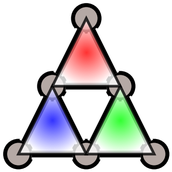
Una gráfica G es Helly si cualquier colección $\mathcal{C}$ intersecante de clanes es tal que $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$.



Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

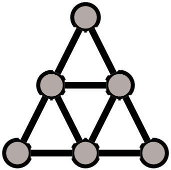
Una gráfica G es Helly si cualquier colección $\mathcal{C}$ intersecante de clanes es tal que $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$.



Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

$\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

Una gráfica G es Helly si cualquier colección $\mathcal{C}$ intersecante de clanes es tal que $\cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.



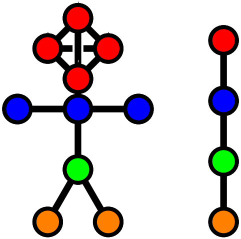
No Helly

Teorema:
Si G *es Helly, entonces* G *es convergente.*

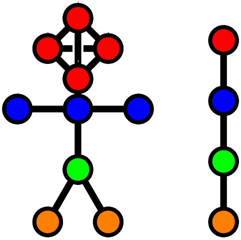
– *F. Escalante (1973)*

Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.

Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.

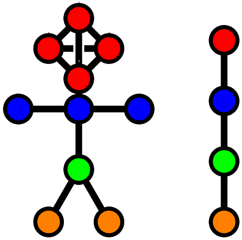


Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.

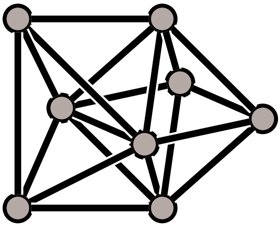


Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.

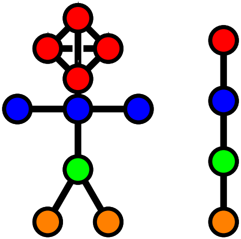
Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.



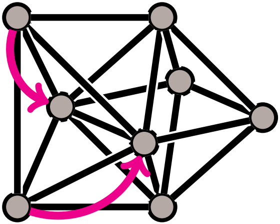
Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.



Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



retracción

Teorema:

Si $r\colon G \to L$ ***es una retracción, existe una retracción*** $K(r)\colon K(G) \to K(L)$***. En particular, si*** L ***es divergente,*** G ***es divergente***

– *V.~Neumann-Lara (1976)*

Decimos que dos gráficas tienen el mismo K-comportamiento, si:

- las dos son K-convergentes, o
- las dos son K-divergentes.

Dado un vértice $x \in V(G)$, denotamos con $N(x)$ a la subgráfica de G inducida por $\{ \, y \mid y \sim x \, \}$.

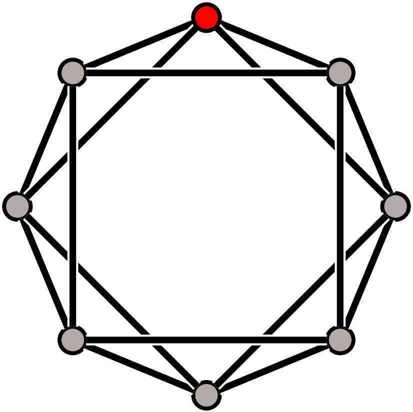
Dado un vértice $x \in V(G)$, denotamos con $N(x)$ a la subgráfica de G inducida por $\{ y \mid y \sim x \}$.

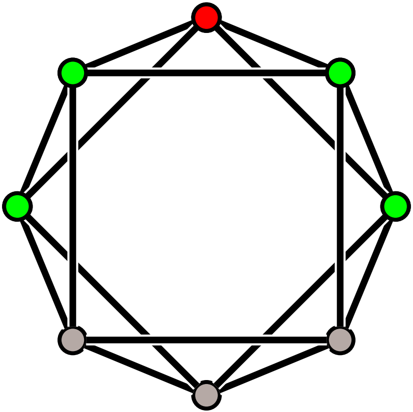
Sea L una gráfica. Decimos que G es localmente L, si para todo $x \in G$ se tiene que $N(x) \cong L$.

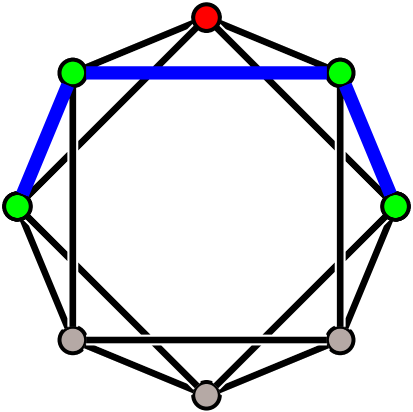
Dado un vértice $x \in V(G)$, denotamos con $N(x)$ a la subgráfica de G inducida por $\{ y \mid y \sim x \}$.

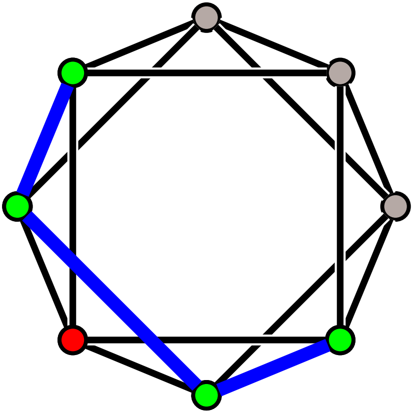
Sea L una gráfica. Decimos que G es localmente L, si para todo $x \in G$ se tiene que $N(x) \cong L$.

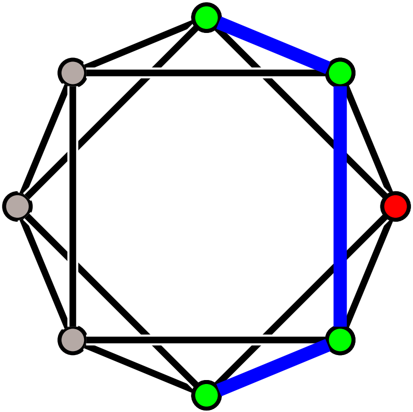
En tal caso, también diremos que G es de vecindad constante, y que G es extensión de L.

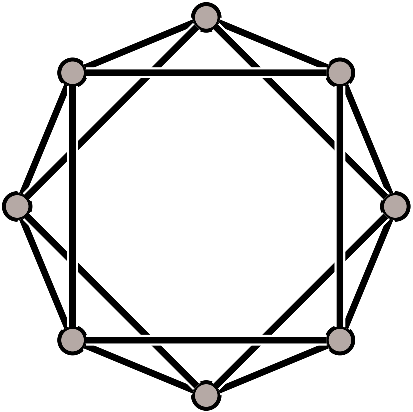




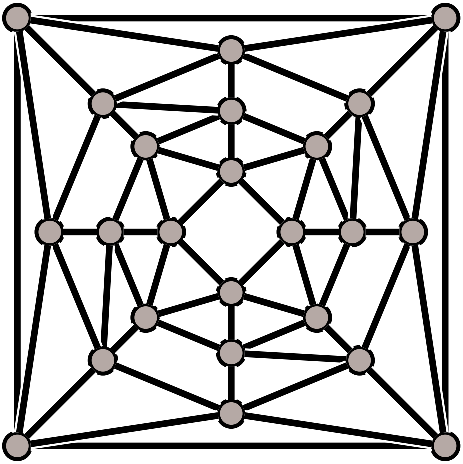


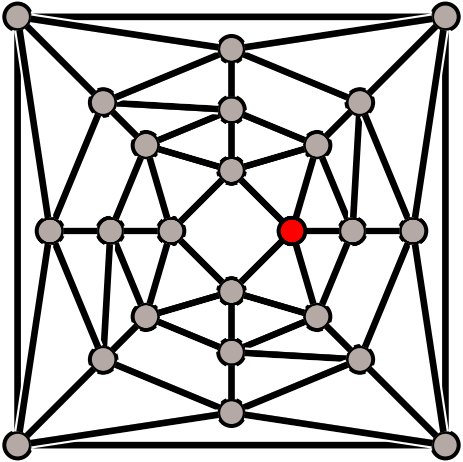


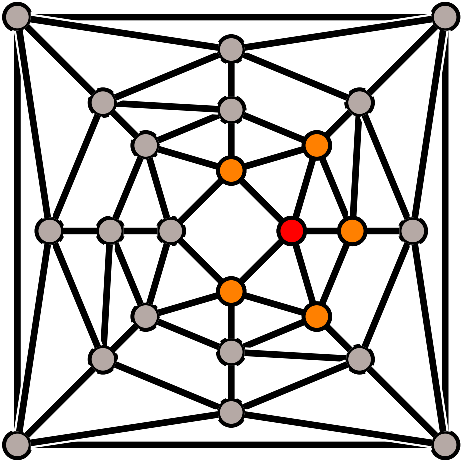


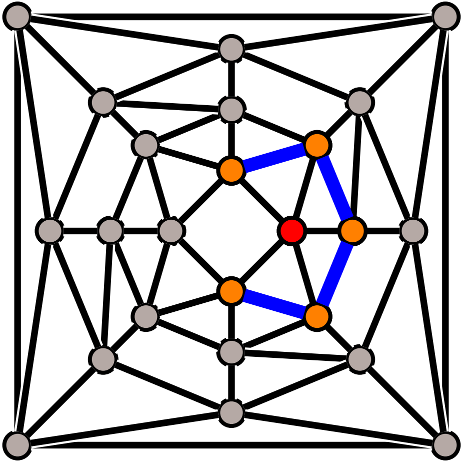


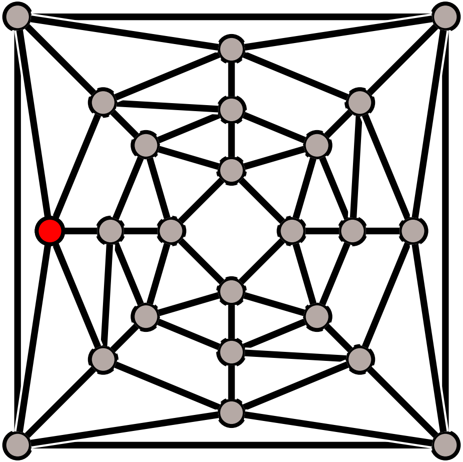
Gráfica localmente P_3

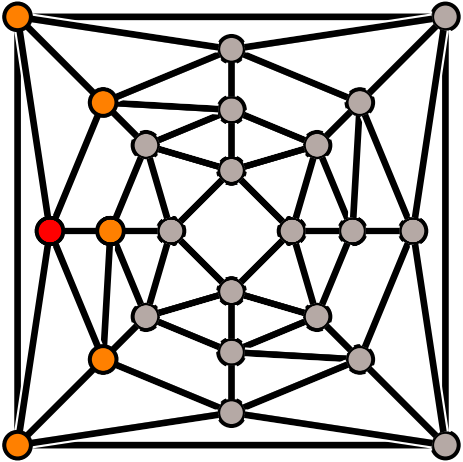


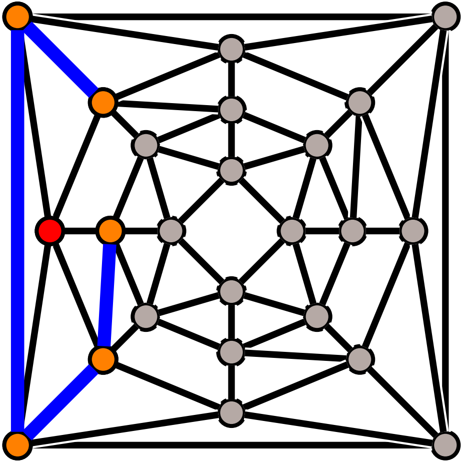


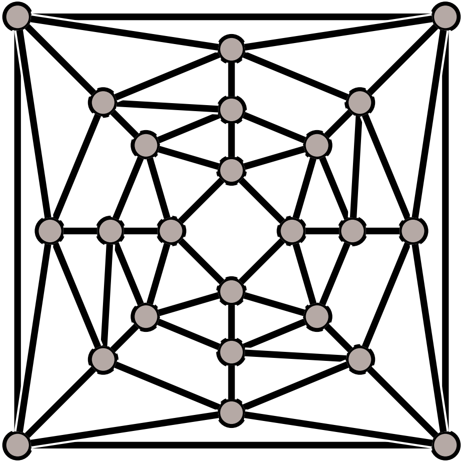












Gráfica localmente P_4

Teorema:

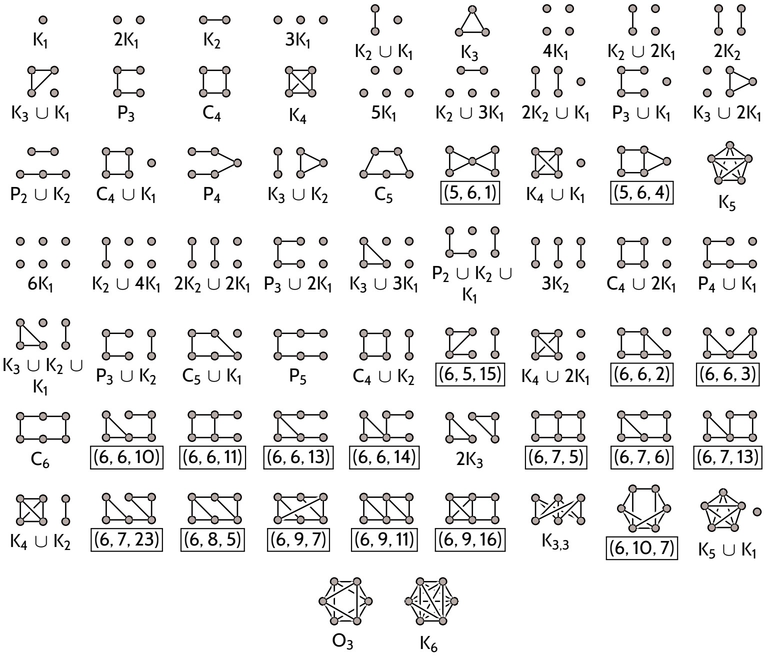
Si L ***es una gráfica con*** $|L| \leq 6$ ***y*** G_1, G_2 ***son dos extensiones de***~L, ***entonces*** G_1 ***y*** G_2 ***tienen el mismo*** K***-comportamiento.***

– *Larrión, Pizaña, V. (2008)*

En

J. I. Hall. *Graphs with constant link and small degree or order*. J. Graph Theory **9**, (1985).

se caracterizan las gráficas L con a lo más seis vértices, tal que existe al menos una gráfica finita G localmente L (son 65 de un total de 208).


K_1
$2K_1$
K_2
$3K_1$
$K_2 \cup K_1$
K_3
$4K_1$
$K_2 \cup 2K_1$
$2K_2$
$K_3 \cup K_1$
P_3
C_4
K_4
$5K_1$
$K_2 \cup 3K_1$
$2K_2 \cup K_1$
$P_3 \cup K_1$
$K_3 \cup 2K_1$
$P_2 \cup K_2$
$C_4 \cup K_1$
P_4
$K_3 \cup K_2$
C_5
(5, 6, 1)
$K_4 \cup K_1$
(5, 6, 4)
K_5
$6K_1$
$K_2 \cup 4K_1$
$2K_2 \cup 2K_1$
$P_3 \cup 2K_1$
$K_3 \cup 3K_1$
$P_2 \cup K_2 \cup K_1$
$3K_2$
$C_4 \cup 2K_1$
$P_4 \cup K_1$
$K_3 \cup K_2 \cup K_1$
$P_3 \cup K_2$
$C_5 \cup K_1$
P_5
$C_4 \cup K_2$
(6, 5, 15)
$K_4 \cup 2K_1$
(6, 6, 2)
(6, 6, 3)
C_6
(6, 6, 10)
(6, 6, 11)
(6, 6, 13)
(6, 6, 14)
$2K_3$
(6, 7, 5)
(6, 7, 6)
(6, 7, 13)
$K_4 \cup K_2$
(6, 7, 23)
(6, 8, 5)
(6, 9, 7)
(6, 9, 11)
(6, 9, 16)
$K_{3,3}$
(6, 10, 7)
$K_5 \cup K_1$
O_3
K_6

- El cuello g(G) de una gráfica G es la longitud del ciclo mas pequeño en G.

- El cuello $g(G)$ de una gráfica G es la longitud del ciclo mas pequeño en G.
- Si G no tiene ciclos, se define $g(G) = \infty$.

- El cuello $g(G)$ de una gráfica G es la longitud del ciclo mas pequeño en G.
- Si G no tiene ciclos, se define $g(G) = \infty$.
- El cuello local de G es

$$lg(G) = \min\{g(N(x)) \mid x \in G\}.$$

- El cuello $g(G)$ de una gráfica G es la longitud del ciclo mas pequeño en G.
- Si G no tiene ciclos, se define $g(G) = \infty$.
- El cuello local de G es

$$lg(G) = \min\{g(N(x)) \mid x \in G\}.$$

Si G es extensión de L, tenemos que

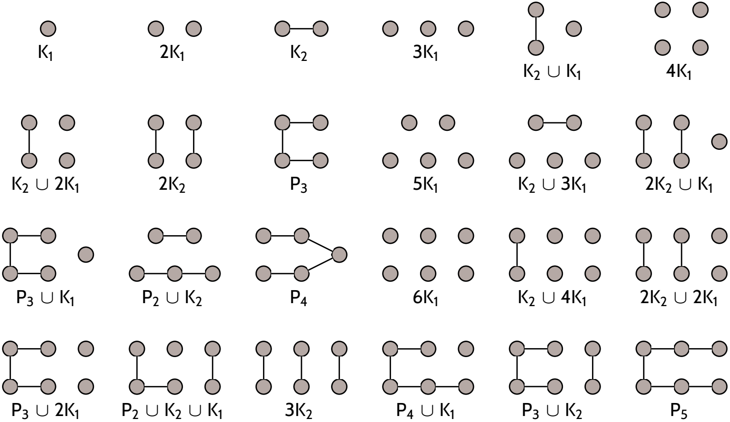
$$lg(G) = g(L)$$

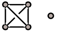
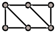
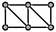
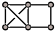
Teorema: Si

$$\mathrm{lg}(G) \geq 7$$

entonces $K(G)$ ***es Helly.***

– Larrión, Neumann-Lara, Pizaña. (2002)


K_1
$2K_1$
K_2
$3K_1$
$K_2 \cup K_1$
$4K_1$
$K_2 \cup 2K_1$
$2K_2$
P_3
$5K_1$
$K_2 \cup 3K_1$
$2K_2 \cup K_1$
$P_3 \cup K_1$
$P_2 \cup K_2$
P_4
$6K_1$
$K_2 \cup 4K_1$
$2K_2 \cup 2K_1$
$P_3 \cup 2K_1$
$P_2 \cup K_2 \cup K_1$
$3K_2$
$P_4 \cup K_1$
$P_3 \cup K_2$
P_5

L	loc. L	K-comportamiento
K_3	1 (K_4)	K-nula
C_4	1 (O_3)	K-divergente (Neumann-Lara, 1976)
K_4	1 (K_5)	K-nula
C_5	1 (icosaedro)	K-divergente (Pizaña, 2003)
	1 ($\overline{C_8}$)	K-divergente (Neumann-Lara, 1976)
K_5	1 (K_6)	K-nula
C_6	∞	K-divergentes (Larrión, Neumann-Lara, 2000)
	1 ($L(O_3)$)	K-divergente ($K^3(L(O_3)) = O_8$)
	∞ ($C_n^{2,3}$, $n \geq 10$)	Autóclanas (Larrión, Neumann-Lara, 1997)
	1 ($C_{10}^{2,4}$)	K-divergente ($K(G) = \mathrm{Susp}(C_{10}^2)$, Neumann-Lara, 1976)
$K_{3,3}$	1 ($K_{3,3,3}$)	K-divergente (Neumann-Lara, 1976)
	1 ($\overline{C_9}$)	K-divergente (Neumann-Lara, 1976)
O_3	1 (O_4)	K-divergente (Neumann-Lara, 1976)
K_6	1 (K_7)	K-nula

14 casos especiales

Decimos que $x \in V(G)$ es dominado si existe $y \in V(G)$, $y \neq x$ tal que:

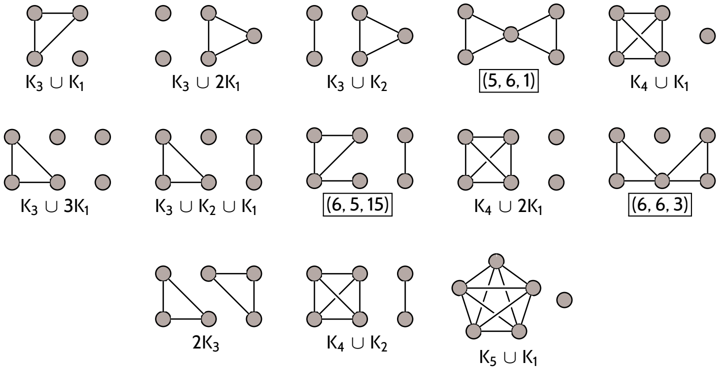
- $y \sim x$,

Decimos que $x \in V(G)$ es dominado si existe $y \in V(G)$, $y \neq x$ tal que:

- $y \sim x$,
- $z \sim x$ implica $z \simeq y$.

Teorema: Si para cada arista $e = xy$ *en* L *se tiene que* x *domina a* y *o que* y *domina a* x*, entonces toda extensión de* L *es Helly.*

– *Larrión, Pizaña, V. (2008)*



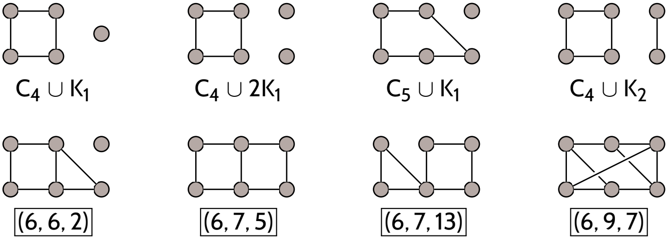
13 gráficas con una arista con un extremo dominado

- **Teorema:** Si G tiene un clan que es cara de un octaedro inducido~O_n, $n \geq 3$, entonces G es K-divergente. (Larrión, Pizaña, V., 2008)

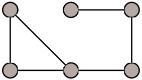
- **Teorema:** Si G tiene un clan que es cara de un octaedro inducido $\sim O_n$, $n \geq 3$, entonces G es K-divergente. (Larrión, Pizaña, V., 2008)
- La demostración usa el teorema de retracción de Neumann-Lara (1976).

- **Teorema:** Si G tiene un clan que es cara de un octaedro inducido $\sim O_n$, $n \geq 3$, entonces G es K-divergente. (Larrión, Pizaña, V., 2008)
- La demostración usa el teorema de retracción de Neumann-Lara (1976).
- **Teorema:** Si toda extensión de L es divergente, entonces toda extensión de $L \cup K_1$ es divergente. (Larrión, Pizaña, V., 2008)

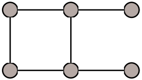
- **Teorema:** Si G tiene un clan que es cara de un octaedro inducido$\sim O_n$, $n \geq 3$, entonces G es K-divergente. (Larrión, Pizaña, V., 2008)
- La demostración usa el teorema de retracción de Neumann-Lara (1976).
- **Teorema:** Si toda extensión de L es divergente, entonces toda extensión de $L \cup K_1$ es divergente. (Larrión, Pizaña, V., 2008)
- La demostración usa la teoría de puntos de corte local de Frías-Armenta, Larrión, Neumann-Lara y Pizaña (2013).



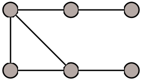
8 gráficas tal que cualquier extensión es divergente



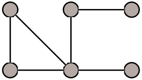
(6, 6, 10)



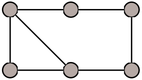
(6, 6, 11)



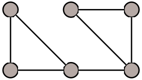
(6, 6, 13)



(6, 6, 14)

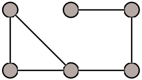


(6, 7, 6)

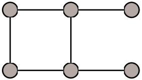


(6, 7, 23)

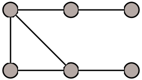
6 gráficas restantes



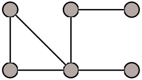
$\boxed{(6, 6, 10)}$



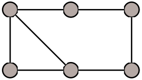
$\boxed{(6, 6, 11)}$



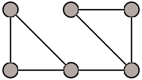
$\boxed{(6, 6, 13)}$



$\boxed{(6, 6, 14)}$



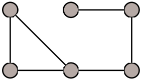
$\boxed{(6, 7, 6)}$



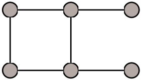
$\boxed{(6, 7, 23)}$

6 gráficas restantes

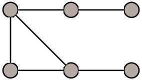
- Las gráficas $\boxed{(6, 6, 10)}$, $\boxed{(6, 6, 13)}$, $\boxed{(6, 6, 14)}$ y $\boxed{(6, 7, 23)}$ son tales que toda extensión de ellas es Helly, por resultado de Larrión, Pizaña, V. (2013): *Si* G *es libre de* 4, 5, 6*-ruedas, entonces* K(G) *es Helly*.



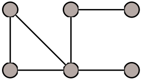
$\boxed{(6, 6, 10)}$



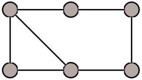
$\boxed{(6, 6, 11)}$



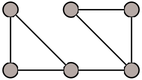
$\boxed{(6, 6, 13)}$



$\boxed{(6, 6, 14)}$



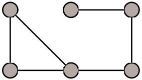
$\boxed{(6, 7, 6)}$



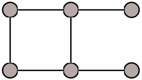
$\boxed{(6, 7, 23)}$

6 gráficas restantes

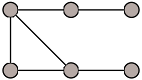
- Las gráficas $\boxed{(6, 6, 10)}$, $\boxed{(6, 6, 13)}$, $\boxed{(6, 6, 14)}$ y $\boxed{(6, 7, 23)}$ son tales que toda extensión de ellas es Helly, por resultado de Larrión, Pizaña, V. (2013): *Si* G *es libre de* $4, 5, 6$*-ruedas, entonces* $K(G)$ *es Helly*.
- Toda extensión de la gráfica $\boxed{(6, 6, 11)}$ es divergente, por resultado de Larrión, Pizaña, V. (2014).



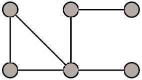
$\boxed{(6, 6, 10)}$



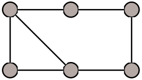
$\boxed{(6, 6, 11)}$



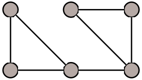
$\boxed{(6, 6, 13)}$



$\boxed{(6, 6, 14)}$



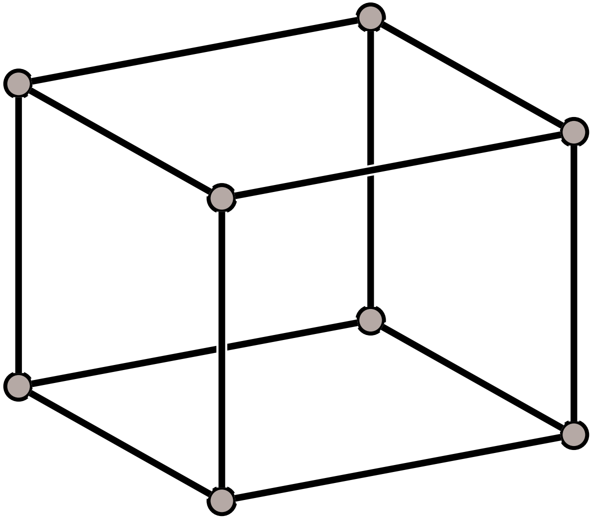
$\boxed{(6, 7, 6)}$

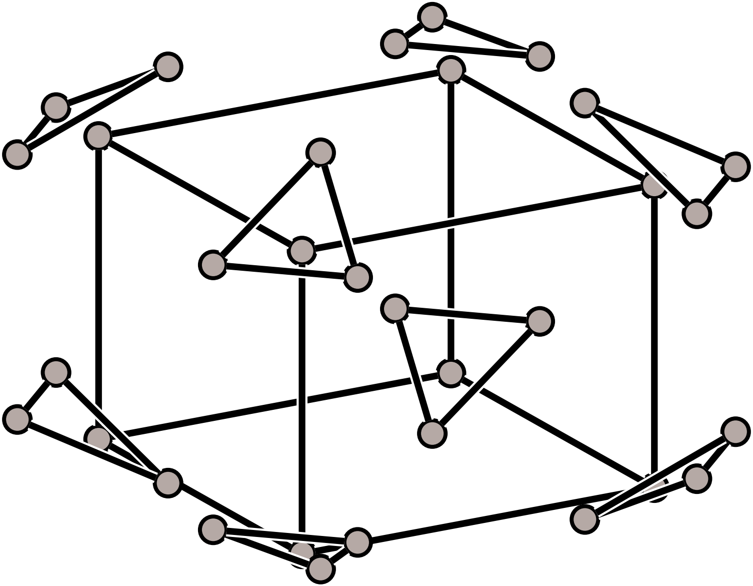


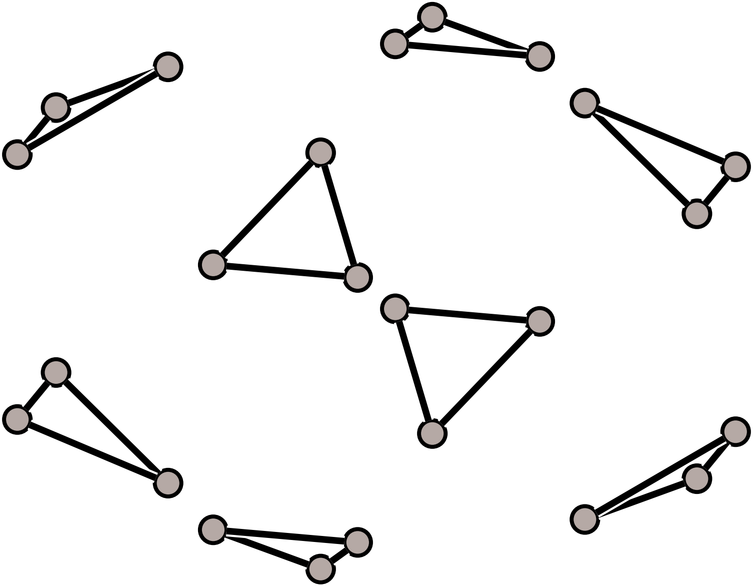
$\boxed{(6, 7, 23)}$

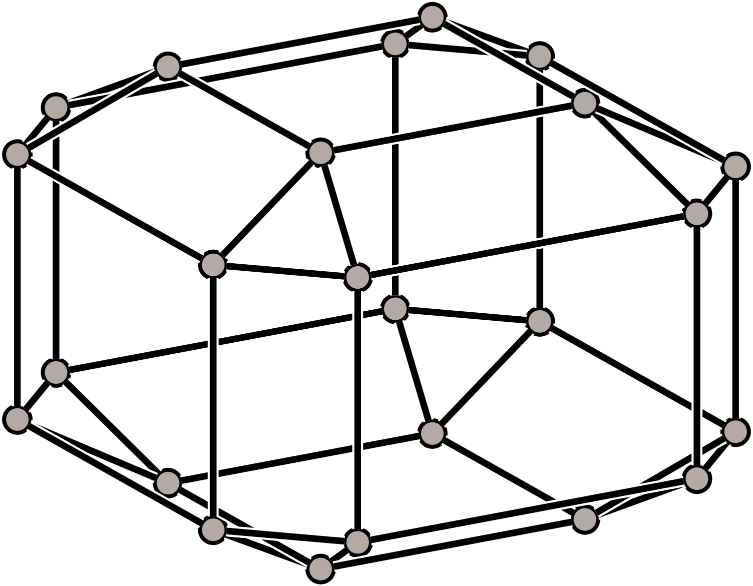
6 gráficas restantes

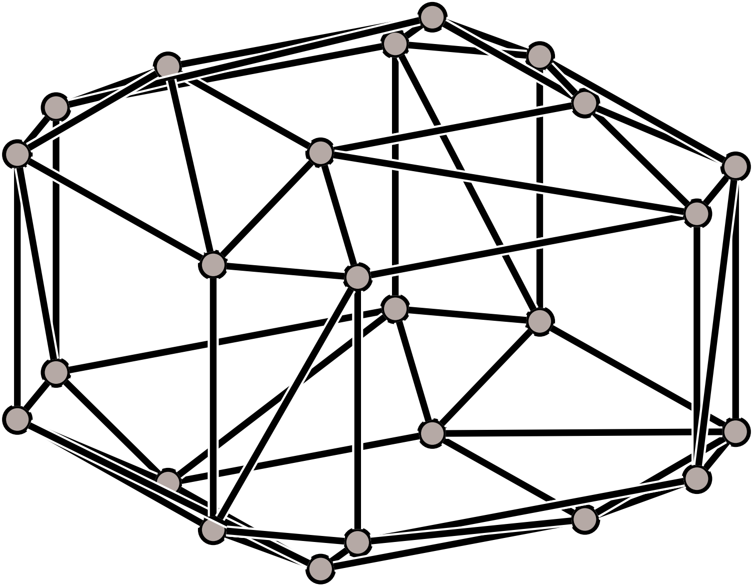
- Las gráficas $\boxed{(6, 6, 10)}$, $\boxed{(6, 6, 13)}$, $\boxed{(6, 6, 14)}$ y $\boxed{(6, 7, 23)}$ son tales que toda extensión de ellas es Helly, por resultado de Larrión, Pizaña, V. (2013): *Si* G *es libre de* $4, 5, 6$*-ruedas, entonces* $K(G)$ *es Helly*.
- Toda extensión de la gráfica $\boxed{(6, 6, 11)}$ es divergente, por resultado de Larrión, Pizaña, V. (2014).
- La gráfica $\boxed{(6, 7, 6)}$ tiene una única extensión, con comportamiento desconocido.

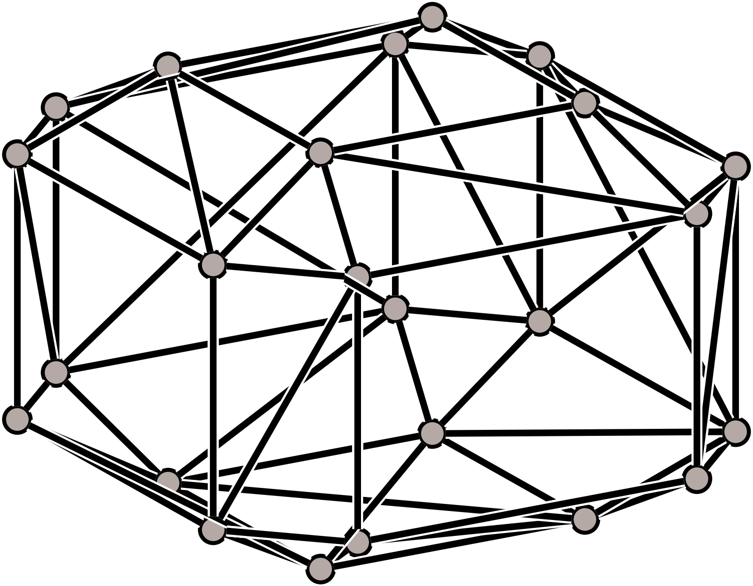


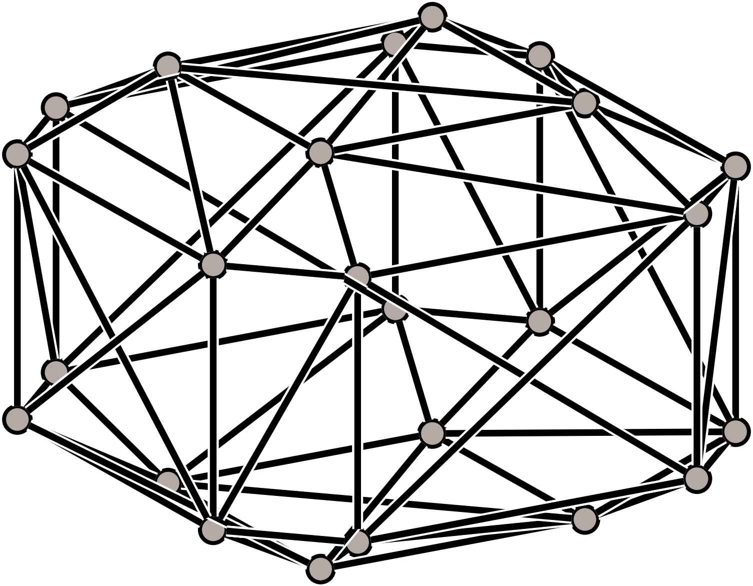


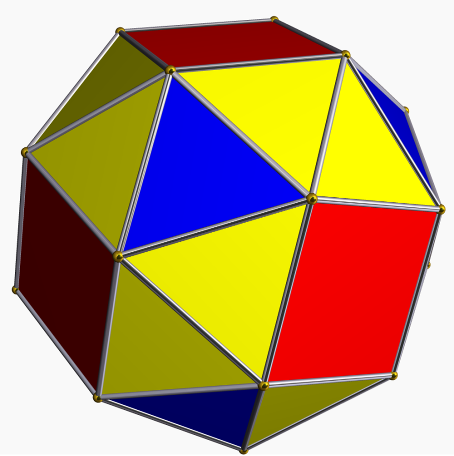


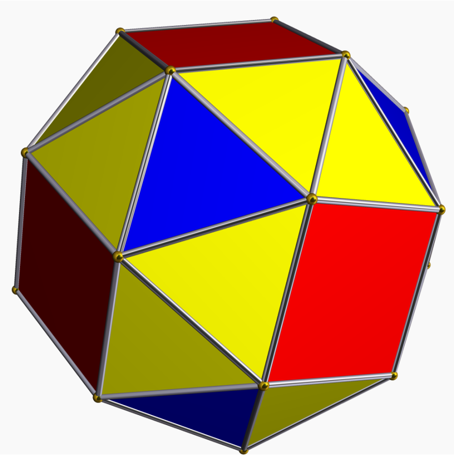












Snub cube

Tenemos un ejemplo de una gráfica L de 9 vértices, con dos extensiones G_1, G_2, tales que G_1 es convergente y G_2 es divergente.

¡Gracias!