Gráficas de clanes de complementos de gráficas regulares

Rafael Villarroel Flores, UAEH

XXXV Coloquio Víctor Neumann-Lara
de Teoría de las Gráficas, Combinatoria
y sus Aplicaciones

UAEH

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Convocan a participar en la

Maestría en Matemáticas

CONACYT

Perfil de ingreso

Dirigido a egresados de las licenciaturas en Matemáticas, Matemáticas Aplicadas, Física o Actuaría. El ingreso de los aspirantes egresados de programas educativos afines quedará a criterio del Comité de Admisión.

Requisitos de ingreso

-Aprobar el examen de admisión.
-Realizar una entrevista con el profesor. asignado.
-Contar con el título profesional o documento oficial de terminación de estudios profesionales.
-Tener promedio mínimo general de 8.
-Acreditar en el Centro de Autoaprendizaje de idiomas de la UAEH el examen de inglés en su apartado de compresión de textos.

Becas

Por estar registrado en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del CONACyT, los aspirantes aceptados podrán solicitar Beca CONACyT nacional.

Informes

Coordinador del Programa Educativo: Dr. Benjamín Itzá Ortiz
Correo electrónico: maestria_matematicas@uaeh.edu.mx
Teléfono: 01 (771) 7172000, Exts. 6162 y 6163
http:// www.uaeh.edu.mx/campus/icbi/investigacion/matematicas/index.html

El operador de clanes en gráficas

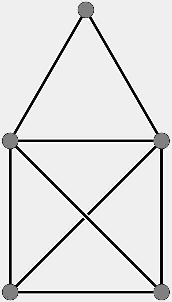
Gráficas

- Consideramos solamente gráficas finitas y simples (no dirigidas, sin lazos, sin aristas múltiples).

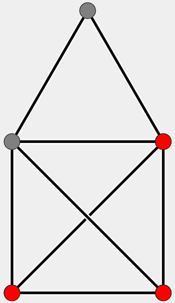
Gráficas

- Consideramos solamente gráficas finitas y simples (no dirigidas, sin lazos, sin aristas múltiples).
- El orden de la gráfica G se denota con $|G|$.

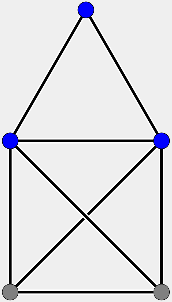
Una completa de una gráfica es un conjunto de vértices mutuamente adyacentes.



Una completa de una gráfica es un conjunto de vértices mutuamente adyacentes.

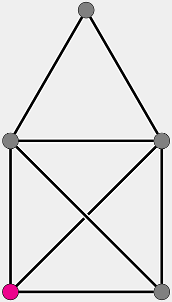


Una completa de una gráfica es un conjunto de vértices mutuamente adyacentes.

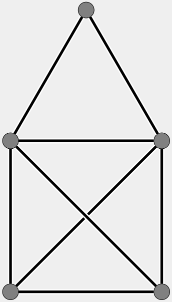


Completas

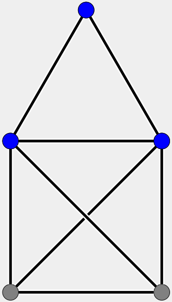
Una completa de una gráfica es un conjunto de vértices mutuamente adyacentes.



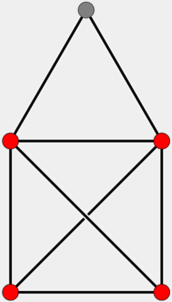
Un clan de una gráfica es una completa maximal bajo inclusión.



Un clan de una gráfica es una completa maximal bajo inclusión.



Un clan de una gráfica es una completa maximal bajo inclusión.

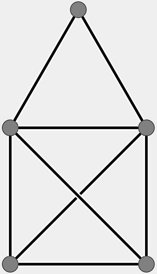


La **gráfica de clanes** $K(G)$ es la gráfica de intersección de los clanes de G. Es decir:

- $V\big(K(G)\big) = \{Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G\}$, La **gráfica de clanes** $K(G)$ es la gráfica de intersección de los clanes de G. Es decir:

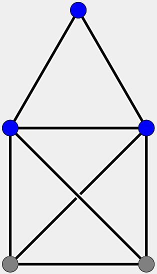
- $V\big(K(G)\big) = \{Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \{\{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2, Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing\}$.

Ejemplo

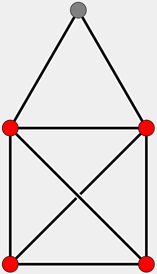


G

Ejemplo

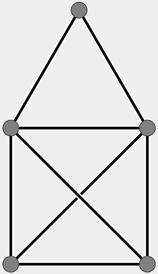


G



G

Ejemplo



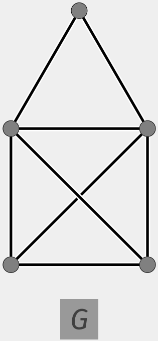
G

$K(G)$

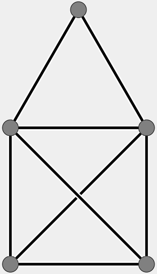
La sucesión de gráficas iteradas de clanes se define como:

$$\begin{aligned} K^0(G) &= G, \\ K^n(G) &= K^{n-1}(K(G)), \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Ejemplo



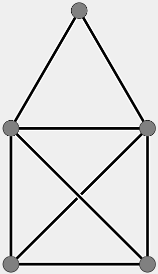
Ejemplo



G

$K(G)$

Ejemplo



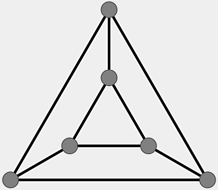
G

$K(G)$

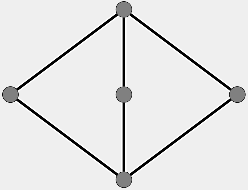
$K^2(G)$

Prisma

- El prisma triangular y su gráfica de clanes:

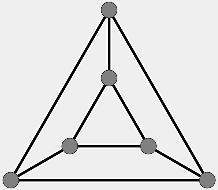


Prisma T_3

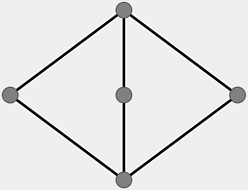


$K(T_3)$

- El prisma triangular y su gráfica de clanes:



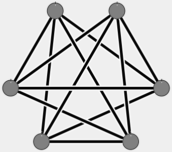
Prisma T_3



$K(T_3)$

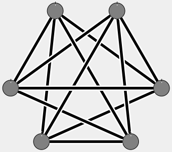
- En este caso, $K^2(T_3) \cong T_3$.

Si definimos el octaedro O_n como $\overline{nK_2}$, entonces $K(O_n) = O_{2^{n-1}}$. (Neumann-Lara, 1973).

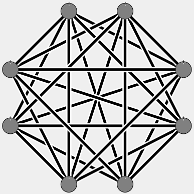


$G = O_3$

Si definimos el octaedro O_n como $\overline{nK_2}$, entonces $K(O_n) = O_{2^{n-1}}$. (Neumann-Lara, 1973).

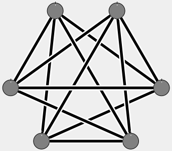


$G = O_3$

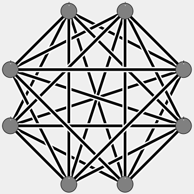


$K(G) = O_4$

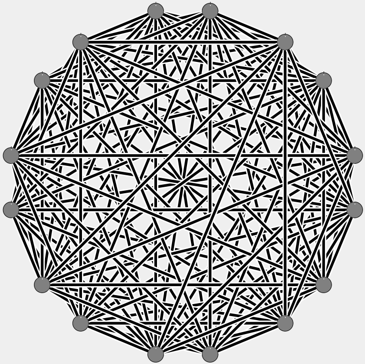
Si definimos el octaedro O_n como $\overline{nK_2}$, entonces $K(O_n) = O_{2^{n-1}}$.
(Neumann-Lara, 1973).



$G = O_3$



$K(G) = O_4$



$K^2(G) = O_8$

- G es convergente si la sucesión de órdenes de las gráficas $|K^n(G)|$ es acotada.

- G es convergente si la sucesión de órdenes de las gráficas $|K^n(G)|$ es acotada.
- Si G no es convergente, decimos que es divergente.

Teoremas sobre comportamiento

- La gráfica G es Helly si su colección de clanes tiene la propiedad de Helly.

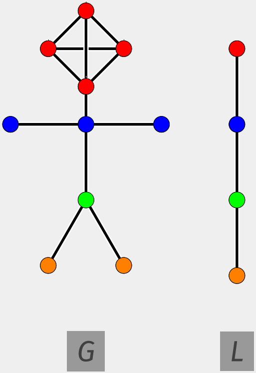
- La gráfica G es Helly si su colección de clanes tiene la propiedad de Helly.
- Existe un algoritmo polinomial que decide si una gráfica es Helly. (Dragan, 1989) (Szwarcfiter, 1997)

- La gráfica G es Helly si su colección de clanes tiene la propiedad de Helly.
- Existe un algoritmo polinomial que decide si una gráfica es Helly. (Dragan, 1989) (Szwarcfiter, 1997)
- (Escalante, 1973) Si G es Helly, entonces G es convergente.

Morfismos de gráficas

Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.

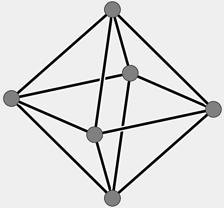
Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.



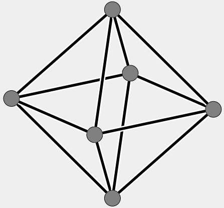
Retracciones

Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.

Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.

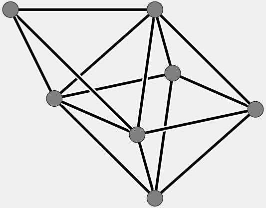


Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.

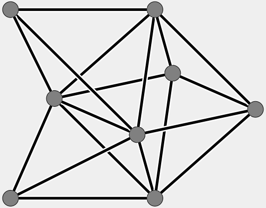


O_3

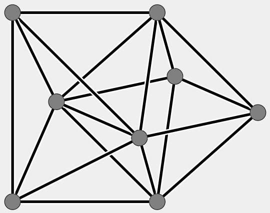
Si L es una subgráfica de G, una **retracción** $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



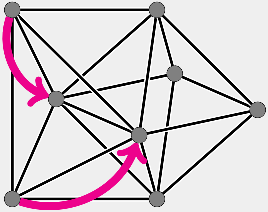
Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.

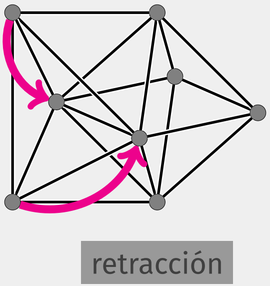


Si L es una subgráfica de G, una **retracción** $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



retracción

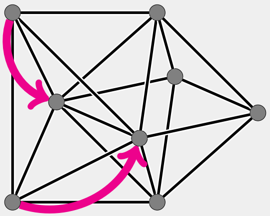
Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



- (Neumann-Lara, 1976). Si $r\colon G \to L$ es una retracción, entonces se induce una retracción $K(r)\colon K(G) \to K(L)$.

Retracciones

Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



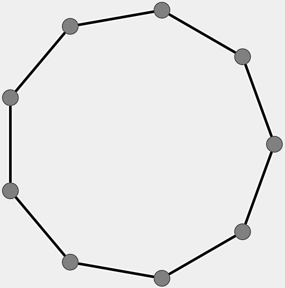
retracción

- (Neumann-Lara, 1976). Si $r\colon G \to L$ es una retracción, entonces se induce una retracción $K(r)\colon K(G) \to K(L)$.
- En particular, si L es divergente, entonces G es divergente.

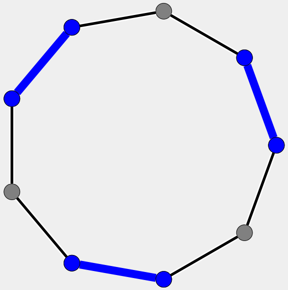
- Un octaedro especial en la gráfica G es una subgráfica H tal que $H \cong O_n$, y tal que un clan de H es un clan de G.

- Un octaedro especial en la gráfica G es una subgráfica H tal que $H \cong O_n$, y tal que un clan de H es un clan de G.
- (Larrión, Pizaña, V., 2019) Si G tiene un octaedro especial H, entonces G se retrae a H.

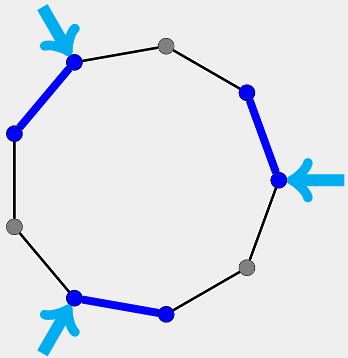
- Un octaedro especial en la gráfica G es una subgráfica H tal que $H \cong O_n$, y tal que un clan de H es un clan de G.
- (Larrión, Pizaña, V., 2019) Si G tiene un octaedro especial H, entonces G se retrae a H.
- Ejemplo: $G = \overline{C_9}$.



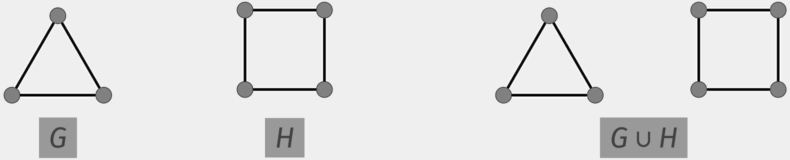
- Un octaedro especial en la gráfica G es una subgráfica H tal que $H \cong O_n$, y tal que un clan de H es un clan de G.
- (Larrión, Pizaña, V., 2019) Si G tiene un octaedro especial H, entonces G se retrae a H.
- Ejemplo: $G = \overline{C_9}$.



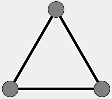
- Un octaedro especial en la gráfica G es una subgráfica H tal que $H \cong O_n$, y tal que un clan de H es un clan de G.
- (Larrión, Pizaña, V., 2019) Si G tiene un octaedro especial H, entonces G se retrae a H.
- Ejemplo: $G = \overline{C_9}$.



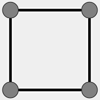
- Si G y H son gráficas, denotamos con $G \cup H$ a su unión disjunta.



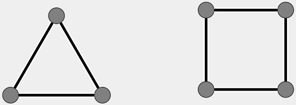
- Si G y H son gráficas, denotamos con $G \cup H$ a su **unión disjunta**.



G



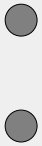
H



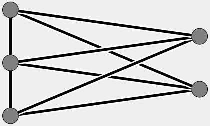
$G \cup H$

- La **suma** $G + H$ es la gráfica que se obtiene de $G \cup H$ añadiendo todas las aristas entre vértices de G y de H.

G



H



$G + H$

- Se tiene que:

$$\overline{G \cup H} = \overline{G} + \overline{H}.$$

- Se tiene que:
$$\overline{G \cup H} = \overline{G} + \overline{H}.$$
- Estas operaciones y resultados se extienden a más de dos gráficas.

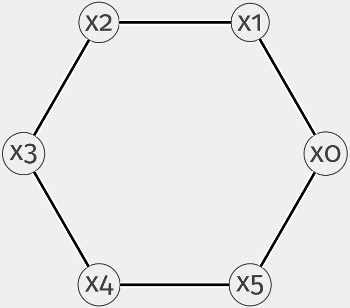
- Una coafinación de la gráfica G es un automorfismo $\sigma\colon\ G \to G$ tal que para todo $x \in G$ se tiene que x no es vecino de $\sigma(x)$.

Coafinaciones

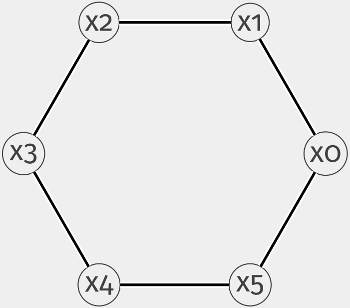
- Una coafinación de la gráfica G es un automorfismo $\sigma\colon G \to G$ tal que para todo $x \in G$ se tiene que x no es vecino de $\sigma(x)$.
- Se puede demostrar que si G tiene una coafinación, se induce una coafinación en $K(G)$.

- Una coafinación de la gráfica G es un automorfismo $\sigma\colon G \to G$ tal que para todo $x \in G$ se tiene que x no es vecino de $\sigma(x)$.
- Se puede demostrar que si G tiene una coafinación, se induce una coafinación en $K(G)$.
- Si G y H tienen una coafinación, se induce una coafinación en $G + H$.

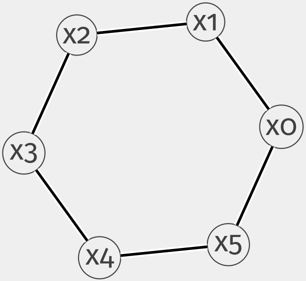
Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.



Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.

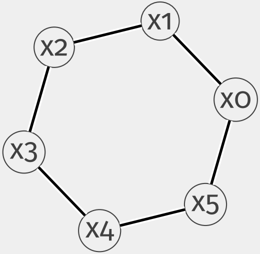


Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.

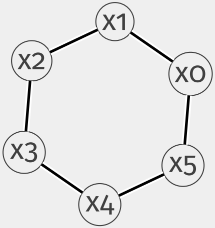


Ejemplo: Ciclos

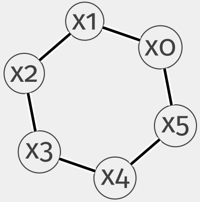
Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.



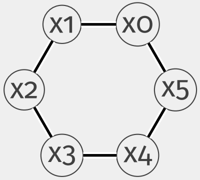
Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.



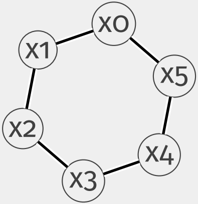
Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.



Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.

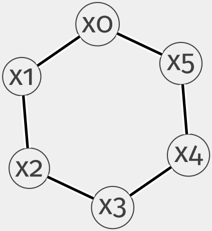


Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.



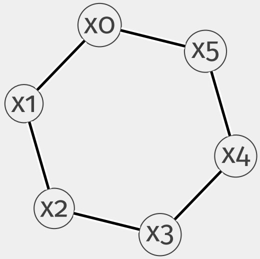
Ejemplo: Ciclos

Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.

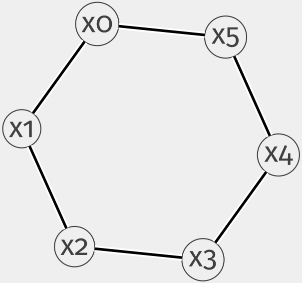


Ejemplo: Ciclos

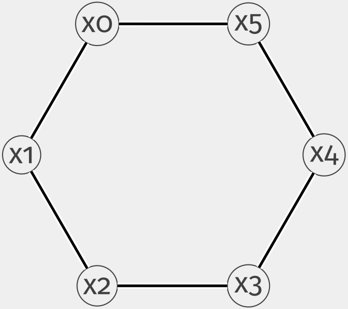
Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.



Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.

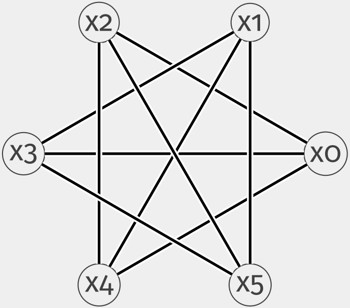


Todos los ciclos con al menos 4 vértices tienen una coafinación.

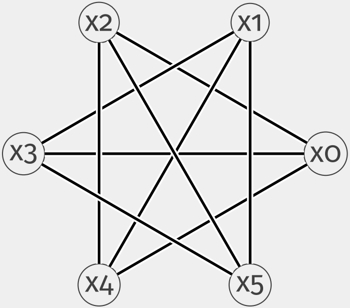


Ejemplo: Complementos de ciclos

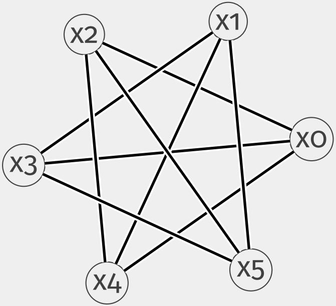
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



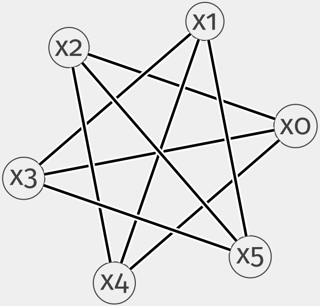
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



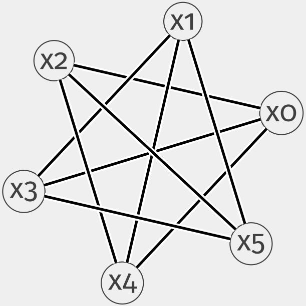
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



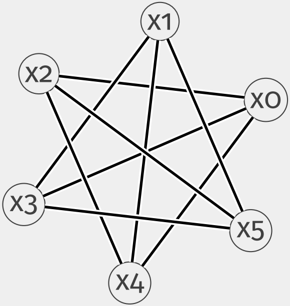
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



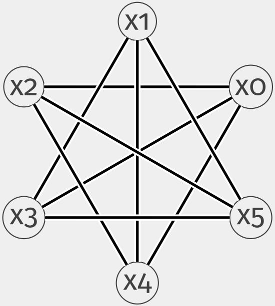
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



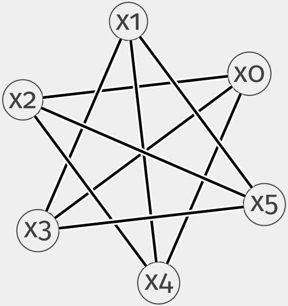
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



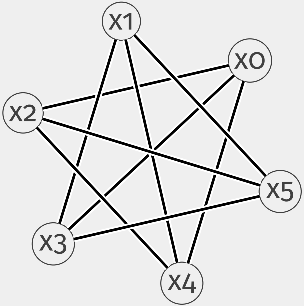
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



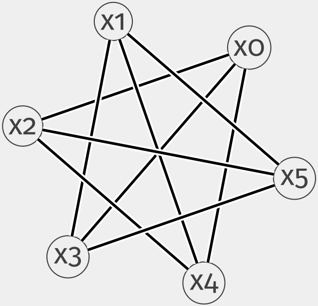
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



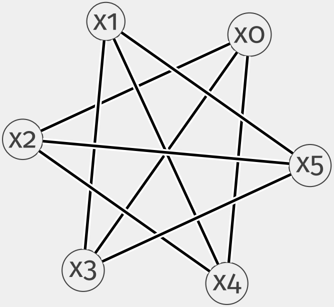
Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.

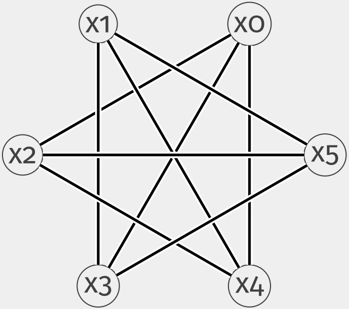


Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



Ejemplo: Complementos de ciclos

Todos los complementos de ciclos tienen una coafinación.



- (Complementos de ciclos) $\overline{C_n}$ es divergente si $n \geq 8$.

- (Complementos de ciclos) $\overline{C_n}$ es divergente si $n \geq 8$.
- (Sumando conexo) Si G, H tienen coafinaciones y H es conexa, entonces $G + H$ es divergente.

- (Complementos de ciclos) $\overline{C_n}$ es divergente si $n \geq 8$.
- (Sumando conexo) Si G, H tienen coafinaciones y H es conexa, entonces $G + H$ es divergente.
- (Tres sumandos) Si A, B, C son gráficas que tienen una coafinación, entonces $A + B + C$ es divergente.

Complementos de gráficas regulares

Teorema (1-regulares)

Si G es una gráfica 1-regular con al menos 6 vértices, entonces $\overline{G}$ es divergente.

Teorema (1-regulares)

Si G es una gráfica 1-regular con al menos 6 vértices, entonces $\overline{G}$ es divergente.

Demostración

Teorema (1-regulares)

Si G es una gráfica 1-regular con al menos 6 vértices, entonces $\overline{G}$ es divergente.

Demostración

- Si G es 1-regular, entonces G es una unión disjunta de n copias de K_2. Si $|G| \geq 6$, entonces $n \geq 3$.

Teorema (1-regulares)

Si G es una gráfica 1-regular con al menos 6 vértices, entonces $\overline{G}$ es divergente.

Demostración

- Si G es 1-regular, entonces G es una unión disjunta de n copias de K_2. Si $|G| \geq 6$, entonces $n \geq 3$.
- Si $G = nK_2$, entonces $\overline{G} = O_n$, que es divergente para $n \geq 3$. □

Teorema (2-regulares)

Si G es una gráfica 2-regular con al menos 9 vértices, entonces $\overline{G}$ es divergente.

Demostración

Demostración

- Si G es 2-regular, entonces es una unión disjunta de ciclos.

Demostración

- Si G es 2-regular, entonces es una unión disjunta de ciclos.
- Entonces $\overline{G}$ tiene la forma:

$$\overline{G} = \overline{C_{n_1}} + \overline{C_{n_2}} + \cdots + \overline{C_{n_r}}$$

  es decir, una suma de gráficas, cada una con coafinación.

Demostración

- Si G es 2-regular, entonces es una unión disjunta de ciclos.
- Entonces $\overline{G}$ tiene la forma:

$$\overline{G} = \overline{C_{n_1}} + \overline{C_{n_2}} + \cdots + \overline{C_{n_r}}$$

  es decir, una suma de gráficas, cada una con coafinación.
- Si $r = 1$, $\overline{G}$ es divergente pues $|\overline{G}| \geq 8$.

Demostración

- Si G es 2-regular, entonces es una unión disjunta de ciclos.
- Entonces $\overline{G}$ tiene la forma:

$$\overline{G} = \overline{C_{n_1}} + \overline{C_{n_2}} + \cdots + \overline{C_{n_r}}$$

  es decir, una suma de gráficas, cada una con coafinación.
- Si $r = 1$, $\overline{G}$ es divergente pues $|\overline{G}| \geq 8$.
- Si $r = 2$, uno de los dos sumandos debe tener al menos 5 vértices. Como $\overline{C_n}$ es conexo si $n \geq 5$, por el teorema del sumando conexo, $\overline{G}$ es divergente.

Demostración

- Si G es 2-regular, entonces es una unión disjunta de ciclos.
- Entonces $\overline{G}$ tiene la forma:

$$\overline{G} = \overline{C_{n_1}} + \overline{C_{n_2}} + \cdots + \overline{C_{n_r}}$$

  es decir, una suma de gráficas, cada una con coafinación.
- Si $r = 1$, $\overline{G}$ es divergente pues $|\overline{G}| \geq 8$.
- Si $r = 2$, uno de los dos sumandos debe tener al menos 5 vértices. Como $\overline{C_n}$ es conexo si $n \geq 5$, por el teorema del sumando conexo, $\overline{G}$ es divergente.
- Si $r \geq 3$, se aplica el teorema de los tres sumandos. □

Observación

- Si G es 1-regular y $|G| \geq 6$, $\overline{G}$ es divergente.

Observación

- Si G es 1-regular y $|G| \geq 6$, $\overline{G}$ es divergente.
- Si G es 2-regular y $|G| \geq 9$, $\overline{G}$ es divergente.

Observación

- Si G es 1-regular y $|G| \geq 6$, $\overline{G}$ es divergente.
- Si G es 2-regular y $|G| \geq 9$, $\overline{G}$ es divergente.
- Parece razonable conjeturar: Si G es 3-regular, entonces existe M tal que si $|G| \geq M$, entonces $\overline{G}$ es divergente.

Observación

- Si G es 1-regular y $|G| \geq 6$, $\overline{G}$ es divergente.
- Si G es 2-regular y $|G| \geq 9$, $\overline{G}$ es divergente.
- Parece razonable conjeturar: Si G es 3-regular, entonces existe M tal que si $|G| \geq M$, entonces $\overline{G}$ es divergente.
- Quizás $M = 12$.

Gráficas cúbicas con ≤ 10 vértices

n	Cantidad de gráficas G	$\overline{G}$ convergente	$\overline{G}$ divergente
4	1	1	0
6	2	2	0
8	6	6	0
10	21	4	17

Gráficas cúbicas con ≤ 10 vértices

n	Cantidad de gráficas G	$\overline{G}$ convergente	$\overline{G}$ divergente
4	1	1	0
6	2	2	0
8	6	6	0
10	21	4	17

- De las 21 gráficas cúbicas, 19 son conexas. De las conexas, 16 son divergentes y 3 convergentes.

Gráficas cúbicas con ≤ 10 vértices

n	Cantidad de gráficas G	$\overline{G}$ convergente	$\overline{G}$ divergente
4	1	1	0
6	2	2	0
8	6	6	0
10	21	4	17

- De las 21 gráficas cúbicas, 19 son conexas. De las conexas, 16 son divergentes y 3 convergentes.
- De las 16 divergentes, 9 tienen octaedro especial, 3 se retraen a la suspensión de C_5, 1 es tal que $K(G)$ se retrae no especialmente a O_3, 1 es tal que $K(G)$ se retrae a la suspensión de C_5, y 2 tienen octaedro especial en $K^3(G)$.

Gráficas cúbicas con ≤ 10 vértices

n	Cantidad de gráficas G	$\overline{G}$ convergente	$\overline{G}$ divergente
4	1	1	0
6	2	2	0
8	6	6	0
10	21	4	17

- De las 21 gráficas cúbicas, 19 son conexas. De las conexas, 16 son divergentes y 3 convergentes.
- De las 16 divergentes, 9 tienen octaedro especial, 3 se retraen a la suspensión de C_5, 1 es tal que $K(G)$ se retrae no especialmente a O_3, 1 es tal que $K(G)$ se retrae a la suspensión de C_5, y 2 tienen octaedro especial en $K^3(G)$.
- Es notable que podamos determinar el comportamiento de todas.

Gráficas cúbicas con 12 vértices

- Hay exactamente 94 gráficas cúbicas con 12 vértices, de las cuales 9 son disconexas.

Gráficas cúbicas con 12 vértices

- Hay exactamente 94 gráficas cúbicas con 12 vértices, de las cuales 9 son disconexas.
- De las 85 conexas, hay 40 que tienen un octaedro especial.

Gráficas cúbicas con 12 vértices

- Hay exactamente 94 gráficas cúbicas con 12 vértices, de las cuales 9 son disconexas.
- De las 85 conexas, hay 40 que tienen un octaedro especial.
- De las 45 que quedan, 28 se retraen a O_3, aunque no especialmente.

Gráficas cúbicas con 12 vértices

- Hay exactamente 94 gráficas cúbicas con 12 vértices, de las cuales 9 son disconexas.
- De las 85 conexas, hay 40 que tienen un octaedro especial.
- De las 45 que quedan, 28 se retraen a O_3, aunque no especialmente.
- De las 17 que quedan, una se retrae a $\overline{C_8}$.

- Hay exactamente 94 gráficas cúbicas con 12 vértices, de las cuales 9 son disconexas.
- De las 85 conexas, hay 40 que tienen un octaedro especial.
- De las 45 que quedan, 28 se retraen a O_3, aunque no especialmente.
- De las 17 que quedan, una se retrae a $\overline{C_8}$.
- De las 16 restantes, en 3, $K(G)$ tiene octaedro especial.

- Hay exactamente 94 gráficas cúbicas con 12 vértices, de las cuales 9 son disconexas.
- De las 85 conexas, hay 40 que tienen un octaedro especial.
- De las 45 que quedan, 28 se retraen a O_3, aunque no especialmente.
- De las 17 que quedan, una se retrae a $\overline{C_8}$.
- De las 16 restantes, en 3, $K(G)$ tiene octaedro especial.
- No he podido determinar el comportamiento de las 13 restantes.

- De las 13 restantes, 6 tienen el tipo de homotopía de S^2, 3 tienen el tipo de $S^2 \vee S^2$, 1 de S^3 y una tiene la homología de S^2

Tipo de homotopía

- De las 13 restantes, 6 tienen el tipo de homotopía de S^2, 3 tienen el tipo de $S^2 \vee S^2$, 1 de S^3 y una tiene la homología de S^2
- Las restantes dos G son notables, pues son contraíbles, pero $K(G)$ tiene el tipo de S^3.

Tipo de homotopía

- De las 13 restantes, 6 tienen el tipo de homotopía de S^2, 3 tienen el tipo de $S^2 \vee S^2$, 1 de S^3 y una tiene la homología de S^2
- Las restantes dos G son notables, pues son contraíbles, pero $K(G)$ tiene el tipo de S^3.
- Estos resultados topológicos sugieren fuertemente que las 13 restantes son divergentes.

- $\overline{K_4} + \overline{K_4} + \overline{K_4}$ es divergente por el teorema de los 3 sumandos.

- $\overline{K_4} + \overline{K_4} + \overline{K_4}$ es divergente por el teorema de los 3 sumandos.
- $\overline{K_4} + \overline{H}$, donde H es conexa cúbica con 8 vértices es divergente en los 5 casos.

- $\overline{K_4} + \overline{K_4} + \overline{K_4}$ es divergente por el teorema de los 3 sumandos.
- $\overline{K_4} + \overline{H}$, donde H es conexa cúbica con 8 vértices es divergente en los 5 casos.
- $\overline{T_3} + \overline{T_3}$ y $\overline{T_3} + \overline{K_{3,3}}$ son divergentes por el teorema del sumando conexo.

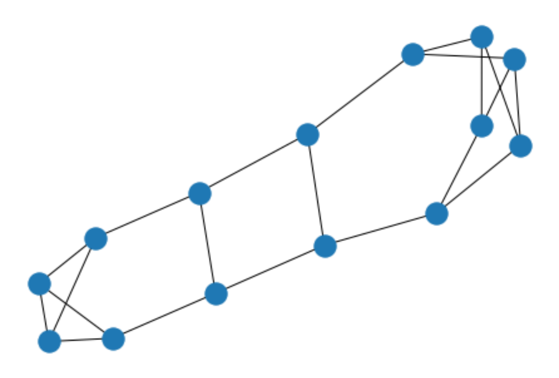
- $\overline{K_4} + \overline{K_4} + \overline{K_4}$ es divergente por el teorema de los 3 sumandos.
- $\overline{K_4} + \overline{H}$, donde H es conexa cúbica con 8 vértices es divergente en los 5 casos.
- $\overline{T_3} + \overline{T_3}$ y $\overline{T_3} + \overline{K_{3,3}}$ son divergentes por el teorema del sumando conexo.
- Sin embargo, $\overline{K_{3,3}} + \overline{K_{3,3}}$ es convergente.

- $\overline{K_4} + \overline{K_4} + \overline{K_4}$ es divergente por el teorema de los 3 sumandos.
- $\overline{K_4} + \overline{H}$, donde H es conexa cúbica con 8 vértices es divergente en los 5 casos.
- $\overline{T_3} + \overline{T_3}$ y $\overline{T_3} + \overline{K_{3,3}}$ son divergentes por el teorema del sumando conexo.
- Sin embargo, $\overline{K_{3,3}} + \overline{K_{3,3}}$ es convergente.
- Es decir, de las 94 gráficas cúbicas con 12 vértices, todo indica que solo una tiene complemento convergente.

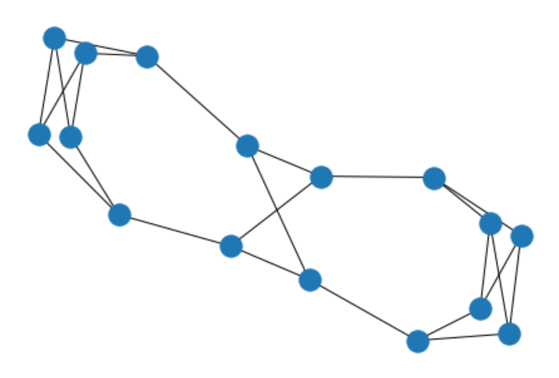
Sin embargo...

- Hay exactamente 509 gráficas conexas y cúbicas con 14 vértices. Pero entre ellas hay al menos 5 con complemento convergente.

- Hay exactamente 509 gráficas conexas y cúbicas con 14 vértices. Pero entre ellas hay al menos 5 con complemento convergente.
- Una de ellas:



Hay exactamente 4060 gráficas conexas y cúbicas con 16 vértices. Pero entre ellas hay al menos una con complemento convergente.

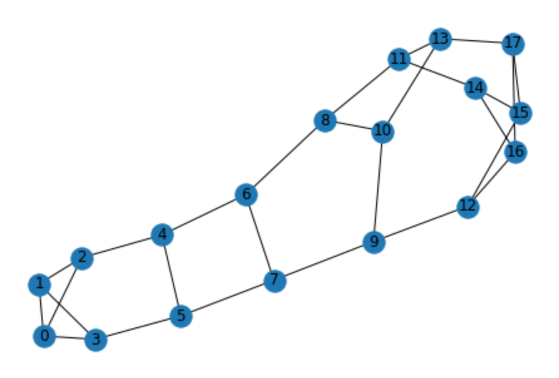


18 VÉRTICES

- Hay exactamente 41301 gráficas conexas y cúbicas con 18 vértices. Entre ellas hay al menos 44 con complemento convergente.

18 VÉRTICES

- Hay exactamente 41301 gráficas conexas y cúbicas con 18 vértices. Entre ellas hay al menos 44 con complemento convergente.
- Una de ellas:



Conjetura

Para cada n par, $n \geq 4$, existe una gráfica cúbica G con n vértices, tal que $\overline{G}$ es convergente.

Gracias

github.com/rvfoo68

@rvfoo68