Cálculo del tipo de homotopía de complejos simpliciales

Rafael Villarroel Flores, UAEH

Congreso Virtual SMM 2020

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una manera sencilla de involucrar la topología en diversas construcciones combinatorias.

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una manera sencilla de involucrar la topología en diversas construcciones combinatorias.

Definición (Complejo simplicial)

Un complejo simplicial (X, Δ) consta de un conjunto X de vértices y un conjunto de subconjuntos de X (llamados simplejos), tal que si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in \Delta$.

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una manera sencilla de involucrar la topología en diversas construcciones combinatorias.

Definición (Complejo simplicial)

Un complejo simplicial (X, Δ) consta de un conjunto X de vértices y un conjunto de subconjuntos de X (llamados simplejos), tal que si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in \Delta$.

A cada complejo simplicial se le puede asociar un espacio topológico $|\Delta|$.

Vecindades

Definición (Complejo de vecindades)

Sea G una gráfica sin vértices aislados. Se tiene un complejo simplicial $\mathcal{N}(G)$, donde:

Vecindades

Definición (Complejo de vecindades)

Sea G una gráfica sin vértices aislados. Se tiene un complejo simplicial $\mathcal{N}(G)$, donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,

Vecindades

Definición (Complejo de vecindades)

Sea G una gráfica sin vértices aislados. Se tiene un complejo simplicial $\mathcal{N}(G)$, donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es un simplejo si los vértices de σ tienen un vecino común.

Vecindades

Definición (Complejo de vecindades)

Sea G una gráfica sin vértices aislados. Se tiene un complejo simplicial $\mathcal{N}(G)$, donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es un simplejo si los vértices de σ tienen un vecino común.

Vecindades

Definición (Complejo de vecindades)

Sea G una gráfica sin vértices aislados. Se tiene un complejo simplicial $\mathcal{N}(G)$, donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es un simplejo si los vértices de σ tienen un vecino común.

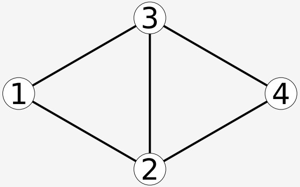


Figura: Gráfica G

Vecindades

Definición (Complejo de vecindades)

Sea G una gráfica sin vértices aislados. Se tiene un complejo simplicial $\mathcal{N}(G)$, donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es un simplejo si los vértices de σ tienen un vecino común.

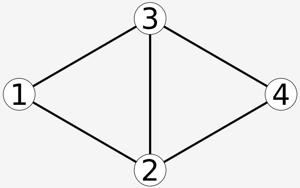


Figura: Gráfica G

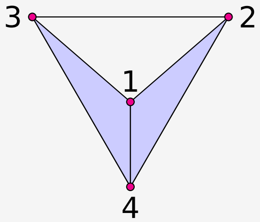


Figura: Complejo $\mathcal{N}(G)$

Teorema (Lovász, 1978)

Si $|\mathcal{N}(G)|$ es k-conexo, entonces $\chi(G) \geq k+3$.

Teorema (Lovász, 1978)

Si $|\mathcal{N}(G)|$ es k-conexo, entonces $\chi(G) \geq k+3$.

- Un espacio X es k-conexo si toda función continua $S^r \to X$ puede extenderse a la bola cerrada $D^{r+1} \to X$ para $r = 0, 1, \ldots, k$

Teorema (Lovász, 1978)

Si $|\mathcal{N}(G)|$ es k-conexo, entonces $\chi(G) \geq k+3$.

- Un espacio X es k-conexo si toda función continua $S^r \to X$ puede extenderse a la bola cerrada $D^{r+1} \to X$ para $r = 0, 1, \ldots, k$
- 0-conexo es ser conexo por trayectorias.

Teorema (Lovász, 1978)

Si $|\mathcal{N}(G)|$ es k-conexo, entonces $\chi(G) \geq k+3$.

- Un espacio X es k-conexo si toda función continua $S^r \to X$ puede extenderse a la bola cerrada $D^{r+1} \to X$ para $r = 0, 1, \dots, k$
- 0-conexo es ser conexo por trayectorias.
- 1-conexo es ser simplemente conexo (y conexo por trayectorias).

JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series A **25**, 319–324 (1978)

Note

Kneser's Conjecture, Chromatic Number, and Homotopy

L. Lovász

Bolyai Institute, Jozsef Attila University,
H-6720 Szeged, Aradi vértanuk tere 1, Hungary

Communicated by the Editors

Received March 4, 1977

If the simplicial complex formed by the neighborhoods of points of a graph is $(k-2)$-connected then the graph is not k-colorable. As a corollary Kneser's conjecture is proved, asserting that if all n-subsets of a $(2n-k)$-element set are divided into $k+1$ classes, one of the classes contains two disjoint n-subsets.

hom

El complejo de vecindades fue generalizado por Lovász a una construcción $\hom(H, G)$, definida para cualquier par de gráficas G, H. Se tiene que $\hom(K_2, G) \simeq \mathcal{N}(G)$.

hom

El complejo de vecindades fue generalizado por Lovász a una construcción $\hom(H, G)$, definida para cualquier par de gráficas G, H. Se tiene que $\hom(K_2, G) \simeq \mathcal{N}(G)$.

Babson y Kozlov demostraron (2003): Si $\hom(C_{2r+1}, G)$ es k-conexo para alguna r, entonces $\chi(G) \geq k + 4$.

Independencia

Definición (Complejo de independencia)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $I(G)$ donde:

Independencia

Definición (Complejo de independencia)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $I(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,

Independencia

Definición (Complejo de independencia)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $I(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es simplejo si no existen aristas entre vértices de σ.

Independencia

Definición (Complejo de independencia)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $I(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es simplejo si no existen aristas entre vértices de σ.

Independencia

Definición (Complejo de independencia)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $I(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es simplejo si no existen aristas entre vértices de σ.

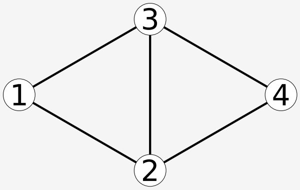


Figura: Gráfica G

Independencia

Definición (Complejo de independencia)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $I(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es simplejo si no existen aristas entre vértices de σ.

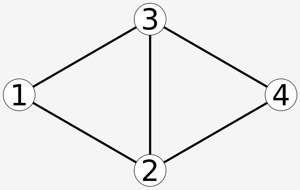


Figura: Gráfica G

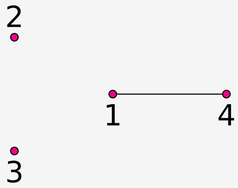


Figura: Complejo $I(G)$

Ehrenborg, Hetyei, 2006

Si G es un bosque, entonces $I(G)$ es homotópico a un punto o a una esfera.

Ehrenborg, Hetyei, 2006

Si G es un bosque, entonces $I(G)$ es homotópico a un punto o a una esfera.

Engström, 2008

Si G es una gráfica libre de garras (*claw-free*) con n vértices y grado máximo d, entonces $I(G)$ es $\lfloor (2n-1)/(3d+2)-1 \rfloor$-conexo.

Ehrenborg, Hetyei, 2006

Si G es un bosque, entonces $I(G)$ es homotópico a un punto o a una esfera.

Engström, 2008

Si G es una gráfica libre de garras (*claw-free*) con n vértices y grado máximo d, entonces $I(G)$ es $\lfloor (2n-1)/(3d+2)-1 \rfloor$-conexo.

Van Tuyl, Villarreal, 2008

Si G es cordal, entonces $I(G)$ es encapsulable (*shellable*), por lo que $I(G)$ es homotópico a una cuña de esferas.

Completas

Definición (Complejo de completas)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $\Delta(G)$ donde:

Completas

Definición (Complejo de completas)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $\Delta(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,

Completas

Definición (Complejo de completas)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $\Delta(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es simplejo si σ induce una subgráfica completa de G.

Completas

Definición (Complejo de completas)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $\Delta(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es simplejo si σ induce una subgráfica completa de G.

Completas

Definición (Complejo de completas)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $\Delta(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es simplejo si σ induce una subgráfica completa de G.

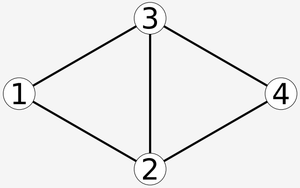


Figura: Gráfica G

Completas

Definición (Complejo de completas)

Sea G una gráfica. Se tiene un complejo simplicial $\Delta(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $V(G)$,
- $\sigma \subseteq V(G)$ es simplejo si σ induce una subgráfica completa de G.

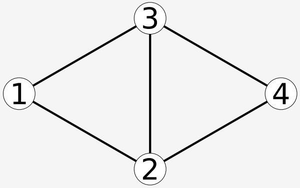


Figura: Gráfica G

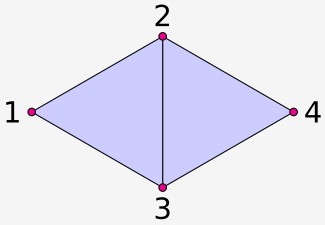


Figura: Complejo $\Delta(G)$

Si G es una gráfica, $K(G)$ es la gráfica de intersección de los clanes de G. G es K-Helly si sus clanes tienen la propiedad de Helly. G es K-convergente si la sucesión de órdenes de las gráficas $\{K^n(G)\}$ es acotada. De lo contrario, decimos que G es K-divergente.

Prisner, 1992

Si G es K-Helly, entonces $\Delta(G) \simeq \Delta(K(G))$.

Prisner, 1992

Si G es K-Helly, entonces $\Delta(G) \simeq \Delta(K(G))$.

Larrión, Pizaña, V., 2013

Prisner, 1992

Si G es K-Helly, entonces $\Delta(G) \simeq \Delta(K(G))$.

Larrión, Pizaña, V., 2013

- Si S es una superficie compacta diferente del disco D^2, entonces existe una gráfica G tal que $\Delta(G) \cong S$ y G es K-divergente.

Prisner, 1992

Si G es K-Helly, entonces $\Delta(G) \simeq \Delta(K(G))$.

Larrión, Pizaña, V., 2013

- Si S es una superficie compacta diferente del disco D^2, entonces existe una gráfica G tal que $\Delta(G) \cong S$ y G es K-divergente.
- Si S es una superficie compacta diferente de la esfera S^2, el toro, el plano proyectivo y la botella de Klein, entonces existe una gráfica G tal que $\Delta(G) \cong S$ y G es K-convergente.

Grado acotado

Complejo de grado acotado

Sean G una gráfica con vértices $V(G) = (v_1, v_2 \dots, v_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ una sucesión de enteros no negativos. Se tiene un complejo simplicial $\mathrm{BD}^{\lambda}(G)$ donde:

Grado acotado

Complejo de grado acotado

Sean G una gráfica con vértices $V(G) = (v_1, v_2 \ldots, v_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ una sucesión de enteros no negativos. Se tiene un complejo simplicial $\mathrm{BD}^{\lambda}(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $E(G)$,

Grado acotado

Complejo de grado acotado

Sean G una gráfica con vértices $V(G) = (v_1, v_2 \dots, v_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ una sucesión de enteros no negativos. Se tiene un complejo simplicial $\mathrm{BD}^{\lambda}(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $E(G)$,
- $H \subseteq E(G)$ es simplejo si el grado de v_i en la gráfica inducida $G[H]$ es menor o igual a λ_i.

Grado acotado

Complejo de grado acotado

Sean G una gráfica con vértices $V(G) = (v_1, v_2 \ldots, v_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ una sucesión de enteros no negativos. Se tiene un complejo simplicial $\mathrm{BD}^\lambda(G)$ donde:

- el conjunto de vértices es $E(G)$,
- $H \subseteq E(G)$ es simplejo si el grado de v_i en la gráfica inducida $G[H]$ es menor o igual a λ_i.

Si $\lambda = (k, k, \ldots, k)$, entonces $\mathrm{BD}^\lambda(G)$ se denota $\mathrm{BD}^k(G)$. Si $k = 1$, $\mathrm{BD}^k(G)$ se llama el complejo de emparejamientos (*matching complex*) de G.

Ejemplo

Sea $\lambda = (1, 2, 2, 1)$

Ejemplo

Sea $\lambda = (1, 2, 2, 1)$

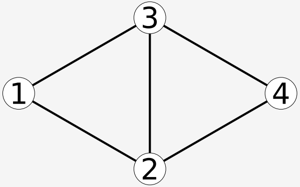


Figura: Gráfica G

Ejemplo

Sea $\lambda = (1, 2, 2, 1)$

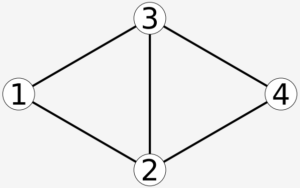


Figura: Gráfica G

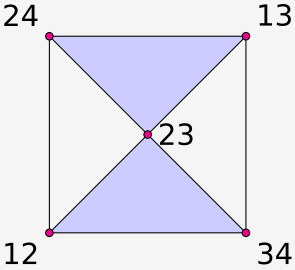


Figura: Complejo $\mathrm{BD}^{\lambda}(G)$

Marietti, Testa, 2008

Si G es un bosque, entonces $\mathrm{BD}^1(G)$ es contraíble, u homotópico a una cuña de esferas.

Marietti, Testa, 2008

Si G es un bosque, entonces $\mathrm{BD}^1(G)$ es contraíble, u homotópico a una cuña de esferas.

Singh, 2020

Si G es un bosque, entonces $\mathrm{BD}^\lambda(G)$ es contraíble, u homotópico a una cuña de esferas para todo λ.

Marietti, Testa, 2008

Si G es un bosque, entonces $\mathrm{BD}^1(G)$ es contraíble, u homotópico a una cuña de esferas.

Singh, 2020

Si G es un bosque, entonces $\mathrm{BD}^\lambda(G)$ es contraíble, u homotópico a una cuña de esferas para todo λ.

Bouc, 1984

La homología de $BD^1(K_7)$ contiene torsión.

Subespacio contraíble

Teorema (Subespacio contraíble)

Sea X un espacio y Y un subespacio contraíble tal que la inclusión $Y \hookrightarrow X$ es una cofibración. Entonces $X \simeq X/Y$.

Subespacio contraíble

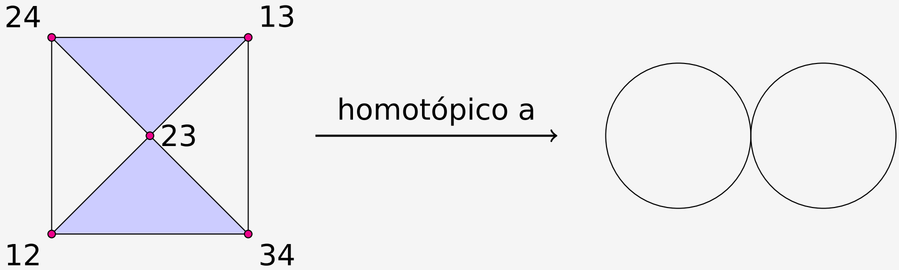
Teorema (Subespacio contraíble)

Sea X un espacio y Y un subespacio contraíble tal que la inclusión $Y \hookrightarrow X$ es una cofibración. Entonces $X \simeq X/Y$.

En nuestro caso, podemos usar siempre este teorema, ya que si Δ es un complejo simplicial con subcomplejo Δ', la inclusión $\Delta' \hookrightarrow \Delta$ siempre es una cofibración.

Ejemplos

Ejemplos



Vértices dominados

Para todo complejo simplicial Δ existe una gráfica G tal que de la forma $\Delta \cong \Delta(G)$.

Definición (Vértice dominado)

Un vértice u en la gráfica G es dominado por otro vértice v si $u \sim v$ y $u \sim z$ implica $v \sim z$.

Vértices dominados

Para todo complejo simplicial Δ existe una gráfica G tal que de la forma $\Delta \cong \Delta(G)$.

Definición (Vértice dominado)

Un vértice u en la gráfica G es dominado por otro vértice v si $u \sim v$ y $u \sim z$ implica $v \sim z$.

Teorema (Prisner, 1992)

Si v es dominado, entonces $G \simeq G - v$.

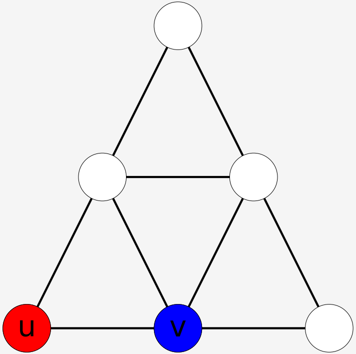


Figura: Desmantelamiento

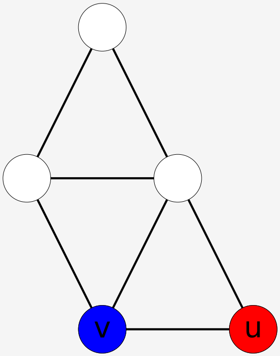


Figura: Desmantelamiento

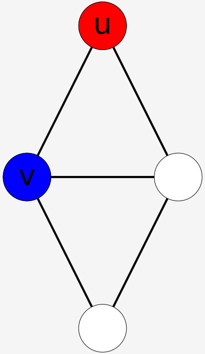


Figura: Desmantelamiento

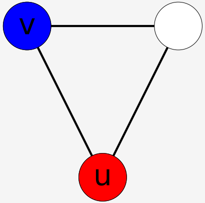


Figura: Desmantelamiento

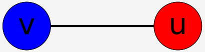
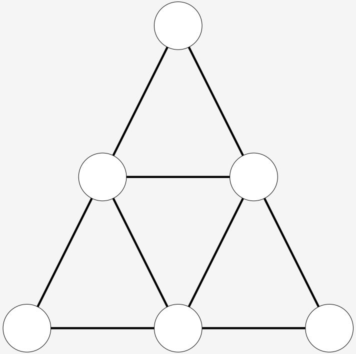


Figura: Desmantelamiento

Figura: Desmantelamiento



Gráfica desmantelable

Figura: Desmantelamiento

Teorema (Boulet, Fieux, Jouve, 2010)

Teorema (Boulet, Fieux, Jouve, 2010)

- *Si la vecindad de v es desmantelable, entonces $G \simeq G - v$.*

Teorema (Boulet, Fieux, Jouve, 2010)

- *Si la vecindad de v es desmantelable, entonces $G \simeq G - v$.*
- *Si $e = \{u, v\}$ es una arista y la vecindad común de u, v es desmantelable, entonces $G \simeq G - e$.*

Teoría discreta de Morse

Definición (Emparejamiento)

Un emparejamiento en el complejo simplicial Δ es una familia $\mathcal{M}$ de parejas de simplejos $\{\tau, \sigma\} \subseteq \Delta$ tal que:

Teoría discreta de Morse

Definición (Emparejamiento)

Un emparejamiento en el complejo simplicial Δ es una familia $\mathcal{M}$ de parejas de simplejos $\{\tau, \sigma\} \subseteq \Delta$ tal que:

- si $\{\tau, \sigma\} \in \mathcal{M}$, entonces $\tau \subsetneq \sigma$ y $|\sigma - \tau| = 1$,

Teoría discreta de Morse

Definición (Emparejamiento)

Un emparejamiento en el complejo simplicial Δ es una familia $\mathcal{M}$ de parejas de simplejos $\{\tau, \sigma\} \subseteq \Delta$ tal que:

- si $\{\tau, \sigma\} \in \mathcal{M}$, entonces $\tau \subsetneq \sigma$ y $|\sigma - \tau| = 1$,
- cada $\rho \in \Delta$ está en cuando mucho un par de $\mathcal{M}$.

Teoría discreta de Morse

Definición (Emparejamiento)

Un emparejamiento en el complejo simplicial Δ es una familia $\mathcal{M}$ de parejas de simplejos $\{\tau,\sigma\} \subseteq \Delta$ tal que:

- si $\{\tau,\sigma\} \in \mathcal{M}$, entonces $\tau \subsetneq \sigma$ y $|\sigma - \tau| = 1$,
- cada $\rho \in \Delta$ está en cuando mucho un par de $\mathcal{M}$.

Teoría discreta de Morse

Definición (Emparejamiento)

Un emparejamiento en el complejo simplicial Δ es una familia $\mathcal{M}$ de parejas de simplejos $\{\tau, \sigma\} \subseteq \Delta$ tal que:

- si $\{\tau, \sigma\} \in \mathcal{M}$, entonces $\tau \subsetneq \sigma$ y $|\sigma - \tau| = 1$,
- cada $\rho \in \Delta$ está en cuando mucho un par de $\mathcal{M}$.

Si $\sigma \in \Delta$ no pertenece a ninguna pareja de $\mathcal{M}$, diremos que σ es una cara crítica.

Definición (Emparejamiento acíclico)

Dado un emparejamiento $\mathcal{M}$ en el complejo simplicial Δ, definimos una gráfica dirigida $D = D(\Delta, \mathcal{M})$ que tiene como conjunto de vértices a Δ, y donde hay una flecha $\tau \to \sigma$ si se da uno de:

Definición (Emparejamiento acíclico)

Dado un emparejamiento $\mathcal{M}$ en el complejo simplicial Δ, definimos una gráfica dirigida $D = D(\Delta, \mathcal{M})$ que tiene como conjunto de vértices a Δ, y donde hay una flecha $\tau \to \sigma$ si se da uno de:

- $\{\tau, \sigma\} \in \mathcal{M}$,

Definición (Emparejamiento acíclico)

Dado un emparejamiento $\mathcal{M}$ en el complejo simplicial Δ, definimos una gráfica dirigida $D = D(\Delta, \mathcal{M})$ que tiene como conjunto de vértices a Δ, y donde hay una flecha $\tau \to \sigma$ si se da uno de:

- $\{\tau, \sigma\} \in \mathcal{M}$,
- $\{\tau, \sigma\} \notin \mathcal{M}$, $\sigma \subseteq \tau$ y $|\tau - \sigma| = 1$.

Definición (Emparejamiento acíclico)

Dado un emparejamiento $\mathcal{M}$ en el complejo simplicial Δ, definimos una gráfica dirigida $D = D(\Delta, \mathcal{M})$ que tiene como conjunto de vértices a Δ, y donde hay una flecha $\tau \to \sigma$ si se da uno de:

- $\{\tau, \sigma\} \in \mathcal{M}$,
- $\{\tau, \sigma\} \notin \mathcal{M}$, $\sigma \subseteq \tau$ y $|\tau - \sigma| = 1$.

Definición (Emparejamiento acíclico)

Dado un emparejamiento $\mathcal{M}$ en el complejo simplicial Δ, definimos una gráfica dirigida $D = D(\Delta, \mathcal{M})$ que tiene como conjunto de vértices a Δ, y donde hay una flecha $\tau \to \sigma$ si se da uno de:

- $\{\tau, \sigma\} \in \mathcal{M}$,
- $\{\tau, \sigma\} \notin \mathcal{M}$, $\sigma \subseteq \tau$ y $|\tau - \sigma| = 1$.

Decimos que $\mathcal{M}$ es un emparejamiento acíclico si D es una gráfica acíclica.

Teorema (Forman)

Si existe un emparejamiento acíclico $\mathcal{M}$ en el complejo simplicial Δ, entonces existe un espacio X homotópico a Δ, tal que X tiene estructura de complejo CW con una celda de dimensión d por cada cara crítica de dimensión d.

Teorema (Forman)

Si existe un emparejamiento acíclico $\mathcal{M}$ en el complejo simplicial Δ, entonces existe un espacio X homotópico a Δ, tal que X tiene estructura de complejo CW con una celda de dimensión d por cada cara crítica de dimensión d.

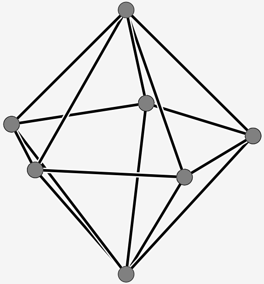
Corolario

Si existe un emparejamiento acíclico en un complejo simplicial Δ tal que las únicas caras críticas consisten de un vértice y las restantes son n caras de dimensión d, entonces Δ es homotópico a $\vee_n S^d$.

Suspensiones de ciclos

Suspensiones de ciclos

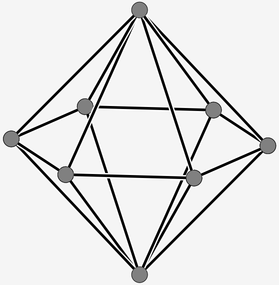
Suspensiones de ciclos



Tipo de homotopía

n	G	$K(G)$	$K^2(G)$	$K^3(G)$	$K^4(G)$
5	S^2	S^2	S^3	?	?

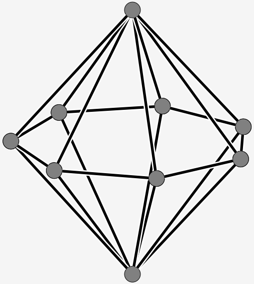
Suspensiones de ciclos



Tipo de homotopía

n	G	$K(G)$	$K^2(G)$	$K^3(G)$	$K^4(G)$
5	S^2	S^2	S^3	?	?
6	S^2	S^2	$\vee_3 S^3$	?	?

Suspensiones de ciclos

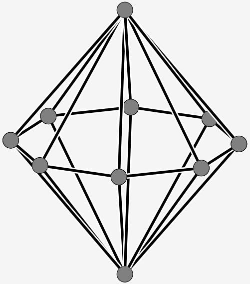


Tipo de homotopía

n	G	$K(G)$	$K^2(G)$	$K^3(G)$	$K^4(G)$
5	S^2	S^2	S^3	?	?
6	S^2	S^2	$\vee_3 S^3$	?	?
7	S^2	S^2	S^2	[1]	?

[1] probablemente $S^3 \vee \vee_2 S^4$

Suspensiones de ciclos

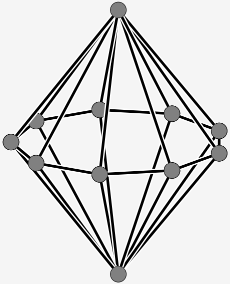


Tipo de homotopía

n	G	$K(G)$	$K^2(G)$	$K^3(G)$	$K^4(G)$
5	S^2	S^2	S^3	?	?
6	S^2	S^2	$\vee_3 S^3$	?	?
7	S^2	S^2	S^2	[1]	?
8	S^2	S^2	S^2	$\vee_7 S^3$	?

[1] probablemente $S^3 \vee \vee_2 S^4$

Suspensiones de ciclos



Tipo de homotopía

n	G	$K(G)$	$K^2(G)$	$K^3(G)$	$K^4(G)$
5	S^2	S^2	S^3	?	?
6	S^2	S^2	$\vee_3 S^3$	?	?
7	S^2	S^2	S^2	[1]	?
8	S^2	S^2	S^2	$\vee_7 S^3$	?
9	S^2	S^2	S^2	S^2	[2]

[1] probablemente $S^3 \vee \vee_2 S^4$
[2] probablemente $S^3 \vee \vee_2 S^7$

Gracias

github.com/rvf0068/2020-congreso-smm-virtual

@rvf0068

rafaelv@uaeh.edu.mx