Aplicaciones de la topología combinatoria

Rafael Villarroel Flores, UAEH

14 de marzo de 2021

XXXVI Coloquio Víctor Neumann-Lara

Teoría

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una forma inmediata de aplicar topología en combinatoria.

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una forma inmediata de aplicar topología en combinatoria.

Definición (Complejo simplicial)

Un complejo simplicial Δ es un conjunto de subconjuntos finitos de un conjunto X, cerrado bajo inclusión. Los elementos de Δ se llaman simplejos o caras.

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una forma inmediata de aplicar topología en combinatoria.

Definición (Complejo simplicial)

Un complejo simplicial Δ es un conjunto de subconjuntos finitos de un conjunto X, cerrado bajo inclusión. Los elementos de Δ se llaman simplejos o caras.

Dimensión

Si $\sigma \in \Delta$ tiene $n+1$ elementos, se dice que su dimensión es $\dim \sigma = n$.

Los simplejos de dimensión n se llaman n-simplejos, los 0-simplejos se llaman vértices.

Ejemplos

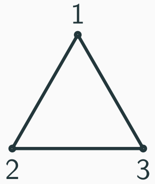
Consideremos los complejos Δ_1 y Δ_2 dados por:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\},\\
\Delta_2 &= \Delta_1 \cup \{\{1,2,3\}\}.
\end{aligned}$$

Ejemplos

Consideremos los complejos Δ_1 y Δ_2 dados por:

$$\Delta_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\},$$
$$\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\{1,2,3\}\}.$$

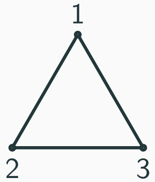


Δ_1

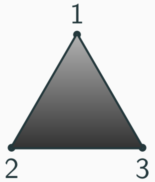
Ejemplos

Consideremos los complejos Δ_1 y Δ_2 dados por:

$$\Delta_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\},$$
$$\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\{1,2,3\}\}.$$



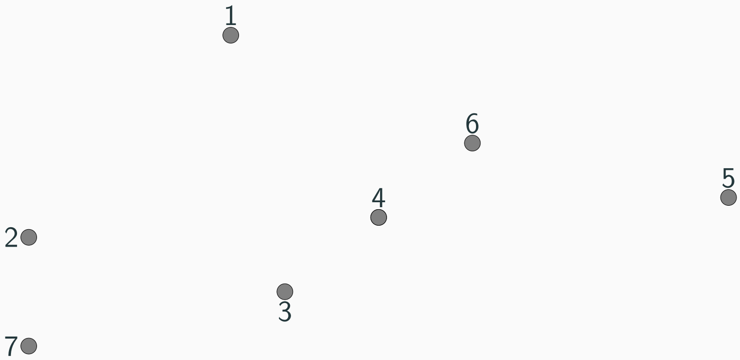
Δ_1



Δ_2

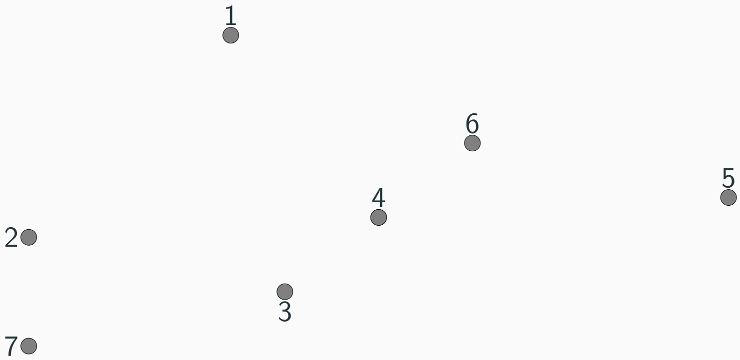
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



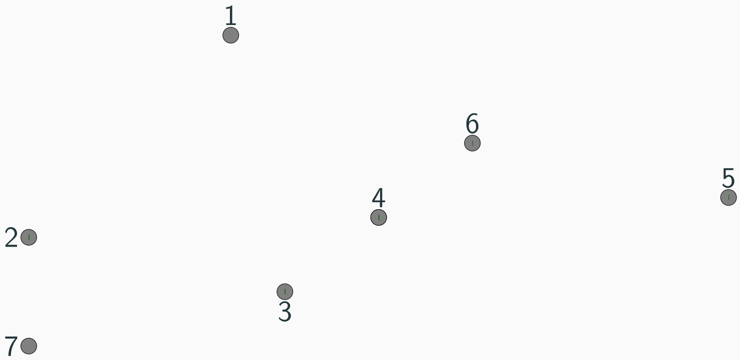
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



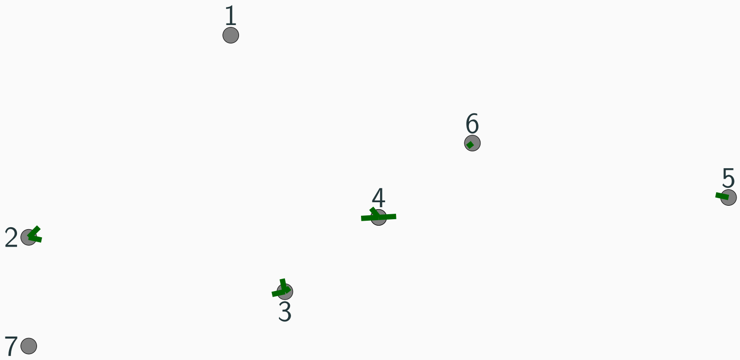
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



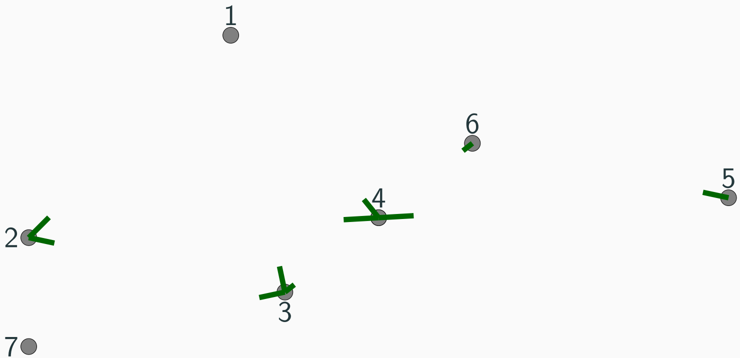
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



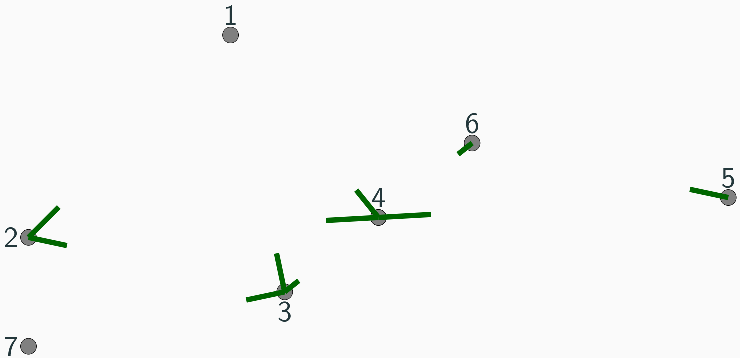
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



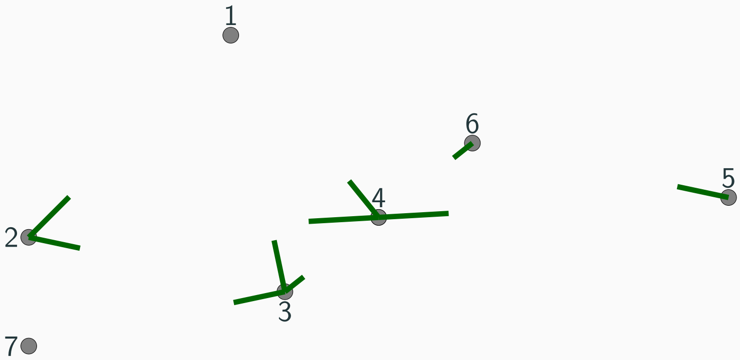
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



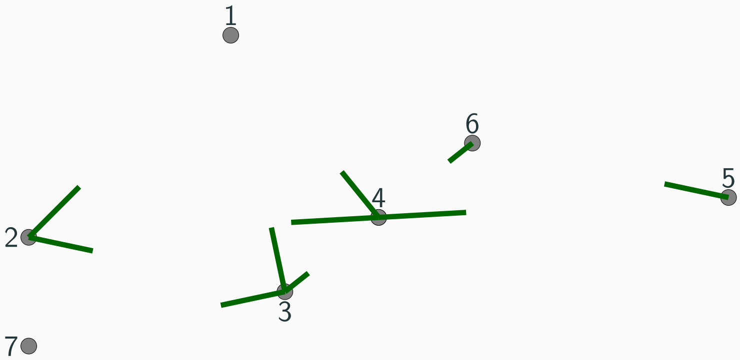
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



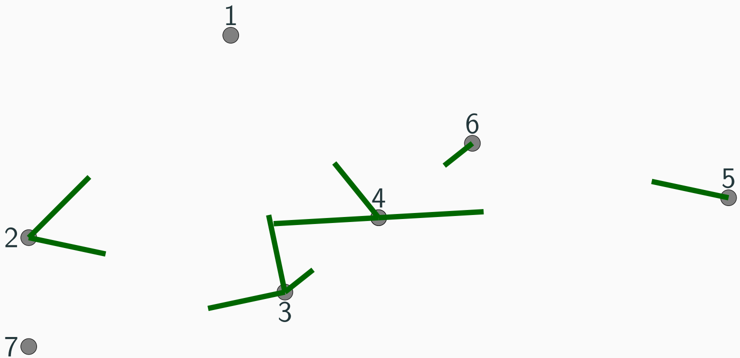
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



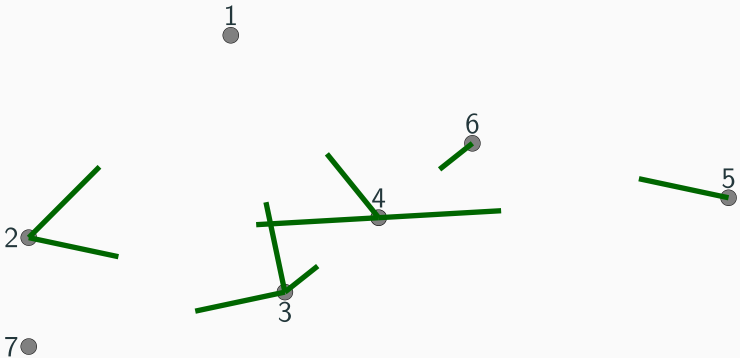
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



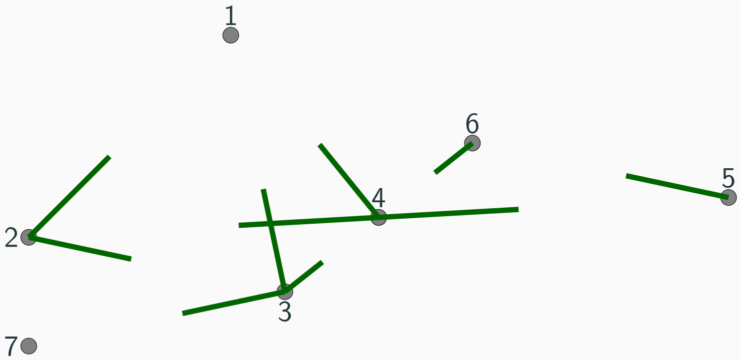
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



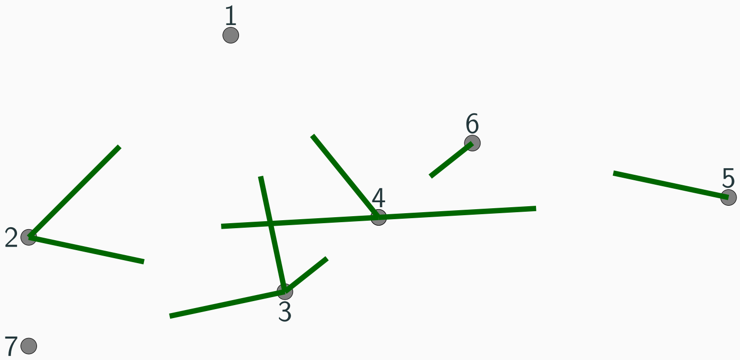
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



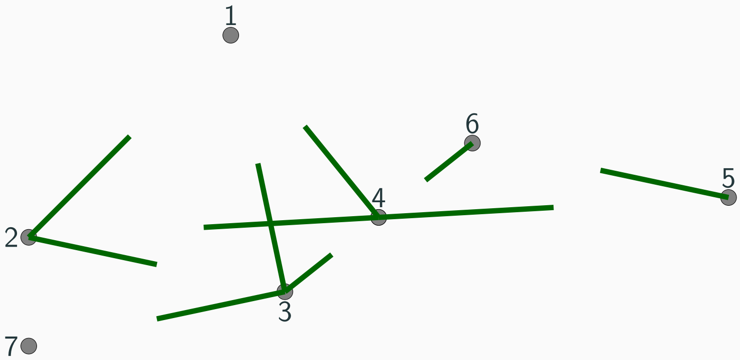
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



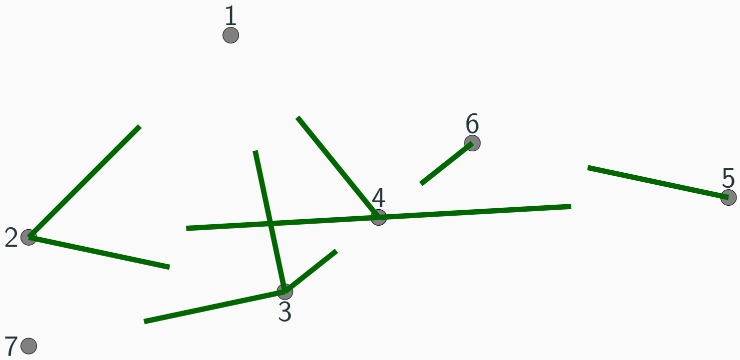
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



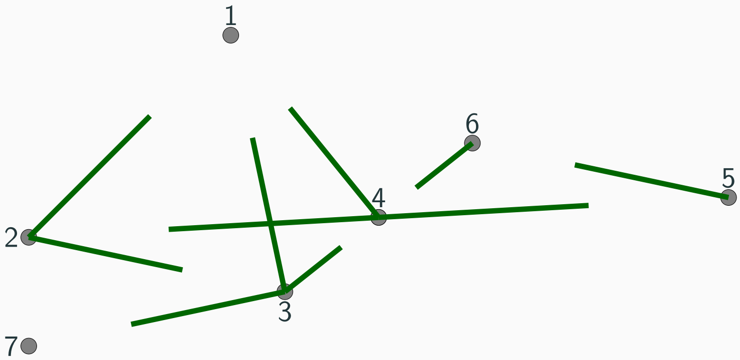
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



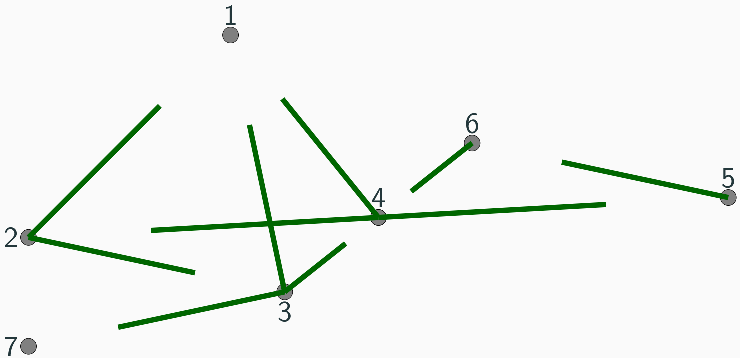
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



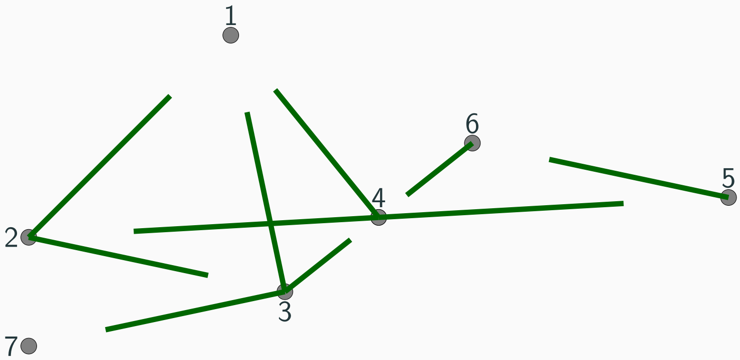
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



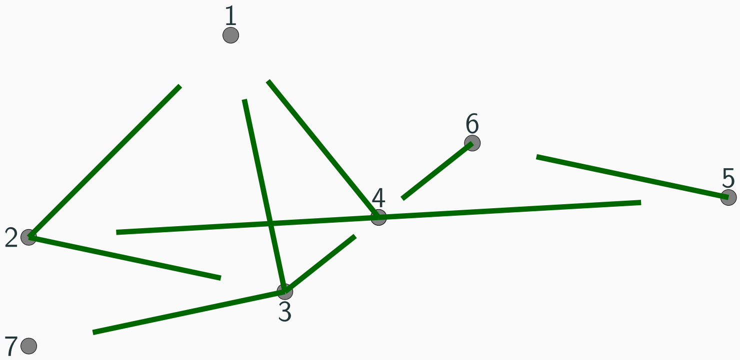
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



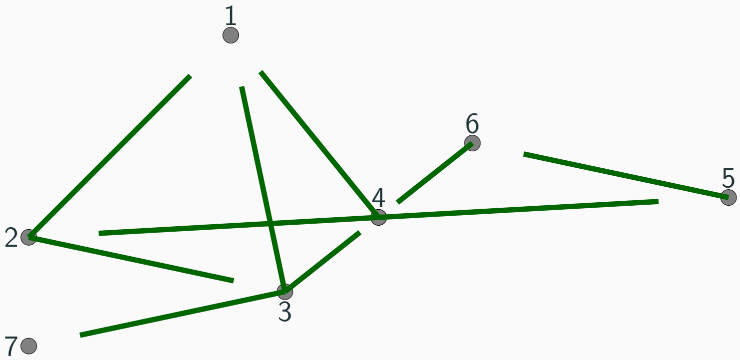
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



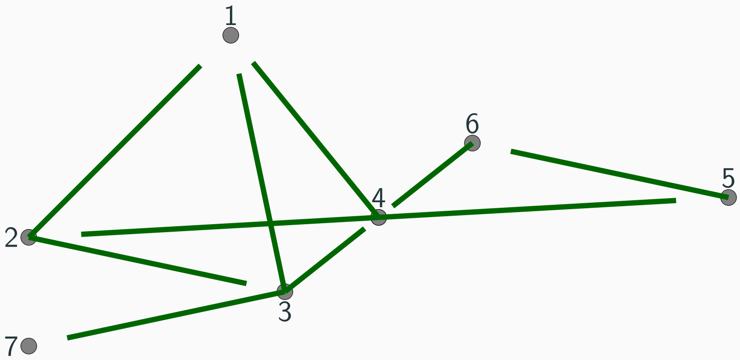
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



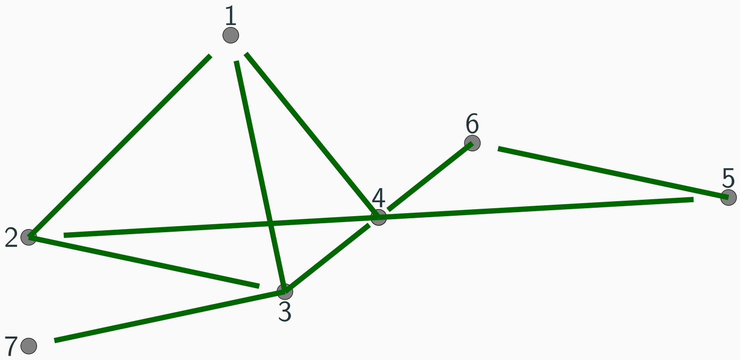
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



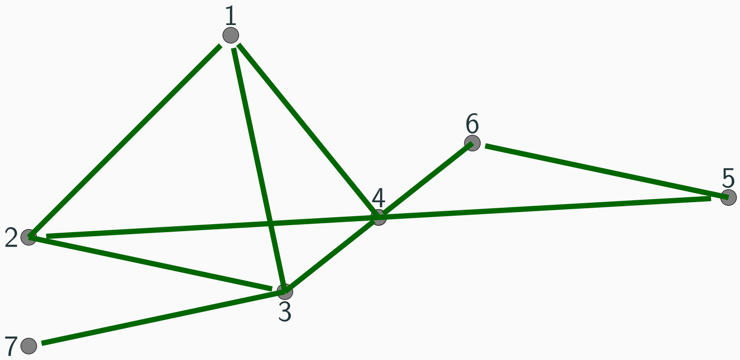
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



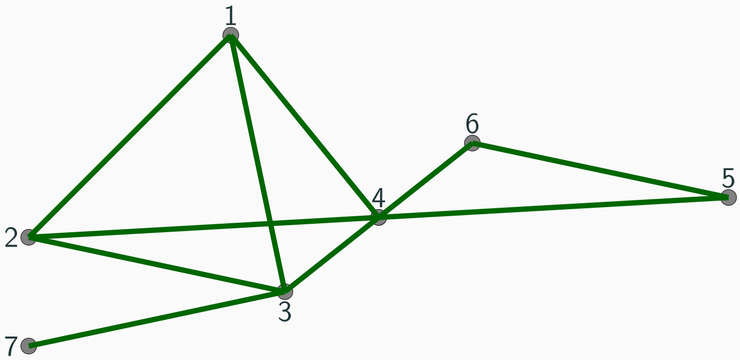
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



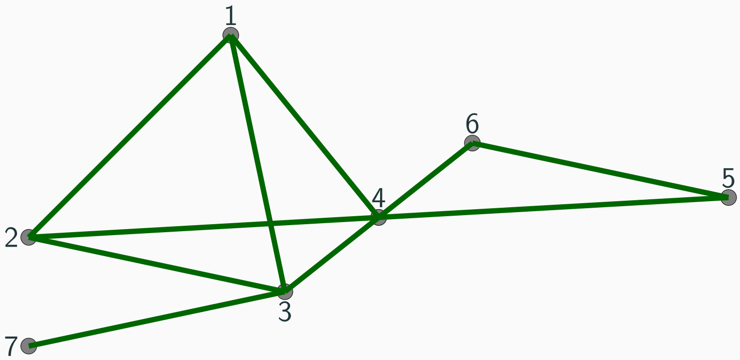
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



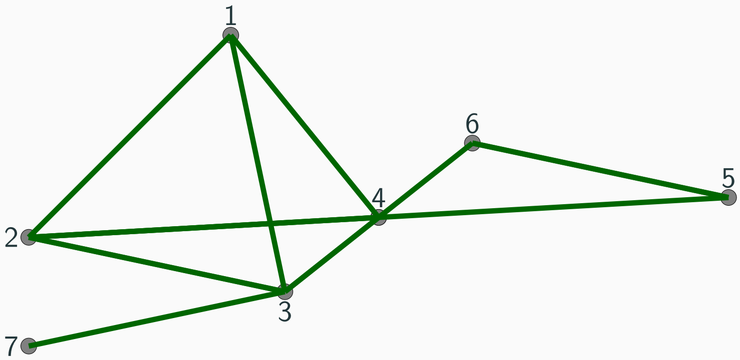
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



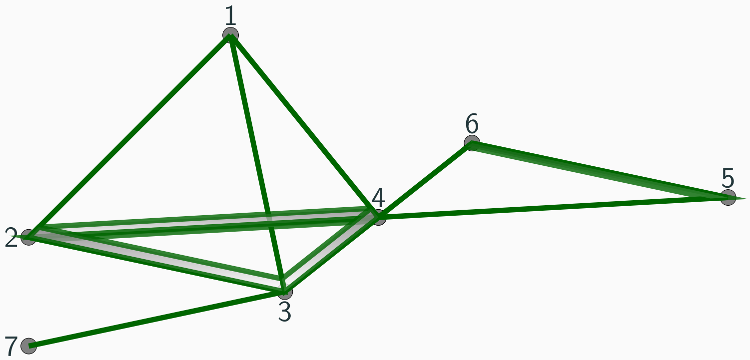
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



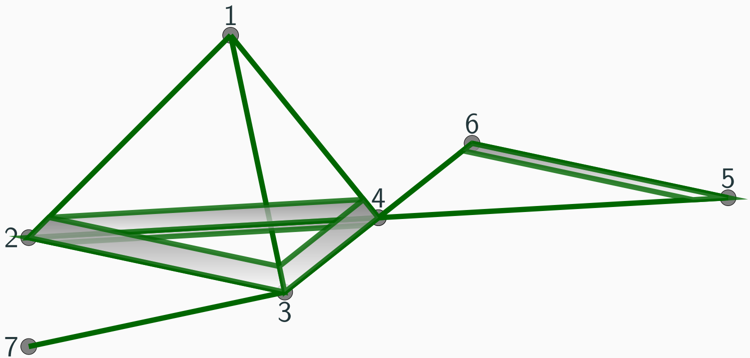
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



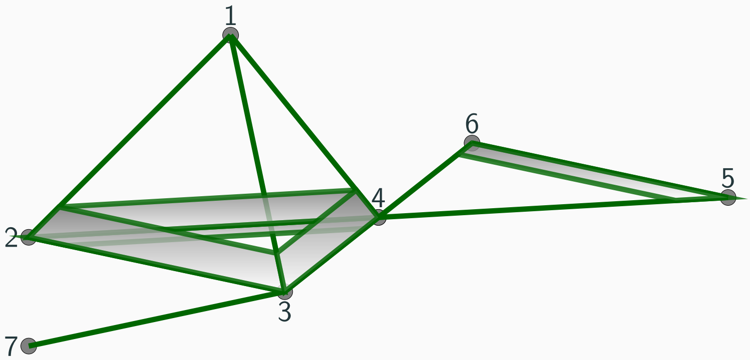
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



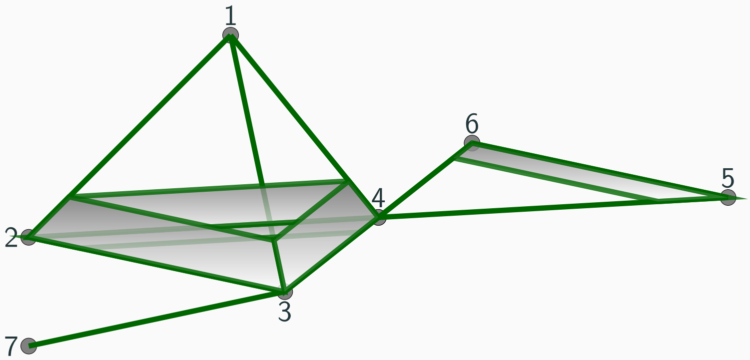
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



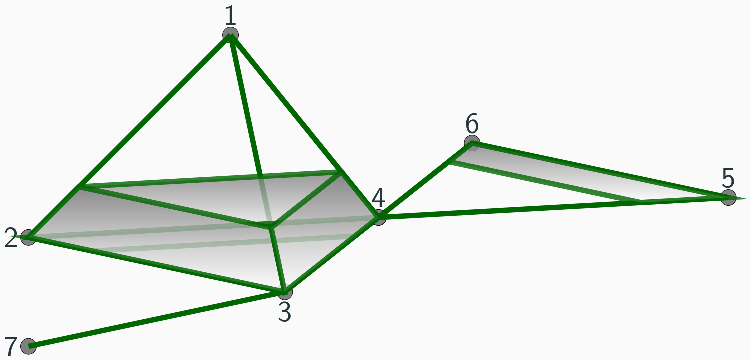
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



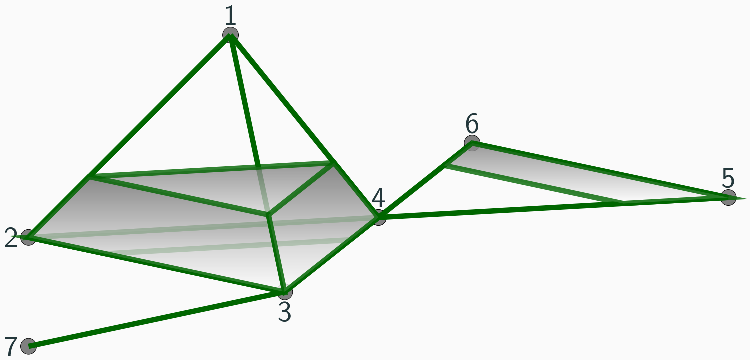
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



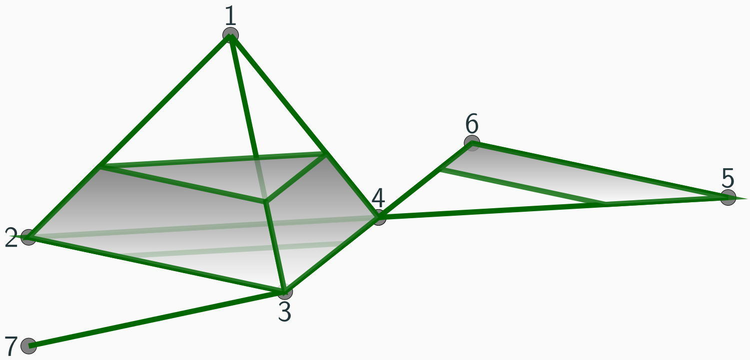
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



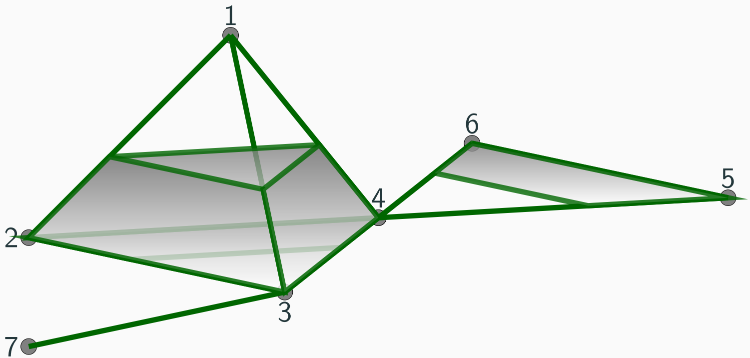
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



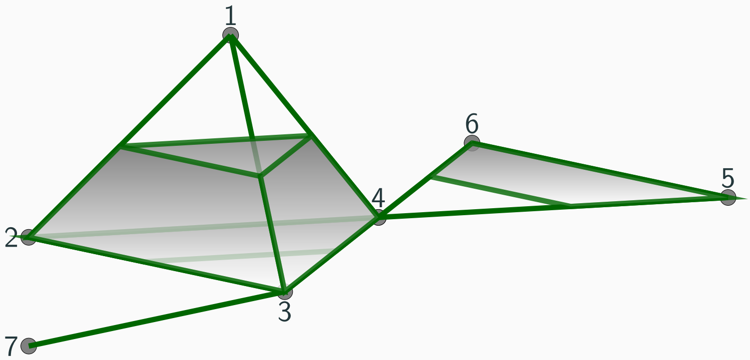
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



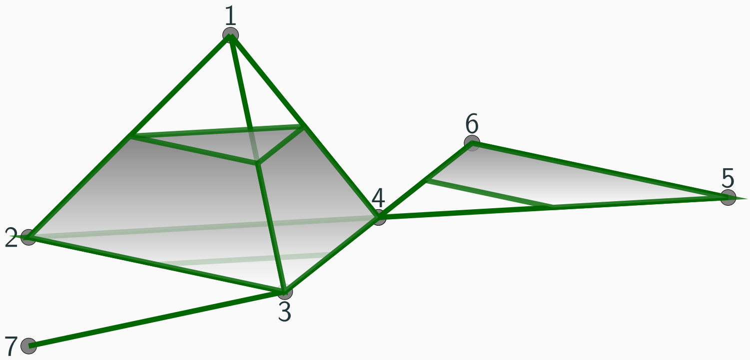
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



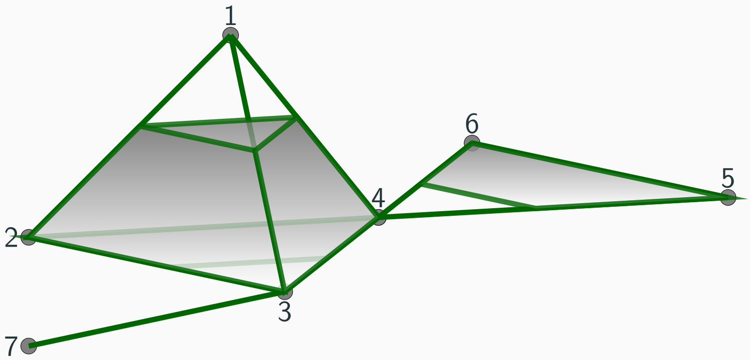
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



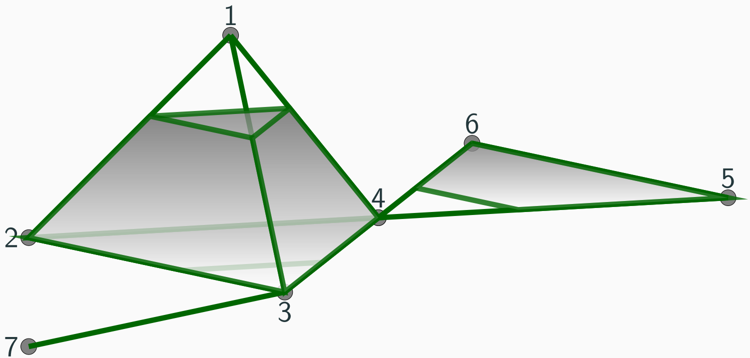
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



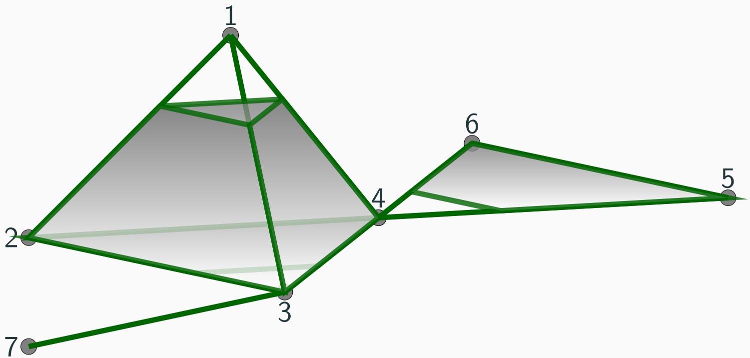
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



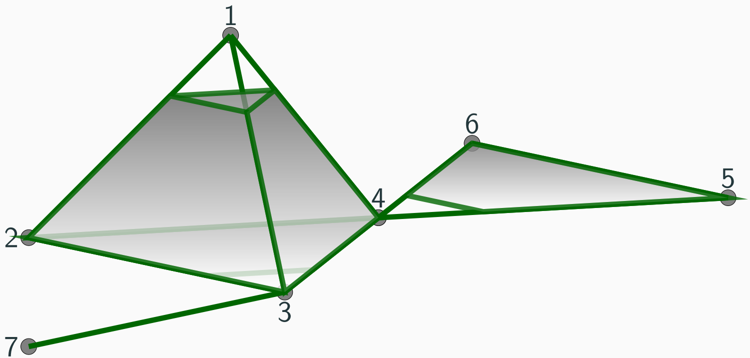
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



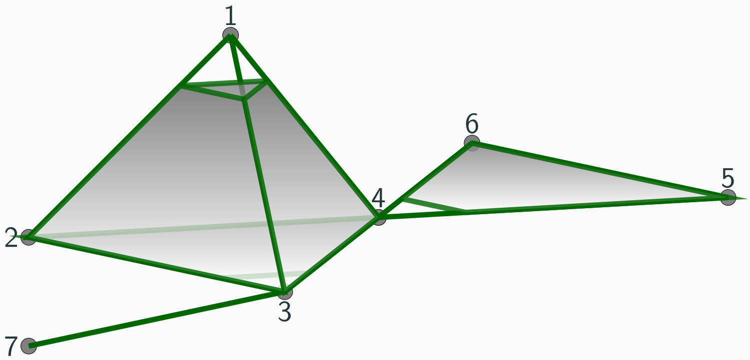
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



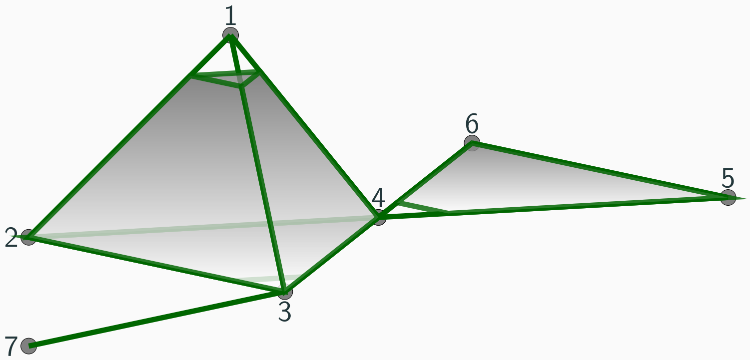
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



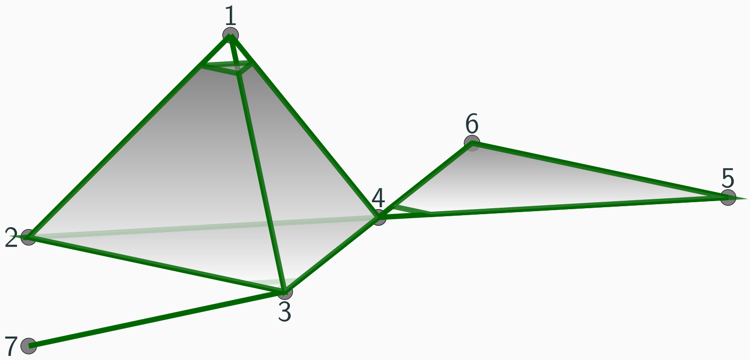
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



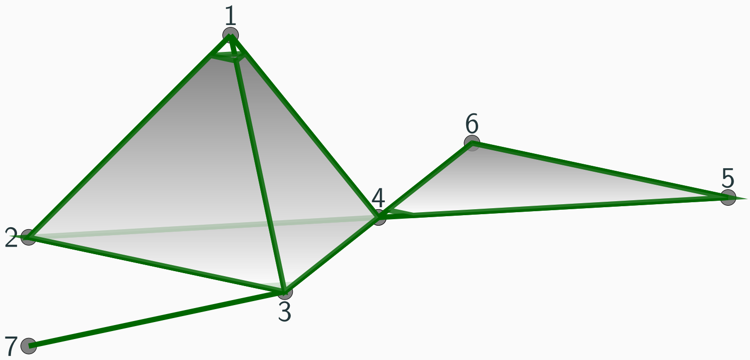
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



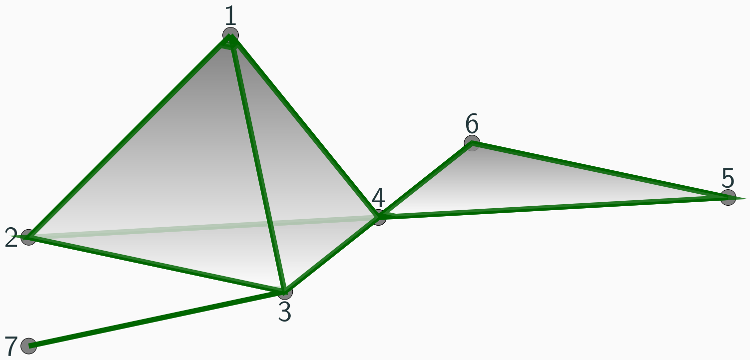
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



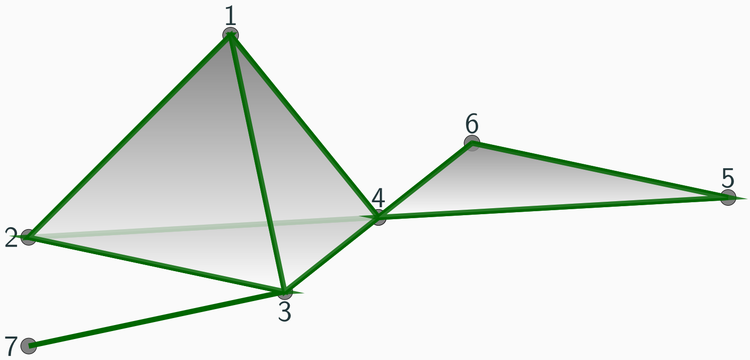
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



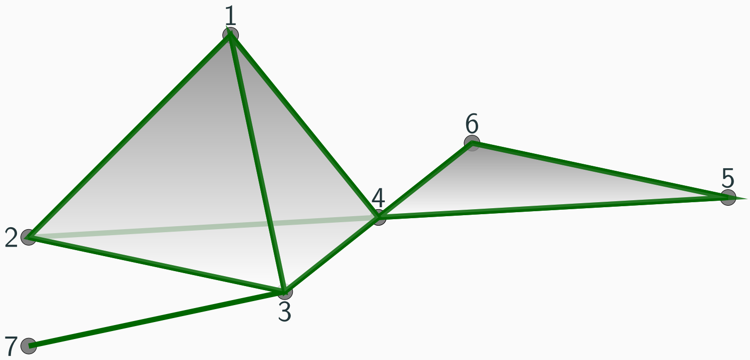
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



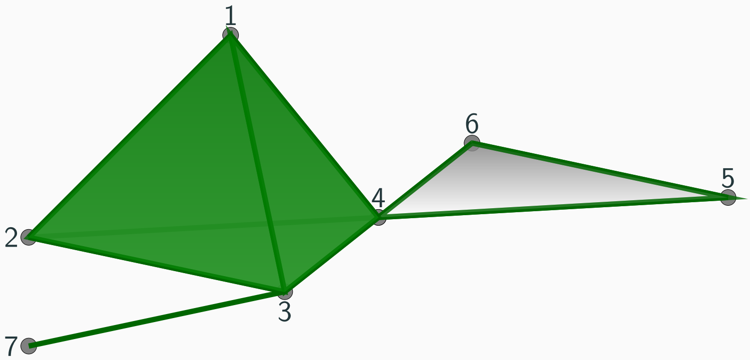
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1,2,3,4\}, \{4,5,6\}, \{3,7\}$



Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{3, 7\}$



Espacio topológico asociado

- En general, a cualquier complejo simplicial se le asocia un espacio topológico, llamado su realización geométrica.

Espacio topológico asociado

- En general, a cualquier complejo simplicial se le asocia un espacio topológico, llamado su realización geométrica.
- La realización geométrica es un funtor de la categoría de complejos simpliciales a la categoría de espacios topológicos.

Complejos simpliciales en gráficas

- Un primer uso de los complejos simpliciales en combinatoria se dio en la prueba de Lovász (1978) de la conjetura de Kneser (1953):

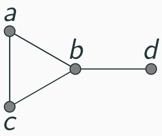
$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Complejos simpliciales en gráficas

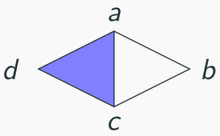
- Un primer uso de los complejos simpliciales en combinatoria se dio en la prueba de Lovász (1978) de la conjetura de Kneser (1953):

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

- Para demostrarlo, Lovász asoció a cada gráfica G su complejo de vecindades $\mathcal{N}(G)$, cuyo conjunto de simplejos son los conjuntos de vértices con un vecino común.



gráfica G



complejo $\mathcal{N}(G)$

El complejo de completas

Definición ($\Delta(G)$)

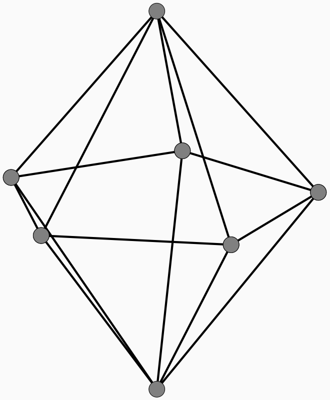
Dada una gráfica simple G, el complejo simplicial $\Delta(G)$ tiene como simplejos a las subgráficas completas de G.

Se usa $\Delta(G)$ para asociarle conceptos topológicos a las gráficas.

Por ejemplo, diremos que las gráficas G_1, G_2 son homotópicas si $\Delta(G_1)$ es homotópico a $\Delta(G_2)$.

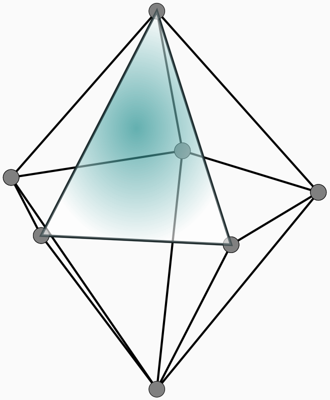
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



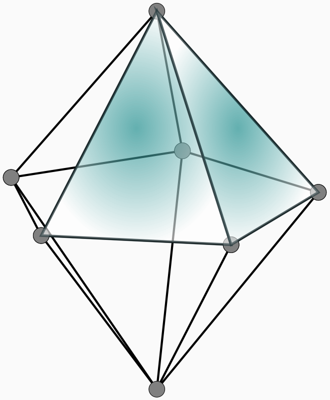
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



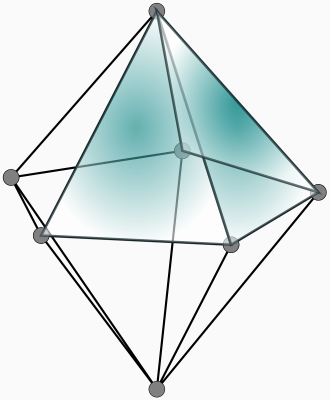
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



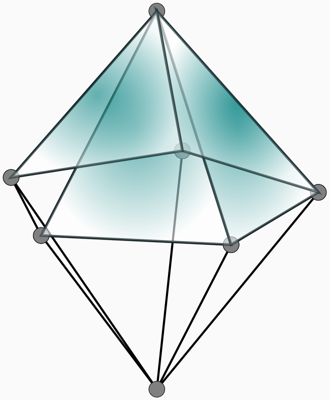
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



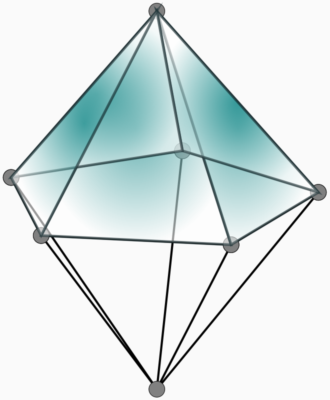
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



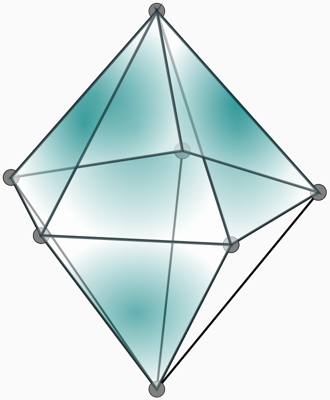
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



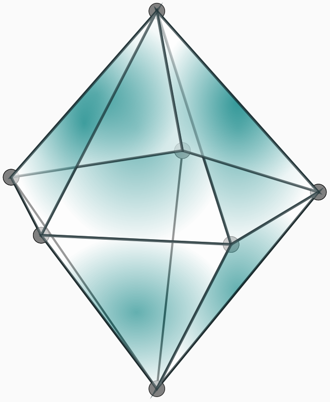
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



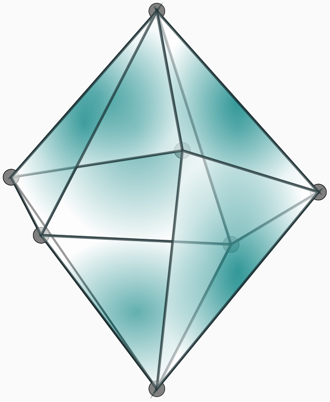
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



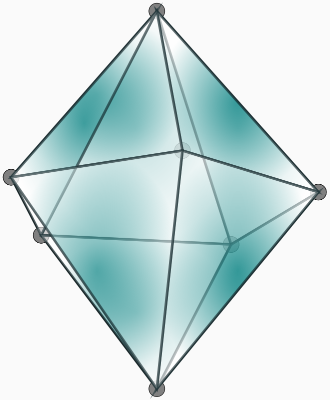
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



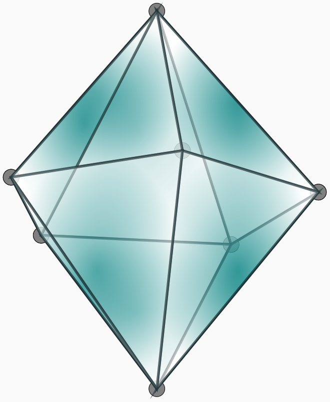
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:



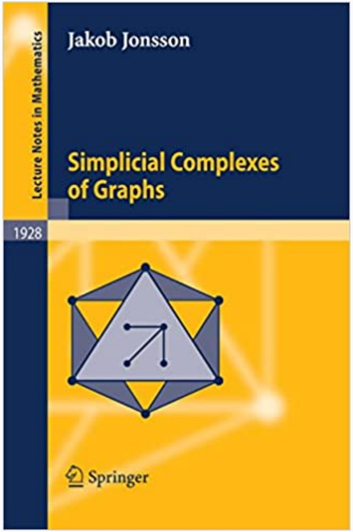
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2:

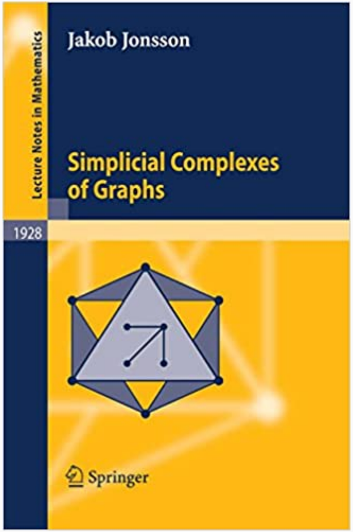


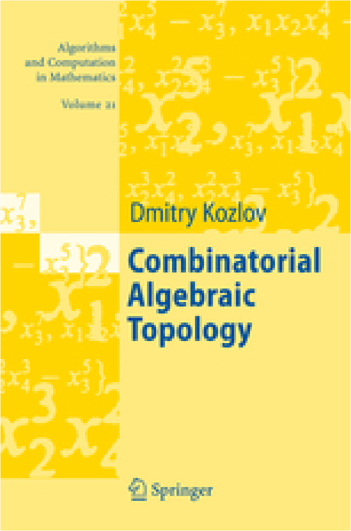
Muchos otros complejos simpliciales en combinatoria

Muchos otros complejos simpliciales en combinatoria



Muchos otros complejos simpliciales en combinatoria





Topología y gráfica de clanes

En mi investigación, me han interesado preguntas sobre la relación entre la topología y el operador de clanes. Por ejemplo:

- (Bandelt-Prisner, 1991, Prisner 1992) Si G es desmantelable, o si G es clan-Helly entonces $G \simeq K(G)$.

Topología y gráfica de clanes

En mi investigación, me han interesado preguntas sobre la relación entre la topología y el operador de clanes. Por ejemplo:

- (Bandelt-Prisner, 1991, Prisner 1992) Si G es desmantelable, o si G es clan-Helly entonces $G \simeq K(G)$.
- Pregunta: Si $K^n(G)$ es desmantelable o clan-Helly para alguna n, ¿se sigue que $G \simeq K(G) \simeq K^2(G) \simeq \cdots \simeq K^n(G)$?

Topología y gráfica de clanes

En mi investigación, me han interesado preguntas sobre la relación entre la topología y el operador de clanes. Por ejemplo:

- (Bandelt-Prisner, 1991, Prisner 1992) Si G es desmantelable, o si G es clan-Helly entonces $G \simeq K(G)$.
- Pregunta: Si $K^n(G)$ es desmantelable o clan-Helly para alguna n, ¿se sigue que $G \simeq K(G) \simeq K^2(G) \simeq \cdots \simeq K^n(G)$?
- (Larrión, Pizaña, V., 2013) Para toda gráfica H existe una gráfica G tal que $G \simeq H$, con G clan-divergente.

Topología y gráfica de clanes

En mi investigación, me han interesado preguntas sobre la relación entre la topología y el operador de clanes. Por ejemplo:

- (Bandelt-Prisner, 1991, Prisner 1992) Si G es desmantelable, o si G es clan-Helly entonces $G \simeq K(G)$.
- Pregunta: Si $K^n(G)$ es desmantelable o clan-Helly para alguna n, ¿se sigue que $G \simeq K(G) \simeq K^2(G) \simeq \cdots \simeq K^n(G)$?
- (Larrión, Pizaña, V., 2013) Para toda gráfica H existe una gráfica G tal que $G \simeq H$, con G clan-divergente.
- Pregunta: ¿Existe una gráfica G tal que $G \simeq S^2$ y G sea clan-convergente?

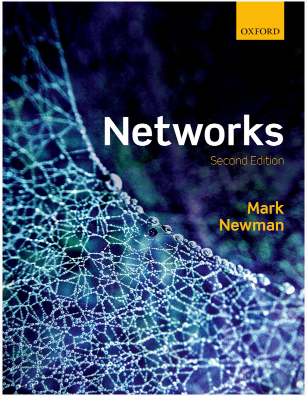
Aplicaciones

Aplicaciones de complejos simpliciales

Recientemente me enteré que el concepto de complejo simplicial, como generalización del de gráfica, ha encontrado varias aplicaciones.

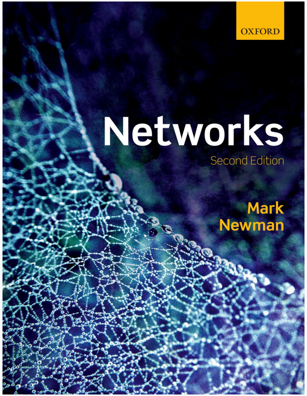
Aplicaciones de complejos simpliciales

Recientemente me enteré que el concepto de complejo simplicial, como generalización del de gráfica, ha encontrado varias aplicaciones.



Aplicaciones de complejos simpliciales

Recientemente me enteré que el concepto de complejo simplicial, como generalización del de gráfica, ha encontrado varias aplicaciones.



J Comput Neurosci (2016) 41:1–14
DOI 10.1007/s10827-016-0608-6

CrossMark

Two's company, three (or more) is a simplex

Algebraic-topological tools for understanding higher-order structure in neural data

Chad Giusti[1,2] · **Robert Ghrist**[1,3] · **Danielle S. Bassett**[2,3]

Received: 13 January 2016 / Revised: 25 March 2016 / Accepted: 16 May 2016 / Published online: 11 June 2016

Abstract The language of graph theory, or network science, has proven to be an exceptional tool for addressing myriad problems in neuroscience. Yet, the use of networks is predicated on a critical simplifying assumption: that the quintessential unit of interest in a brain is a dyad – two nodes (neurons or brain regions) connected by an edge. While rarely mentioned, this fundamental assumption inherently limits the types of neural structure and function that graphs can be used to model. Here, we describe a generalization of graphs that overcomes these limitations, thereby offering a broad range of new possibilities in terms of modeling and measuring neural phenomena. Specifically, we explore the use of *simplicial complexes*: a structure developed in the field of mathematics known as algebraic topology, of increasing applicability to real data due to a rapidly growing computational toolset. We review the underlying mathematical formalism as well as the budding literature applying simplicial complexes to neural data, from electrophysiological recordings in animal models to hemodynamic fluctuations in humans. Based on the exceptional flexibility of the tools and recent ground-breaking insights into neural function, we posit that this framework has the potential to eclipse graph theory in unraveling the fundamental mysteries of cognition.

Keywords Networks · Topology · Simplicial complex · Filtration

The recent development of novel imaging techniques and the acquisition of massive collections of neural data make finding new approaches to understanding neural structure a vital undertaking. Network science is rapidly becoming an ubiquitous tool for understanding the structure of complex neural systems. Encoding relationships between objects of interest using graphs (Figs. 1a–b, 4a) enables the use of a bevy of well-developed tools for structural characterization as well as inference of dynamic behavior. Over the last decade, network models have demonstrated broad utility in uncovering fundamental architectural principles (Bassett and Bullmore 2006; Bullmore and Bassett 2011) and their implications for cognition (Medaglia et al. 2015) and disease (Stam 2014). Their use has led to the development of novel diagnostic biomarkers (Stam 2014) and conceptual cognitive frameworks (Sporns 2014) that illustrate a paradigm shift in systems, cognitive, and clinical neuroscience: namely, that brain function and alteration are inherently networked phenomena.

All graph-based models consist of a choice of *vertices*, which represent the objects of study, and a collection of *edges*, which encode the existence of a relationship between pairs of objects (Figs. 1a–b, 4a). However, in many real systems, such *dyadic* relationships fail to accurately capture the rich nature of the system's organization; indeed, even when the underlying structure of a system is known to be

Action Editor: Bard Ermentrout

Danielle S. Bassett
dsb@seas.upenn.edu

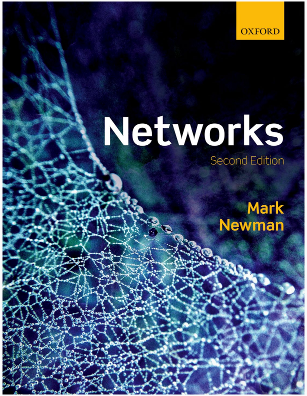
1 Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA

2 Department of Bioengineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA

3 Department of Electrical & Systems Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA

Aplicaciones de complejos simpliciales

Recientemente me enteré que el concepto de complejo simplicial, como generalización del de gráfica, ha encontrado varias aplicaciones.



J Comput Neurosci (2016) 41:1–14
DOI 10.1007/s10827-016-0608-6

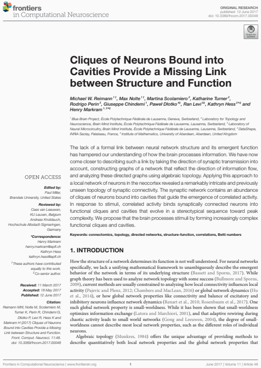
Two's company, three (or more) is a simplex

Algebraic-topological tools for understanding higher-order structure in neural data

Chad Giusti[1,2] · Robert Ghrist[1,3] · Danielle S. Bassett[2,3]

Received: 13 January 2016 / Revised: 25 March 2016 / Accepted: 16 May 2016 / Published online: 11 June 2016
© The Author(s) 2016. This article is published with open access at Springerlink.com

Keywords Networks · Topology · Simplicial complex · Filtration



frontiers in Computational Neuroscience

ORIGINAL RESEARCH

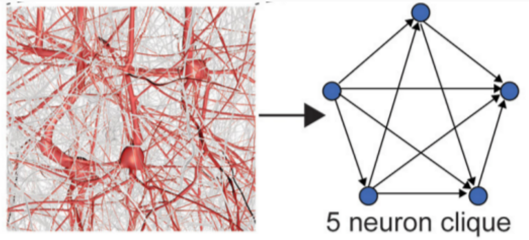
Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function

Keywords: connectomics, topology, directed networks, structure-function, correlations, Betti numbers

1. INTRODUCTION

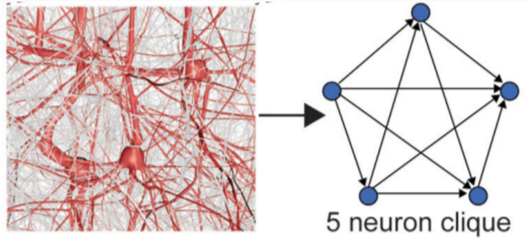
Complejos simpliciales de gráficas dirigidas

- En el artículo *Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function* los autores forman una gráfica dirigida D donde los vértices son neuronas, y las flechas representan actividad neuronal.



Complejos simpliciales de gráficas dirigidas

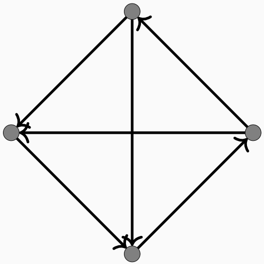
- En el artículo *Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function* los autores forman una gráfica dirigida D donde los vértices son neuronas, y las flechas representan actividad neuronal.

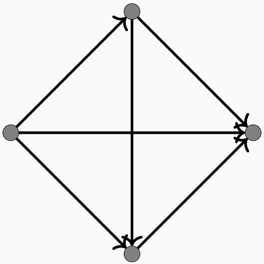


- Por simplicidad, supondremos que entre dos vértices dados de D existe cuando mucho una flecha.

Simplejos

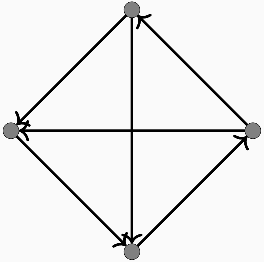
- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.

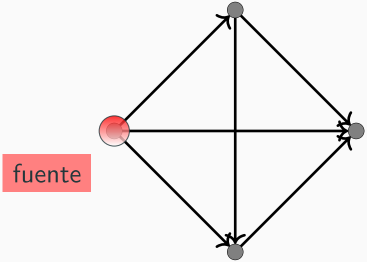




Simplejos

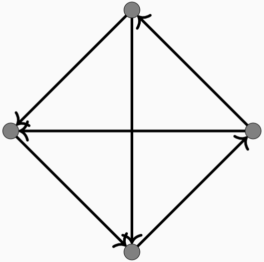
- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.

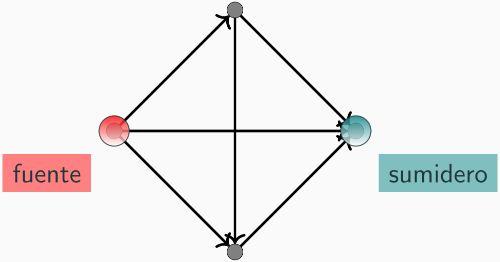




Simplejos

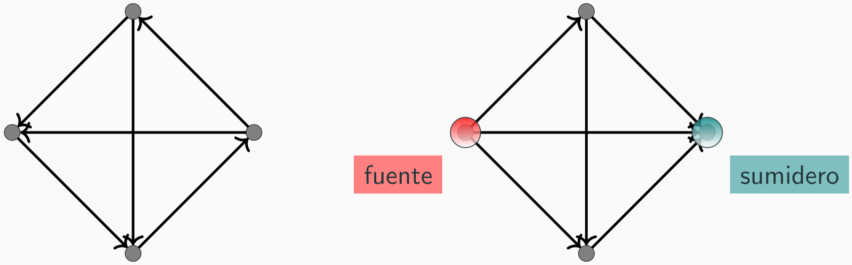
- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.





Simplejos

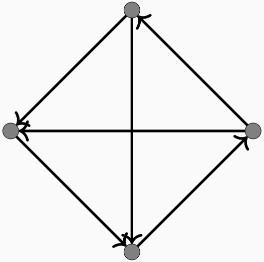
- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.

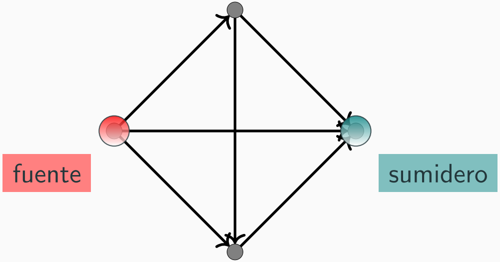


- Los autores entonces le llaman clan dirigido (*directed clique*) a los torneos acíciclos.

Simplejos

- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.





- Los autores entonces le llaman clan dirigido (*directed clique*) a los torneos acíciclos.
- Como cualquier subgráfica de un torneo acíclico induce un torneo acíclico, podemos definir un complejo simplicial $\Delta(D)$ como el complejo simplicial cuyos simplejos son los subconjuntos de vértices de D que inducen torneos acíclicos.

Resultados

Los autores estudiaron un modelo de una sección del cerebro de una rata. Y un modelo completo del gusano *Caenorhabditis Elegans.* Una de sus conclusiones es:

> *We found a remarkably high number and variety of high-dimensional directed cliques and cavities, which had not been seen before in neural networks, either biological or artificial, and in far greater numbers than those found in various null models of directed networks.*

Resultados

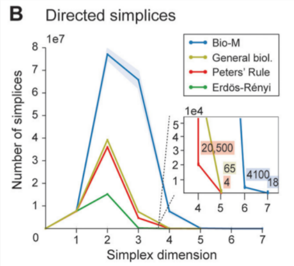
Los autores estudiaron un modelo de una sección del cerebro de una rata. Y un modelo completo del gusano *Caenorhabditis Elegans.* Una de sus conclusiones es:

> *We found a remarkably high number and variety of high-dimensional directed cliques and cavities, which had not been seen before in neural networks, either biological or artificial, and in far greater numbers than those found in various null models of directed networks.*

Resultados

Los autores estudiaron un modelo de una sección del cerebro de una rata. Y un modelo completo del gusano *Caenorhabditis Elegans.* Una de sus conclusiones es:

> *We found a remarkably high number and variety of high-dimensional directed cliques and cavities, which had not been seen before in neural networks, either biological or artificial, and in far greater numbers than those found in various null models of directed networks.*



Gracias

github.com/rvf0068/2021-coloquio-virtual

@rvf0068

rafaelv@uaeh.edu.mx