

Aplicaciones de la topología combinatoria

Rafael Villarroel Flores, UAEH

14 de marzo de 2021

XXXVI Coloquio Víctor Neumann-Lara



Teoría

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una forma inmediata de aplicar topología en combinatoria.

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una forma inmediata de aplicar topología en combinatoria.

Definición (Complejo simplicial)

Un **complejo simplicial** Δ es un conjunto de subconjuntos finitos de un conjunto X , cerrado bajo inclusión. Los elementos de Δ se llaman **simplejos** o **caras**.

Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales proporcionan una forma inmediata de aplicar topología en combinatoria.

Definición (Complejo simplicial)

Un **complejo simplicial** Δ es un conjunto de subconjuntos finitos de un conjunto X , cerrado bajo inclusión. Los elementos de Δ se llaman **simplejos** o **caras**.

Dimensión

Si $\sigma \in \Delta$ tiene $n + 1$ elementos, se dice que su **dimensión** es $\dim \sigma = n$.

Los simplejos de dimensión n se llaman n -simplejos, los 0-simplejos se llaman **vértices**.

Ejemplos

Consideremos los complejos Δ_1 y Δ_2 dados por:

$$\Delta_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

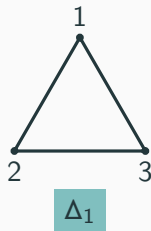
$$\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Ejemplos

Consideremos los complejos Δ_1 y Δ_2 dados por:

$$\Delta_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\{1, 2, 3\}\}.$$

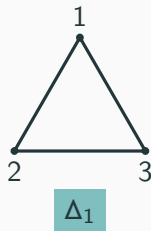


Ejemplos

Consideremos los complejos Δ_1 y Δ_2 dados por:

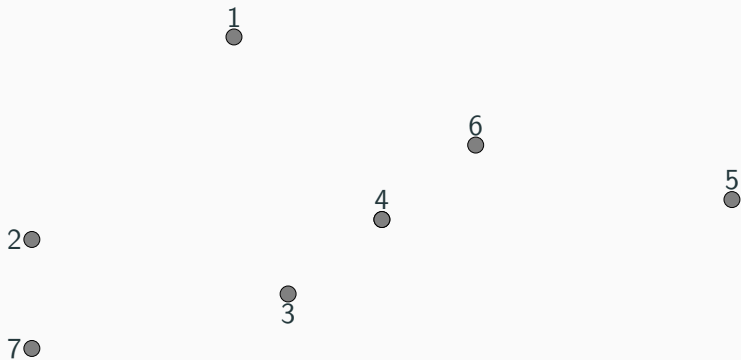
$$\Delta_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cup \{\{1, 2, 3\}\}.$$



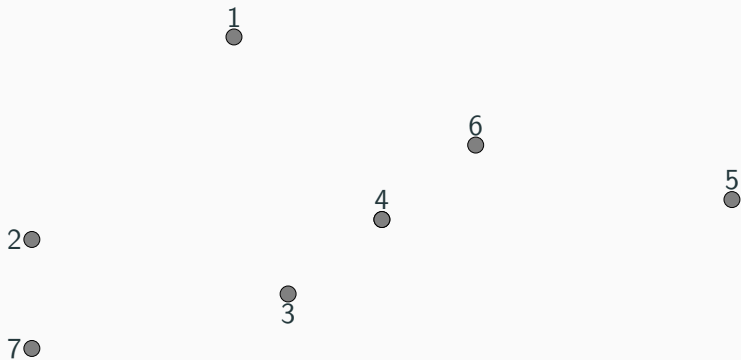
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



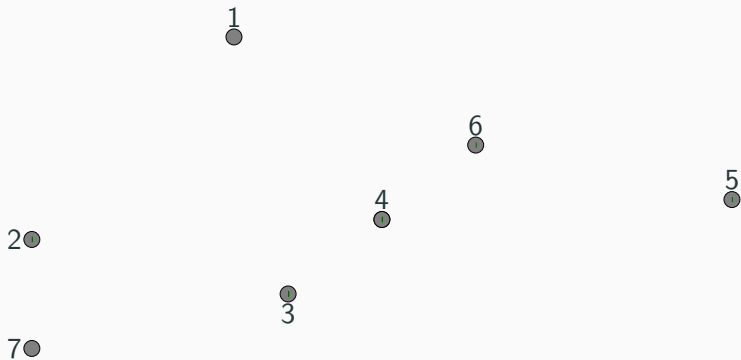
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



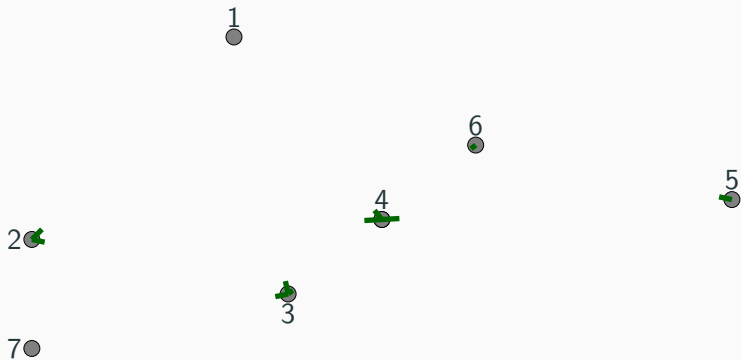
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



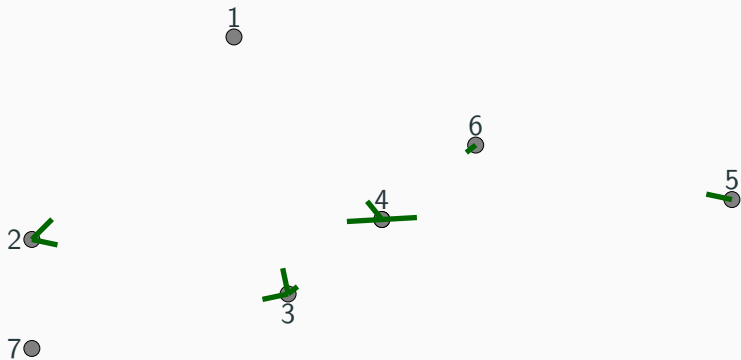
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



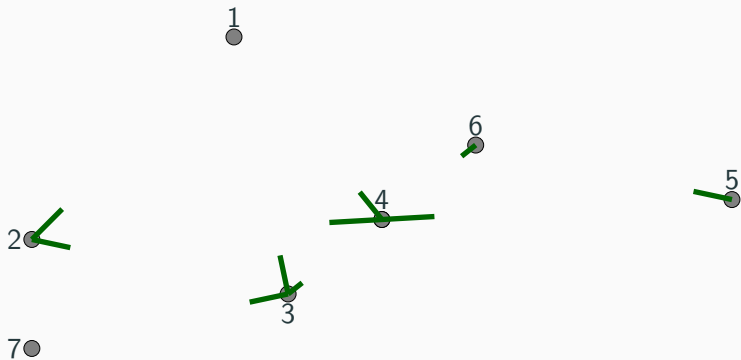
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



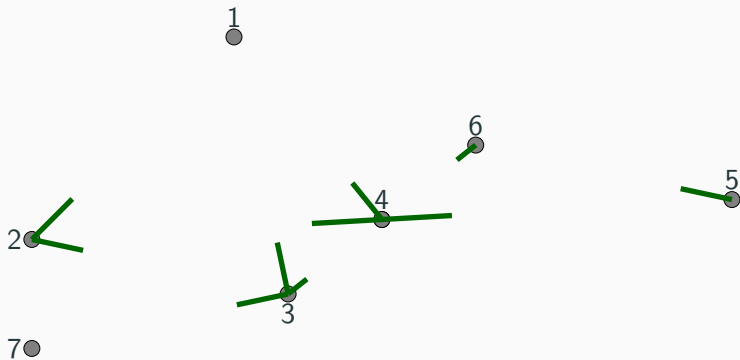
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



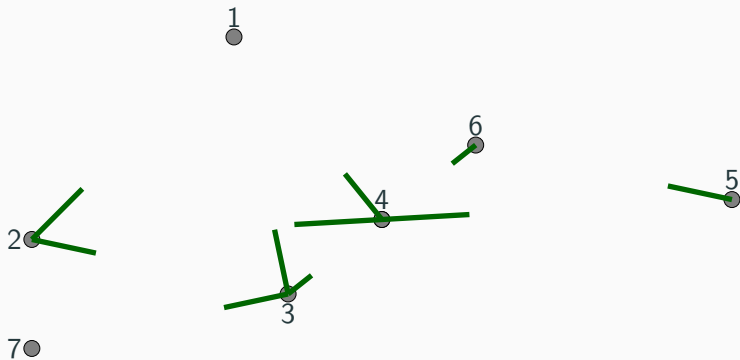
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



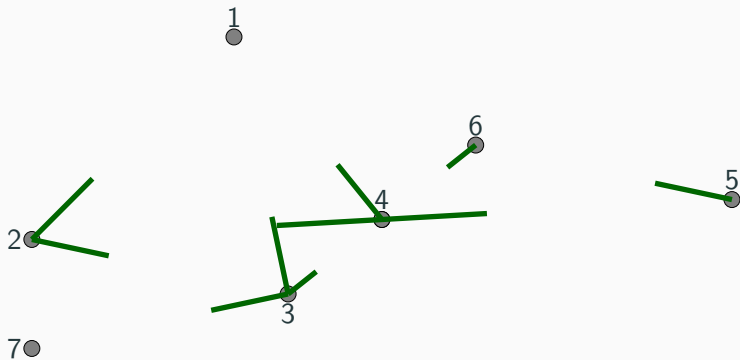
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



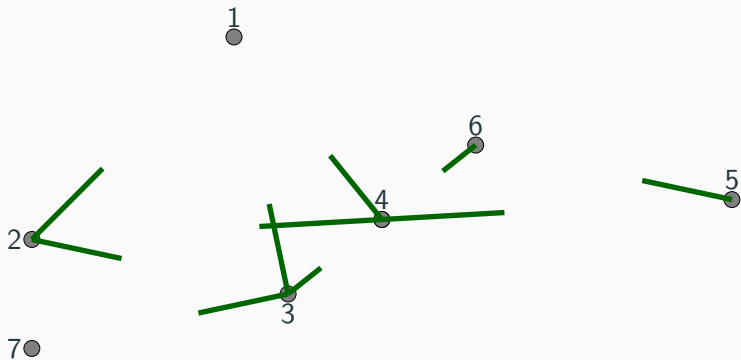
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



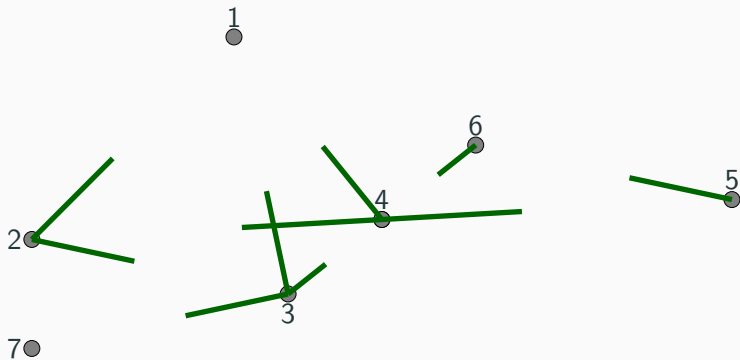
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



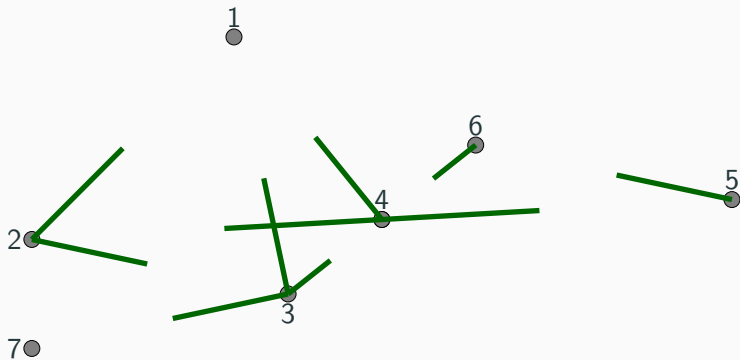
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



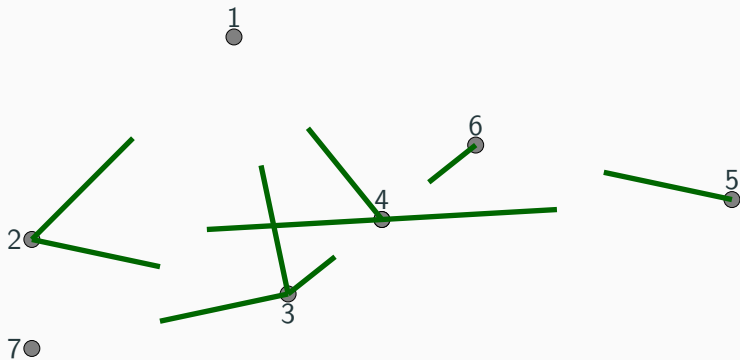
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



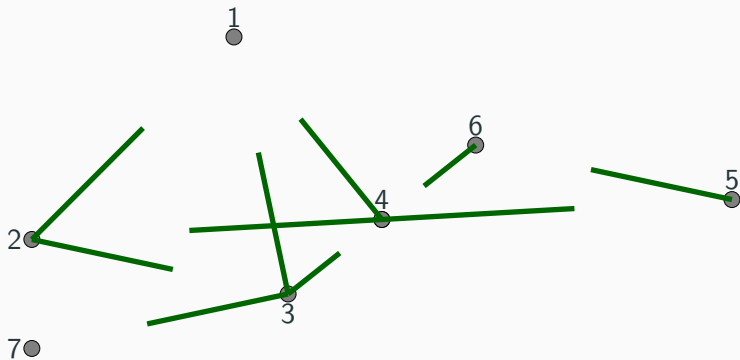
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



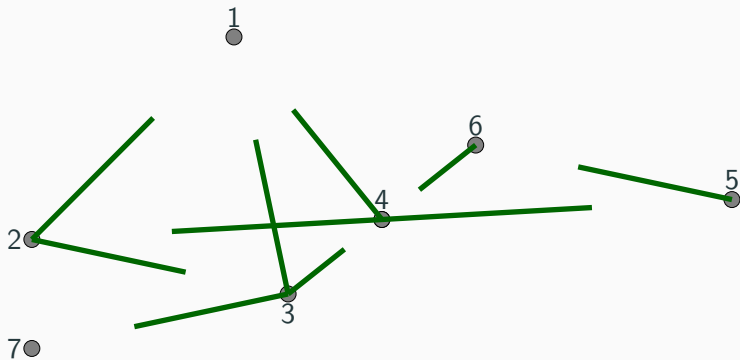
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



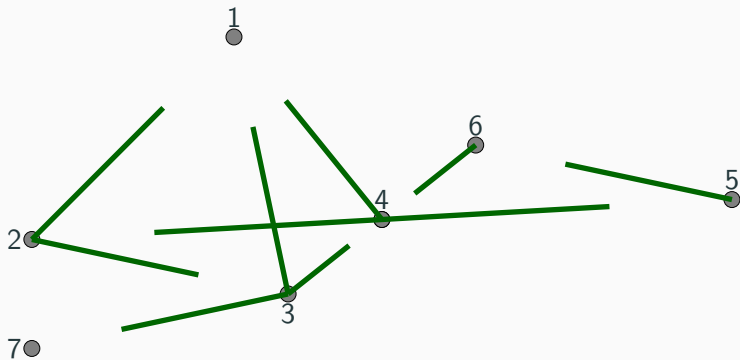
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



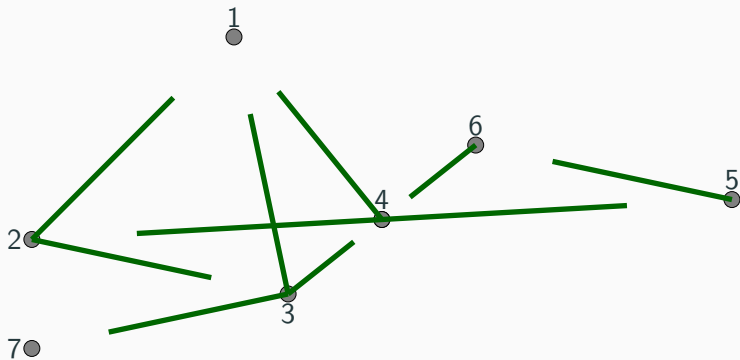
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



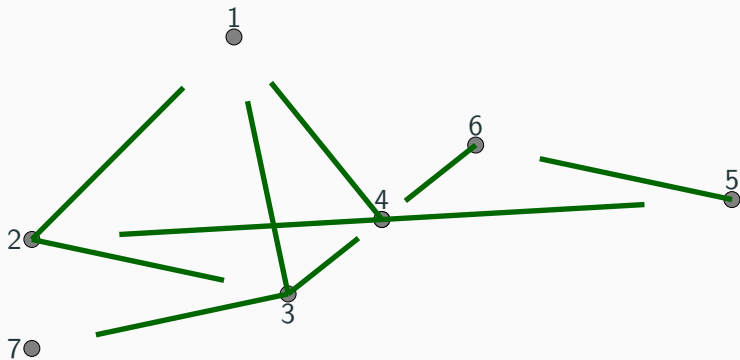
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



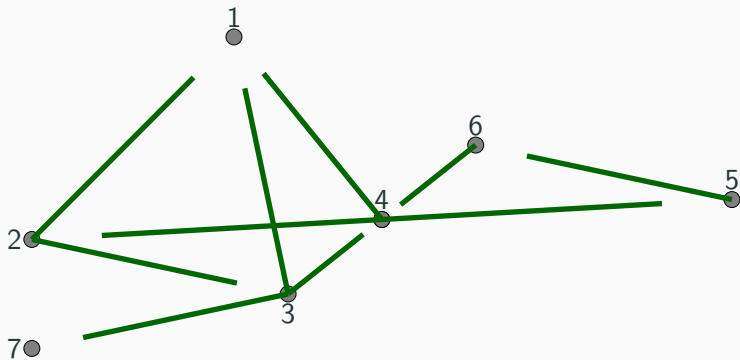
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



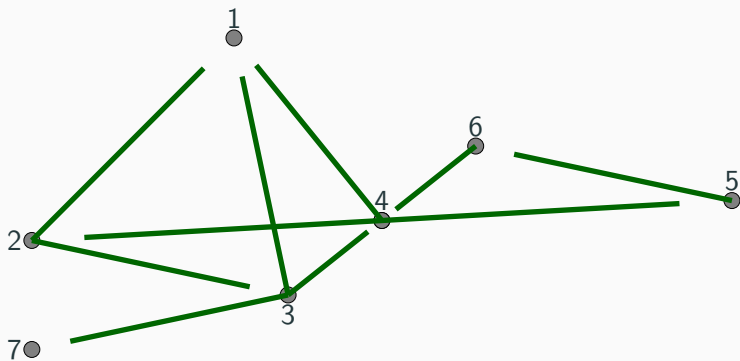
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



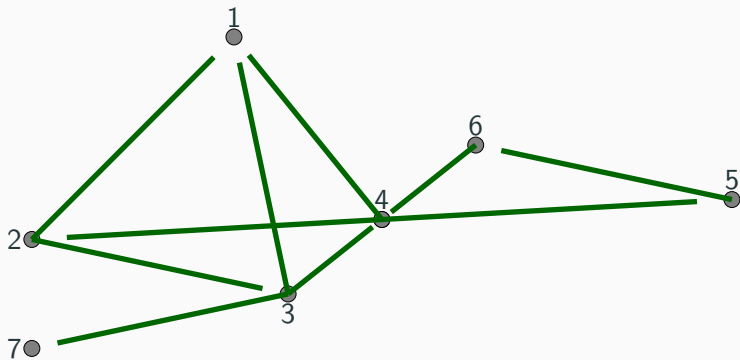
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



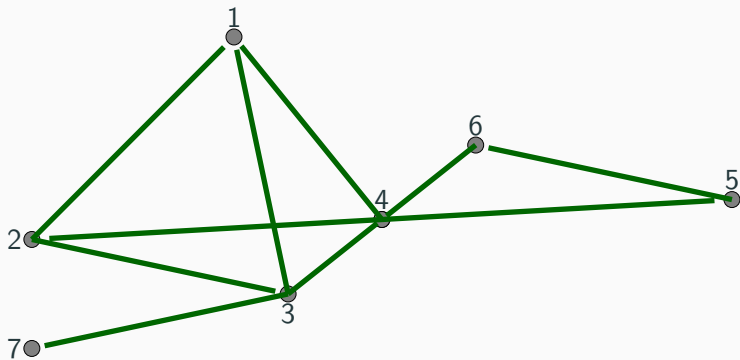
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



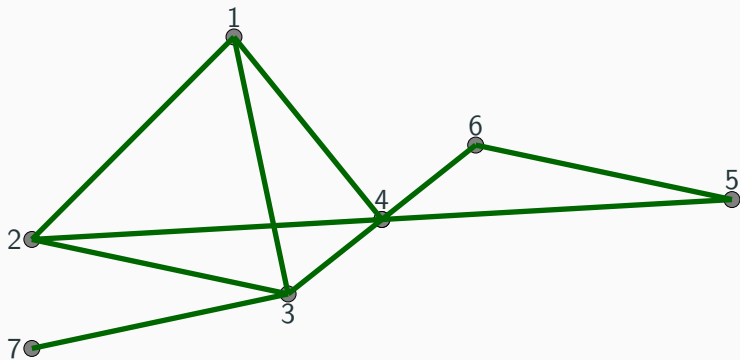
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



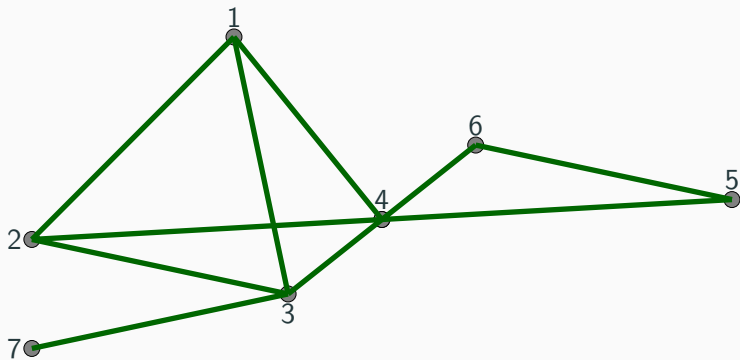
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



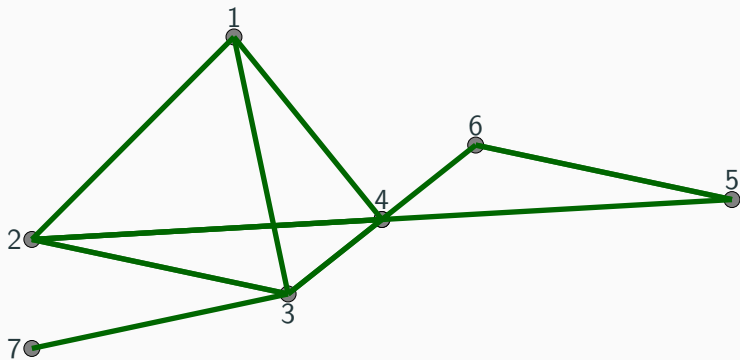
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



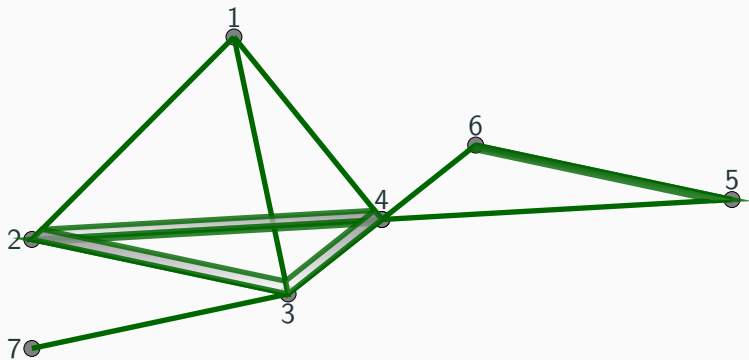
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



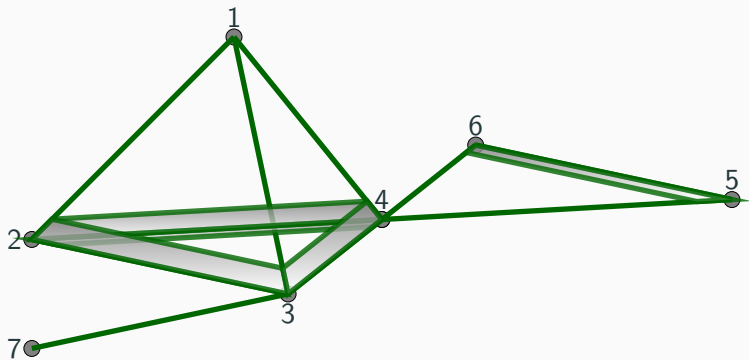
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



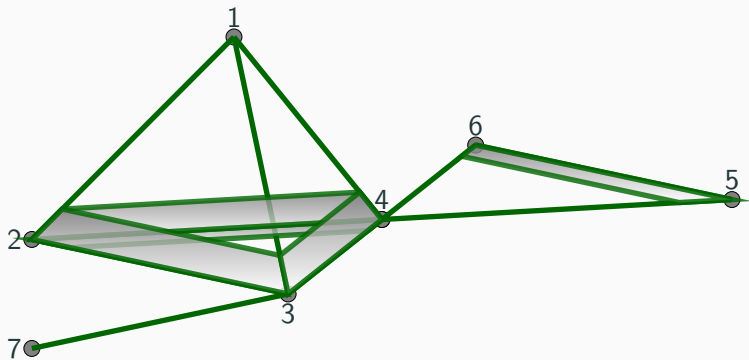
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



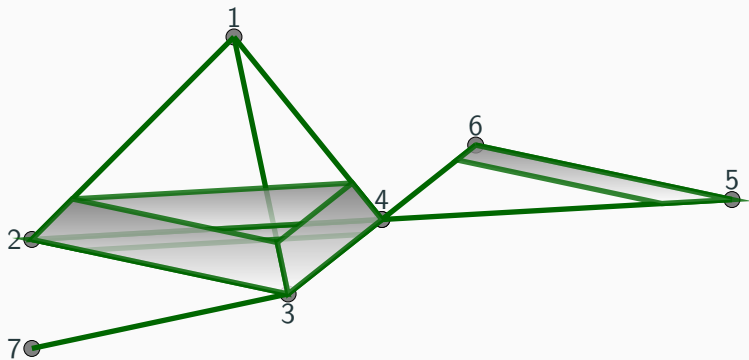
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



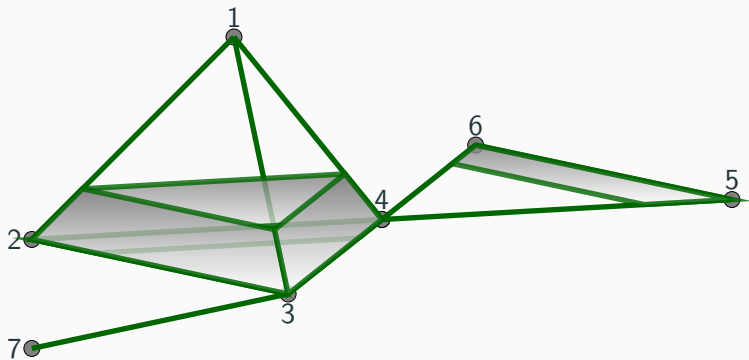
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



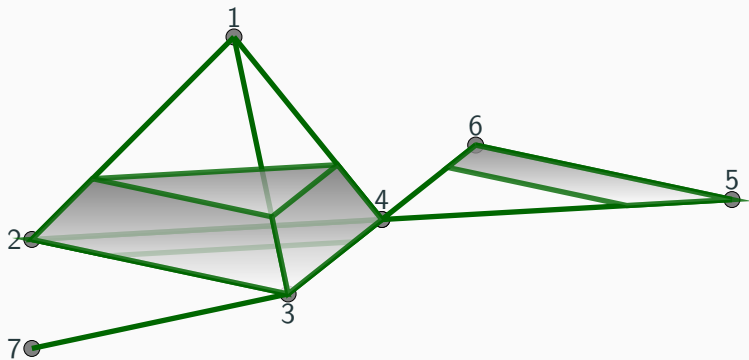
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



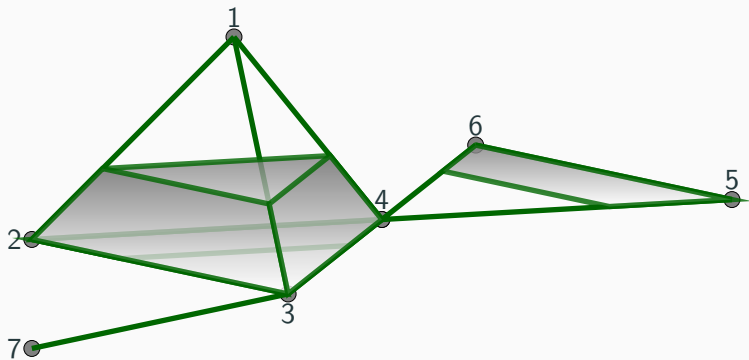
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



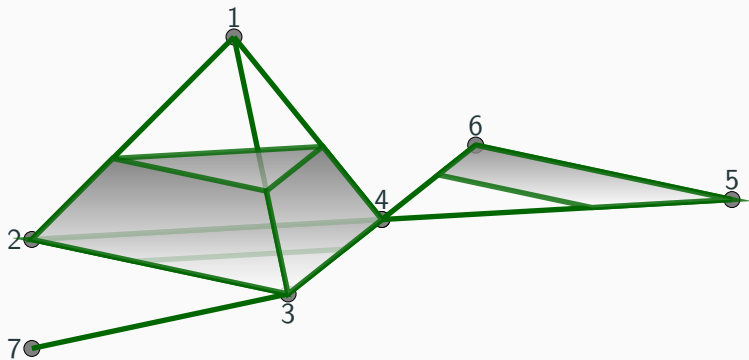
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



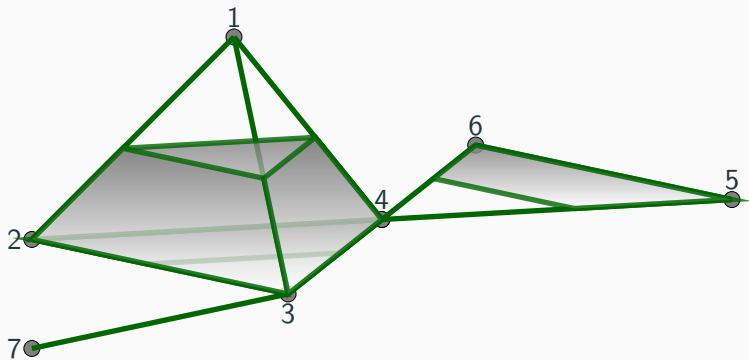
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



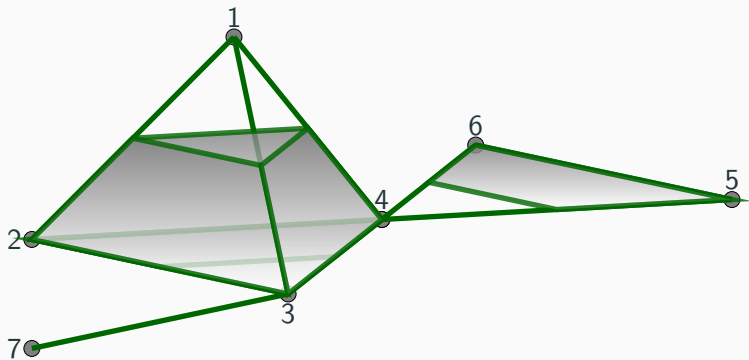
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



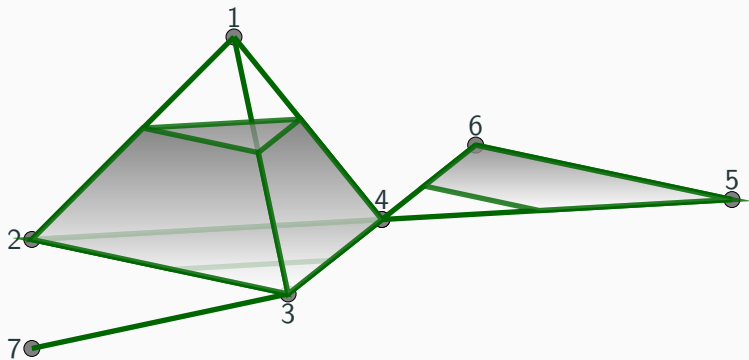
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



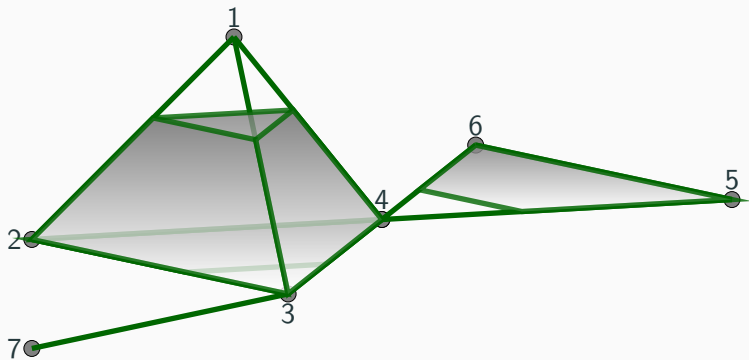
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



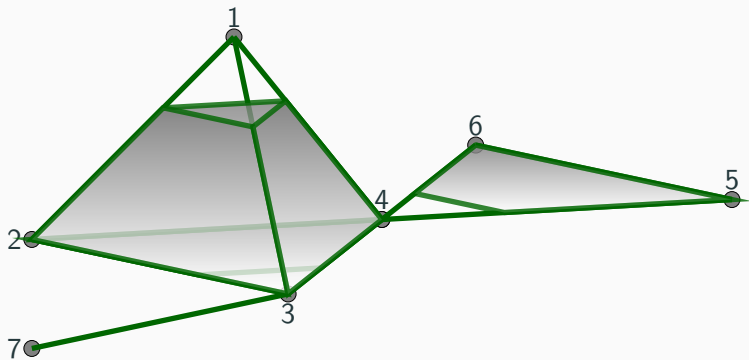
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



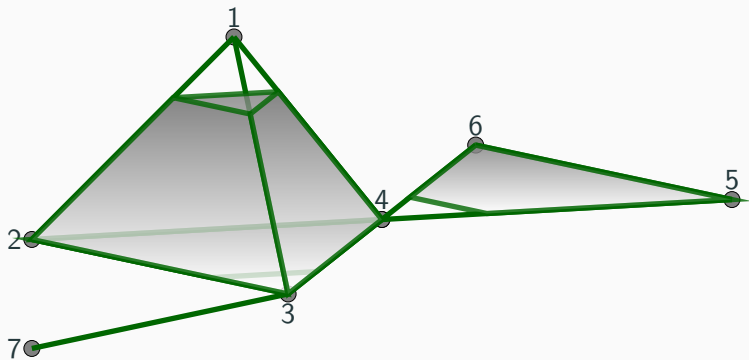
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



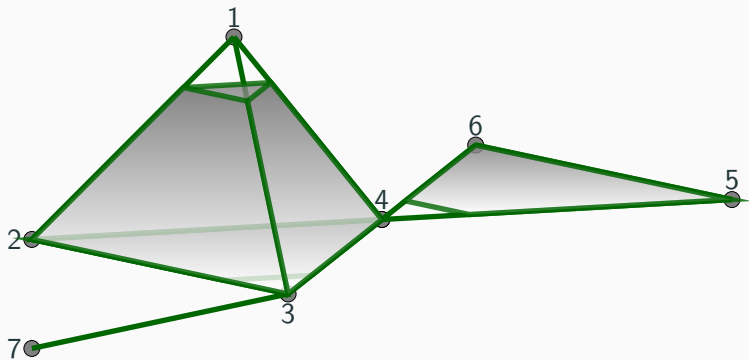
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



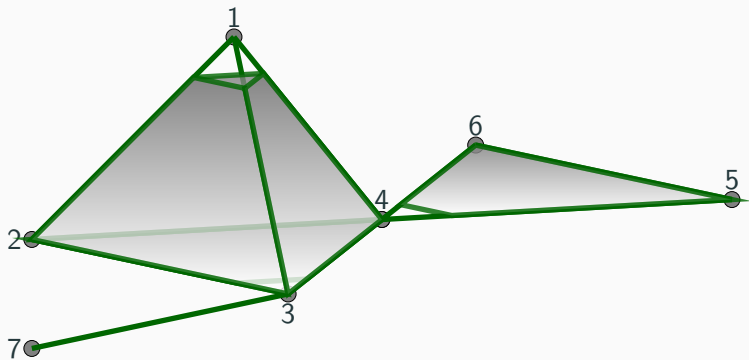
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



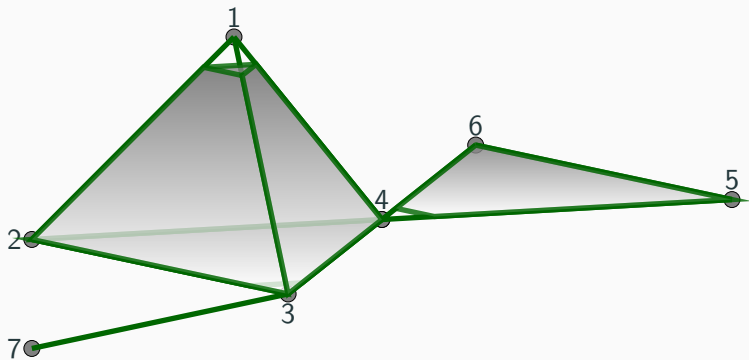
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



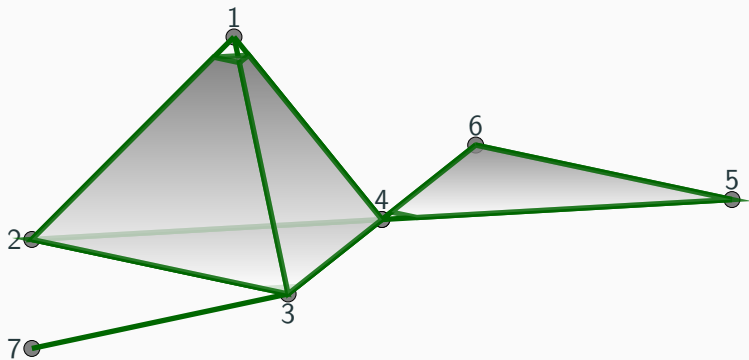
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



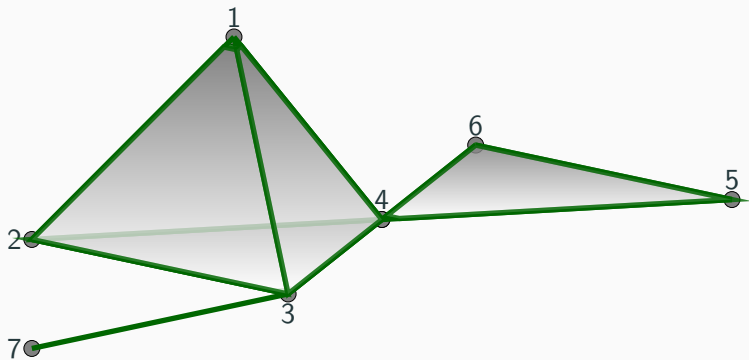
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



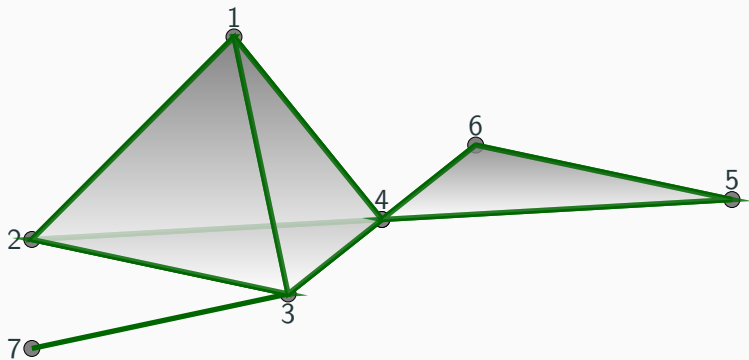
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



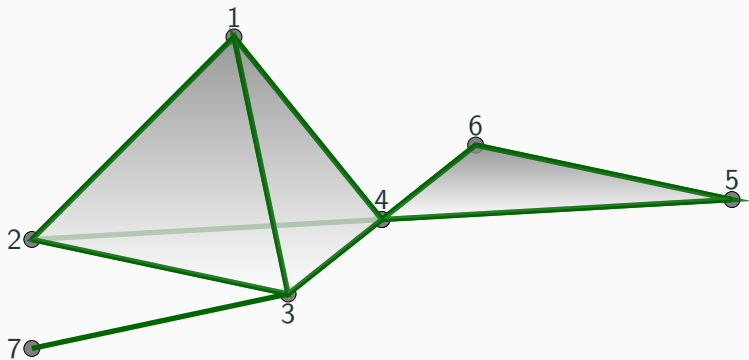
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



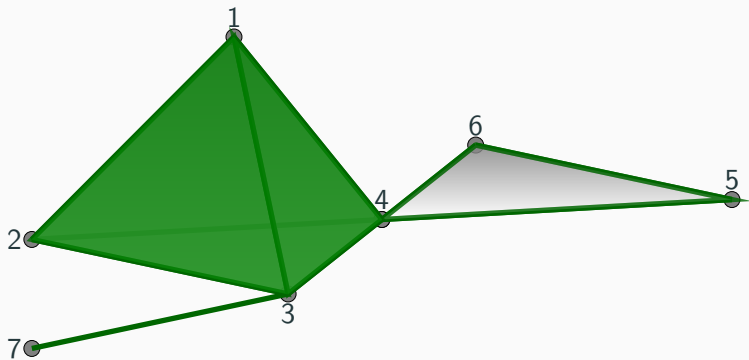
Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



Otro ejemplo

Consideremos el complejo simplicial con caras maximales $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{3, 7\}$



Espacio topológico asociado

- En general, a cualquier complejo simplicial se le asocia un espacio topológico, llamado su **realización geométrica**.

Espacio topológico asociado

- En general, a cualquier complejo simplicial se le asocia un espacio topológico, llamado su **realización geométrica**.
- La realización geométrica es un **functor** de la categoría de complejos simpliciales a la categoría de espacios topológicos.

Complejos simpliciales en gráficas

- Un primer uso de los complejos simpliciales en combinatoria se dio en la prueba de Lovász (1978) de la conjetura de Kneser (1953):

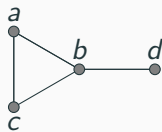
$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Complejos simpliciales en gráficas

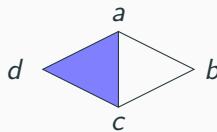
- Un primer uso de los complejos simpliciales en combinatoria se dio en la prueba de Lovász (1978) de la conjetura de Kneser (1953):

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

- Para demostrarlo, Lovász asoció a cada gráfica G su **complejo de vecindades** $\mathcal{N}(G)$, cuyo conjunto de simplejos son los conjuntos de vértices con un vecino común.



gráfica G



complejo $\mathcal{N}(G)$

El complejo de completas

Definición ($\Delta(G)$)

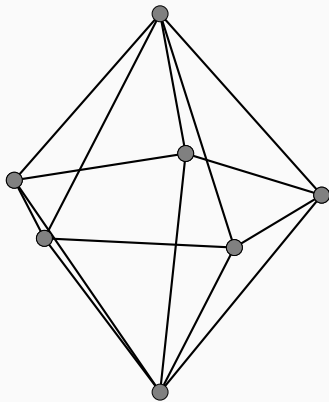
Dada una gráfica simple G , el complejo simplicial $\Delta(G)$ tiene como simplejos a las subgráficas completas de G .

Se usa $\Delta(G)$ para asociarle conceptos topológicos a las gráficas.

Por ejemplo, diremos que las gráficas G_1 , G_2 son homotópicas si $\Delta(G_1)$ es homotópico a $\Delta(G_2)$.

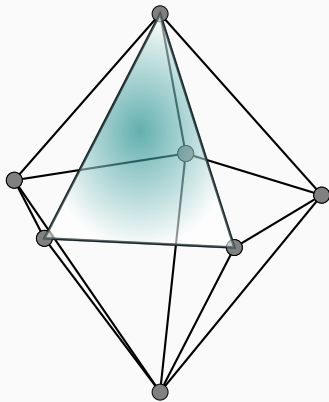
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



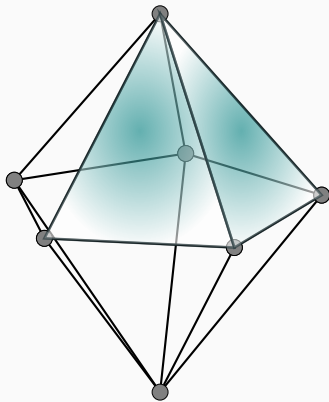
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



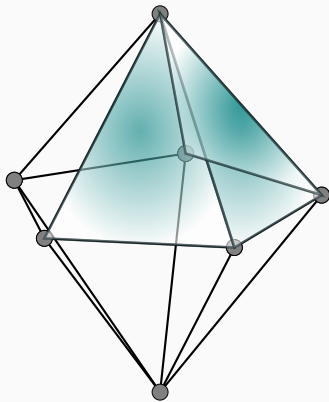
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



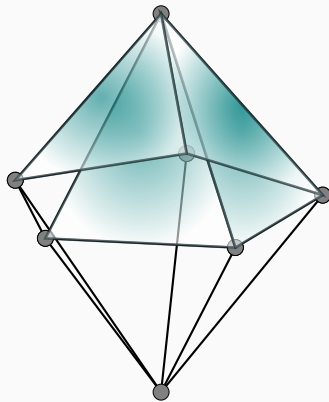
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



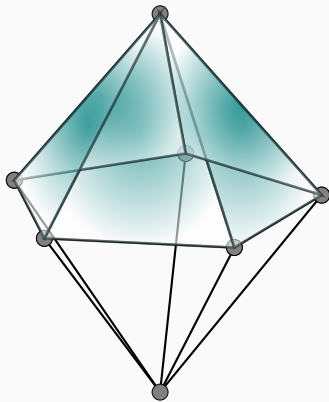
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



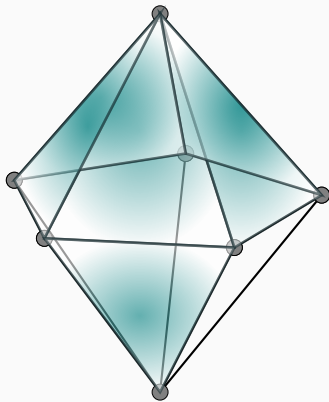
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



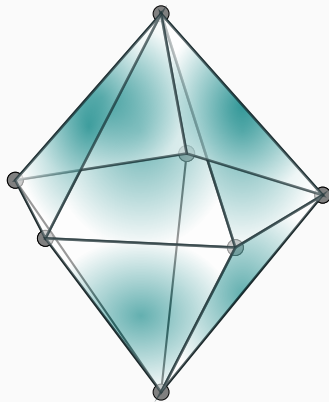
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



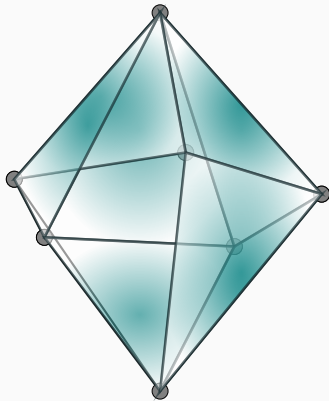
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



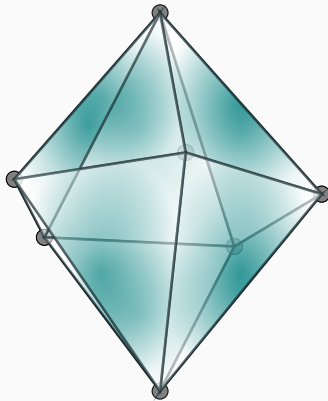
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



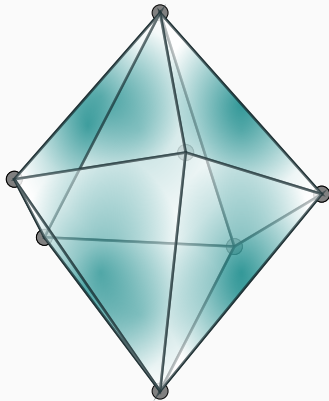
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :



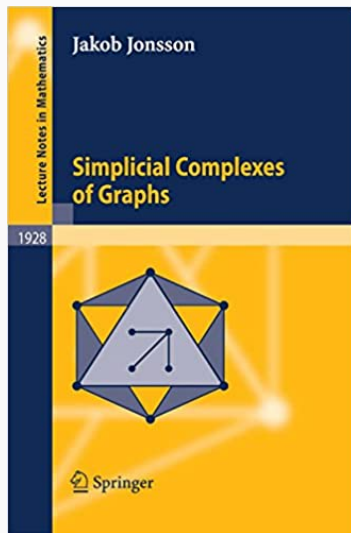
Ejemplo

Gráficas homeomorfa a la esfera S^2 :

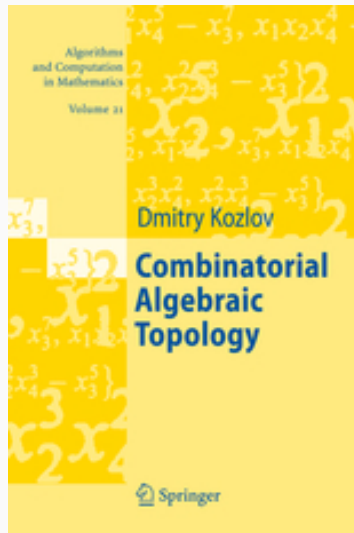
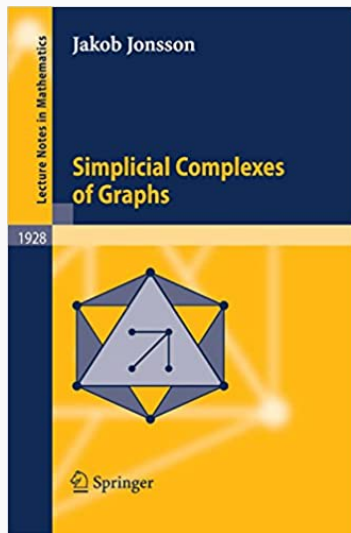


Muchos otros complejos simpliciales en combinatoria

Muchos otros complejos simpliciales en combinatoria



Muchos otros complejos simpliciales en combinatoria



En mi investigación, me han interesado preguntas sobre la relación entre la topología y el operador de clanes. Por ejemplo:

- (Bandelt-Prisner, 1991, Prisner 1992) Si G es desmantelable, o si G es clan-Helly entonces $G \simeq K(G)$.

En mi investigación, me han interesado preguntas sobre la relación entre la topología y el operador de clanes. Por ejemplo:

- (Bandelt-Prisner, 1991, Prisner 1992) Si G es desmantelable, o si G es clan-Helly entonces $G \simeq K(G)$.
- **Pregunta:** Si $K^n(G)$ es desmantelable o clan-Helly para alguna n , ¿se sigue que $G \simeq K(G) \simeq K^2(G) \simeq \dots \simeq K^n(G)$?

En mi investigación, me han interesado preguntas sobre la relación entre la topología y el operador de clanes. Por ejemplo:

- (Bandelt-Prisner, 1991, Prisner 1992) Si G es desmantelable, o si G es clan-Helly entonces $G \simeq K(G)$.
- **Pregunta:** Si $K^n(G)$ es desmantelable o clan-Helly para alguna n , ¿se sigue que $G \simeq K(G) \simeq K^2(G) \simeq \dots \simeq K^n(G)$?
- (Larrión, Pizaña, V., 2013) Para toda gráfica H existe una gráfica G tal que $G \simeq H$, con G clan-divergente.

En mi investigación, me han interesado preguntas sobre la relación entre la topología y el operador de clanes. Por ejemplo:

- (Bandelt-Prisner, 1991, Prisner 1992) Si G es desmantelable, o si G es clan-Helly entonces $G \simeq K(G)$.
- **Pregunta:** Si $K^n(G)$ es desmantelable o clan-Helly para alguna n , ¿se sigue que $G \simeq K(G) \simeq K^2(G) \simeq \dots \simeq K^n(G)$?
- (Larrión, Pizaña, V., 2013) Para toda gráfica H existe una gráfica G tal que $G \simeq H$, con G clan-divergente.
- **Pregunta:** ¿Existe una gráfica G tal que $G \simeq S^2$ y G sea clan-convergente?



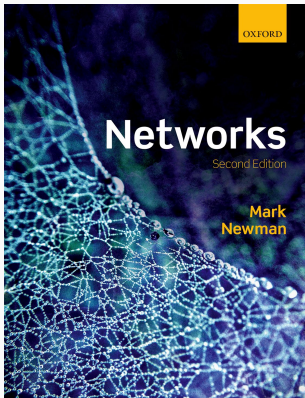
Aplicaciones

Aplicaciones de complejos simpliciales

Recientemente me enteré que el concepto de complejo simplicial, como [generalización](#) del de gráfica, ha encontrado varias aplicaciones.

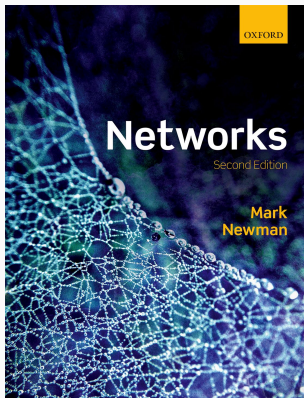
Aplicaciones de complejos simpliciales

Recientemente me enteré que el concepto de complejo simplicial, como **generalización** del de gráfica, ha encontrado varias aplicaciones.



Aplicaciones de complejos simpliciales

Recientemente me enteré que el concepto de complejo simplicial, como **generalización** del de gráfica, ha encontrado varias aplicaciones.



J Comput Neurosci (2016) 43:1–10
DOI 10.1007/s10827-016-0488-6



Two's company, three (or more) is a simplex Algebraic-topological tools for understanding higher-order structure in neural data

Chad Giusti^{1,2} · Robert Ghrist^{1,3} · Daniele S. Bassett^{1,3}

Received: 11 January 2016 / Revised: 20 March 2016 / Accepted: 16 May 2016 / Published online: 11 June 2016
© The Author(s) 2016. This article is published with open access at Springerlink.com

Abstract The language of graph theory, or network science, has proven to be an exceptional tool for addressing critical problems in neuroscience. Yet, the use of networks is predicated on a critical simplifying assumption: that the organizational state of interest lies between dyads—two nodes (neurons or brain regions) connected by an edge. While rarely mentioned, this fundamental assumption inherently limits the types of neural structure and function that graphs can be used to model. Here, we describe a generalization of graphs that overcomes these limitations, thereby offering a broad range of new possibilities in terms of modeling and measuring neural phenomena. Specifically, we explore the use of simplicial complexes, a structure developed in the field of mathematics known as algebraic topology, of increasing applicability to real data due to a rapidly growing computational toolbox. We review the underlying mathematical foundations as well as the leading literature applying simplicial complexes to neural data, from electrophysiological recordings in animal models to human brain functional fractionation in humans. Based on the exceptional flexibility of the

tools and recent ground-breaking insights into neural function, we posit that this framework has the potential to reshape graph theory in uncovering the fundamental properties of cognition.

Keywords Networks · Topology · Simplicial complex · Filtration

The recent development of neural imaging techniques and the acquisition of massive collections of neural data make finding new approaches to understanding neural structure a vital undertaking. Network science is rapidly becoming an ubiquitous tool for understanding the structure of complex neural systems, encoding relationships between objects of interest using graphs (Fig. 1a–b). It enables the use of a body of well-developed tools for structural characterization as well as inference of dynamic behavior. Over the last decade, network models have demonstrated broad utility in measuring fundamental architectural principles (Bassett and Bullmore 2006; Bullmore and Bassett 2011) and their implications for cognition (Mehdizadeh et al. 2015) and disease (Ghrist 2014). There are few but in the development of neural diagnostic biomarkers (Shen 2015) and conceptual cognitive frameworks (Oppen 2015) that illustrate a paradigm shift in systems, cognitive, and clinical neuroscience—namely, that brain function and structure are inherently networked phenomena.

All graph-based models consist of a choice of vertices, which represent the objects of study, and a collection of edges, which encode the existence of a relationship between pairs of objects (Fig. 1a–b, top). However, in many real systems, such dyadic relationships fail to accurately capture the rich nature of the system's organization, indeed, even when the underlying structure of a system is known to be

Active Editor Brief Communications

Chad Giusti · Robert Ghrist
chad@uconn-sprynet.org

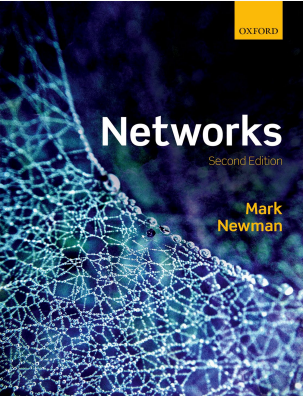
¹ Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19106, USA

² Department of Biocomputing, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA

³ Department of Electrical & Systems Engineering, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19106, USA

Aplicaciones de complejos simpliciales

Recientemente me enteré que el concepto de complejo simplicial, como **generalización** del de gráfica, ha encontrado varias aplicaciones.



Journal of the Royal Society Interface
DOI: 10.1098/rsif.2015.0188

Two's company, three (or more) is a simplex
Algebraic-topological tools for understanding higher-order structure in neural data

Chad Griesel^{1,2}, Robert Griesel^{1,2}, Daniele S. Bassett^{1,3}

Received: 11 January 2016 / Revised: 20 March 2016 / Accepted: 16 May 2016 / Published online: 11 June 2016
© The Author(s) 2016. This article is published with open access at Springerlink.com

Abstract The language of graph theory, as network science, has proven to be an exceptional tool for addressing critical problems in neuroscience. Yet, the use of networks is predicated on a critical simplifying assumption: that the representational unit of interest has been found—neurons (neurons or brain regions) connected by an edge. While rarely mentioned, this fundamental assumption inherently limits the types of neural structure and function that graphs can be used to model. Here, we describe a generalization of graphs that overcomes these limitations, thereby offering a broad range of new possibilities in terms of modeling and measuring neural phenomena. Specifically, we explore the use of simplicial complexes, a structure developed in the field of mathematics known as algebraic topology, of increasing applicability to real data due to its rapidly growing computational toolbox. We review the underlying mathematical foundations as well as the leading literature applying simplicial complexes to neural data, from electrophysiological recordings in animal models to human brain functional data in humans. Based on the exceptional flexibility of the tools and recent ground-breaking insights into neural function, we posit that this new framework has the potential to reshape graph theory in uncovering the fundamental properties of cognition.

Keywords Networks · Topology · Simplicial complex · Filtration

The recent development of neural imaging techniques and the acquisition of massive collections of neural data are finding new approaches to understanding neural structure. A vital underlying Network science is rapidly becoming an ubiquitous tool for understanding the structure of complex neural systems. Uncovering relationships between objects of interest using graphs (Fig. 1a–b, 4a) enables the use of a very well-developed toolbox for structural characterization as well as inference of dynamic behavior. Over the last decade, network models have demonstrated broad utility in measuring fundamental architectural principles (Bassett and Bullmore 2006; Bullmore and Bassett 2011) and their implications for cognition (Mikheyev et al. 2015) and disease (Guan 2014). There are few but in the development of neural diagnosis biomarkers (Shen 2015) and conceptual cognitive frameworks (Oprea 2015) that share a paradigm shift in systems, cognitive, and clinical neuroscience: namely, that brain function and structure are inherently networked phenomena.

All graph-based models consist of a choice of vertices, which represent the objects of study, and a collection of edges, which encode the existence of a relationship between pairs of objects (Fig. 1a–b, 4a). However, in many applications, such dyadic relationships fail to accurately capture the rich nature of the system's organization; indeed, even when the underlying structure of a system is known to be

ORIGINAL RESEARCH
published: 11 June 2016
doi: 10.3389/fnins.2016.00188

frontiers
in Computational Neuroscience

Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function

Michael W. Reisman^{1*}, Max Mittle^{1*}, Martina Scanziani², Katherine Turner³, Nicolas Pless⁴, Giuseppe Cincione⁵, Power Datta^{1,6}, Alan Lee^{1,7}, Kathryn Hess^{1,8} and Remy Marichaux^{1,9}

*These authors contributed equally to this work

¹Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
²Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
³Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁴Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁵Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁶Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁷Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁸Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁹Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA

frontiers
in Computational Neuroscience

Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function

Michael W. Reisman^{1*}, Max Mittle^{1*}, Martina Scanziani², Katherine Turner³, Nicolas Pless⁴, Giuseppe Cincione⁵, Power Datta^{1,6}, Alan Lee^{1,7}, Kathryn Hess^{1,8} and Remy Marichaux^{1,9}

*These authors contributed equally to this work

¹Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
²Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
³Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁴Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁵Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁶Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁷Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁸Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA
⁹Stanford University, Department of Neurobiology, Stanford, CA, USA

OPEN ACCESS

EDITED BY
Remy Marichaux, Stanford University, USA

REVIEWED BY
Chad Griesel, Stanford University, USA
Daniele S. Bassett, Stanford University, USA
Remy Marichaux, Stanford University, USA

***CORRESPONDENCE**
Michael W. Reisman, mreisman@stanford.edu
Max Mittle, mittle@stanford.edu

SPECIALTY SECTION
This article was submitted to Frontiers in Computational Neuroscience, a specialty of Frontiers in Neuroscience.

PUBLISHED BY
Frontiers in Computational Neuroscience, a specialty of Frontiers in Neuroscience.

RECEIVED
11 January 2016
ACCEPTED
20 March 2016
PUBLISHED
11 June 2016

CITATION
Reisman MW, Mittle M, Scanziani M, Turner K, Pless N, Cincione G, Datta P, Lee A, Hess K and Marichaux R (2016) Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function. *Front. Comput. Neurosci.* 10:188. doi: 10.3389/fnins.2016.00188

1. INTRODUCTION

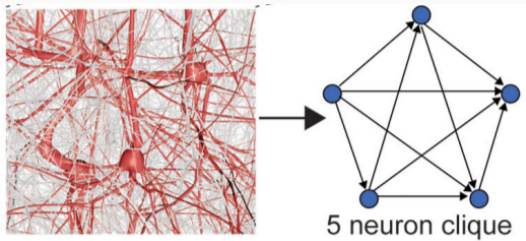
One of the most fundamental questions in neuroscience is how the structure of a network determines its function, and vice versa. For neural networks specifically, we lack a unifying mathematical framework to systematically describe the emergent properties of the network as a function of its underlying structure (Bassett and Sporns, 2015). While graph theory has been used to analyze network topology with some success (Bullmore and Sporns, 2009), recent methods are increasingly being used to analyze higher-order network properties, such as functional activity (Griesel and Bassett, 2015; Cincione and Scanziani, 2015) or global network dynamics (Griesel et al., 2015), or how global network properties like connectivity and balance of excitatory and inhibitory neurons influence network dynamics (Griesel et al., 2016; Scanziani et al., 2017). One such global network property is small-worldness. While it has been shown that small-worldness optimizes information storage (Latora and Marchiori, 2001), and that networks covering during chronic activity lead to small-world networks (Eving and Carrasco, 2014), the degree of small-worldness cannot describe most local network properties, such as the different roles of individual neurons.

Algebraic topology (Edwards, 1970) offers the unique advantage of providing methods to describe quantitatively both local network properties and the global network properties that



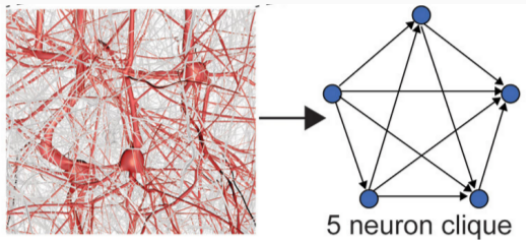
Complejos simpliciales de gráficas dirigidas

- En el artículo *Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function* los autores forman una gráfica dirigida D donde los vértices son neuronas, y las flechas representan actividad neuronal.



Complejos simpliciales de gráficas dirigidas

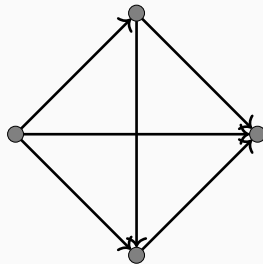
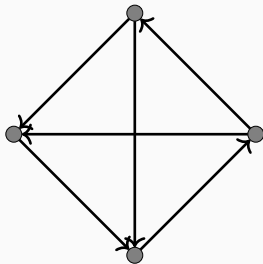
- En el artículo *Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function* los autores forman una gráfica dirigida D donde los vértices son neuronas, y las flechas representan actividad neuronal.



- Por simplicidad, supondremos que entre dos vértices dados de D existe cuando mucho una flecha.

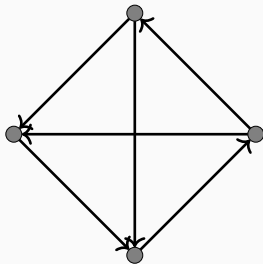
Simplejos

- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.

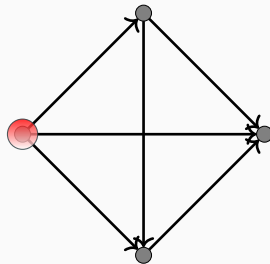


Simplejos

- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.

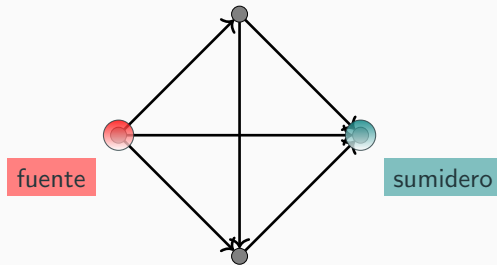
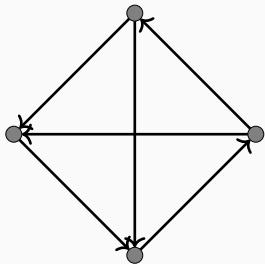


fuelle



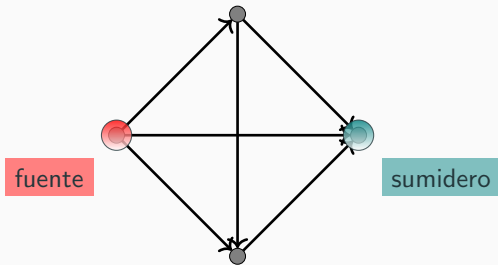
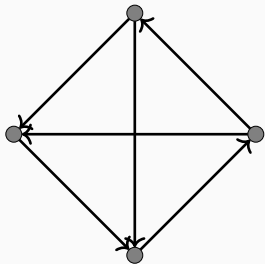
Simplejos

- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.



Simplejos

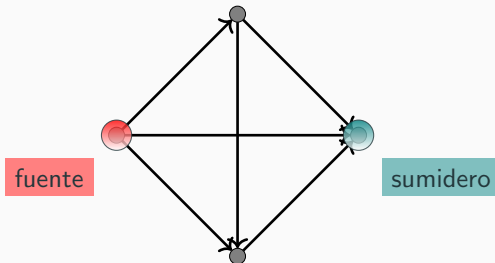
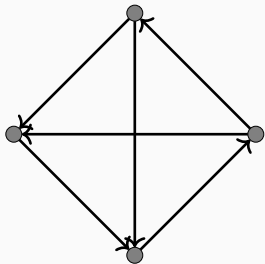
- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.



- Los autores entonces le llaman **clan dirigido** (*directed clique*) a los **torneos acíclicos**.

Simplejos

- Los autores muestran que entre todos los torneos de n vértices, los que tienen mayor *direccionalidad* son los acíclicos.



- Los autores entonces le llaman **clan dirigido** (*directed clique*) a los **torneos acíclicos**.
- Como cualquier subgráfica de un torneo acíclico induce un torneo acíclico, podemos definir un complejo simplicial $\Delta(D)$ como el complejo simplicial cuyos simplejos son los subconjuntos de vértices de D que inducen torneos acíclicos.

Resultados

Los autores estudiaron un modelo de una sección del cerebro de una rata. Y un modelo completo del gusano *Caenorhabditis Elegans*. Una de sus conclusiones es:

We found a remarkably high number and variety of high-dimensional directed cliques and cavities, which had not been seen before in neural networks, either biological or artificial, and in far greater numbers than those found in various null models of directed networks.

Resultados

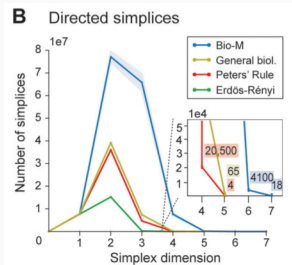
Los autores estudiaron un modelo de una sección del cerebro de una rata. Y un modelo completo del gusano *Caenorhabditis Elegans*. Una de sus conclusiones es:

We found a remarkably high number and variety of high-dimensional directed cliques and cavities, which had not been seen before in neural networks, either biological or artificial, and in far greater numbers than those found in various null models of directed networks.

Resultados

Los autores estudiaron un modelo de una sección del cerebro de una rata. Y un modelo completo del gusano *Caenorhabditis Elegans*. Una de sus conclusiones es:


We found a remarkably high number and variety of high-dimensional directed cliques and cavities, which had not been seen before in neural networks, either biological or artificial, and in far greater numbers than those found in various null models of directed networks.



Gracias

 `github.com/rvf0068/2021-coloquio-virtual`

 `@rvf0068`

 `rafaelv@uaeh.edu.mx`