Olimpiada de Matemáticas en Hidalgo
Problemas resueltos

Comité olímpico de Matemáticas en Hidalgo

26 de abril de 2012

Índice general

Introducción

En este libro se incluyen los exámentes aplicados en las olimpiadas estatales de matemáticas del estado de Hidalgo, desde 2007 a la fecha.

Capítulo 1

2007

Problema 1. Calcular el valor de

$$\sqrt{1+3+5+7+\cdots+2003+2005+2007}, \tag{1.1}$$

donde la suma dentro de la raíz cuadrada es la suma de todos los números impares del 1 al 2007.

Solución: La suma $1+3+\cdots+(2n-1)$ de los primeros n números impares es igual a n^2. Si $2n-1=2007$ entonces $n=1004$, por lo que la suma 1.1 vale 1004^2.

Problema 2. Encuentre el volumen de un cono truncado de altura 2, que tiene base inferior de radio 4 y base superior de radio 3 (ver la figura).

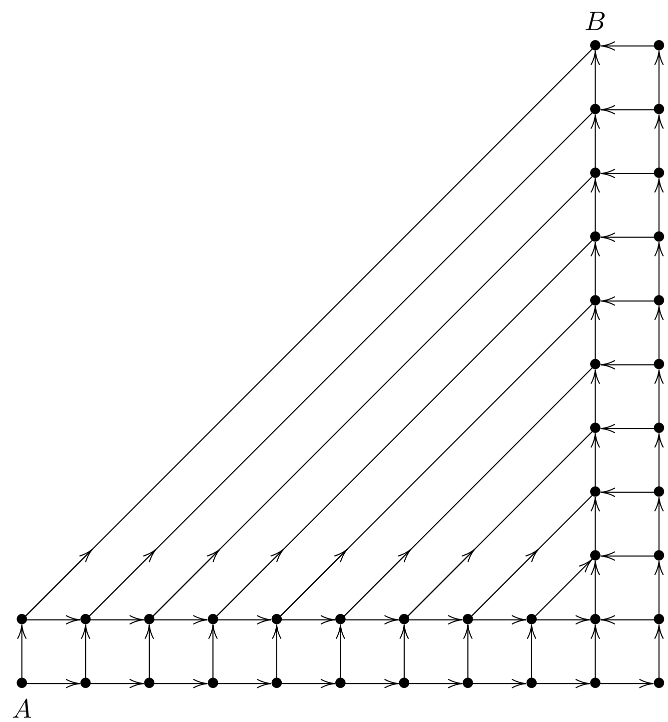
Solución: La fórmula de volumen del cono es

Problema 3. Considere un triángulo de lados a, b y c. Tome un punto P cualquiera en el interior del triángulo y desde este punto trace segmentos perpendiculares a cada uno de sus lados. Suponga que x, y y z son las longitudes de estos segmentos perpendiculares a los lados a, b y c, respectivamente. Demuestre que el área A del triángulo es igual a

$$A=\frac{1}{2}(ax+by+cz). \tag{1.2}$$

Solución:

Problema 4. Del siguiente diagrama calcule de cuantas maneras distintas se puede llegar del punto A al punto B, respetando las direcciones de las flechas.



Solución:

Problema 5. Considere la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 15ax + a^2 = 0. \tag{1.3}$$

Encuentre todos los valores de a de modo que las soluciones x_1 y x_2 de esta ecuación satisfacen

$$x_1^2 + x_2^2 = 2007. \tag{1.4}$$

Solución: Completando cuadrados en la ecuación (1.3) tenemos que

$$x^2 - 14ax + \left(\frac{15}{2}a\right)^2 = \frac{221}{4}a^2$$

de donde se sigue que

$$\left(x - \frac{15}{2}a\right)^2 = \frac{221}{4}a^2.$$

Despejando la variable x, se tiene que las soluciones de la ecuación están dadas por

$$x_1 = \frac{a}{2}(15 + \sqrt{221}) \qquad\qquad x_2 = \frac{a}{2}(15 - \sqrt{221}).$$

De esta forma, la ecuación (1.4) toma la forma

$$\frac{a^2}{4}\left[\left(15+\sqrt{221}\right)+\left(15-\sqrt{221}\right)\right]=2007.$$

Despejando a^2 y haciendo las operaciones aritméticas, se obtiene que $a^2 = 9$, de donde podemos concluir quedaron los valores posibles de a son 3 y -3.

Problema 6. ¿De cuántas maneras se pueden sacar 10 canicas de una bolsa que contiene 7 canicas rojas, 8 azules y 7 verdes, si una vez que se sacaron no importa en que orden quedaron?

Solución:

Capítulo 2

2008

Problema 1. Jorge Luis cortó un cuadrado de papel que tenía 20 cm de perímetro y obtuvo dos rectángulos. Si el perímetro de uno de los rectángulos es 16 cm ¿cuál es el perímetro del otro?

Solución: Cada lado del cuadrado mide 5 centímetros. Para obtener dos rectángulos hay que hacer el corte de forma paralela a uno de los lados (ver figura). Notemos que, no importando dónde se haga ese corte, la suma de los perímetros de los rectángulos es siempre igual a 28: en efecto, los lados exteriores coinciden con los lados del cuadrado (20 cms), mientras que el lado interior de 4 cms (sobre el corte) hay que sumarlo dos veces, una por cada rectángulo. Concluimos que el perímetro del otro rectángulo tiene que ser igual a 12.

Problema 2. Un granjero descubre que si cuenta sus ovejas de dos en dos, o de tres en tres, o de cuatro en cuatro o de cinco en cinco, siempre le sobra una. Si el granjero tiene menos de cien ovejas y más de una, ¿cuántas ovejas tiene el granjero?

Solución: Veamos que al contarlas de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro o de cinco en cinco, siempre le sobra una, por lo tanto si quitamos una oveja, al contarlas nunca le sobrará una, es decir, se puede contar en grupos de dos, tres, cuatro o cinco sin que sobre alguna oveja, entonces el número de ovejas debe ser un número que sea múltiplo de dos, tres, cuatro o cinco, pero los únicos números que son múliplos de ellos son los múltiplos de sesenta.

Ahora como quitamos una oveja, en vez de tener más de una oveja debe tener más de cero ovejas (ya que no se considera la oveja que se quitó) y en lugar de tener menos de cien ovejas debe tener menos de noventa y nueve ovejas, pero el único múltiplo de sesenta entre cero y noventa y nueve es el número sesenta, por lo tanto el granjero tiene sesenta y un ovejas, recordando que no contábamos a una oveja.

Problema 3. Denotemos por $f(n)$ la suma de los divisores positivos de un numero natural n. Por ejemplo, si $n = 6$ tenemos que los divisores de 6 son 1,2,3 y 6, que sumados dan $f(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. Encuentra el valor de $f(n)$ más pequeño entre todas las n mayores o iguales a 2008.

Solución:

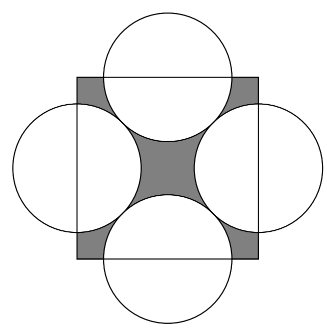
Problema 4. De una lista de 8 números naturales consecutivos, se borra uno de los números. La suma de los números que quedaron después de borrar es igual a 2008 ¿Cuál es el número borrado?

Solución:

Problema 5. Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. De cada subconjunto de 7 elementos de A se toma el número mayor ¿Cuál es la suma de todos estos números mayores?

Solución:

Problema 6. Considera un cuadrado cuyo lado tiene longitud 2 y cuatro círculos del mismo radio con centros respectivos en los puntos medios del cuadrado, de tal modo que los círculos correspondientes a lados adyacentes son tangentes. Encontrar el área de la región dentro del cuadrado y fuera de los círculos. Es decir, en la figura siguiente, se pide hallar el área de la región sombreada.



Capítulo 3

2009

Problema 1. Tenemos 120 esferas navideñas idénticas metidas en cajitas del mismo tamaño. Cada cajita contiene el mismo número de esferas y el número de esferas en cada cajita supera en 2 al número de cajitas. ¿Cuántas cajitas hay y cuántas esferas hay dentro de cada cajita?

Solución:

Problema 2. Suponga que $n \geq 1$ es un número natural. Suponga que $n+1$ puede escribirse como la suma de los cuadrados de dos números consecutivos, es decir, $n+1 = m^2 + (m+1)^2$ para algún número natural m. Demuestre que $\sqrt{2n+1}$ es un número entero impar.

Solución:

Problema 3. En un triángulo rectángulo con catetos de longitud a y b está inscrito un cuadrado de tal manera que el cuadrado y el triángulo comparten el ángulo recto y un vértice del cuadrado está sobre la hipotenusa. Hallar el perímetro del cuadrado.

Solución:

Problema 4. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden dar 100 pesos en cambio utilizando únicamente monedas de 10 pesos, 5 pesos y 1 peso?

Solución:

Problema 5. En una fiesta cada persona saludó a exactamente otras tres personas.

- Explique por qué es imposible que a la fiesta hayan asistido exactamente 2009 personas.

- Si hubo en total 123 saludos, ¿cuántas personas asistieron a la fiesta?

Solución: La primera observación es que todo saludo es recíproco, es decir, si Juan saluda a Pedro, también Pedro saluda a Juan. Entonces ya que asistieron 2009 personas, cada una saludó exactamente a tres personas, pero podemos ver que cada saludo es contado dos veces, retomando el ejemplo anterior, es contado una vez cuando Juan saluda a Pedro y una segunda vez cuando Pedro saluda a Juan, debido a que son el mismo caso, tenemos que dividir el número de saludos entre dos, por lo que debería haber $\frac{2009\times 3}{2} = 3013{,}5$ lo cual no es posible ya que el número de saludos tiene que ser un número entero.

Ahora para el segundo inciso, realizaremos un razonamiento similar, si el total de saludos es 123, al multiplicar por dos éste número debería ser igual al número de personas multiplicado por tres, retomando lo que se aplicó para resolver el inciso anterior, por lo tanto $123 \times 2 = 246$ debe ser el triple de las personas que asistieron a la fiesta, por lo que hay $\frac{246}{3} = 82$ personas, lo que se puede comprobar realizando el mismo proceso que en el inciso anterior para encontrar el número de saludos conociendo el número de personas.

Problema 6. En una granja hay un granero cuadrangular de 20 metros de lado. Una vaca está atada a una de las paredes del granero, a 5 metros de una esquina, con una soga de 10 metros de longitud. Calcule la superficie total sobre la cual la vaca puede pastar (la vaca sólo puede pastar fuera del granero).

Solución:

Capítulo 4

2010

Capítulo 5

2011

Capítulo 6

2012