Olimpiada de Matemáticas en Hidalgo
Problemas resueltos

Comité olímpico de Matemáticas en Hidalgo

3 de febrero de 2013

II

Índice general

Introducción

En este libro se incluyen los exámentes aplicados en las olimpiadas estatales de matemáticas del estado de Hidalgo, desde 2007 a la fecha.

Capítulo 1

2007

Problema 1. Calcular el valor de

$$\sqrt{1+3+5+7+\cdots+2003+2005+2007}, \tag{1.1}$$

donde la suma dentro de la raíz cuadrada es la suma de todos los números impares del 1 al 2007.

Solución: La suma $1+3+\cdots+(2n-1)$ de los primeros n números impares es igual a n^2. Si $2n-1=2007$ entonces $n=1004$, por lo que la suma 1.1 vale 1004^2.

Problema 2. Encuentre el volumen de un cono truncado de altura 2, que tiene base inferior de radio 4 y base superior de radio 3 (ver la figura).

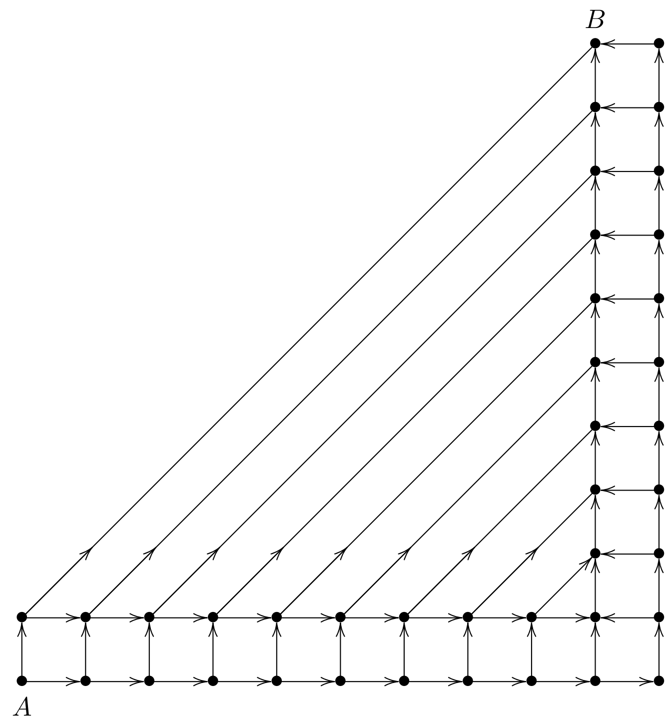
Solución: La fórmula de volumen del cono es

Problema 3. Considere un triángulo de lados a, b y c. Tome un punto P cualquiera en el interior del triángulo y desde este punto trace segmentos perpendiculares a cada uno de sus lados. Suponga que x, y y z son las longitudes de estos segmentos perpendiculares a los lados a, b y c, respectivamente. Demuestre que el área A del triángulo es igual a

$$A=\frac{1}{2}(ax+by+cz). \tag{1.2}$$

Solución:

Problema 4. Del siguiente diagrama calcule de cuantas maneras distintas se puede llegar del punto A al punto B, respetando las direcciones de las flechas.



Solución:

Problema 5. Considere la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 15ax + a^2 = 0. \tag{1.3}$$

Encuentre todos los valores de a de modo que las soluciones x_1 y x_2 de esta ecuación satisfacen

$$x_1^2 + x_2^2 = 2007. \tag{1.4}$$

Solución: Completando cuadrados en la ecuación (1.3) tenemos que

$$x^2 - 14ax + \left(\frac{15}{2}a\right)^2 = \frac{221}{4}a^2$$

de donde se sigue que

$$\left(x - \frac{15}{2}a\right)^2 = \frac{221}{4}a^2.$$

Despejando la variable x, se tiene que las soluciones de la ecuación están dadas por

$$x_1 = \frac{a}{2}(15 + \sqrt{221}) \qquad x_2 = \frac{a}{2}(15 - \sqrt{221}).$$

De esta forma, la ecuación (1.4) toma la forma

$$\frac{a^2}{4}\left[\left(15+\sqrt{221}\right)+\left(15-\sqrt{221}\right)\right]=2007.$$

Despejando a^2 y haciendo las operaciones aritméticas, se obtiene que $a^2 = 9$, de donde podemos concluir quedaron los valores posibles de a son 3 y -3.

Problema 6. ¿De cuántas maneras se pueden sacar 10 canicas de una bolsa que contiene 7 canicas rojas, 8 azules y 7 verdes, si una vez que se sacaron no importa en que orden quedaron?

Solución:

Capítulo 2

2008

Problema 1. Jorge Luis cortó un cuadrado de papel que tenía 20 cm de perímetro y obtuvo dos rectángulos. Si el perímetro de uno de los rectángulos es 16 cm ¿cuál es el perímetro del otro?

Solución: Cada lado del cuadrado mide 5 centímetros. Para obtener dos rectángulos hay que hacer el corte de forma paralela a uno de los lados (ver figura). Notemos que, no importando dónde se haga ese corte, la suma de los perímetros de los rectángulos es siempre igual a 28: en efecto, los lados exteriores coinciden con los lados del cuadrado (20 cms), mientras que el lado interior de 4 cms (sobre el corte) hay que sumarlo dos veces, una por cada rectángulo. Concluimos que el perímetro del otro rectángulo tiene que ser igual a 12.

Problema 2. Un granjero descubre que si cuenta sus ovejas de dos en dos, o de tres en tres, o de cuatro en cuatro o de cinco en cinco, siempre le sobra una. Si el granjero tiene menos de cien ovejas y más de una, ¿cuántas ovejas tiene el granjero?

Solución: Veamos que al contarlas de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro o de cinco en cinco, siempre le sobra una, por lo tanto si quitamos una oveja, al contarlas nunca le sobrará una, es decir, se puede contar en grupos de dos, tres, cuatro o cinco sin que sobre alguna oveja, entonces el número de ovejas debe ser un número que sea múltiplo de dos, tres, cuatro o cinco, pero los únicos números que son múliplos de ellos son los múltiplos de sesenta.

Ahora como quitamos una oveja, en vez de tener más de una oveja debe tener más de cero ovejas (ya que no se considera la oveja que se quitó) y en lugar de tener menos de cien ovejas debe tener menos de noventa y nueve ovejas, pero el único múltiplo de sesenta entre cero y noventa y nueve es el número sesenta, por lo tanto el granjero tiene sesenta y un ovejas, recordando que no contábamos a una oveja.

Problema 3. Denotemos por $f(n)$ la suma de los divisores positivos de un numero natural n. Por ejemplo, si $n = 6$ tenemos que los divisores de 6 son 1,2,3 y 6, que sumados dan $f(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. Encuentra el valor de $f(n)$ más pequeño entre todas las n mayores o iguales a 2008.

Solución:

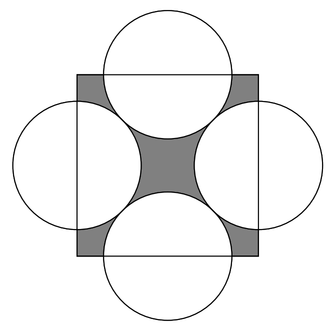
Problema 4. De una lista de 8 números naturales consecutivos, se borra uno de los números. La suma de los números que quedaron después de borrar es igual a 2008 ¿Cuál es el número borrado?

Solución:

Problema 5. Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. De cada subconjunto de 7 elementos de A se toma el número mayor ¿Cuál es la suma de todos estos números mayores?

Solución:

Problema 6. Considera un cuadrado cuyo lado tiene longitud 2 y cuatro círculos del mismo radio con centros respectivos en los puntos medios del cuadrado, de tal modo que los círculos correspondientes a lados adyacentes son tangentes. Encontrar el área de la región dentro del cuadrado y fuera de los círculos. Es decir, en la figura siguiente, se pide hallar el área de la región sombreada.



Capítulo 3

2009

Problema 1. Tenemos 120 esferas navideñas idénticas metidas en cajitas del mismo tamaño. Cada cajita contiene el mismo número de esferas y el número de esferas en cada cajita supera en 2 al número de cajitas. ¿Cuántas cajitas hay y cuántas esferas hay dentro de cada cajita?

Solución:

Problema 2. Suponga que $n \geq 1$ es un número natural. Suponga que $n+1$ puede escribirse como la suma de los cuadrados de dos números consecutivos, es decir, $n+1 = m^2 + (m+1)^2$ para algún número natural m. Demuestre que $\sqrt{2n+1}$ es un número entero impar.

Solución:

Problema 3. En un triángulo rectángulo con catetos de longitud a y b está inscrito un cuadrado de tal manera que el cuadrado y el triángulo comparten el ángulo recto y un vértice del cuadrado está sobre la hipotenusa. Hallar el perímetro del cuadrado.

Solución:

Problema 4. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden dar 100 pesos en cambio utilizando únicamente monedas de 10 pesos, 5 pesos y 1 peso?

Solución:

Problema 5. En una fiesta cada persona saludó a exactamente otras tres personas.

- Explique por qué es imposible que a la fiesta hayan asistido exactamente 2009 personas.
- Si hubo en total 123 saludos, ¿cuántas personas asistieron a la fiesta?

Solución: La primera observación es que todo saludo es recíproco, es decir, si Juan saluda a Pedro, también Pedro saluda a Juan. Entonces ya que asistieron 2009 personas, cada una saludó exactamente a tres personas, pero podemos ver que cada saludo es contado dos veces, retomando el ejemplo anterior, es contado una vez cuando Juan saluda a Pedro y una segunda vez cuando Pedro saluda a Juan, debido a que son el mismo caso, tenemos que dividir el número de saludos entre dos, por lo que debería haber $\frac{2009\times 3}{2} = 3013.5$ lo cual no es posible ya que el número de saludos tiene que ser un número entero.

Ahora para el segundo inciso, realizaremos un razonamiento similar, si el total de saludos es 123, al multiplicar por dos éste número debería ser igual al número de personas multiplicado por tres, retomando lo que se aplicó para resolver el inciso anterior, por lo tanto $123 \times 2 = 246$ debe ser el triple de las personas que asistieron a la fiesta, por lo que hay $\frac{246}{3} = 82$ personas, lo que se puede comprobar realizando el mismo proceso que en el inciso anterior para encontrar el número de saludos conociendo el número de personas.

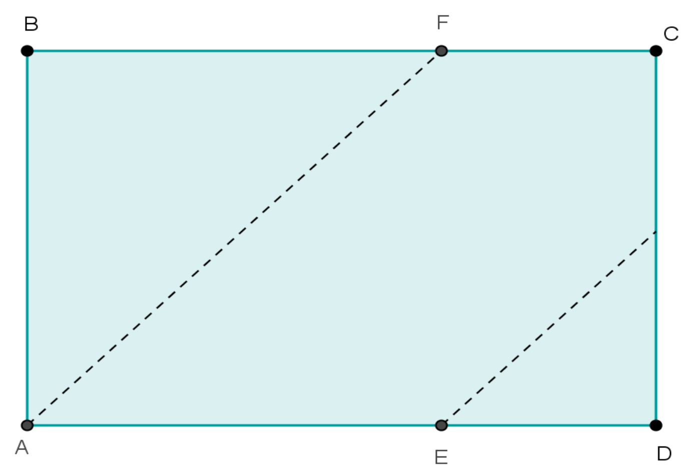
Problema 6. En una granja hay un granero cuadrangular de 20 metros de lado. Una vaca está atada a una de las paredes del granero, a 5 metros de una esquina, con una soga de 10 metros de longitud. Calcule la superficie total sobre la cual la vaca puede pastar (la vaca sólo puede pastar fuera del granero).

Solución:

Capítulo 4

2010

Problema 1. Se tiene una hoja de papel de forma rectangular con vértices $ABCD$ (ver figura). El lado de enfrente es azul y el de atrás blanco. Se toma la esquina B y se dobla la hoja a lo largo de la línea punteada AF de tal forma que el lado AB quede sobre el lado AD y la esquina B sobre el punto E. Luego se dobla la esquina D de forma que el segmento ED quede sobre el segmento EF. Si el lado AB mide 13 centímetros y el lado BC mide 19 centímetros, calcula el área azul que queda descubierta.



Solución:

Problema 2. Un granjero compró 100 animales por $420,000$ pesos. Compró vacas, borregos y cerdos. Cada vaca le costó $5,000$ pesos, cada borrego $4,000$ pesos y cada cerdo $3,000$ pesos. ¿De cuántas maneras distintas pudo haber comprado estos animales, si sabemos que compró al menos 10 de cada especie?

Solución:

Problema 3. Un científico ha inventado una máquina del tiempo. Esta máquina tiene la peculiaridad que solamente puede viajar en periodos de 1971 años hacia el futuro y 2010 años hacia el pasado. ¿Cuántos viajes hacia el futuro y cuántos viajes al pasado deben hacerse con esa máquina para avanzar exactamente 3 años al futuro?

Solución:

Problema 4. Juanita está intentando accesar una de sus cuentas de correo, pero olvidó su contraseña. Lo único que recuerda es que su contraseña es de 10 caracteres y estos son los mismos que los de la palabra MATEMATICA, pero no recuerda en qué orden. Por ejemplo, la contraseña podría ser CAAMETIAMT. ¿Cuántas diferentes posibilidades hay para su contraseña?

Solución:

Problema 5. Considera la suma

$$(1 \times 1!) + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \cdots + (2010 \times 2010!),$$

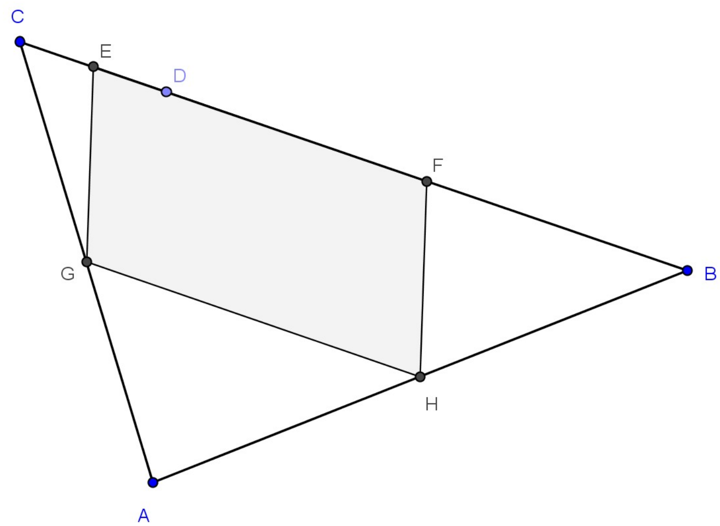
donde los puntos suspensivos representan los términos intermedios. Demuestra que la suma es igual a $k! - 1$ para algún entero positivo k y encuentra el valor de k.

El símbolo $n!$ significa el producto de los enteros positivos de 1 hasta n. Por ejemplo,

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Solución:

Problema 6. Considera el triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC. Sean E, F, G y H puntos medios de los segmentos CD, DB, AC y AB, respectivamente. Muestra que el cuadrilátero $EGHF$ es un paralelogramo y que su área es la mitad del área del triángulo ABC.



Solución:

Capítulo 5

2011

5.1. Primera parte

Problema 1. Cuando Esteban nació, su papá tenía 28 años. Si ahora Esteban tiene una tercio de la edad de su papá, ¿cuántos años tiene Esteban?

1. 7 2. 9 3. 14 4. 17 5. Ninguna de las anteriores

Solución:

Problema 2. En la terminal de autobuses de Xicotlán de las Flores sale un autobús de la Línea A cada 9 minutos a partir de las 6:00 AM, un autobús de la Línea B cada 13 minutos a partir de las 7:00 AM y un autobús de la Línea C cada 11 minutos a partir de las 8:00 AM. ¿Cuántos autobuses de las líneas A, B y C salen de la terminal desde las 6:00 AM y hasta las 5:00 PM?

1. 151 2. 154 3. 168 4. 171 5. Ninguna de las anteriores

Solución:

Problema 3. ¿ Cuáles son los dos últimos dígitos del número 2011^{2011} ?

1. 01 2. 11 3. 21 4. 91 5. Ninguna de las anteriores.

Solución:

Problema 4. Se escriben todos los números del 1 al 1000. ¿Cuántas veces aparece el dígito 5?

1. 100 2. 200 3. 300 4. 333 5. Ninguna de las anteriores.

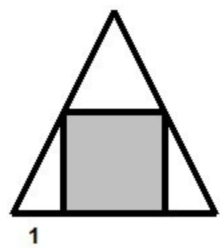
Solución:

Problema 5. Un torneo es de eliminación simple si cada partido se juega entre dos equipos y el equipo que pierde abandona el torneo. Si en un torneo de eliminación simple (en el que no se permiten los empates) participan 1024 equipos, ¿cuántos partidos se juegan para determinar al campeón?

1. 10 2. 11 3. 1023 4. 1024 5. Ninguna de las anteriores.

Solución:

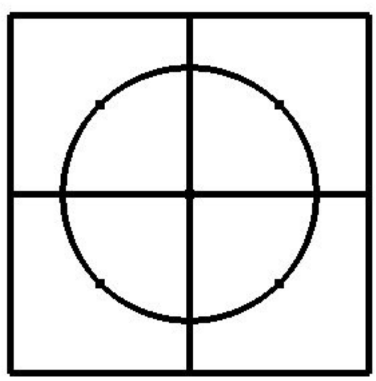
Problema 6. Un cuadrado de área 4 está inscrito en un triángulo isósceles como se muestra en la figura. La distancia de un vértice de la base del triángulo al vértice más próximo del cuadrado es 1. ¿Cuál es el área del triángulo más grande?



1. 8 2. 10 3. 16 4. 24 5. Ninguna de las anteriores.

Solución:

Problema 7. Un cuadrado de área 16 se divide en cuatro cuadrados iguales como se muestra en el dibujo. ¿Cuál es el área delimitada por la circunferencia que pasa por los centros de los cuatro cuadrados pequeños?



1. $\frac{\pi}{2}$ 2. π 3. 2π 4. π^2 5. Ninguna de las anteriores.

Solución:

Problema 8. ¿Cuántos números enteros mayores que 100 y menores que 1000 tienen la propiedad que la suma de sus dígitos es 13?

1. 39 2. 63 3. 69 4. 81 5. Ninguna de las anteriores.

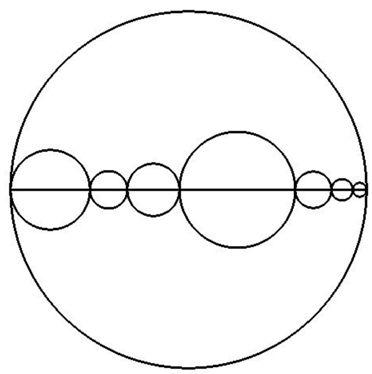
Solución:

Problema 9. En un bote hay 100 canicas de cada uno de 5 diferentes colores. Se extraen las canicas de una a una sin ver. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que se necesitan sacar para garantizar que hay al menos 10 de un mismo color?

1. 10 2. 11 3. 41 4. 55 5. Ninguna de las anteriores.

Solución:

Problema 10. En la siguiente figura los centros de las circunferencias interiores se encuentran sobre un diámetro de la circunferencia mayor y cada circunferencia toca a cada una de sus vecinas en un sólo punto. Sea A el perímetro de la circunferencia mayor y sea B la suma de los perímetros de las circunferencias sobre el diámetro de la circunferencia grande. ¿Cuál es la relación entre A y B?



1. $A = 2B$ 2. $A = B$ 3. $2A = B$ 4. $7A = B$ 5. Ninguna de las anteriores.

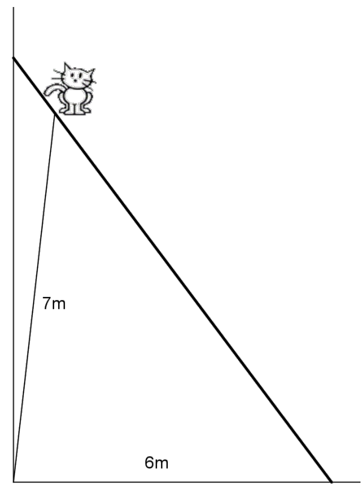
Solución:

5.2. Segunda parte

Problema 11. Considera un triángulo ABC (es decir, el triángulo con vértices A, B y C) y sea M el punto medio del lado AC. Sea P un punto cualquiera en el segmento MB. Demuestra que las áreas de los triángulos APB y CPB son iguales.

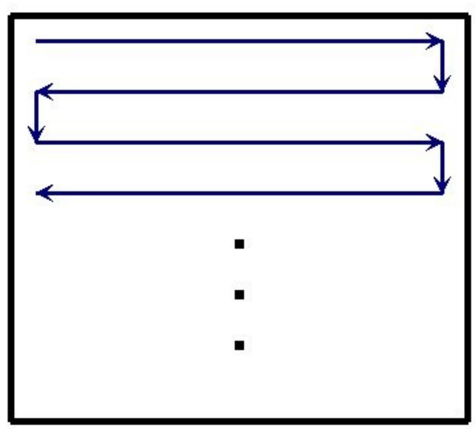
Solución:

Problema 12. Una escalera de 10 metros esta apoyada sobre una pared vertical de tal forma que el pie de la escalera se encuentra a 6 metros de la pared. Un gato que está subiendo por la escalera se encuentra a una distancia de 7 metros de la base de la pared. ¿Qué distancia le falta al gato para llegar a la cima de la escalera?



Solución:

Problema 13. Una cuadrícula de 2011×2011 se llena escribiendo la palabra “HIDALGO", una letra por cada casilla, en el orden que se indica en la figura. ¿Cuántas veces aparece la letra “H” en la primera columna (la que está más a la izquierda) de la cuadrícula?



Solución:

Capítulo 6

2012

6.1. Primera parte

Problema 1. El precio de un pastel era de 200 pesos, pero subió un 25 %. Sobre ese nuevo precio, se puso en oferta. Resultó que con la oferta, el pastel volvió a costar 200 pesos. ¿De cuánto fue la oferta?

1. 23 % 2. 25 % 3. 20 % 4. 35 % 5. De otro porcentaje

Solución: El pastel primero subió $(0.25)(200) = \frac{200}{4} = 50$ pesos, por lo que el nuevo precio era $200 + 50 = 250$ pesos. Queremos ahora saber qué porcentaje de 250 es 50 pesos. Puesto que el $x\,\%$ de 250 es $250(\frac{x}{100})$, debemos resolver $250(\frac{x}{100}) = 50$, de donde se obtiene $x = 20$. Es decir, la oferta fue de un 20 %.

Problema 2. En un torneo de ping-pong hay ocho jugadores. Si cada uno de ellos juega una vez contra cada uno de los otros siete, ¿cuántos partidos se juegan en total?

1. 8 2. 56 3. 28 4. 49 5. Otro número

Solución: Como cada jugador juega contra otros siete, en principio serían $8 \cdot 7 = 56$ partidos. Pero el partido del jugador A contra el jugador B es el mismo que el del jugador B contra el jugador A, por lo que en realidad la cantidad de partidos es $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

Problema 3. Considera la sucesión de numeros $1, 3, 7, 13, 21, \cdots$ (los puntos suspensivos significan que es una lista infinita de números, por lo que no la podemos escribir toda). El número que aparece en el lugar n lo puedes calcular con la fórmula $n^2 - n + 1$ (por ejemplo, el número que aparece en el quinto lugar es $5^2 - 5 + 1 = 21$). ¿Qué número le sigue al 91 en la sucesión?

1. El 91 no está en la sucesión 2. 98 3. 109 4. 111 5. Otro número distinto de los anteriores

Solución: Las solucion a la ecuación cuadrática $n^2 - n + 1 = 91$ son $n = 10$, $n = -9$, por lo que 91 ocupa el índice 10 en la sucesión, y el siguiente número corresponde al $n = 11$, es decir $11^2 - 11 + 1 = 111$.

Problema 4. Tres tristes tigres tragaban trigo en treinta tristes trastos en un trigal. El primer tigre tragó el doble de tristes trastos de trigo que el segundo tigre, mientras que el segundo tigre tragó el triple de tristes trastos de trigo que el tercer tigre. ¿Cuántos tristes trastos de trigo tragó el tercer tigre?

1. 15 2. 10 3. 5 4. 20 5. Otro número de trastos

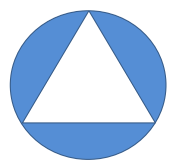
Solución: Si el tercer tigre tragó x trastos, el segundo tragó $3x$ y el primero tragó $2(3x) = 6x$. Es decir, en total se tragaron $6x + 3x + x = 10x = 30$ trastos, por lo que $x = 3$.

Problema 5. Considera un rectágulo cuyas longitudes de sus lados son números enteros. Si el área del rectángulo es 21, ¿cuáles son los posibles valores de sus lados?

1. 20 y 44 2. 15 y 30 3. 17 y 44 4. 10 y 22 5. Otro par de valores

Solución: Los únicos posibles valores para las longitudes de los lados son: 21,1 o 3,7.

Problema 6. En un círculo se encuentra inscrito un triángulo equilátero, como en la figura. Si el área del triángulo es uno, ¿cuál es el valor del área de la región sombreada?



1. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - 1$, 2. $\frac{4\pi}{\sqrt{3\sqrt{3}}} - 1$ 3. $\frac{4\pi}{9} - 1$ 4. $\frac{4\pi}{3} - 1$ 5. Otro valor

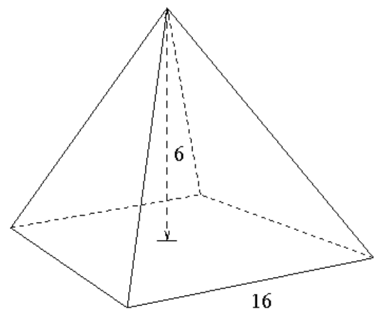
Solución: Sea r el radio del círculo. Queremos entonces expresar el área del triángulo en función de r, y para eso necesitamos a su vez expresar la base y la altura en función de r.

Partiendo del centro del círculo y trazando una perpedicular a un lado, formamos un pequeño triángulo rectángulo que tiene un radio r como hipotenusa. Dado que el triángulo original es equilátero, el segmento perpendicular trazado mide $\frac{r}{2}$, y por lo tanto el otro cateto mide $\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Dado que este último cateto mide la mitad del lado del triángulo original, tenemos que el triángulo original tiene lado $r\sqrt{3}$ y altura $\frac{3r}{2}$, de donde se obtiene:

$$r^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}}. \tag{6.1}$$

Por lo tanto, el área del círculo es $\pi\frac{4}{3\sqrt{3}}$, y el área sombreada es $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - 1$.

Problema 7. El ayuntamiento de Mineral de la Reforma te ha encargado pintar las cuatro caras exteriores de un monumento piramidal como el que se muestra en la figura. La pirámide es lisa, tiene una base cuadrada de 16 metros de lado y una altura de 6 metros. Una cubeta de pintura cuesta 900 pesos y con ella puedes pintar 40 metros cuadrados. ¿Cuánto cuesta toda la pintura que necesitas?



1. \$7, 200   2. \$12, 960   3. \$4, 320   4. \$10, 800   5. Otra cantidad

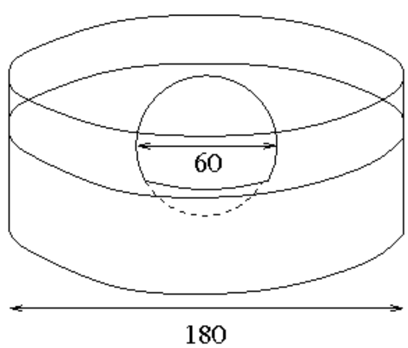
Solución:

Problema 8. ¿Cuál es el valor más grande que puede tomar la cantidad $(m+n)/n$, si sabes que m y n son números enteros positivos tales que $n > 99$ y $m < 101$?

1. 2   2. 7   3. 38   4. 5   5. Ninguno de los valores anteriores

Solución:

Problema 9. En una tina con agua como la de la figura, flota una pelota de 60 centímetros de diámetro. Si el diámetro de la tina es de 180 centímetros y exactamente un cuarto del volumen de la pelota se encuentra sumergida en la tina, ¿cuántos centímetros bajará el nivel del agua en el recipiente cuando se saque la pelota? El volumen total de la pelota es de $36,000\pi$ cm^3.



1. 1 cm   2. $\dfrac{\pi}{3}$ cm   3. $\dfrac{10}{9}$ cm   4. $\dfrac{\pi}{2}$ 5. Otra cantidad

Solución:

Problema 10. Chaco planea robar un banco y le promete darle al Roto un tercio del botín si le ayuda. El Roto acepta, pero como no sabe manejar, le pide ayuda al Pepis a cambio de darle un tercio de lo que ganará por el robo.

El Pepis acepta, pero su auto está en el taller, así que le dice al Chueco que si le deja usar su auto, le dará un tercio de lo que él gane. El Chueco acepta, pero como no oye bien, le dice al Pollo que si le ayuda le dará un tercio de lo que gane. El Pollo acepta. Tres días después del robo atrapan al Chueco con su parte del botín, que es de 40,000 pesos. ¿Cuánto dinero se llevaron entre todos?

1. \$810,000 2. \$3,240,000 3. \$1,620,000 4. \$1,000,000 5. Otra cantidad

Solución:

6.2. Segunda parte

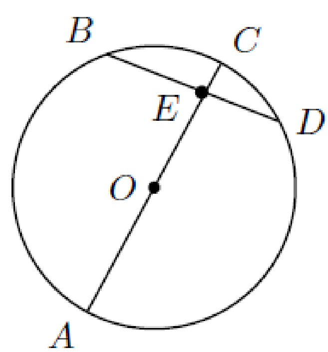
Problema 11. Paco y Luis se tienen que formar en una fila con sus compañeros Carlos, Miguel, Daniel y Joel. ¿De cuántas formas distintas se pueden acomodar de manera que entre Luis y Paco se encuentren formados exactamente dos de sus compañeros?

Solución:

Problema 12. Si c es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos otros dos lados tienen longitudes a y b, muestra que $a + b \leq \sqrt{2}c$.

Solución:

Problema 13. Considera un círculo con centro O, como se muestra en la figura. DEB es una cuerda del círculo tal que $DE = 3$ y $EB = 5$. Si AC es un diámetro del círculo que pasa por el punto E y $EC = 1$, ¿cuánto debe medir el radio del círculo?



Solución: