Matemáticas discretas.
2. Gráficas

Rafael Villarroel Flores

Centro de Investigación en Matemáticas,
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

5 de julio de 2011

Definición

Notación: $X^{(2)} = \{ A \subseteq X \mid |A| = 2 \}$.

Notación: $X^{(2)} = \{ A \subseteq X \mid |A| = 2 \}$.

Definición

Una gráfica G es un par ordenado de conjuntos $G = \big(V(G), E(G)\big)$, tal que $E(G) \subseteq V(G)^{(2)}$. Los elementos del conjunto $V(G)$ se llaman vértices de la gráfica y los elementos del conjunto $E(G)$ se llaman aristas de la gráfica.

Notación: $X^{(2)} = \{\, A \subseteq X \mid |A| = 2 \,\}$.

Definición

Una gráfica G es un par ordenado de conjuntos $G = \big(V(G), E(G)\big)$, tal que $E(G) \subseteq V(G)^{(2)}$. Los elementos del conjunto $V(G)$ se llaman vértices de la gráfica y los elementos del conjunto $E(G)$ se llaman aristas de la gráfica.

Por ejemplo, se puede definir una gráfica $G = \big(V(G), E(G)\big)$ por medio de $V(G) = \{1, 2, 3\}$, $E(G) = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\big\}$.

Definición

A cualquier gráfica se le puede asociar un dibujo conteniendo solamente puntos y líneas (que unen puntos), donde los puntos representan los vértices y las líneas representan las aristas de la gráfica.

A cualquier gráfica se le puede asociar un dibujo conteniendo solamente puntos y líneas (que unen puntos), donde los puntos representan los vértices y las líneas representan las aristas de la gráfica.

La gráfica $V(G) = \{1, 2, 3\}$, $E(G) = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\big\}$ se puede representar como:

Definiciones

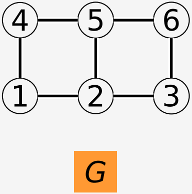
El orden $|G|$ es $|V(G)|$. Si $\{x, y\} \in E(G)$, decimos que los vértices x, y son adyacentes, y lo denotamos $x \sim y$. La arista $\{x, y\}$ será denotada simplemente como xy. Los vértices x y y se dicen incidentes a la arista xy. El grado $d(x)$ de x es $|\{\, y \in V(G) \mid y \sim x \,\}|$.

Definición

Una gráfica H es subgráfica de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Definición

Una gráfica H es subgráfica de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.



Definición

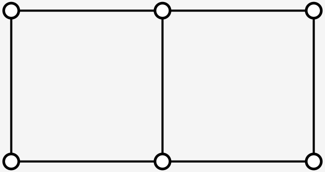
Una gráfica H es subgráfica de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Definición

Una gráfica B es bipartita si existen conjuntos ajenos y no vacíos X, Y tales que $V(B) = X \cup Y$, y para todo $e \in E(B)$ se tiene que $|e \cap X| = 1$, $|e \cap Y| = 1$. En este caso, decimos que X, Y forman una bipartición de B, que X, Y son partes de la gráfica bipartita, y escribimos $B = (X, Y)$.

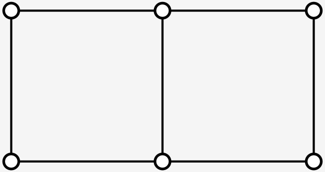
Definición

Una gráfica B es bipartita si existen conjuntos ajenos y no vacíos X, Y tales que $V(B) = X \cup Y$, y para todo $e \in E(B)$ se tiene que $|e \cap X| = 1$, $|e \cap Y| = 1$. En este caso, decimos que X, Y forman una bipartición de B, que X, Y son partes de la gráfica bipartita, y escribimos $B = (X, Y)$.



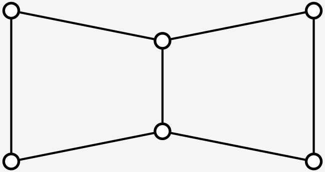
Definición

Una gráfica B es bipartita si existen conjuntos ajenos y no vacíos X, Y tales que $V(B) = X \cup Y$, y para todo $e \in E(B)$ se tiene que $|e \cap X| = 1$, $|e \cap Y| = 1$. En este caso, decimos que X, Y forman una bipartición de B, que X, Y son partes de la gráfica bipartita, y escribimos $B = (X, Y)$.



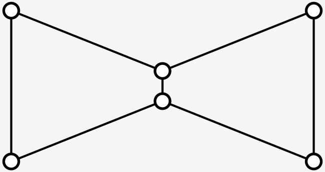
Definición

Una gráfica B es bipartita si existen conjuntos ajenos y no vacíos X, Y tales que $V(B) = X \cup Y$, y para todo $e \in E(B)$ se tiene que $|e \cap X| = 1$, $|e \cap Y| = 1$. En este caso, decimos que X, Y forman una bipartición de B, que X, Y son partes de la gráfica bipartita, y escribimos $B = (X, Y)$.



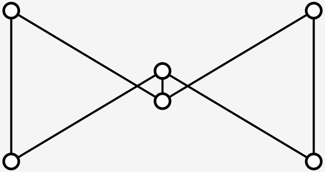
Definición

Una gráfica B es bipartita si existen conjuntos ajenos y no vacíos X, Y tales que $V(B) = X \cup Y$, y para todo $e \in E(B)$ se tiene que $|e \cap X| = 1$, $|e \cap Y| = 1$. En este caso, decimos que X, Y forman una bipartición de B, que X, Y son partes de la gráfica bipartita, y escribimos $B = (X, Y)$.



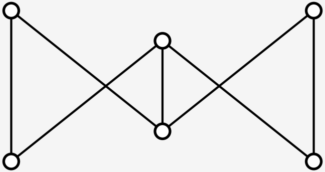
Definición

Una gráfica B es bipartita si existen conjuntos ajenos y no vacíos X, Y tales que $V(B) = X \cup Y$, y para todo $e \in E(B)$ se tiene que $|e \cap X| = 1$, $|e \cap Y| = 1$. En este caso, decimos que X, Y forman una bipartición de B, que X, Y son partes de la gráfica bipartita, y escribimos $B = (X, Y)$.



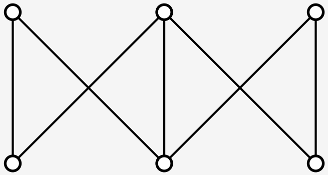
Definición

Una gráfica B es bipartita si existen conjuntos ajenos y no vacíos X, Y tales que $V(B) = X \cup Y$, y para todo $e \in E(B)$ se tiene que $|e \cap X| = 1$, $|e \cap Y| = 1$. En este caso, decimos que X, Y forman una bipartición de B, que X, Y son partes de la gráfica bipartita, y escribimos $B = (X, Y)$.



Definición

Una gráfica B es bipartita si existen conjuntos ajenos y no vacíos X, Y tales que $V(B) = X \cup Y$, y para todo $e \in E(B)$ se tiene que $|e \cap X| = 1$, $|e \cap Y| = 1$. En este caso, decimos que X, Y forman una bipartición de B, que X, Y son partes de la gráfica bipartita, y escribimos $B = (X, Y)$.



Teorema

Para toda gráfica G se tiene:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Teorema

Para toda gráfica G se tiene:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Demostración.

Consideremos la gráfica $B(G)$ con: $V\big(B(G)\big) = V(G) \cup E(G)$, donde $v \sim e$ si $v \in e$. Ambos lados de la ecuación cuentan $|E\big(B(G)\big)|$. $\square$

Corolario

En cualquier gráfica, la cantidad de vértices de grado impar es par.

Definición

Sean $u, v \in V(G)$. Un uv-camino en G de longitud n es una sucesión de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$, todos distintos, tales que $u = v_0$, $v = v_n$ y $v_{i-1} \sim v_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Definición

Sean $u, v \in V(G)$. Un uv-camino en G de longitud n es una sucesión de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$, todos distintos, tales que $u = v_0$, $v = v_n$ y $v_{i-1} \sim v_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Definición

Una gráfica G es conexa si para todo par de vértices u, v en G existe un u-v camino en G.

Definiciones

La distancia $d(u,v)$ entre los vértices u, v de la gráfica G es:

$$d(u,v) = \begin{cases} \text{mín}\,\{\,\text{longitud de } P \mid P \text{ es un } u\text{-}v \text{ camino}\,\} & \text{si...} \\ \infty & \text{si no...} \end{cases}$$

El diámetro $\operatorname{diam} G$ de una gráfica conexa G es

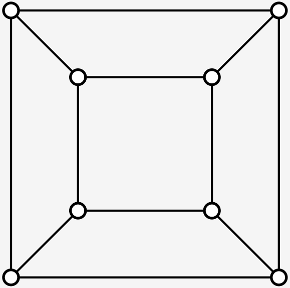
$$\operatorname{diam} G = \text{máx}\,\{\,d(u,v) \mid u, v \in V(G)\,\}\,.$$

Definición

Un ciclo en G de longitud n, con $n \geq 3$, es una sucesión de vértices $v_1, \ldots, v_n$, todos distintos entre sí, tales que $v_{i-1} \sim v_i$ para $i = 2, \ldots, n$ y $v_1 \sim v_n$.

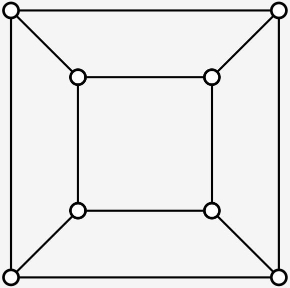
Definición

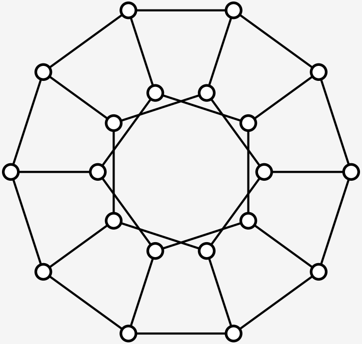
Un ciclo en G de longitud n, con $n \geq 3$, es una sucesión de vértices $v_1, \ldots, v_n$, todos distintos entre sí, tales que $v_{i-1} \sim v_i$ para $i = 2, \ldots, n$ y $v_1 \sim v_n$.



Definición

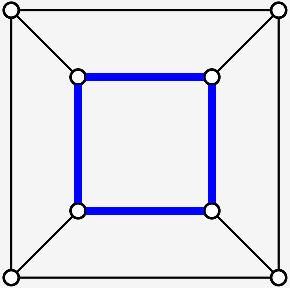
Un ciclo en G de longitud n, con $n \geq 3$, es una sucesión de vértices $v_1, \dots, v_n$, todos distintos entre sí, tales que $v_{i-1} \sim v_i$ para $i = 2, \dots, n$ y $v_1 \sim v_n$.

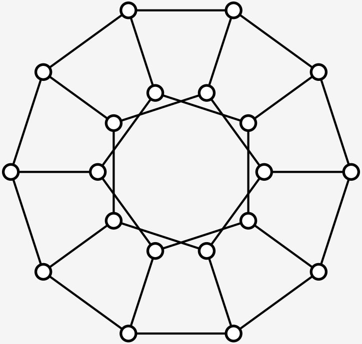




Definición

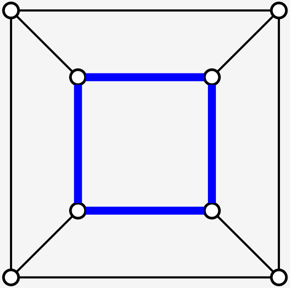
Un ciclo en G de longitud n, con $n \geq 3$, es una sucesión de vértices $v_1, \ldots, v_n$, todos distintos entre sí, tales que $v_{i-1} \sim v_i$ para $i = 2, \ldots, n$ y $v_1 \sim v_n$.

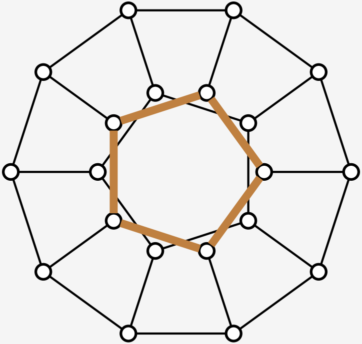




Definición

Un ciclo en G de longitud n, con $n \geq 3$, es una sucesión de vértices $v_1, \ldots, v_n$, todos distintos entre sí, tales que $v_{i-1} \sim v_i$ para $i = 2, \ldots, n$ y $v_1 \sim v_n$.





Definición

Un ciclo de longitud k se llama un k-ciclo. Un 3-ciclo también se llama un triángulo. Un k-ciclo es par si k es par, y es impar si k es impar.

Definición

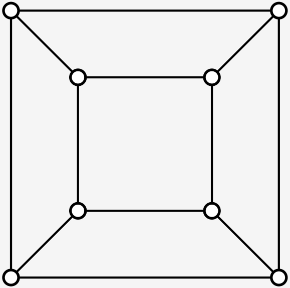
Un ciclo de longitud k se llama un k-ciclo. Un 3-ciclo también se llama un triángulo. Un k-ciclo es par si k es par, y es impar si k es impar.

Teorema

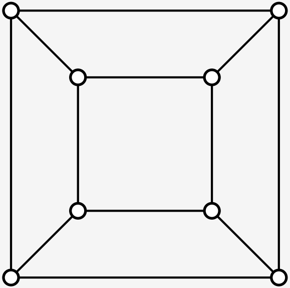
Sea G una gráfica con al menos tres vértices. Entonces G es bipartita si y sólo si no contiene un ciclo impar.

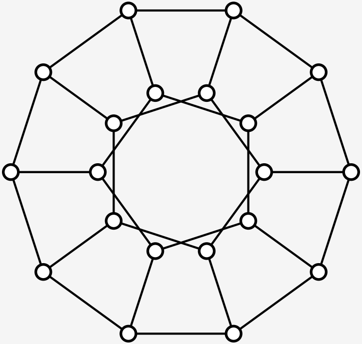
Si G tiene ciclos, definimos el cuello $g(G)$ como la longitud del ciclo más pequeño en G.

Si G tiene ciclos, definimos el cuello $g(G)$ como la longitud del ciclo más pequeño en G.



Si G tiene ciclos, definimos el cuello $g(G)$ como la longitud del ciclo más pequeño en G.



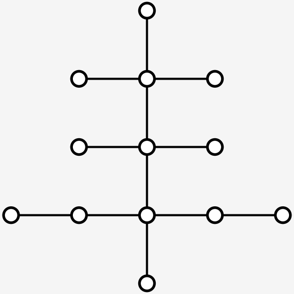


Definición

Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.

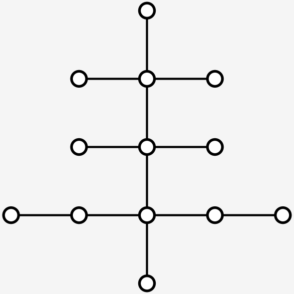
Definición

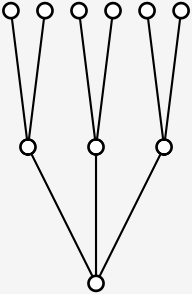
Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.



Definición

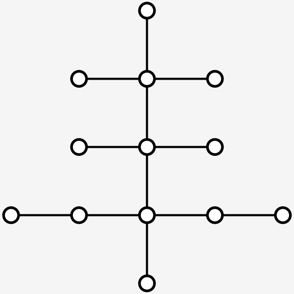
Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.

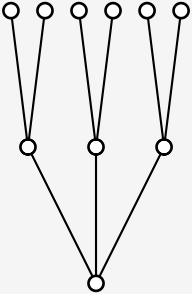




Definición

Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.





Teorema

En un árbol T con más de un vértice, existen al menos dos vértices de grado uno.

Teorema

En un árbol T con más de un vértice, existen al menos dos vértices de grado uno.

Demostración.

Sea P un camino maximal en T. Entonces $|P| \geq 2$, y los extremos de P tienen grado 1. $\square$

Teorema

En un árbol T con más de un vértice, existen al menos dos vértices de grado uno.

Demostración.

Sea P un camino maximal en T. Entonces $|P| \geq 2$, y los extremos de P tienen grado 1. $\square$

Definición

Si T es un árbol, los vértices de grado uno se llaman las hojas de T.

Teorema

Dada una gráfica T, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *T es un árbol.*
2. *Para cualesquiera $u, v \in V(T)$, existe un único u-v camino en T.*

Teorema

Dada una gráfica T, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *T es un árbol.*
2. *Para cualesquiera $u, v \in V(T)$, existe un único u-v camino en T.*
3. *T es conexa, y para todo $e \in E(T)$ se tiene que $T - e$ es disconexa.*

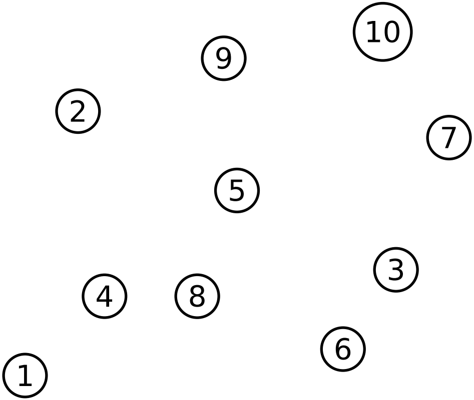
Teorema

Dada una gráfica T, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *T es un árbol.*
2. *Para cualesquiera $u, v \in V(T)$, existe un único u-v camino en T.*
3. *T es conexa, y para todo $e \in E(T)$ se tiene que $T - e$ es disconexa.*
4. *T no tiene ciclos, y para todo $\{x, y\} \in V(T)^{(2)} - E(T)$ se tiene que $T + xy$ tiene un ciclo.*

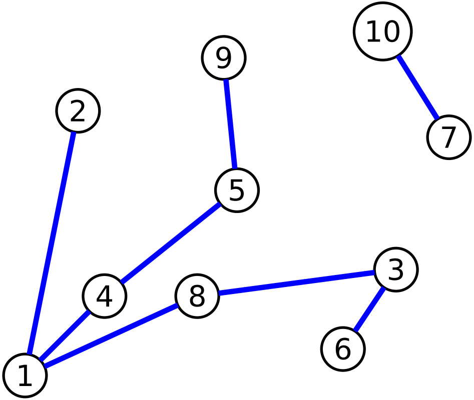
Problema

Hay 10 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más barata posible de modo que todas estén conectadas.



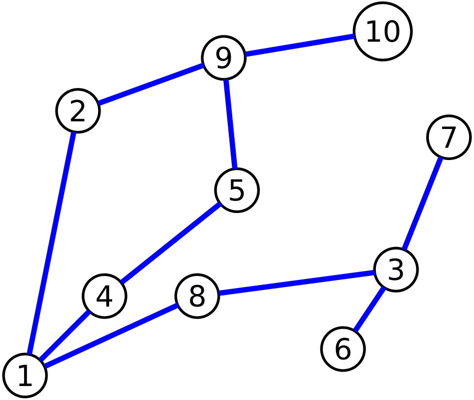
Problema

Hay 10 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más barata posible de modo que todas estén conectadas.



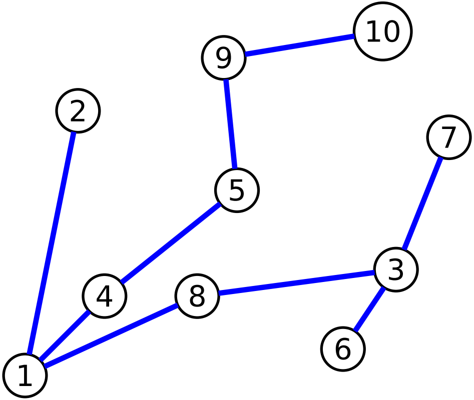
Problema

Hay 10 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más barata posible de modo que todas estén conectadas.



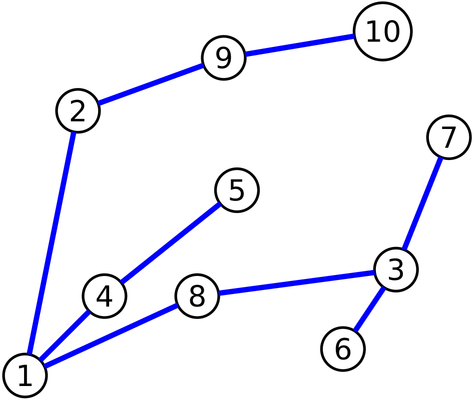
Problema

Hay 10 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más barata posible de modo que todas estén conectadas.



Problema

Hay 10 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más barata posible de modo que todas estén conectadas.



Teorema

(Teorema de Cayley) *Hay n^{n-2} árboles etiquetados en n vértices.*

Teorema

(Teorema de Cayley) *Hay n^{n-2} árboles etiquetados en n vértices.*

Una demostración utiliza el código de Prüfer, que da una biyección entre el conjunto de árboles etiquetados y el conjunto de cadenas de longitud $n-2$ con n símbolos.

Teorema

Existe un algoritmo "eficiente" para encontrar un árbol etiquetado en n vértices de costo mínimo.

Teorema

Existe un algoritmo "eficiente" para encontrar un árbol etiquetado en n vértices de costo mínimo.

El algoritmo consiste en:

1. Escoger la arista de costo mínimo.

Teorema

Existe un algoritmo "eficiente" para encontrar un árbol etiquetado en n vértices de costo mínimo.

El algoritmo consiste en:

1. Escoger la arista de costo mínimo.
2. Repetir el paso anterior considerando sólo las aristas que no forman ciclo con las ya escogidas.

Teorema

Existe un algoritmo "eficiente" para encontrar un árbol etiquetado en n vértices de costo mínimo.

El algoritmo consiste en:

1. Escoger la arista de costo mínimo.
2. Repetir el paso anterior considerando sólo las aristas que no forman ciclo con las ya escogidas.
3. El algoritmo termina cuando se hayan escogido $n-1$ aristas.

Teorema

Existe un algoritmo "eficiente" para encontrar un árbol etiquetado en n vértices de costo mínimo.

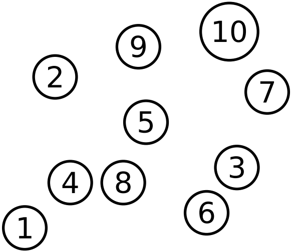
El algoritmo consiste en:

1. Escoger la arista de costo mínimo.
2. Repetir el paso anterior considerando sólo las aristas que no forman ciclo con las ya escogidas.
3. El algoritmo termina cuando se hayan escogido $n-1$ aristas.

El algoritmo indicado es un ejemplo de un algoritmo glotón *(greedy algorithm)*.

Problema

(Problema del agente viajero) Hay 10 ciudades tales que hay un vuelo directo entre cualesquier par de ciudades. Comenzando en una ciudad dada, recorrer las otras ciudades sucesivamente y regresar a la ciudad de origen, minimizando el costo.



No se ha encontrado hasta ahora un algoritmo "eficiente" para resolver todas las instancias del problema del agente viajero, pero tampoco se ha demostrado que no exista.