Primera Parte

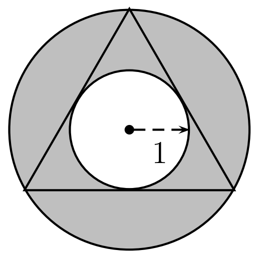
Para cada uno de los siguientes problemas encierra en un círculo solamente el inciso correspondiente a la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es el último dígito del número $(2013)^{2014}$?

   a) 1 *b*) 3 *c*) 5 *d*) 7 *e*) 9

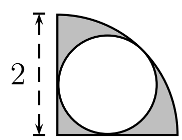
2. Un círculo de radio 1 está inscrito en un triángulo equilátero. El triángulo, a su vez, está inscrito en otro círculo. Calcula el área entre los dos círculos (el área sombreada en la figura).

   a) π *b*) $\sqrt{3}\pi$ *c*) 2π *d*) 3π *e*) Ninguna de las anteriores.



3. Se tiene una cuarta parte de un círculo de radio 2. Inscrito en él, como se ve en la figura, está otro círculo. ¿Cual es el perímetro del círculo pequeño?

   a) π *b*) 2π *c*) $\frac{2}{1+\sqrt{2}}\pi$ *d*) $\frac{4}{1+\sqrt{2}}\pi$ *e*) Ninguna de las anteriores.



4. En Actopan hay una cerca con forma de triángulo equilátero que mide 6 metros por lado y que protege un campo de alfalfa. Afuera del triángulo hay un borrego atado con una cuerda de 3 metros de longitud a un poste de la cerca. Si el poste está a 2 metros de una de las esquinas, ¿cuál es el tamaño del área total en la que el borrego puede pastar?

   a) 5π *b*) $\frac{5}{3}\pi$ *c*) $\frac{29}{5}\pi$ *d*) $\frac{29}{6}\pi$ *e*) Ninguna de las anteriores.

5. Calcula el valor de
$$\frac{123456789}{(-123456789)^2 + (-123456788)(123456790)}$$

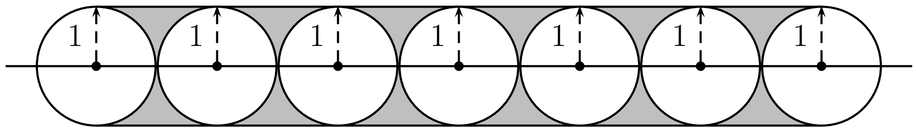
   a) 123456788 *b*) 123456789 *c*) 123456790 *d*) $\frac{1}{2\times 123456789}$ *e*) Ninguna de las anteriores.

6. Dadas 6 rectas distintas en el plano, ¿cuál es el número máximo de puntos en los que pueden intersectarse?

   a) 6 *b*) 10 *c*) 15 *d*) 16 *e*) Ninguna de las anteriores.

7. Se colocan 7 círculos de radio 1 de manera que los centros estén en linea recta y sean tangentes, como se muestra en la figura. Calcula el área de la región sombreada.

   a) $24+\pi$ *b*) $24-6\pi$ *c*) $24-7\pi$ *d*) $28-7\pi$ *e*) Ninguna de las anteriores.



8. Considera un número de tres dígitos abc y un número de dos dígitos aa. Si multiplicas estos dos números se obtiene el 2013. ¿Cuál es el valor de $a \times b \times c$?

   a) 30 *b*) 183 *c*) 671 *d*) 2013 *e*) Ninguna de las anteriores.

9. En casa hay tres relojes. El 9 de febrero de 2013 a las 10:00am todos ellos indicaban la hora correctamente, pero solo marchaba bien el primer reloj. El segundo se atrasaba un minuto al día y el tercero se adelantaba un minuto al día. Si los relojes continúan marchando así, ¿al cabo de cuánto tiempo volverán los tres a marcar exactamente las 10:00am?

   a) 240 días *b*) 720 días *c*) 1440 días *d*) nunca lo harán *e*) Ninguna de las anteriores.

10. La base de un rectángulo es el doble de su altura. Si la base se disminuye en 6 unidades y la altura se aumenta en 4 el área del rectángulo no cambia. ¿Cuál es el área del rectángulo?

   a) 1 *b*) 24 *c*) 144 *d*) 288 *e*) Ninguna de las anteriores.

Segunda Parte

¡No borres tus intentos fallidos! Entrega junto con tu examen todo lo que hayas intentado: cálculos, gráficas, tablas, esbozos, dibujos, etc.

11. Decimos que tres enteros positivos a, b y c están en progresión aritmética si $a < b < c$ y $b - a = c - b$. Supongamos que a, b y c son enteros positivos en progresión aritmética. Demuestra que

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

   están en progresión aritmética.

12. Calcula el valor de

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)(2^{128}+1)(2^{256}+1)(2^{512}+1)(2^{1024}+1)+1.$$

13. En una cuarto de tamaño rectangular se acomodan $m \times n$ sillas de manera rectangular de tal modo que se forman $m > 1$ filas y $n > 1$ columnas de sillas. Entran los estudiantes al examen y cada uno se sienta en una silla, sin que queden sillas vacías. Después, cada estudiante saluda de mano a los que están junto a él (al que está a su derecha, a su izquierda, adelante y atrás). Si en total se hicieron 275 saludos, ¿cuántas sillas hay en el salón?