Método simplex con coeficientes

15 de abril de 2020

Problema 1

Resuelve el siguiente problema:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeto a} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Tablero inicial

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeto a} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

En este caso, el problema ya está en *forma simplex*. Y es más o menos claro que para obtener un tablero inicial, podemos tomar a x_3, x_4, x_5 como soluciones básicas.

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 5 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 & = & 3 - x_1 \\ x_5 & = & 2 - x_2 \\ \hline z & = & 3x_1 + 5x_2 \end{array}$$

Primer paso

$$
\begin{array}{rcl}
x_3 & = & 5 - x_1 - 2x_2 \\
x_4 & = & 3 - x_1 \\
x_5 & = & 2 - x_2 \\
\hline
z & = & 3x_1 + 5x_2
\end{array}
$$

Decidimos aumentar la variable x_1. En este caso, se ve que la ecuación que más restringe el crecimiento es la segunda. Por lo que x_1 pasa a las variables básicas y x_4 pasa a las no básicas.

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 3 - x_4 \\
x_3 & = & 2 - 2x_2 + x_4 \\
x_5 & = & 2 - x_2 \\
\hline
z & = & 9 + 5x_2 - 3x_4
\end{array}
$$

Segundo paso

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 3 \phantom{{}-2x_2} - x_4 \\
x_3 & = & 2 - 2x_2 + x_4 \\
x_5 & = & 2 - x_2 \\
\hline
z & = & 9 + 5x_2 - 3x_4
\end{array}
$$

Ahora ya la única variable que podemos aumentar es x_2. En este caso, se ve que la ecuación que más restringe el crecimiento es la segunda. Por lo que x_2 pasa a las variables básicas y x_3 pasa a las no básicas.

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 3 \phantom{{}-\frac{1}{2}x_3} - x_4 \\
x_2 & = & 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
\hline
z & = & 14 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4
\end{array}
$$

Resultado

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 &=& 3 \qquad\quad - \; x_4 \\
x_2 &=& 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 &=& 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
\hline
z &=& 14 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4
\end{array}
$$

Vemos que ya no podemos mejorar el valor de z incrementando alguna de las variables no básicas x_3, x_4, por lo que el método simplex termina con $x_3 = x_4 = 0$, y por lo tanto, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_5 = 1$ con valor máximo $z = 14$ es la solución al problema:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Maximizar} & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeto a} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Método simplex usando solo coeficientes

Vamos a ejemplificar el uso de esta técnica con el problema que acabamos de resolver. Recordemos la sucesión de tableros simplex que vimos

- $$\begin{array}{rcl} x_3 &=& 5 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 &=& 3 - x_1 \\ x_5 &=& 2 - x_2 \\ \hline z &=& 3x_1 + 5x_2 \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcl} x_1 &=& 3 - x_4 \\ x_3 &=& 2 - 2x_2 + x_4 \\ x_5 &=& 2 - x_2 \\ \hline z &=& 9 + 5x_2 - 3x_4 \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcl} x_1 &=& 3 - x_4 \\ x_2 &=& 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &=& 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ \hline z &=& 14 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{array}$$

El primer tablero simplex

$$
\begin{array}{rcl}
x_3 & = & 5 - x_1 - 2x_2 \\
x_4 & = & 3 - x_1 \\
x_5 & = & 2 - x_2 \\
\hline
z & = & 3x_1 + 5x_2
\end{array}
$$

Se puede representar como:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
x_1 & + 2x_2 & + x_3 & & & & = 5 \\
x_1 & & & + x_4 & & & = 3 \\
 & x_2 & & & + x_5 & & = 2 \\
-3x_1 & - 5x_2 & & & & + z & = 0
\end{array}
$$

y esto se puede representar usando solo coeficientes

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

El primer tablero simplex

$$
\begin{array}{rcl}
x_3 &=& 5 - x_1 - 2x_2 \\
x_4 &=& 3 - x_1 \\
x_5 &=& 2 - x_2 \\
\hline
z &=& 3x_1 + 5x_2
\end{array}
$$

Se puede representar como:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
x_1 & + 2x_2 & + x_3 & & & & = 5 \\
x_1 & & & + x_4 & & & = 3 \\
 & x_2 & & & + x_5 & & = 2 \\
-3x_1 & - 5x_2 & & & & + z & = 0
\end{array}
$$

y esto se puede representar usando solo coeficientes

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

El segundo tablero simplex

Primero lo reescribimos

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 3 & & & - & x_4 \\
x_3 & = & 2 & - & 2x_2 & + & x_4 \\
x_5 & = & 2 & - & x_2 & & \\
\hline
z & = & 9 & + & 5x_2 & - & 3x_4
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 2 & - & 2x_2 & + & x_4 \\
x_1 & = & 3 & & & - & x_4 \\
x_5 & = & 2 & - & x_2 & & \\
\hline
z & = & 9 & + & 5x_2 & - & 3x_4
\end{array}
$$

El segundo tablero simplex

Primero lo reescribimos

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 3 \qquad\quad - \; x_4 \\
x_3 & = & 2 - 2x_2 + \; x_4 \\
x_5 & = & 2 - \; x_2 \\
\hline
z & = & 9 + 5x_2 - 3x_4
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
x_3 & = & 2 - 2x_2 + \; x_4 \\
x_1 & = & 3 \qquad\quad - \; x_4 \\
x_5 & = & 2 - \; x_2 \\
\hline
z & = & 9 + 5x_2 - 3x_4
\end{array}
$$

Se puede representar como:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & 2x_2 & + x_3 & - \; x_4 & & & = & 2 \\
x_1 & & & + \; x_4 & & & = & 3 \\
 & x_2 & & & + x_5 & & = & 2 \\
 & -5x_2 & & + 3x_4 & & + z & = & 9
\end{array}
$$

El segundo tablero simplex

Primero lo reescribimos

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 &=& 3 \phantom{{}-2x_2} - x_4 \\
x_3 &=& 2 - 2x_2 + x_4 \\
x_5 &=& 2 - x_2 \\
\hline
z &=& 9 + 5x_2 - 3x_4
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
x_3 &=& 2 - 2x_2 + x_4 \\
x_1 &=& 3 \phantom{{}-2x_2} - x_4 \\
x_5 &=& 2 - x_2 \\
\hline
z &=& 9 + 5x_2 - 3x_4
\end{array}
$$

Se puede representar como:

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
 & 2x_2 & + x_3 & - x_4 & & & = & 2 \\
x_1 & & & + x_4 & & & = & 3 \\
 & x_2 & & & + x_5 & & = & 2 \\
 & -5x_2 & & + 3x_4 & & + z & = & 9
\end{array}
$$

y esto se puede representar usando solo coeficientes

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C
\end{array}
$$
$$
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9
\end{pmatrix}
$$

Comparación

Comparemos las matrices que hemos obtenido

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9
\end{pmatrix}
$$

El paso usando solo matrices se hace del siguiente modo:

- Como los coeficientes de la función objetivo z cambiaron de signo, ahora la meta es que todos los números del último renglón (excepto quizás el último) sean positivos.

Comparación

Comparemos las matrices que hemos obtenido

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

El paso usando solo matrices se hace del siguiente modo:

- Como los coeficientes de la función objetivo z cambiaron de signo, ahora la meta es que todos los números del último renglón (excepto quizás el último) sean positivos.
- Las variables x_1, x_2 tienen entrada correspondiente negativa, por lo que cualquiera podría aumentarse. En nuestro caso, decidimos aumentar x_1.

Comparación

Comparemos las matrices que hemos obtenido

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

El paso usando solo matrices se hace del siguiente modo:

- Como los coeficientes de la función objetivo z cambiaron de signo, ahora la meta es que todos los números del último renglón (excepto quizás el último) sean positivos.
- Las variables x_1, x_2 tienen entrada correspondiente negativa, por lo que cualquiera podría aumentarse. En nuestro caso, decidimos aumentar x_1.
- Para encontrar el renglón correspondiente a la ecuación que debemos usar, hacemos las divisiones: $5/1 = 5$, $3/1 = 3$. Como el segundo resultado es el menor, usaremos el segundo renglón.

Continuación

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- La entrada que obtuvimos en el paso anterior está marcada con un círculo. La variable básica que correspondía al segundo renglón es x_4. Eso dice que en el siguiente paso, x_4 deja de ser variable básica.

Continuación

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9
\end{pmatrix}
$$

- La entrada que obtuvimos en el paso anterior está marcada con un círculo. La variable básica que correspondía al segundo renglón es x_4. Eso dice que en el siguiente paso, x_4 deja de ser variable básica.
- Usando la entrada marcada como *pivote*, por medio de operaciones elementales de renglores, hacemos que en esa entrada haya un 1, y que sea la única entrada diferente de cero en la columna.

Paso final

- Tenemos entonces la matriz:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9
\end{pmatrix}
$$

Paso final

- Tenemos entonces la matriz:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

- Como la única entrada negativa en el último renglón corresponde a x_2, sabemos que tal variable será básica en el siguiente paso.

Paso final

- Tenemos entonces la matriz:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

- Como la única entrada negativa en el último renglón corresponde a x_2, sabemos que tal variable será básica en el siguiente paso.
- Ahora hacemos las divisiones $2/2 = 1$, $2/1 = 2$. El menor resultado es el primero, por lo que obtenemos la entrada que usaremos como pivote. Observemos que la variable básica del primer renglón es x_3, esa dejará de ser básica.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Continuación

- Estamos con:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9
\end{pmatrix}
$$

Continuación

- Estamos con:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9
\end{pmatrix}
\end{array}$$

- Dividimos todo el primer renglón entre 2:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Continuación

- Estamos con:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

- Dividimos todo el primer renglón entre 2:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

- Ahora usamos esa entrada para hacer las otras entradas en la columna igual a cero.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Conclusión

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & z & C \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 14
\end{array}\right)
$$

Como antes pudimos pasar del tablero simplex a la matriz, ahora podríamos pasar de la matriz al tablero simplex.
Puesto que las variables no básicas x_3, x_4 se toman iguales a cero, de la matriz obtenemos $x_2 = 1$, $x_1 = 3$, $x_5 = 1$, que dan un valor máximo de $z = 14$.