Homología

Rafael Villarroel

2021-02-25 15:00 -0500

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Una idea para estudiar C es asociarle un complejo simplicial, por ejemplo $\mathcal{N}_\epsilon(C)$.
Sabemos $\mathcal{N}_\epsilon(C)$ es homotópico a la unión de las bolas con centros en puntos C, con radio ϵ. Quisiéramos encontrar una manera de simplificar el tipo de homotopía de $\mathcal{N}_\epsilon(C)$. En general, no se conoce un algoritmo que se pueda aplicar a todos los complejos simpliciales para calcular el tipo de homotopía, y que sea computacionalmente adecuado para complejos de muchos vértices.
La homología nos da una herramienta para determinar ciertos aspectos topológicos de un complejo simplicial, es aplicable en general y no es computacionalmente tan pesada. La homología es una familia de funtores de la categoría de complejos simpliciales a una categoría algebraica.

Permutaciones pares e impares

Una permutación es una función biyectiva $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$. Cada permutación se puede escribir como producto de ciclos. Por ejemplo, si $n = 6$, la permutación $(15)(346)$, es la función $1 \mapsto 5, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 6, 5 \mapsto 1, 6 \mapsto 3$. Una transposición es una permutación que intercambia dos números y a los demás los deja fijos, es decir una permutación que en notación cíclica se escribe (ab). Toda permutación se puede escribir como producto de transposiciones. Por ejemplo $(15)(346) = (15)(34)(46)$.

Teorema Si una permutación se puede escribir como producto de una cantidad par de transposiciones, entonces no se puede escribir como producto de una cantidad impar de transposiciones.

Si una permutación se puede escribir como producto de una cantidad par de transposiciones, decimos que la permutación es par. Si no, decimos que la permutación es impar.

Simplejos orientados

Sea Δ un complejo simplicial. Supongamos que damos un orden total a los vértices de Δ. Un p-simplejo ordenado es $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ tal que $\{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ es un simplejo de dimensión p en Δ. Supongamos que $(w_0, w_1, \ldots, w_p)$ es un p-simplejo ordenado tal que
$\{w_0, w_1, \ldots, w_p\} = \{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$. Diremos que la orientación es la misma, si la permutación $v_i \to w_i$ para $i = 0, 1, \ldots, p$ es par. En caso contrario, diremos que los simplejos orientados tienen orientación opuesta.

Ejemplo

Sea Δ el complejo simplicial con caras maximales $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}\}$. Entonces:

Simplejos orientados

Sea Δ un complejo simplicial. Supongamos que damos un orden total a los vértices de Δ. Un p-simplejo ordenado es $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ tal que $\{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ es un simplejo de dimensión p en Δ. Supongamos que $(w_0, w_1, \ldots, w_p)$ es un p-simplejo ordenado tal que $\{w_0, w_1, \ldots, w_p\} = \{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$. Diremos que la orientación es la misma, si la permutación $v_i \to w_i$ para $i = 0, 1, \ldots, p$ es par. En caso contrario, diremos que los simplejos orientados tienen orientación opuesta.

Ejemplo

Sea Δ el complejo simplicial con caras maximales $\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{2,4\}\}$. Entonces:

- $(1,2,3),(2,1,3)$ tienen orientación opuesta,

Simplejos orientados

Sea Δ un complejo simplicial. Supongamos que damos un orden total a los vértices de Δ. Un p-simplejo ordenado es $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ tal que $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ es un simplejo de dimensión p en Δ. Supongamos que $(w_0, w_1, \dots, w_p)$ es un p-simplejo ordenado tal que $\{w_0, w_1, \dots, w_p\} = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$. Diremos que la orientación es la misma, si la permutación $v_i \to w_i$ para $i = 0, 1, \dots, p$ es par. En caso contrario, diremos que los simplejos orientados tienen orientación opuesta.

Ejemplo

Sea Δ el complejo simplicial con caras maximales $\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{2,4\}\}$. Entonces:

- $(1,2,3),(2,1,3)$ tienen orientación opuesta,
- $(1,2,3),(3,1,2)$ tienen la misma orientación,

Simplejos orientados

Sea Δ un complejo simplicial. Supongamos que damos un orden total a los vértices de Δ. Un p-simplejo ordenado es $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ tal que $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ es un simplejo de dimensión p en Δ. Supongamos que $(w_0, w_1, \dots, w_p)$ es un p-simplejo ordenado tal que
$\{w_0, w_1, \dots, w_p\} = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$. Diremos que la orientación es la misma, si la permutación $v_i \to w_i$ para $i = 0, 1, \dots, p$ es par. En caso contrario, diremos que los simplejos orientados tienen orientación opuesta.

Ejemplo

Sea Δ el complejo simplicial con caras maximales $\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{2,4\}\}$. Entonces:

- $(1,2,3), (2,1,3)$ tienen orientación opuesta,
- $(1,2,3), (3,1,2)$ tienen la misma orientación,
- $(2,4), (4,2)$ tienen diferente orientación.

Simplejos orientados

Sea Δ un complejo simplicial. Supongamos que damos un orden total a los vértices de Δ. Un p-simplejo ordenado es $(v_0, v_1, \ldots, v_p)$ tal que $\{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$ es un simplejo de dimensión p en Δ. Supongamos que $(w_0, w_1, \ldots, w_p)$ es un p-simplejo ordenado tal que $\{w_0, w_1, \ldots, w_p\} = \{v_0, v_1, \ldots, v_p\}$. Diremos que la orientación es la misma, si la permutación $v_i \to w_i$ para $i = 0, 1, \ldots, p$ es par. En caso contrario, diremos que los simplejos orientados tienen orientación opuesta.

Ejemplo

Sea Δ el complejo simplicial con caras maximales $\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{2,4\}\}$. Entonces:

- $(1,2,3),(2,1,3)$ tienen orientación opuesta,
- $(1,2,3),(3,1,2)$ tienen la misma orientación,
- $(2,4),(4,2)$ tienen diferente orientación.

Cadenas

Notación Un simplejo σ cuando está orientado se denotará con $\hat{\sigma}$.
Sea Δ^p el conjunto de todos los p-simplejos orientados. Sea $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2\}$. Una p-cadena es una función $c\colon \Delta^p \to R$ tal que $c(\hat{\sigma}) = -c(\hat{\sigma}')$ si $\sigma = \sigma'$, pero $\hat{\sigma}$ tiene orientación diferente a $\hat{\sigma}'$.
El campo $\mathbb{F}_2$. Consideremos $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Definimos una suma en $\mathbb{F}_2$ como $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$. Definimos un producto como $a0 = a0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{F}_2$, $11 = 1$. Entonces $\mathbb{F}_2$ con esta suma y producto, satisface los axiomas de campo. Notemos que como $1 + 1 = 0$, entonces $1 = -1$. Por lo que si $R = \mathbb{F}_2$, no es necesario para la definición de homología considerar orientaciones.
Ejemplo Sea Δ el complejo simplicial con caras maximales $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4\}\}$. Sea $R = \mathbb{Z}$. Una 1-cadena c está dada por: $1 \wedge 2 \mapsto 3$, $1 \wedge 3 \mapsto 4$, $2 \wedge 3 \mapsto -4$, $3 \wedge 4 \mapsto -1$, $2 \wedge 4 \mapsto 0$. En particular $c(2 \wedge 1) = -3$, $c(4 \wedge 2) = 0$.

Grupo de cadenas

Si c y c' son dos p-cadenas, definimos $(c + c')(\hat{\sigma}) = c(\hat{\sigma}) + c'(\hat{\sigma})$. La colección de todas las p-cadenas $C_p(\Delta, R)$ forma un grupo con esta operación. Más aún, si R es un campo, entonces a $C_p(\Delta, R)$ se le puede dar estructura de un espacio vectorial.
Si $p > \dim \Delta$, definimos $C_p(\Delta, R) = 0$ (el espacio cero).

Cadenas elementales

Cada p-simplejo orientado $\hat{\sigma}$ determina una p-cadena, donde la p-cadena asociada a $\hat{\sigma}$ se define como 1 en el simplejo orientado $\hat{\sigma}$, -1 en el simplejo orientado $\hat{\sigma}'$ y 0 en los demás simplejos orientados. Tal cadena se llama una p-cadena elemental. La cadena elemental determinada por el simplejo orientado $\hat{\sigma}$ se denotará con $\hat{\sigma}$.
Se puede demostrar que si para cada p-simplejo escogemos una orientación, las p-cadenas elementales así obtenidas forman una base de $C_p(\Delta, R)$ cuando R es un campo. Es decir, $\dim C_p(\Delta, R) = f_p$ (donde f es el f-vector). Ejercicio Demostrar lo que se afirma en este párrafo.
(Si $R = \mathbb{Z}$, entonces se obtiene una base, y se muestra que $C_p(\Delta, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano libre).

Operadores frontera

Sea $\hat{\sigma} = v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ una p-cadena elemental. Definimos la frontera de $\hat{\sigma}$ como:

$$\partial_p(\hat{\sigma}) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p. \tag{1}$$

Esta definición se extiende linealmente para obtener una transformación lineal $\partial_p \colon C_p(\Delta, R) \to C_{p-1}(\Delta, R)$.

Observación Hay que checar la definición de frontera no depende de la orientación escogida, es decir que $\partial_p \hat{\sigma} = -\partial_p \hat{\sigma}'$.

Ejemplo. Consideremos $1 \wedge 2 \wedge 3 \in C_2(\Delta, R)$. Tenemos que $\partial_2(1 \wedge 2 \wedge 3) = (-1)^0 2 \wedge 3 + (-1)^1 1 \wedge 3 + (-1)^2 1 \wedge 2 = 2 \wedge 3 - 1 \wedge 3 + 1 \wedge 2$. Además $\partial_2(1 \wedge 3 \wedge 2) = (-1)^0 3 \wedge 2 + (-1)^1 1 \wedge 2 + (-1)^2 1 \wedge 3 = 3 \wedge 2 - 1 \wedge 2 + 1 \wedge 3 = -\partial_2(1 \wedge 2 \wedge 3)$.

Si $\hat{\sigma} = v_0 \in C_0(\Delta, R)$, definimos $\partial_0(\hat{\sigma}) = 1 \in R = C_{-1}(\Delta, R)$.

Teorema La composición de $\partial_{p+1} \colon C_{p+1}(\Delta, R) \to C_p(\Delta, R)$ con $\partial_p \colon C_p(\Delta, R) \to C_{p-1}(\Delta, R)$ es cero para $p \geq 0$. Es decir

Espacio de ciclos y espacio de fronteras.

Definición Para cada $p \geq 0$, el p-espacio de ciclos $Z_p(\Delta, R)$ es $\ker \partial_p$. El p-espacio de fronteras $B_p(\Delta, R)$ es $\mathrm{im}\partial_{p+1}$. Nótese que ambos son subespacios de $C_p(\Delta, R)$. Por el teorema anterior

$$B_p(\Delta, R) \leq Z_p(\Delta, R). \tag{2}$$

[pues si $c \in B_p(\Delta, R)$, existe $d \in C_{p+1}(\Delta, R)$ tal que $\partial_{p+1}(d) = c$. Entonces $\partial_p(c) = \partial_p(\partial_{p+1}(d)) = 0$]

Homología

Para $p \geq 0$, la *p-homología (reducida)* de Δ con coeficientes en R es el cociente $Z_p(\Delta, R)/B_p(\Delta, R)$.