Grupos abelianos

Rafael Villarroel

2021-03-09 16:30 -0500

Un grupo abeliano es un grupo donde la operación es conmutativa. Por convención, la operación en un grupo abeliano se escribe $+$.
Si A es un grupo abeliano, podemos definir na donde $n \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$, de la siguiente manera:

$$na = \begin{cases} a + a + \cdots + a & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0, \\ -(-n)a & \text{si } n < 0 \end{cases} \tag{1}$$

(es decir, un grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo).
En un grupo abeliano, cualquier subgrupo $B \leq A$ es normal. Los elementos del grupo cociente A/B son las clases laterales de los elementos de A. La clase de $a \in A$ se puede escribir como $a + B$ o como $\overline{a}$.
Recordemos: $a_1 \sim a_2$ si $a_1 - a_2 \in B$ define una relación de equivalencia en A donde las clases son las clases laterales.
Ejemplos:

- Sabemos que si $A = \mathbb{Z}$, todo subgrupo de A es de la forma

$n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$ para algún entero positivo n (puesto que todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico). En este caso, la relación $a_1 \sim a_2$ si y solo si $a_1 - a_2 \in n\mathbb{Z}$ se traduce en que $a_1 \sim a_2$ si y solo si existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $a_1 - a_2 = nu$. Y esto a su vez quiere decir $a_1 \equiv a_2 \mod n$. Cada clase de equivalencia de acuerdo a ésta relación es una clase lateral, y podemos escoger a $0, 1, 2, \ldots, n-1$ como representantes de las clases. Por lo tanto el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

- Consideremos el subgrupo de $A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dado por $B = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. En este caso, el cociente A/B se puede obtener usando el morfismo $f\colon A \to \mathbb{Z}$ dado por $f(a, b) = a - b$. Este morfismo es suprayectivo y su kernel es B. Por lo tanto, $A/B \cong \mathbb{Z}$ por el primer teorema de isomorfismos, donde el isomorfismo está dado por $\overline{f}(\overline{(a, b)}) = f(a, b) = a - b$. Como $\overline{f}(\overline{(1, 0)}) = 1$, se tiene que $A/B = \langle\overline{(1, 0)}\rangle$. Esto implica que toda clase de A/B se puede representar por un elemento de la forma $(a, 0)$. Como ejercicio, encuentra el representante de la clase de (a, b).

- Consideremos el subgrupo de $A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dado por $B = \{a(-2, 2) + b(2, 4) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. El cociente de A/B es: $A/B = \{\overline{(0, 0)}, \overline{(0, 1)}, \overline{(-1, 3)}, \overline{(1, 0)}, \overline{(2, 0)}, \overline{(3, 0)}, \overline{(0, 3)}\}$.
¿ $(2, 0) - (1, 0) = (1, 0) \in B$? ¿Existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(1, 0) = a(-2, 2) + b(2, 4)$?
¿Existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $\overline{(x, y)} = \overline{(0, 8)}$, donde x, y sean “más sencillos”.

Tenemos que $\overline{(2,0)} = \overline{(0,2)}$, pues $(2,-2) \in B$.