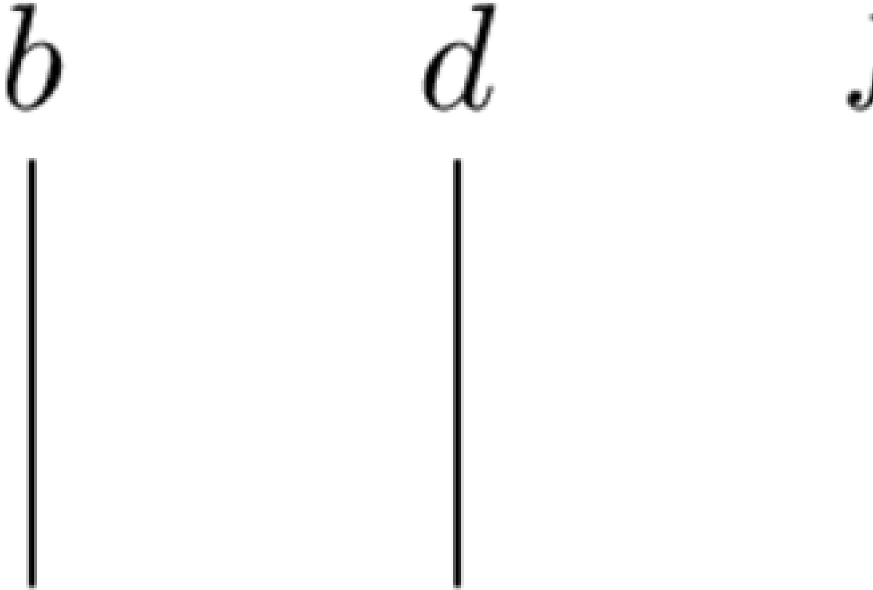
# Homología de un complejo disconexo

Rafael Villarroel

2021-03-23 15:00 -0500

Consideremos el complejo simplicial $\Delta$ cuyo conjunto de caras maximales es $\mathcal{F}(\Delta) = \{ab, cd, ef\}$.


b
d

Calculemos $H_0(\Delta, R) = Z_0(\Delta, R)/B_0(\Delta, R)$. En este caso $Z_0(\Delta, R) = \ker \partial_0$, donde $\partial_0 \colon C_0(\Delta, R) \to C_{-1}(\Delta, R) = R$. La matriz (respecto a las bases usuales) de $\partial_0$ es (111111). Unos conjunto de generadores del espacio nulo de esta matriz es (1,-1,0,0,0,0), (1,0,-1,0,0,0), (1,0,0,-1,0,0), (1,0,0,0,-1,0), (1,0,0,0,0,-1), y esos vectores se corresponden con $a - b, a - c, a - d, a - e, a - f$.

Consideremos $B_0(\Delta, R)$, es decir, la imagen de $\partial_1 \colon C_1(\Delta, R) \to C_0(\Delta, R)$. Tenemos que $H_0(\Delta, R)$ está generado por $\overline{a - b}$, $\overline{a - c}$, $\overline{a - d}$, $\overline{a - e}$, $\overline{a - f}$. Como $\partial_1(b \wedge a) = a - b$, tenemos que $\overline{a - b} = 0$.

Observemos que $a - c = a - d + (d - c) = a - d + \partial_1(c \wedge d)$. Esto implica que $\overline{a - c} = \overline{a - d}$. Análogamente $\overline{a - e} = \overline{a - f}$, pues $a - e = a - f + (f - e) = a - f + \partial_1(e \wedge f)$. Por lo tanto, $H_0(\Delta, R) = \langle \overline{a - c}, \overline{a - e} \rangle$.

## Definiciones

- Si $z_1, z_2 \in Z_n(\Delta, R)$ son tales que $z_1 - z_2 \in B_n(\Delta, R)$, decimos que $z_1, z_2$ son *homólogos*.

*número de Betti*.