Cálculo de homología

Rafael Villarroel

2021-03-08 16:00 -0500

Consideremos el complejo simplicial Δ cuyo conjunto de caras maximales es $\mathcal{F}(\Delta) = \{abc, bd, cd\}$.

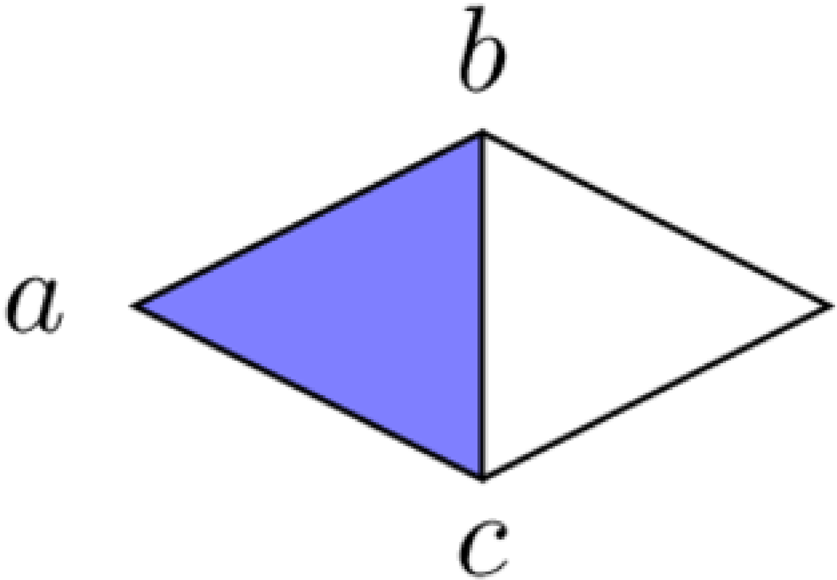

Figure: Ejemplo

Calculemos $H_1(\Delta, R) = Z_1(\Delta, R)/B_1(\Delta, R)$. Consideremos la frontera $\partial_1 \colon C_1(\Delta, R) \to C_0(\Delta, R)$. En las bases dadas por las cadenas elementales, esa transformación lineal tiene matriz:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} a \wedge b & a \wedge c & b \wedge c & b \wedge d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} &
\left(\begin{array}{cccc}
-1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Figure: Matriz de ∂_1

El espacio nulo está generado por

$(1,-1,1,0,0)^T, (-1,1,0,-1,1)^T$. El primer vector se corresponde con $a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$. El segundo vector se corresponde con $-a \wedge b + a \wedge c - b \wedge d + c \wedge d$. Estos dos son generadores de $Z_1(\Delta, R)$.
Este espacio nulo se puede calcular en Python con el siguiente código:

```python
from sympy import Matrix
A=Matrix([[-1,-1, 0, 0, 0],
          [ 1, 0,-1,-1, 0],
          [ 0, 1, 1, 0,-1],
          [ 0, 0, 0, 1, 1]])
A.nullspace()
```

El espacio $B_1(\Delta, R)$ es la imagen de la frontera $\partial_2 \colon C_2(\Delta, R) \to C_1(\Delta, R)$. Esta frontera tiene matriz:

$$
\begin{array}{c c}
 & a \wedge b \wedge c \\
\begin{array}{c} a \wedge b \\ a \wedge c \\ b \wedge c \\ b \wedge d \\ c \wedge d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Figure: Matriz de ∂_2

Como $\partial_2(a \wedge b \wedge c) = a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$, y éste vector es diferente de cero, genera a $B_1(\Delta, R)$. Por lo tanto

$B_1(\Delta, R) = \langle a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c \rangle$.
Tenemos entonces que el cociente $Z_1(\Delta, R)/B_1(\Delta, R)$ está generado por

- $\overline{a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c} = \overline{0}$ y por

Consideremos que $\overline{0} = \overline{(a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c)}$ implica $\overline{b \wedge c} = \overline{-a \wedge b + a \wedge c}$. De ésto, se obtiene que el segundo generador es igual a $\overline{b \wedge c - b \wedge d + c \wedge d}$. Como el primer generador es $\overline{0}$, se obtiene que $H_1(\Delta, R)$ está generado por $\overline{b \wedge c - b \wedge d + c \wedge d}$.
Calculemos $H_2(\Delta, R) = Z_2(\Delta, R)/B_2(\Delta, R)$. En este caso $Z_2(\Delta, R) = \ker \partial_2 = 0$. Además $B_2(\Delta, R)$ es la imagen de $\partial_3 \colon C_3(\Delta, R) \to C_2(\Delta, R)$, por lo que $B_2(\Delta, R) = 0$. Por lo tanto $H_2(\Delta, R) = 0$.
Calculemos $H_0(\Delta, R) = Z_0(\Delta, R)/B_0(\Delta, R)$. En este caso $Z_0(\Delta, R) = \ker \partial_0$, donde $\partial_0 \colon C_0(\Delta, R) \to C_{-1}(\Delta, R) = R$. La matriz (respecto a las bases usuales) de ∂_0 es (1111). Un conjunto de generadores del espacio nulo de esta matriz es $\{(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$, y los vectores de ese

conjunto se corresponden con $a-b, a-c, a-d$.
Calculemos $B_0(\Delta, R)$, es decir, la imagen de $\partial_1 \colon C_1(\Delta, R) \to C_0(\Delta, R)$. Tenemos que $\partial_1(b \wedge a) = a - b$, $\partial_1(c \wedge a) = a - c$, $\partial_1(c \wedge a + d \wedge c) = a - d$. Esto implica que $Z_0(\Delta, R) = B_0(\Delta, R)$, por lo tanto $H_0(\Delta, R) = 0$.

$$H_p(\Delta, R) \cong \begin{cases} R & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p \neq 1 \end{cases} \tag{1}$$