Espacios topológicos

Rafael Villarroel

2021-01-19 15:00 -0500

Espacios topológicos

Un espacio métrico es un conjunto (X, d) donde tenemos una idea de cercanía. La función métrica d permite definir el concepto de función continua como una función que envía puntos cercanos en puntos cercanos. También se definen los conjuntos abiertos. Resulta que las propiedades de los conjuntos abiertos son suficientes para definir estructuras con el concepto de continuidad, con lo cual se generaliza el concepto de espacio métrico.

Funciones continuas

En una función entre espacios métricos (X, d_X), (Y, d_Y), dada por $f\colon X \to Y$, decimos que es continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Se puede definir un conjunto $U \subseteq X$ como abierto si para todo $x \in U$ se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Con esta definición, se puede demostrar que $f\colon X \to Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo U abierto de Y.

Definiciones

Topología

Sea X un conjunto. Una topología en X es una colección τ de subconjuntos de X tal que:

Definiciones

Topología

Sea X un conjunto. Una topología en X es una colección τ de subconjuntos de X tal que:

- $\emptyset, X \in \tau$,

Definiciones

Topología

Sea X un conjunto. Una topología en X es una colección τ de subconjuntos de X tal que:

- $\emptyset, X \in \tau$,
- Si $U_\alpha \in \tau$ para todo $\alpha \in I$, entonces $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

Definiciones

Topología

Sea X un conjunto. Una topología en X es una colección τ de subconjuntos de X tal que:

- $\emptyset, X \in \tau$,
- Si $U_\alpha \in \tau$ para todo $\alpha \in I$, entonces $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.
- Si $U_1, U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Definiciones

Topología

Sea X un conjunto. Una topología en X es una colección τ de subconjuntos de X tal que:

- $\emptyset, X \in \tau$,
- Si $U_\alpha \in \tau$ para todo $\alpha \in I$, entonces $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.
- Si $U_1, U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Espacio topológico

Un espacio topológico es una pareja (X, τ) tal que τ es una topología en X.
En un espacio topológico, los elementos de τ se llaman conjuntos abiertos.

Ejemplos

- Para cualquier conjunto X, la colección $\tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología en X.

Ejemplos

- Para cualquier conjunto X, la colección $\tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología en X.
- Dado (X, d) un espacio métrico, la colección $\tau = \{U \subseteq X \mid$ para todo $x \in X$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq U\}$ es una topología en X.

Ejemplos

- Para cualquier conjunto X, la colección $\tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología en X.
- Dado (X, d) un espacio métrico, la colección $\tau = \{U \subseteq X \mid$ para todo $x \in X$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq U\}$ es una topología en X.
- Un caso particular es $X = \mathbb{R}^n$. Tenemos que X es un espacio métrico con la métrica usual. Si $Y \subseteq X = \mathbb{R}^n$, se tiene una métrica en Y que está heredada de la métrica de X. Usando tal métrica, se pueden definir abiertos en Y, y por lo tanto, se le puede dar a Y una topología. En ese sentido, decimos que Y es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Funciones continuas

Si tenemos una función entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$, se dice que es continua si y solo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo U abierto de Y.