Homotopía

Rafael Villarroel

2021-02-09 16:00 -0500

Sea $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topología usual.

Homotopía

Sean X, Y dos espacios topológicos. Sean $f, g\colon X \to Y$ dos funciones continuas. Una homotopía entre f y g es una función continua $H\colon X \times I \to Y$ tal que:

- $H(x, 0) = f(x)$ para todos $x \in X$,

Homotopía

Sean X, Y dos espacios topológicos. Sean $f, g\colon X \to Y$ dos funciones continuas. Una homotopía entre f y g es una función continua $H\colon X \times I \to Y$ tal que:

- $H(x, 0) = f(x)$ para todos $x \in X$,
- $H(x, 1) = g(x)$ para todos $x \in X$. Si existe una homotopía entre f y g, decimos que f, g son homotópicas, y escribimos $f \simeq g$.

Observación

Para cada $t_0 \in I$ fijo, tenemos que $x \mapsto H(x, t_0)$ es una función continua de X en Y. La definición de homotopía entonces exige que haya una manera de cambiar continuamente desde la función f hasta la función g.

Teorema

La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones continuas de X a Y. (No lo vamos a demostrar, pero como ejercicio se deja demostrar que es reflexiva y simétrica).

Definición

Sean X, Y dos espacios y $f\colon X \to Y$ una función continua. Decimos que f es una equivalencia homotópica si existe $g\colon Y \to X$ continua tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Si existe una equivalencia homotópica entre X y Y, decimos que X, Y son homotópicos, o bien que tienen el mismo tipo de homotopía, y lo denotamos $X \simeq Y$. En este caso, se dice que g es una inversa homotópica de f.

Ejemplo

Si dos espacios son homeomorfos, entonces son homotópicos.

Ejercicio

Demuestra que la relación de homotopía es una relación de equivalencia en la clase de todos los espacios topológicos.

Definición

Sea X un espacio, y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Sea $D\colon X \times I \to X$ continua tal que:

- $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,

Definición

Sea X un espacio, y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Sea $D \colon X \times I \to X$ continua tal que:

- $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,
- $D(x, 1) \in Y$ para todo $x \in X$.

Definición

Sea X un espacio, y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Sea $D\colon X \times I \to X$ continua tal que:

- $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,
- $D(x, 1) \in Y$ para todo $x \in X$.
- $D(y, t) = y$ para todos $y \in Y$, $t \in I$. Decimos que D define un retracto fuerte por deformación de X en Y.

Teorema

Si D es un retracto fuerte por deformación de X en Y, se tiene que $X \simeq Y$.

Demostración

Sea $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = D(x, 1)$. Sea $g\colon Y \to X$ dada por la inclusión (es decir, $g(y) = y$). Entonces:

- Si $y \in Y$, tenemos que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y, 1) = y$. Es decir $f \circ g = 1_Y$.

Demostración

Sea $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = D(x,1)$. Sea $g\colon Y \to X$ dada por la inclusión (es decir, $g(y) = y$). Entonces:

- Si $y \in Y$, tenemos que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y,1) = y$. Es decir $f \circ g = 1_Y$.
- Si $x \in X$, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(D(x,1)) = D(x,1)$. Observemos que D es una homotopía entre 1_X y $g \circ f$, pues:

Demostración

Sea $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = D(x,1)$. Sea $g\colon Y \to X$ dada por la inclusión (es decir, $g(y) = y$). Entonces:

- Si $y \in Y$, tenemos que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y,1) = y$. Es decir $f \circ g = 1_Y$.
- Si $x \in X$, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(D(x,1)) = D(x,1)$. Observemos que D es una homotopía entre 1_X y $g \circ f$, pues:
  - $D(x,0) = x = 1_X(x)$,

Demostración

Sea $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = D(x,1)$. Sea $g\colon Y \to X$ dada por la inclusión (es decir, $g(y) = y$). Entonces:

- Si $y \in Y$, tenemos que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y,1) = y$. Es decir $f \circ g = 1_Y$.
- Si $x \in X$, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(D(x,1)) = D(x,1)$. Observemos que D es una homotopía entre 1_X y $g \circ f$, pues:
  - $D(x,0) = x = 1_X(x)$,
  - $D(x,1) = (g \circ f)(x)$.

Ejercicio

Di un espacio sencillo al cual es homotópica la banda de Moebius.