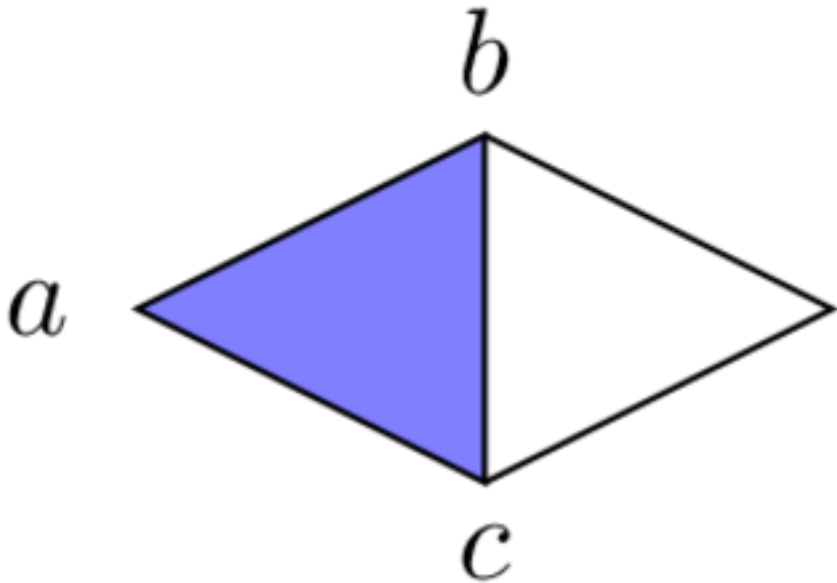


# Cálculo de homología

Rafael Villarroel

2021-03-08 16:00 -0500

Consideremos el complejo simplicial  $\Delta$  cuyo conjunto de caras maximales es  $\mathcal{F}(\Delta) = \{abc, bd, cd\}$ .



Calculemos  $H_1(\Delta, R) = Z_1(\Delta, R)/B_1(\Delta, R)$ . Consideremos la frontera  $\partial_1: C_1(\Delta, R) \rightarrow C_0(\Delta, R)$ . En las bases dadas por las cadenas elementales, esa transformación lineal tiene matriz:

$$\begin{matrix} & a \wedge b & a \wedge c & b \wedge c & b \wedge d & c \wedge d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Figure: Matriz de  $\partial_1$

El espacio nulo está generado por

$(1, -1, 1, 0, 0)^T, (-1, 1, 0, -1, 1)^T$ . El primer vector se corresponde con  $a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$ . El segundo vector se corresponde con  $-a \wedge b + a \wedge c - b \wedge d + c \wedge d$ . Estos dos son generadores de  $Z_1(\Delta, R)$ .

Este espacio nulo se puede calcular en Python con el siguiente código:

```
from sympy import Matrix
A=Matrix([[ -1, -1,  0,  0,  0],
          [  1,  0, -1, -1,  0],
          [  0,  1,  1,  0, -1],
          [  0,  0,  0,  1,  1]])
A.nullspace()
```

El espacio  $B_1(\Delta, R)$  es la imagen de la frontera  
 $\partial_2: C_2(\Delta, R) \rightarrow C_1(\Delta, R)$ . Esta frontera tiene matriz:

$$\begin{array}{l}
 a \wedge b \wedge c \\
 a \wedge b \\
 a \wedge c \\
 b \wedge c \\
 b \wedge d \\
 c \wedge d
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 -1 \\
 1 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

Figure: Matriz de  $\partial_2$

Como  $\partial_2(a \wedge b \wedge c) = a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$ , y éste vector es diferente de cero, genera a  $B_1(\Delta, R)$ . Por lo tanto

$$B_1(\Delta, R) = \langle a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c \rangle.$$

Tenemos entonces que el cociente  $Z_1(\Delta, R)/B_1(\Delta, R)$  está generado por

- $\overline{a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c} = \bar{0}$  y por

Consideremos que  $\bar{0} = \overline{a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c}$  implica  $\overline{b \wedge c} = \overline{-a \wedge b + a \wedge c}$ . De ésto, se obtiene que el segundo generador es igual a  $\overline{b \wedge c - b \wedge d + c \wedge d}$ . Como el primer generador es  $\bar{0}$ , se obtiene que  $H_1(\Delta, R)$  está generado por  $\overline{b \wedge c - b \wedge d + c \wedge d}$ .

Calculemos  $H_2(\Delta, R) = Z_2(\Delta, R)/B_2(\Delta, R)$ . En este caso  $Z_2(\Delta, R) = \ker \partial_2 = 0$ . Además  $B_2(\Delta, R)$  es la imagen de  $\partial_3: C_3(\Delta, R) \rightarrow C_2(\Delta, R)$ , por lo que  $B_2(\Delta, R) = 0$ . Por lo tanto  $H_2(\Delta, R) = 0$ .

Calculemos  $H_0(\Delta, R) = Z_0(\Delta, R)/B_0(\Delta, R)$ . En este caso  $Z_0(\Delta, R) = \ker \partial_0$ , donde  $\partial_0: C_0(\Delta, R) \rightarrow C_{-1}(\Delta, R) = R$ . La matriz (respecto a las bases usuales) de  $\partial_0$  es (1111). Un conjunto de generadores del espacio nulo de esta matriz es  $(1, -1, 0, 0)(1, 0, -1, 0)(1, 0, 0, -1)$ , los cuales se

corresponden con  $a - b$ ,  $a - c$ ,  $a - d$ .

Calculemos  $B_0(\Delta, R)$ , es decir, la imagen de

$\partial_1: C_1(\Delta, R) \rightarrow C_0(\Delta, R)$ . Tenemos que  $\partial_1(b \wedge a) = a - b$ ,  
 $\partial_1(c \wedge a) = a - c$ ,  $\partial_1(c \wedge a + d \wedge c) = a - d$ . Esto implica que  
 $Z_0(\Delta, R) = B_0(\Delta, R)$ , por lo tanto  $H_0(\Delta, R) = 0$ .

$$H_p(\Delta, R) \cong \begin{cases} R & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p \neq 1 \end{cases} \quad (1)$$