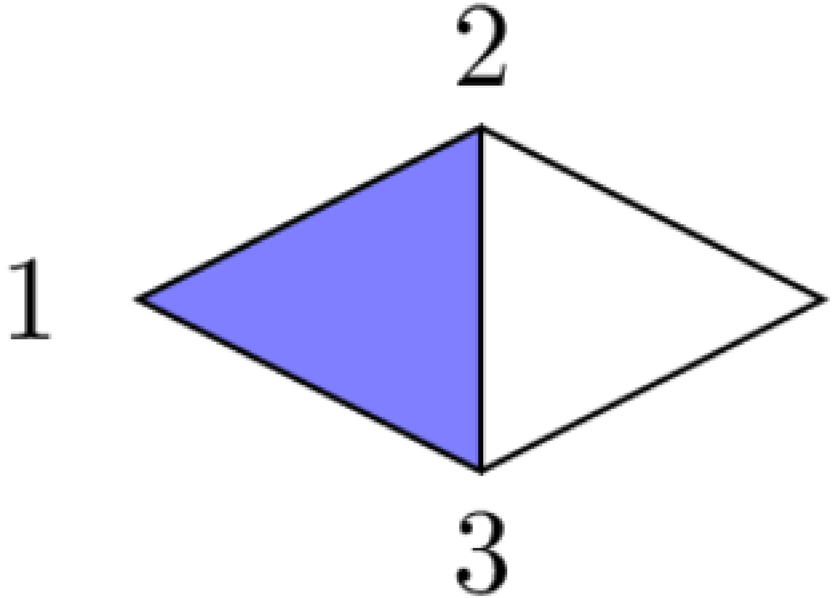
Ejemplos de cadenas

Rafael Villarroel

2021-03-01 15:00 -0500

Consideremos el complejo simplicial Δ cuyo conjunto de caras maximales es $\mathcal{F}(\Delta) = \{123, 24, 34\}$.


2
1
3

Escribamos listas de simplejos de Δ de acuerdo a su dimensión:

- (-1)-simplejo: $\emptyset$.

Ahora, escribamos listas de simplejos orientados de Δ.

Recordemos que si $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2\}$. Una p-cadena es una función $c\colon \Delta^p \to R$ tal que $c(\hat{\sigma}) = -c(\hat{\sigma}')$ si $\sigma = \sigma'$, pero $\hat{\sigma}$ tiene orientación diferente a $\hat{\sigma}'$.
Representemos una cadena como una matriz con dos renglones, donde en el primer renglón colocaremos a los

elementos del dominio (los simplejos orientados) y en el segundo renglón pondremos los valores asociados.
Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

es una 0-cadena,

$$\begin{pmatrix} 1\wedge 2 & 1\wedge 3 & 2\wedge 3 & 2\wedge 4 & 3\wedge 4 & 2\wedge 1 & 3\wedge 1 & 3\wedge 2 & 4\wedge 2 \\ -3 & 2 & 0 & -2 & 10 & 3 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

es una 1-cadena, y

$$\begin{pmatrix} 1\wedge 2\wedge 3 & 1\wedge 3\wedge 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

es una 2-cadena.
Hay varias simplificaciones que podemos hacer a la notación. Por ejemplo, en la 1-cadena (2), se puede no escribir las segundas cinco entradas, ya que están determinadas por las

primeras cinco entradas. Es decir, tal cadena podría haberse escrito simplemente como:

$$\begin{pmatrix} 1 \wedge 2 & 1 \wedge 3 & 2 \wedge 3 & 2 \wedge 4 & 3 \wedge 4 \\ -3 & 2 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Similarmente, una 2-cadena como 3 está determinada por su valor en $1 \wedge 2 \wedge 3$.

Dos p-cadenas se pueden sumar, obteniendo otra p-cadena. También se pueden multiplicar por elementos de R.

Cada simplejo orientado determina una cadena. Por ejemplo, $1 \wedge 3$ determina:

$$\begin{pmatrix} 1 \wedge 2 & 1 \wedge 3 & 2 \wedge 3 & 2 \wedge 4 & 3 \wedge 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Estas cadenas se llaman cadenas elementales. La cadena elemental 5 se denotará simplemente como $1 \wedge 3$.