Otro cálculo de homología

Rafael Villarroel

2021-03-18 15:00 -0500

Consideremos el complejo simplicial Δ cuyo conjunto de caras maximales es $\mathcal{F}(\Delta) = \{abc, bcd\}$.

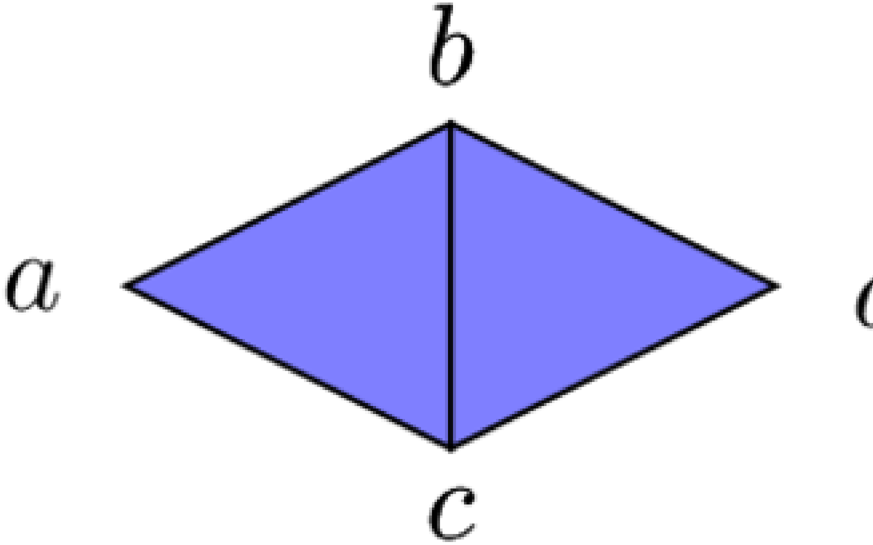

Figure: Ejemplo

Calculemos $H_0(\Delta, R) = Z_0(\Delta, R)/B_0(\Delta, R)$. En este caso $Z_0(\Delta, R) = \ker \partial_0$, donde $\partial_0 \colon C_0(\Delta, R) \to C_{-1}(\Delta, R) = R$. La matriz (respecto a las bases usuales) de ∂_0 es (1111). Un conjunto de generadores del espacio nulo de esta matriz es $(1, -1, 0, 0)(1, 0, -1, 0)(1, 0, 0, -1)$, los cuales se corresponden con $a - b, a - c, a - d$.

Calculemos $B_0(\Delta, R)$, es decir, la imagen de $\partial_1 \colon C_1(\Delta, R) \to C_0(\Delta, R)$. Tenemos que $\partial_1(b \wedge a) = a - b$,
$\partial_1(c \wedge a) = a - c$,
$\partial_1(c \wedge a + d \wedge c) = (a - c) + (c - d) = a - d$. Esto implica que $Z_0(\Delta, R) = B_0(\Delta, R)$, por lo tanto $H_0(\Delta, R) = 0$.

Calculemos $H_1(\Delta, R) = Z_1(\Delta, R)/B_1(\Delta, R)$. Consideremos la frontera $\partial_1 \colon C_1(\Delta, R) \to C_0(\Delta, R)$. En las bases dadas por las cadenas elementales, esa transformación lineal tiene matriz:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a \wedge b & a \wedge c & b \wedge c & b \wedge d & c \wedge \\
\hline
a & -1 & -1 & 0 & 0 & \\
b & 1 & 0 & -1 & -1 & \\
c & 0 & 1 & 1 & 0 & - \\
d & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Figure: Matriz de ∂_1

El espacio nulo está generado por $(1, -1, 1, 0, 0)^T, (-1, 1, 0, -1, 1)^T$. El primer vector se corresponde con $a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$. El segundo vector se corresponde con $-a \wedge b + a \wedge c - b \wedge d + c \wedge d$. Estos dos son generadores de $Z_1(\Delta, R)$.

El espacio $B_1(\Delta, R)$ es la imagen de la frontera $\partial_2 \colon C_2(\Delta, R) \to C_1(\Delta, R)$. Esta frontera tiene matriz:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} a\wedge b\wedge c & b\wedge c\wedge d \end{array} \\
\begin{array}{c} a\wedge b \\ a\wedge c \\ b\wedge c \\ b\wedge d \\ c\wedge d \end{array} &
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Figure: Matriz de ∂_2

Tenemos que $\partial_2(a \wedge b \wedge c) = a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$, y también que $\partial_2(b \wedge c \wedge d) = c \wedge d - b \wedge d + b \wedge c$. Estos dos vectores generan a $B_1(\Delta, R)$. Por lo tanto $B_1(\Delta, R) = \langle a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c, c \wedge d - b \wedge d + b \wedge c \rangle$. Tenemos entonces que el cociente $Z_1(\Delta, R)/B_1(\Delta, R)$ está generado por

- $\overline{a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c} = \overline{0}$ (pues $\partial_2(a \wedge b \wedge c) = a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$)

Como sus dos generadores son $\overline{0}$, se obtiene que $H_1(\Delta, R)$ es el grupo trivial.
Calculemos $H_2(\Delta, R) = Z_2(\Delta, R)/B_2(\Delta, R)$. En este caso $Z_2(\Delta, R) = \ker \partial_2 = 0$. Además $B_2(\Delta, R)$ es la imagen de $\partial_3 \colon C_3(\Delta, R) \to C_2(\Delta, R)$, por lo que $B_2(\Delta, R) = 0$ (pues $C_3(\Delta, R) = 0$). Por lo tanto $H_2(\Delta, R) = 0$.
$H_p(\Delta, R) = 0$ para todo $p \geq 0$.
Teorema Sean Δ_1 y Δ_2 complejos simpliciales tales que $|\Delta_1| \simeq |\Delta_2|$. Entonces $H_p(\Delta_1, R) \cong H_p(\Delta_2, R)$ para todo $p \geq 0$.