Funtores

Rafael Villarroel

2021-02-18 15:30 -0500

Sean $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ dos categorías. Un funtor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ consta de:

- Una función $F\colon \mathrm{obj}\mathbf{C} \to \mathrm{obj}\mathbf{D}$.

en G, decimos que F es un funtor olvidadizo. También existe un funtor olvidadizo $\mathbb{R}\mathbf{Vect} \to \mathbf{AbGrp}$.

- Sea $\mathbf{C} = \mathbf{Grp}$, y sea $\mathbf{D} = \mathbf{AbGrp}$. Recordemos que con $G' \leq G$ se denota el subgrupo generado por $\{a^{-1}b^{-1}ab \mid a, b \in G\}$. Se tiene que en general, G' es un subgrupo normal y G/G' es abeliano. Definimos $F\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{AbGrp}$ como $F(G) = G/G'$. Sea $f\colon G \to H$ un morfismo de grupos. Queremos definir $F(f)\colon G/G' \to H/H'$. Como se cumple $f(G') \subseteq H'$, se puede definir $F(f)(gG') = f(g)H'$.
- Un funtor $\Delta\colon \mathbf{Graph} \to \mathbf{SimpComp}$, donde, si G es una gráfica (es decir, un objeto de la categoría **Graph**), definimos a $\Delta(G)$ como el complejo simplicial de completas de la gráfica G. Si $f\colon G_1 \to G_2$ es un morfismo de gráficas (de modo que $v_1 \sim v_2$ implica $f(v_1) \sim f(v_2)$ o $f(v_1) = f(v_2)$), definimos $\Delta(f)\colon \Delta(G_1) \to \Delta(G_2)$ como $\Delta(f)(\sigma) = f(\sigma)$.
- Un funtor $|\cdot|\colon \mathbf{SimpComp} \to \mathbf{Top}$ dado por la realización geométrica. Es decir, dado Δ un complejo simplicial, le

podemos asociar un espacio topológico $|\Delta|$. Dado un mapeo simplicial $f\colon \Delta_1 \to \Delta_2$, anteriormente le asociamos una función continua $|f|\colon |\Delta_1| \to |\Delta_2|$.

- Para cada $n \geq 0$, definiremos un funtor $H_n\colon \mathbf{SimpComp} \to \mathbf{AbGrp}$ que se llama la homología.