Realización geométrica

Rafael Villarroel

2021-01-21 15:00 -0500

Idea general

A cada complejo simplicial Δ le queremos asociar un espacio topológico que denotaremos con $|\Delta|$, que se llama su realización geométrica. Vamos a considerar un número n suficientemente grande, y entonces $|\Delta|$ será un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Por cada simplejo de dimensión 0, ponemos un punto en $\mathbb{R}^n$. Por cada simplejo de dimensión 1, ponemos un segmento de recta entre los puntos del simplejo. Por cada simplejo de dimensión 2, ponemos un triángulo entre sus vértices, etc.

Ejemplos

- Consideremos el complejo simplicial Δ_1 con facetas $\{\{1,2,3\},\{2,4\}\}$.

Ejemplos

- Consideremos el complejo simplicial Δ_1 con facetas $\{\{1,2,3\},\{2,4\}\}$.
- Δ_2 con caras maximales $\{12, 23, 34, 145\}$.

Ejemplos

- Consideremos el complejo simplicial Δ_1 con facetas $\{\{1,2,3\},\{2,4\}\}$.
- Δ_2 con caras maximales $\{12,23,34,145\}$.
- Δ_3 con caras maximales $\{012,123,03\}$.

Ejemplos

- Consideremos el complejo simplicial Δ_1 con facetas $\{\{1,2,3\},\{2,4\}\}$.
- Δ_2 con caras maximales $\{12,23,34,145\}$.
- Δ_3 con caras maximales $\{012,123,03\}$.
- Δ_4 con caras maximales $\{145,246,356,12,23,13\}$.

Ejemplos

- Consideremos el complejo simplicial Δ_1 con facetas $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}\}$.
- Δ_2 con caras maximales $\{12, 23, 34, 145\}$.
- Δ_3 con caras maximales $\{012, 123, 03\}$.
- Δ_4 con caras maximales $\{145, 246, 356, 12, 23, 13\}$.
- Δ_5 con caras maximales $\{12345\}$ (4-simplejo).

Ejemplos

- Consideremos el complejo simplicial Δ_1 con facetas $\{\{1,2,3\},\{2,4\}\}$.
- Δ_2 con caras maximales $\{12, 23, 34, 145\}$.
- Δ_3 con caras maximales $\{012, 123, 03\}$.
- Δ_4 con caras maximales $\{145, 246, 356, 12, 23, 13\}$.
- Δ_5 con caras maximales $\{12345\}$ (4-simplejo).
- Tarea: Δ_6 con caras maximales $\{124, 126, 134, 135, 156, 235, 245, 236, 346, 456\}$.

Independencia afín

Decimos que el conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ es afínmente independiente si $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ es linealmente independiente. Por convención, todo conjunto con un solo punto es afínmente independiente.

Tarea Demostrar que la propiedad de que un conjunto sea afínmente independiente no depende del punto escogido como x_0.

Ejemplo En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es afínmente independiente.

Tarea Demuestra que si un conjunto no es afínmente independiente, pasa uno de:

- hay tres puntos colineales

Independencia afín

Decimos que el conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ es afínmente independiente si $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ es linealmente independiente. Por convención, todo conjunto con un solo punto es afínmente independiente.

Tarea Demostrar que la propiedad de que un conjunto sea afínmente independiente no depende del punto escogido como x_0.

Ejemplo En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es afínmente independiente.

Tarea Demuestra que si un conjunto no es afínmente independiente, pasa uno de:

- hay tres puntos colineales
- hay cuatro puntos coplanares

Independencia afín

Decimos que el conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ es afínmente independiente si $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ es linealmente independiente. Por convención, todo conjunto con un solo punto es afínmente independiente.

Tarea Demostrar que la propiedad de que un conjunto sea afínmente independiente no depende del punto escogido como x_0.

Ejemplo En $\mathbb{R}^3$, el conjunto $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es afínmente independiente.

Tarea Demuestra que si un conjunto no es afínmente independiente, pasa uno de:

- hay tres puntos colineales
- hay cuatro puntos coplanares
- etc.

Simplejo geométrico

Consideremos el conjunto $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ que sea afínmente independiente. El simplejo geométrico generado por σ es el subespacio:
$|\sigma| = \{\sum_{i=0}^{k} t_i x_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Por ejemplo, el simplejo geométrico generado por un punto es el mismo punto. Si $\sigma = \{x_0, x_1\}$, entonces $|\sigma|$ es el segmento de recta de x_0 a x_1. Si $\sigma = \{x_0, x_1, x_2\}$, entonces $|\sigma|$ es el triángulo con vértices x_0, x_1, x_2, etc.

Realización geométrica

Sea Δ un complejo simplicial. Sea $\Delta_0 = \cup \Delta^{(0)}$. Sea $\phi\colon \Delta_0 \to \mathbb{R}^n$ una función tal que $\phi(\Delta_0)$ sea afínmente independiente (por ejemplo, si $k + 1 = |\Delta_0|$, podemos mandar al primer vértice al $0 \in \mathbb{R}^k$ y los restantes elementos de Δ_0 a la base canónica.). Entonces $|\Delta|_\phi = \cup_{\sigma \in \Delta} |\sigma|_\phi$, donde $|\sigma|_\phi$ es el simplejo geométrico generado por $\phi(\sigma)$.