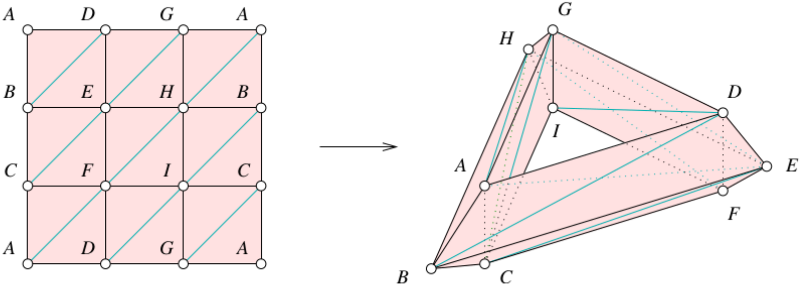
Homología del toro

Rafael Villarroel

2021-03-23 15:00 -0500

Consideremos el complejo simplicial Δ.



Hay 9 0-simplejos, por lo tanto
$C_0(\Delta, R) = \langle A, B, C, D, E, F, G, H, I \rangle$. Tenemos que
$\dim C_1(\Delta, R) = 27$, y $\dim C_2(\Delta, R) = 18$.
Observemos que $A \wedge B + B \wedge C + C \wedge A \in Z_1(\Delta, R)$, pues
$\partial_1(A \wedge B + B \wedge C + C \wedge A) = B - A + (C - B) + (A - C) = 0$.
(En adelante, escribiremos las cadenas elementales sin el símbolo $\wedge$)
También $DE + EF + FD \in Z_1(\Delta, R)$.

Consideremos $\partial_2(ABD + BED + BCE + CFE + AFC + ADF)$. Esto es igual a:

$$\begin{aligned} & BD - AD + AB + ED - BD + BE + CE - BE + BC \\ & \quad + FE - CE + CF + FC - AC + AF + DF - AF + AD \\ & = AB + ED + BC + FE - AC + DF \\ & = AB + BC + CA - DE - EF - FD \end{aligned} \tag{1}$$

La diferencia del ciclo $AB + BC + CA$ con el ciclo $DE + EF + FD$ es entonces una frontera. Se dice que tales ciclos son homólogos. Nótese que si dos ciclos son homólogos, entonces representan la misma clase en $H_1(\Delta, R)$. Similarmente $AD + DG + GA \in Z_1(\Delta, R)$. Se puede demostrar que representa una clase diferente a la de $AB + BC + CA$ en $H_1(\Delta, R)$.
Consideremos ahora $AF + FH + HA$. Es también un ciclo, pues $\partial_1(AF + FH + HA) = F - A + H - F + A - H = 0$. Sin embargo, en este caso no representa una clase diferente,

pues se puede demostrar que es homólogo a la suma de los dos ciclos mencionados anteriormente.