Característica de Euler

Rafael Villarroel

2021-01-25 15:00 -0500

Sea Δ un complejo simplicial de dimensión d. Sea $f_i(\Delta)$ igual a la cantidad de simplejos en Δ de dimensión i para $i = -1, 0, 1, \dots, d$. El f-vector de Δ está definido como $f(\Delta) = (f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_d)$.

La característica (reducida) de Euler $\tilde{\chi}(\Delta)$ de Δ se define como $\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{d}(-1)^i f_i(\Delta)$. (En general, durante el curso, toda característica de Euler será reducida)

Por ejemplo, si Δ es el complejo simplicial con caras maximales $12, 13, 23$, entonces Δ tiene dimensión $d = 2$, su f-vector es $f(\Delta) = (1, 3, 3)$, y su característica de Euler es $\tilde{\chi}(\Delta) = -1 + 3 - 3 = -1$.

Si $\Delta = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$, entonces Δ tiene dimensión $d = n - 1$, $f_i(\Delta) = \binom{n}{i+1}$, y su característica de Euler es $\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{n-1}(-1)^i \binom{n}{i+1} = 0$.

Similarmente, vimos varios ejemplos de triangulaciones de un polígono en $\mathbb{R}^2$, y todas tuvieron característica de Euler igual a 0. (Es decir, observamos que si tenemos una triangulación del espacio $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$, su característica de

Euler es 0).
También vimos triangulaciones de la esfera, como el octaedro y el icosaedro, y algunas triangulaciones no regulares, y todas ellas tuvieron característica de Euler igual a 1. Concluimos que el valor de la característica de Euler depende más de la *forma* que de la *métrica.*