Espacios contraíbles

Rafael Villarroel

2021-02-11 15:00 -0500

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es contraíble si es homotópico al espacio de un punto.

- Un espacio convexo es contraíble. [Un espacio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si para todos $x_1, x_2 \in X$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que $(1-t)x_1 + tx_2 \in X$. Sea $x_0 \in X$. Definamos $D\colon X \times I \to X$ como $D(x, t) = (1-t)x + tx_0$. Entonces D es un retracto fuerte por deformación de X en $\{x_0\}$.]

Lema Sea X un espacio topológico contraíble. Entonces cualquier función continua $f\colon S^n \to X$ se puede extender a una función $F\colon B^{n+1} \to X$.

Teorema. Sea X un espacio topológico. Sea $\mathcal{C} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta finita. Supongamos que toda intersección no vacía $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cdots \cap U_{\alpha_k} \neq \emptyset$ de elementos de la cubierta es contraíble, entonces $X \simeq \mathcal{N}(\mathcal{C})$.

Corolario. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, sea $\epsilon > 0$. Si $\mathcal{C} = \{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \mid x \in S\}$, entonces el complejo de Čech $\mathcal{N}_\epsilon(S) \simeq \cup_{x \in S} B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. [pues $\mathcal{C}$ es una cubierta de $\cup_{x \in S} B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ y toda intersección de una cantidad finita de bolas no vacía es un conjunto convexo, por lo tanto, contraíble].