Unicidad de la realización geométrica

Rafael Villarroel

2021-01-26 15:00 -0500

Homeomorfismo

Dos espacios métricos X, Y son homeomorfos si existen funciones $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ continuas, tales que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Esto se denota como $X \cong Y$.

Lema

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto afínmente independiente. Para $v \in A$, definimos la función $t_v \colon |A| \to \mathbb{R}$, donde $t_v(\alpha)$ es la coordenada baricéntrica correspondiente a v de α (es decir, $\alpha = t_v(\alpha)v + \sum_{w \in A - \{v\}} t_w w$ y $\sum_{w \in A} t_w = 1$). Entonces t_v es continua.

Lema del pegado

Sean X, Y dos espacios topológicos, y sean $F_1, F_2 \subseteq X$ conjuntos cerrados tales que $X = F_1 \cup F_2$. Sean $f_1 \colon F_1 \to Y$ y $f_2 \colon F_2 \to Y$ funciones continuas. Supongamos que $f_1(x) = f_2(x)$ si $x \in F_1 \cap F_2$. Entonces la función $f \colon X \to Y$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in F_1, \\ f_2(x) & \text{si } x \in F_2 \end{cases} \tag{1}$$

es continua.

Observación

El lema del pegado puede extenderse por inducción al caso en el que X es igual a la unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados.

Observación

Sea Δ un complejo simplicial, y sea $\phi\colon \Delta_0 \to \mathbb{R}^n$ un encaje afín. Supongamos $\alpha \in |\sigma|_\phi \cap |\tau|_\phi$. Para cada $v \in \phi(\sigma)$ existe una función t_v^σ como en el lema 3. Si además $v \in \phi(\tau)$, entonces existe una función t_v^τ. Como ϕ es un encaje afín, existe $\rho \in \Delta$ tal que $|\rho|_\phi = |\sigma|_\phi \cap |\tau|_\phi$,

Teorema

Sea Δ un complejo simplicial. Sean $\phi\colon \Delta_0 \to \mathbb{R}^n$ y $\psi\colon \Delta_0 \to \mathbb{R}^m$ dos encajes afines. Entonces $|\Delta|_\phi$ es homeomorfo a $|\Delta|_\psi$.

Demostración

Sea $\Delta_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$. Sea $\alpha \in |\Delta|_\phi$. Entonces $\alpha \in |\sigma|_\phi$ para algún $\sigma \in \Delta$. Supongamos que $\sigma = \{x_{i_0}, x_{i_i}, \ldots, x_{i_s}\}$. Supongamos $\alpha = \sum_{j=0}^{s} t_{i_j} \phi(x_{i_j})$. Definimos $f(\alpha)$ como $f(\alpha) = \sum_{j=0}^{s} t_{i_j} \psi(x_{i_j})$. Para demostrar que la función $f : |\Delta|_\phi \to |\Delta|_\psi \subseteq \mathbb{R}^m$ es continua, basta con demostrar que para cada simplejo $\sigma \in \Delta$ se tiene que la función que extrae las coordenadas baricéntricas de $|\sigma|_\phi$ es continua.