Homotopía

Rafael Villarroel

2021-02-09 16:00 -0500

Sea $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topología usual.

Homotopía

Sean X, Y dos espacios topológicos. Sean $f, g\colon X \to Y$ dos funciones continuas. Una homotopía entre f y g es una función continua $H\colon X \times I \to Y$ tal que:

- $H(x, 0) = f(x)$ para todos $x \in X$,

Homotopía

Sean X, Y dos espacios topológicos. Sean $f, g\colon X \to Y$ dos funciones continuas. Una homotopía entre f y g es una función continua $H\colon X \times I \to Y$ tal que:

- $H(x, 0) = f(x)$ para todos $x \in X$,
- $H(x, 1) = g(x)$ para todos $x \in X$. Si existe una homotopía entre f y g, decimos que f, g son homotópicas, y escribimos $f \simeq g$.

Observación

Para cada $t_0 \in I$ fijo, tenemos que $x \mapsto H(x, t_0)$ es una función continua de X en Y. La definición de homotopía entonces exige que haya una manera de cambiar continuamente desde la función f hasta la función g.

Teorema

La relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones continuas de X a Y. (No lo vamos a demostrar, pero como ejercicio se deja demostrar que es reflexiva y simétrica).

Definición

Sean X, Y dos espacios y $f\colon X \to Y$ una función continua. Decimos que f es una equivalencia homotópica si existe $g\colon Y \to X$ continua tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Si existe una equivalencia homotópica entre X y Y, decimos que X, Y son homotópicos, o bien que tienen el mismo tipo de homotopía, y lo denotamos $X \simeq Y$.

Ejemplo

Si dos espacios son homeomorfos, entonces son homotópicos.

Definición

Sea X un espacio, y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Sea $D\colon X \times I \to X$ continua tal que:

- $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,

Definición

Sea X un espacio, y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Sea $D\colon X \times I \to X$ continua tal que:

- $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,
- $D(x, 1) \in Y$ para todo $x \in X$.

Definición

Sea X un espacio, y sea $Y \subseteq X$ un subespacio. Sea $D\colon X \times I \to X$ continua tal que:

- $D(x, 0) = x$ para todo $x \in X$,
- $D(x, 1) \in Y$ para todo $x \in X$.
- $D(y, t) = y$ para todos $y \in Y$, $t \in I$. Decimos que D define un retracto fuerte por deformación de X en Y.

Teorema

Si D es un retracto fuerte por deformación de X en Y, se tiene que $X \simeq Y$.

Demostración

Sea $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = D(x,1)$. Sea $g\colon Y \to X$ dada por la inclusión (es decir, $g(y) = y$). Entonces:

- Si $y \in Y$, tenemos que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y,1) = y$. Es decir $f \circ g = 1_Y$.

Demostración

Sea $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = D(x,1)$. Sea $g\colon Y \to X$ dada por la inclusión (es decir, $g(y) = y$). Entonces:

- Si $y \in Y$, tenemos que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y,1) = y$. Es decir $f \circ g = 1_Y$.
- Si $x \in X$, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(D(x,1)) = D(x,1)$. Observemos que D es una homotopía entre 1_X y $g \circ f$, pues:

Demostración

Sea $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = D(x,1)$. Sea $g\colon Y \to X$ dada por la inclusión (es decir, $g(y) = y$). Entonces:

- Si $y \in Y$, tenemos que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y,1) = y$. Es decir $f \circ g = 1_Y$.
- Si $x \in X$, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(D(x,1)) = D(x,1)$. Observemos que D es una homotopía entre 1_X y $g \circ f$, pues:
  - $D(x,0) = x = 1_X(x)$,

Demostración

Sea $f\colon X \to Y$ dada por $f(x) = D(x, 1)$. Sea $g\colon Y \to X$ dada por la inclusión (es decir, $g(y) = y$). Entonces:

- Si $y \in Y$, tenemos que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y) = D(y, 1) = y$. Es decir $f \circ g = 1_Y$.
- Si $x \in X$, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(D(x, 1)) = D(x, 1)$. Observemos que D es una homotopía entre 1_X y $g \circ f$, pues:
  - $D(x, 0) = x = 1_X(x)$,
  - $D(x, 1) = (g \circ f)(x)$.