

Más cálculos de homología

Rafael Villarroel

2021-03-18 15:00 -0500

Consideremos el complejo simplicial Δ cuyo conjunto de caras maximales es $\mathcal{F}(\Delta) = \{abc, bcd\}$.

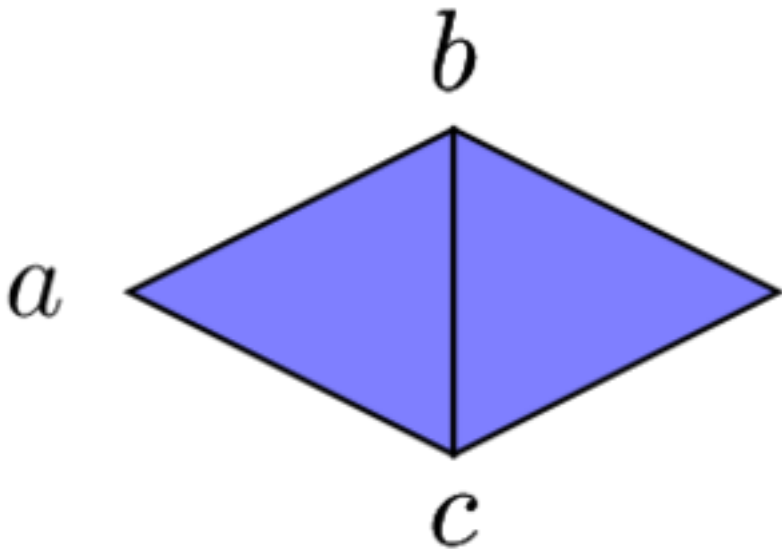


Figure: Ejemplo

Calculemos $H_0(\Delta, R) = Z_0(\Delta, R)/B_0(\Delta, R)$. En este caso $Z_0(\Delta, R) = \ker \partial_0$, donde $\partial_0: C_0(\Delta, R) \rightarrow C_{-1}(\Delta, R) = R$. La matriz (respecto a las bases usuales) de ∂_0 es (1111) . Un conjunto de generadores del espacio nulo de esta matriz es $\{(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$, y esos vectores se corresponden con $a - b, a - c, a - d$.

Calculemos $B_0(\Delta, R)$, es decir, la imagen de $\partial_1: C_1(\Delta, R) \rightarrow C_0(\Delta, R)$. Tenemos que $\partial_1(b \wedge a) = a - b$, $\partial_1(c \wedge a) = a - c$,

$\partial_1(c \wedge a + d \wedge c) = (a - c) + (c - d) = a - d$. Esto implica que $Z_0(\Delta, R) = B_0(\Delta, R)$, por lo tanto $H_0(\Delta, R) = 0$.

Calculemos $H_1(\Delta, R) = Z_1(\Delta, R)/B_1(\Delta, R)$. Consideremos la frontera $\partial_1: C_1(\Delta, R) \rightarrow C_0(\Delta, R)$. En las bases dadas por las cadenas elementales, esa transformación lineal tiene matriz:

$$\begin{array}{c}
 \\
 a \\
 b \\
 c \\
 d
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 a \wedge b & a \wedge c & b \wedge c & b \wedge d & c \wedge d \\
 -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$

Figure: Matriz de ∂_1

El espacio nulo está generado por $(1, -1, 1, 0, 0)^T, (-1, 1, 0, -1, 1)^T$. El primer vector se corresponde con $a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$. El segundo vector se corresponde con $-a \wedge b + a \wedge c - b \wedge d + c \wedge d$. Estos dos son generadores de $Z_1(\Delta, R)$.

El espacio $B_1(\Delta, R)$ es la imagen de la frontera $\partial_2: C_2(\Delta, R) \rightarrow C_1(\Delta, R)$. Esta frontera tiene matriz:

$$\begin{array}{c} a \wedge b \\ a \wedge c \\ b \wedge c \\ b \wedge d \\ c \wedge d \end{array} \begin{array}{cc} a \wedge b \wedge c & b \wedge c \wedge d \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Figure: Matriz de ∂_2

Tenemos que $\partial_2(a \wedge b \wedge c) = a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$, y también que $\partial_2(b \wedge c \wedge d) = c \wedge d - b \wedge d + b \wedge c$. Estos dos vectores generan a $B_1(\Delta, R)$. Por lo tanto

$$B_1(\Delta, R) = \langle a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c, c \wedge d - b \wedge d + b \wedge c \rangle.$$

Tenemos entonces que el cociente $Z_1(\Delta, R)/B_1(\Delta, R)$ está

generado por

- $\overline{a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c} = \bar{0}$ (pues $\partial_2(a \wedge b \wedge c) = a \wedge b - a \wedge c + b \wedge c$)

Como sus dos generadores son $\bar{0}$, se obtiene que $H_1(\Delta, R)$ es el grupo trivial.

Calculemos $H_2(\Delta, R) = Z_2(\Delta, R)/B_2(\Delta, R)$. En este caso $Z_2(\Delta, R) = \ker \partial_2 = 0$. Además $B_2(\Delta, R)$ es la imagen de $\partial_3: C_3(\Delta, R) \rightarrow C_2(\Delta, R)$, por lo que $B_2(\Delta, R) = 0$ (pues $C_3(\Delta, R) = 0$). Por lo tanto $H_2(\Delta, R) = 0$.
 $H_p(\Delta, R) = 0$ para todo $p \geq 0$.

Teorema Sean Δ_1 y Δ_2 complejos simpliciales tales que $|\Delta_1| \simeq |\Delta_2|$. Entonces $H_p(\Delta_1, R) \cong H_p(\Delta_2, R)$ para todo $p \geq 0$.