Integrales

2015-02-13 7:00

1 Definiciones

Definición

Dado $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, escribimos $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.
Decimos que γ es continua (derivable) si x, y son funciones continuas (derivables) $[a,b] \to \mathbb{R}$. Decimos que γ es suave si $\gamma(t)$ es derivable y $\gamma'(t)$ es continua.
Si γ es continua, definimos

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt.$$

Si γ es derivable, escribimos $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y $\gamma([a,b]) \subseteq U$, decimos que γ es una curva en U.

Definición

Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua, y γ una curva suave en U. Definimos la integral de f sobre γ como:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Propiedades de la integral

- Si $f_1, f_2 \colon U \to \mathbb{C}$ y γ es una curva suave en U, se tiene:

$$\int_\gamma (f_1 + f_2)(z)\, dz = \int_\gamma f_1(z)\, dz + \int_\gamma f_2(z)\, dz.$$

Propiedades de la integral

- Si $f_1, f_2 \colon U \to \mathbb{C}$ y γ es una curva suave en U, se tiene:

$$\int_\gamma (f_1 + f_2)(z)\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_\gamma f_2(z)\,dz.$$

- Si $f \colon U \to \mathbb{C}$ y $c \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\int_\gamma cf(z)\,dz = c\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Camino inverso

Definición (Camino inverso)

Dado $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, definimos el camino inverso $-\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ como:

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t).$$

Camino inverso

Definición (Camino inverso)

Dado $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, definimos el camino inverso $-\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ como:

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t).$$

Se tiene que:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Definición (Camino suave a trozos)

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Sea $\gamma\colon [a, b] \to U$ continua tal que existen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ y $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ curvas suaves en U con dominios $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ respectivamente. Decimos entonces que γ es un camino suave a trozos y escribimos:

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n.$$

Definición (Camino suave a trozos)

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Sea $\gamma \colon [a, b] \to U$ continua tal que existen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ y $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ curvas suaves en U con dominios $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ respectivamente. Decimos entonces que γ es un camino suave a trozos y escribimos:

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n.$$

Definición

Si γ es suave a trozos, con la notación anterior definimos:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\, dz.$$

Teorema

Las propiedades de la integral demostradas hasta ahora se conservan si γ se supone suave a trozos.