La función exponencial

2015-02-09 9:00

Observemos que las funciones $u = e^x \cos y$ y $v = e^x \sin y$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Observemos que las funciones $u = e^x \cos y$ y $v = e^x \sin y$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Definición

La función de variable compleja

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

se llama función exponencial compleja.

Propiedades

- $(e^z)' = e^z$.

Propiedades

- $(e^z)' = e^z$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$ para todos $a, b \in \mathbb{C}$.

Propiedades

- $(e^z)' = e^z$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$ para todos $a, b \in \mathbb{C}$.
- $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Propiedades

- $(e^z)' = e^z$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$ para todos $a, b \in \mathbb{C}$.
- $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = e^z$ es una función entera, es decir, es analítica en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (fórmula de Euler),

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,
- $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,
- $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
  $\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.

Definición

Definición (Logaritmo)

Dado $w \in \mathbb{C}$, se define $z = \log w$ como una solución de la ecuación $e^z = w$.

Observaciones

Observaciones

- Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se obtiene que 0 no tiene logaritmo.

Observaciones

- Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea $w \neq 0$. Entonces $e^{x+iy} = w$ es equivalente a:

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

Observaciones

- Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea $w \neq 0$. Entonces $e^{x+iy} = w$ es equivalente a:

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

- De lo anterior se obtiene:

$$\log w = \log |w| + i \arg w,$$

donde $\arg w$ representa el conjunto de argumentos de w. En particular, $\log w$ tiene una infinidad de valores, que difieren por un múltiplo de $2\pi i$.

Observaciones

- Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea $w \neq 0$. Entonces $e^{x+iy} = w$ es equivalente a:

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

- De lo anterior se obtiene:

$$\log w = \log |w| + i \arg w,$$

  donde $\arg w$ representa el conjunto de argumentos de w. En particular, $\log w$ tiene una infinidad de valores, que difieren por un múltiplo de $2\pi i$.
- Sin embargo, si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, consideraremos el valor usual (real) de $\log a$.

Ramas

Definición

Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ es analítica y $D \subseteq f(U)$ es un dominio, una rama de f^{-1} en D es una función continua $g\colon D \to U$ tal que $f(g(z)) = z$ para todo $z \in D$.

Ramas

Definición

Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ es analítica y $D \subseteq f(U)$ es un dominio, una rama de f^{-1} en D es una función continua $g\colon D \to U$ tal que $f(g(z)) = z$ para todo $z \in D$.

Definición (Argumento principal)

Dado $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, definimos $\operatorname{Arg}(z)$ como el argumento de z que está en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

Ramas

Definición

Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ es analítica y $D \subseteq f(U)$ es un dominio, una rama de f^{-1} en D es una función continua $g\colon D \to U$ tal que $f(g(z)) = z$ para todo $z \in D$.

Definición (Argumento principal)

Dado $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, definimos $\operatorname{Arg}(z)$ como el argumento de z que está en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

Observación

La función $\operatorname{Arg}\colon \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\} \to \mathbb{R}$ es continua.

Raíz cuadrada

Ejemplo

La función

$$z \mapsto \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(z)}{2} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(z)}{2}\right),$$

es una rama de la inversa de $f(z) = z^2$, definida en $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}$.

Raíz cuadrada

Ejemplo

La función

$$z \mapsto \sqrt{|z|}(\cos \frac{\operatorname{Arg}(z)}{2} + i \sin \frac{\operatorname{Arg}(z)}{2}),$$

es una rama de la inversa de $f(z) = z^2$, definida en $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}$.

Ejemplo

La función

$$z \mapsto \log |z| + i\operatorname{Arg}(z)$$

es una rama de la inversa de $f(z) = e^z$, definida en $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}$.

Derivabilidad de ramas

Teorema

Sea $f\colon U \to \mathbb{C}$ analítica, y sea $g\colon D \to U$ una rama de f^{-1}. Sean $z_0 \in D$ y $w_0 = g(z_0) \in U$. Si $f'(w_0) \neq 0$, entonces g es derivable en z_0 y $g'(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}$.
Por lo tanto, si f' no tiene ceros en $g(D)$, entonces g es analítica en D, y $g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$.