# Los números complejos

2015-01-19 9:00

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in F$,

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $0 \in F$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in F$,

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $0 \in F$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in F$,
- para todo $a \in F$ existe $-a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$,

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $0 \in F$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in F$,
- para todo $a \in F$ existe $-a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$,
- $ab = ba$ para todos $a, b \in F$,

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $0 \in F$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in F$,
- para todo $a \in F$ existe $-a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$,
- $ab = ba$ para todos $a, b \in F$,
- $a(bc) = (ab)c$ para todos $a, b, c \in F$,

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $0 \in F$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in F$,
- para todo $a \in F$ existe $-a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$,
- $ab = ba$ para todos $a, b \in F$,
- $a(bc) = (ab)c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $1 \in F$ con $1 \neq 0$ tal que $a1 = a$ para todo $a \in F$,

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $0 \in F$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in F$,
- para todo $a \in F$ existe $-a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$,
- $ab = ba$ para todos $a, b \in F$,
- $a(bc) = (ab)c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $1 \in F$ con $1 \neq 0$ tal que $a1 = a$ para todo $a \in F$,
- para todo $a \in F$, $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in F$ tal que $a(a^{-1}) = 1$,

# Definición de campo

Un campo es una estructura formada por un conjunto $F$ y dos operaciones binarias $F \times F \to F$, la primera llamada suma y denotada por $(a, b) \mapsto a + b$, la segunda llamada producto y denotada por $(a, b) \mapsto ab$, tales que:

- $a + b = b + a$ para todos $a, b \in F$,
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $0 \in F$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in F$,
- para todo $a \in F$ existe $-a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$,
- $ab = ba$ para todos $a, b \in F$,
- $a(bc) = (ab)c$ para todos $a, b, c \in F$,
- existe un elemento $1 \in F$ con $1 \neq 0$ tal que $a1 = a$ para todo $a \in F$,
- para todo $a \in F$, $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in F$ tal que $a(a^{-1}) = 1$,
- $a(b + c) = ab + ac$ para todos $a, b, c \in F$.

# Ejemplos de campos

- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con las operaciones usuales.

# Ejemplos de campos

- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con las operaciones usuales.
- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales.

# Ejemplos de campos

- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con las operaciones usuales.
- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales.
- Existen campos con una cantidad finita de elementos. (De hecho, existe un campo con $n$ elementos si y solo si $n = p^r$ para $p$ primo y $r > 0$.)

# Ejemplos de campos

- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, con las operaciones usuales.
- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales.
- Existen campos con una cantidad finita de elementos. (De hecho, existe un campo con $n$ elementos si y solo si $n = p^r$ para $p$ primo y $r > 0$.)
- El campo de los números complejos, que estudiaremos aquí.

# Observaciones

- En todo campo se define $a - b$ como $a + (-b)$. Si $b \neq 0$ se define $\frac{a}{b}$ como $ab^{-1}$.

# Observaciones

- En todo campo se define $a - b$ como $a + (-b)$. Si $b \neq 0$ se define $\frac{a}{b}$ como $ab^{-1}$.
- Existen muchas propiedades que se deducen solamente a partir de los axiomas de campo. Por ejemplo, se tiene que los elementos $0, 1$ son únicos con respecto a las propiedades que los definen, y que $a0 = 0$ para todo elemento del campo $a$.

# Campos ordenados

## Definición (Campo ordenado)

Decimos que $F$ es un campo ordenado si existe un conjunto $P \subseteq F$ tal que:

# Campos ordenados

## Definición (Campo ordenado)

Decimos que $F$ es un campo ordenado si existe un conjunto $P \subseteq F$ tal que:

- $a + b \in P$ para todos $a, b \in P$,

# Campos ordenados

## Definición (Campo ordenado)

Decimos que $F$ es un campo ordenado si existe un conjunto $P \subseteq F$ tal que:

- $a + b \in P$ para todos $a, b \in P$,
- $ab \in P$ para todos $a, b \in P$,

# Campos ordenados

## Definición (Campo ordenado)

Decimos que $F$ es un campo ordenado si existe un conjunto $P \subseteq F$ tal que:

- $a + b \in P$ para todos $a, b \in P$,
- $ab \in P$ para todos $a, b \in P$,
- $F$ es unión disjunta de $\{0\}$, $P$, y $\{-a \mid a \in P\}$.

# Campos ordenados

## Definición (Campo ordenado)

Decimos que $F$ es un campo ordenado si existe un conjunto $P \subseteq F$ tal que:

- $a + b \in P$ para todos $a, b \in P$,
- $ab \in P$ para todos $a, b \in P$,
- $F$ es unión disjunta de $\{0\}$, $P$, y $\{-a \mid a \in P\}$.

## Ejemplo

Los campos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son ordenados.

# Campos ordenados completos

## Relación de orden

En un campo ordenado, se puede definir la relación $a > b$ como $a - b \in P$.

# Campos ordenados completos

## Relación de orden

En un campo ordenado, se puede definir la relación $a > b$ como $a - b \in P$.

## Definición (Campo ordenado completo)

Si $F$ es un campo ordenado donde todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene una mínima cota superior, decimos que $F$ es completo.

# Campos ordenados completos

## Relación de orden

En un campo ordenado, se puede definir la relación $a > b$ como $a - b \in P$.

## Definición (Campo ordenado completo)

Si $F$ es un campo ordenado donde todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene una mínima cota superior, decimos que $F$ es completo.

## Teorema (Caracterización de $\mathbb{R}$)

*Salvo isomorfismo, el único campo ordenado completo es el campo de los números reales.*

# Definición de Hamilton (1833)

Sea $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Entonces, en $\mathbb{C}$ podemos definir operaciones de suma y producto:

- $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$,

de tal modo que $\mathbb{C}$ resulta ser un campo.

# Definición de Hamilton (1833)

Sea $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Entonces, en $\mathbb{C}$ podemos definir operaciones de suma y producto:

- $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$,
- $(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$,

de tal modo que $\mathbb{C}$ resulta ser un campo.

# Propiedades de $\mathbb{C}$

- En $\mathbb{C}$ tenemos $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$.

# Propiedades de $\mathbb{C}$

- En $\mathbb{C}$ tenemos $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$.
- ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $(x, y) \neq 0$?

# Propiedades de $\mathbb{C}$

- En $\mathbb{C}$ tenemos $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$.
- ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $(x, y) \neq 0$?
- El subconjunto $\{(x, 0) \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado bajo las operaciones definidas en $\mathbb{C}$, y resulta ser un campo isomorfo a $\mathbb{R}$ bajo la correspondencia $x \leftrightarrow (x, 0)$.

# Propiedades de $\mathbb{C}$

- En $\mathbb{C}$ tenemos $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$.
- ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $(x, y) \neq 0$?
- El subconjunto $\{(x, 0) \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado bajo las operaciones definidas en $\mathbb{C}$, y resulta ser un campo isomorfo a $\mathbb{R}$ bajo la correspondencia $x \leftrightarrow (x, 0)$.
- Por lo anterior, denotaremos a $(x, 0)$ por $x$.

# Propiedades de $\mathbb{C}$

- En $\mathbb{C}$ tenemos $0 = (0,0)$ y $1 = (1,0)$.
- ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $(x,y) \neq 0$?
- El subconjunto $\{(x,0) \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado bajo las operaciones definidas en $\mathbb{C}$, y resulta ser un campo isomorfo a $\mathbb{R}$ bajo la correspondencia $x \leftrightarrow (x,0)$.
- Por lo anterior, denotaremos a $(x,0)$ por $x$.
- Tenemos que $(0,y) = y(0,1)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Denotaremos a $(0,1)$ por $i$.

# Propiedades de $\mathbb{C}$

- En $\mathbb{C}$ tenemos $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$.
- ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $(x, y) \neq 0$?
- El subconjunto $\{(x, 0) \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado bajo las operaciones definidas en $\mathbb{C}$, y resulta ser un campo isomorfo a $\mathbb{R}$ bajo la correspondencia $x \leftrightarrow (x, 0)$.
- Por lo anterior, denotaremos a $(x, 0)$ por $x$.
- Tenemos que $(0, y) = y(0, 1)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Denotaremos a $(0, 1)$ por $i$.
- Se tiene entonces que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

# Propiedades de $\mathbb{C}$

- En $\mathbb{C}$ tenemos $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$.
- ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $(x, y) \neq 0$?
- El subconjunto $\{(x, 0) \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado bajo las operaciones definidas en $\mathbb{C}$, y resulta ser un campo isomorfo a $\mathbb{R}$ bajo la correspondencia $x \leftrightarrow (x, 0)$.
- Por lo anterior, denotaremos a $(x, 0)$ por $x$.
- Tenemos que $(0, y) = y(0, 1)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Denotaremos a $(0, 1)$ por $i$.
- Se tiene entonces que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.
- Además, $(0, y) = (0, 1)(y, 0) = iy$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$ para todo $(x, y) \in \mathbb{C}$.

# Ejercicios

- Demuestra que si definimos suma de parejas de reales de manera usual y el producto como $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$, no se obtiene un campo.

# Ejercicios

- Demuestra que si definimos suma de parejas de reales de manera usual y el producto como $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$, no se obtiene un campo.
- Demuestra que si definimos suma de tercias de reales de manera usual y el producto como el producto cruz, no se obtiene un campo.

# Breviario cultural

- ¿Es posible definir una estructura de campo en el conjunto de tercias de números reales? ¿O en general en $\mathbb{R}^n$?

# Breviario cultural

- ¿Es posible definir una estructura de campo en el conjunto de tercias de números reales? ¿O en general en $\mathbb{R}^n$?
- Hamilton no lo logró en $\mathbb{R}^3$. Pero en 1843 definió una estructura ($\mathbb{H}$) de álgebra con división en $\mathbb{R}^4$, la cual cumple los axiomas de campo excepto la conmutatividad del producto.

# Breviario cultural

- ¿Es posible definir una estructura de campo en el conjunto de tercias de números reales? ¿O en general en $\mathbb{R}^n$?
- Hamilton no lo logró en $\mathbb{R}^3$. Pero en 1843 definió una estructura ($\mathbb{H}$) de álgebra con división en $\mathbb{R}^4$, la cual cumple los axiomas de campo excepto la conmutatividad del producto.
- Frobenius probó en 1877 que las únicas álgebras con división de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ son: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$.

# Breviario cultural

- ¿Es posible definir una estructura de campo en el conjunto de tercias de números reales? ¿O en general en $\mathbb{R}^n$?
- Hamilton no lo logró en $\mathbb{R}^3$. Pero en 1843 definió una estructura ($\mathbb{H}$) de álgebra con división en $\mathbb{R}^4$, la cual cumple los axiomas de campo excepto la conmutatividad del producto.
- Frobenius probó en 1877 que las únicas álgebras con división de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ son: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$.
- Usando que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado (es decir, todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$), es fácil demostrar que el único campo que extiende a $\mathbb{C}$ y es de dimensión finita como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es $\mathbb{C}$.

# Definiciones

- El número complejo $z = (x, y)$ se denotará como $z = x + iy$. Decimos que $x$ es la parte real de $z$ y que $y$ es la parte imaginaria de $z$. Escribimos $x = \Re z$, $y = \Im z$.

# Definiciones

- El número complejo $z = (x, y)$ se denotará como $z = x + iy$. Decimos que $x$ es la parte real de $z$ y que $y$ es la parte imaginaria de $z$. Escribimos $x = \Re z$, $y = \Im z$.
- El conjugado de $z = x + iy$ es $\overline{z} = x - iy$.

# Definiciones

- El número complejo $z = (x, y)$ se denotará como $z = x + iy$. Decimos que $x$ es la parte real de $z$ y que $y$ es la parte imaginaria de $z$. Escribimos $x = \Re z$, $y = \Im z$.
- El conjugado de $z = x + iy$ es $\overline{z} = x - iy$.
- El módulo de $z = x + iy$ es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

# Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

# Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im z = \frac{z-\overline{z}}{2}$.

# Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im z = \frac{z-\overline{z}}{2}$.
- $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.

# Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im z = \frac{z-\overline{z}}{2}$.
- $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.
- $|z| = |\overline{z}|$, $z\overline{z} = |z|^2$.

# Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im z = \frac{z-\overline{z}}{2}$.
- $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.
- $|z| = |\overline{z}|$, $z\overline{z} = |z|^2$.
- $|\Re z| \leq |z|$, $|\Im z| \leq |z|$.

# Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im z = \frac{z-\overline{z}}{2}$.
- $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.
- $|z| = |\overline{z}|$, $z\overline{z} = |z|^2$.
- $|\Re z| \leq |z|$, $|\Im z| \leq |z|$.
- $|z+w| \leq |z| + |w|$, $|z+w| \geq ||z| - |w||$.

# Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $\Re z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im z = \frac{z-\overline{z}}{2}$.
- $|zw| = |z||w|$, $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.
- $|z| = |\overline{z}|$, $z\overline{z} = |z|^2$.
- $|\Re z| \leq |z|$, $|\Im z| \leq |z|$.
- $|z+w| \leq |z| + |w|$, $|z+w| \geq ||z| - |w||$.
- Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.