Ejemplos de series

2015-04-20 9:00

1 Ejemplos

Ejemplo

- $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $D_r = \overline{D}(0, r)$ para cada $r < 1$.

Ejemplo

- $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $D_r = \overline{D}(0, r)$ para cada $r < 1$.
- $g(z)$ converge puntualmente en $D(0, 1)$.

Ejemplo

- $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $D_r = \overline{D}(0, r)$ para cada $r < 1$.
- $g(z)$ converge puntualmente en $D(0, 1)$.
- $g(z)$ no converge uniformemente en $D(0, 1)$.

Ejemplo

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente a $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en $D = D(0,1)$.

Ejemplo

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente a $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en $D = D(0, 1)$.
- La convergencia es absoluta en $D_r = \overline{D}(0, r)$ para cada $r < 1$.

Ejemplo

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge puntualmente a $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en $D = D(0,1)$.
- La convergencia es absoluta en $D_r = \overline{D}(0,r)$ para cada $r < 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ converge puntualmente en D a $\frac{1}{(1-z)^2}$ y absolutamente en $D_r = \overline{D}(0,r)$ para cada $r < 1$.

Logaritmo

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ converge uniformemente a $\log(1+z)$ en todo disco cerrado centrado en el origen contenido en $D = D(0,1)$.

Logaritmo

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ converge uniformemente a $\log(1+z)$ en todo disco cerrado centrado en el origen contenido en $D = D(0,1)$.

- Sabemos que si $w = \rho e^{i\theta} \in D(1,1)$, entonces $\mathrm{Log}(w) = \int_\gamma \frac{1}{\xi} d\xi = \log \rho + i\theta$, donde Log es la rama principal del logaritmo y γ es cualquier camino contenido en $D(1,1)$ que va de 1 a w.

Logaritmo

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ converge uniformemente a $\log(1+z)$ en todo disco cerrado centrado en el origen contenido en $D = D(0,1)$.

- Sabemos que si $w = \rho e^{i\theta} \in D(1,1)$, entonces $\mathrm{Log}(w) = \int_\gamma \frac{1}{\xi} d\xi = \log\rho + i\theta$, donde Log es la rama principal del logaritmo y γ es cualquier camino contenido en $D(1,1)$ que va de 1 a w.
- Haciendo el cambio de variable $\xi = \eta + 1$, obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{1}{\xi} d\xi = \int_\beta \frac{1}{\eta+1} d\eta,$$

donde $\beta = \gamma - 1$ es un camino de 0 a $w-1$.

- Tenemos que $\frac{1}{\eta+1} = 1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \cdots$ uniformemente en discos cerrados contenidos en $D(0,1)$, por lo que:

$$\mathrm{Log}(w) = \int_\beta \frac{1}{\eta+1} d\eta = \int_\beta (1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \cdots)\, d\eta$$

- Tenemos que $\frac{1}{\eta+1} = 1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \cdots$ uniformemente en discos cerrados contenidos en $D(0,1)$, por lo que:

$$\mathrm{Log}(w) = \int_\beta \frac{1}{\eta+1} d\eta = \int_\beta (1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \cdots)\, d\eta$$

- Lo último es igual a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_\beta \eta^k \, d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left. \frac{\eta^{k+1}}{k+1} \right|_0^{w-1} .$$

- Tenemos que $\frac{1}{\eta+1} = 1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \cdots$ uniformemente en discos cerrados contenidos en $D(0,1)$, por lo que:

$$\mathrm{Log}(w) = \int_\beta \frac{1}{\eta+1} d\eta = \int_\beta (1 - \eta + \eta^2 - \eta^3 + \cdots)\, d\eta$$

- Lo último es igual a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_\beta \eta^k \, d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left. \frac{\eta^{k+1}}{k+1} \right|_0^{w-1}.$$

- Lo anterior, resulta ser igual a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(w-1)^k}{k}$. Sustituyendo $w - 1 = z$, resulta:

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

y como en el primer ejemplo, se demuestra la convergencia uniforme en $\overline{D_r}$.

Función ζ de Riemann

- La función
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
es analítica en $A = \{z \mid \Re z > 1\}$.

Función ζ de Riemann

- La función
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
es analítica en $A = \{z \mid \Re z > 1\}$.
- Tenemos que
$$|n^{-z}| = |e^{-z\log n}| = |e^{-x\log n - iy\log n}| = e^{-x\log n} = n^{-x}.$$

Función ζ de Riemann

- La función
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
es analítica en $A = \{z \mid \Re z > 1\}$.
- Tenemos que
$$|n^{-z}| = |e^{-z \log n}| = |e^{-x \log n - iy \log n}| = e^{-x \log n} = n^{-x}.$$
- Sea $B \subseteq A$ un disco cerrado. Sea δ la distancia entre B y el complemento de A. Entonces, si $z \in B$, se tiene que $x \geq 1 + \delta$, por lo que $n^{-x} \leq n^{-(1+\delta)}$.

Función ζ de Riemann

- La función
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
es analítica en $A = \{z \mid \Re z > 1\}$.
- Tenemos que
$$|n^{-z}| = |e^{-z \log n}| = |e^{-x \log n - iy \log n}| = e^{-x \log n} = n^{-x}.$$
- Sea $B \subseteq A$ un disco cerrado. Sea δ la distancia entre B y el complemento de A. Entonces, si $z \in B$, se tiene que $x \geq 1 + \delta$, por lo que $n^{-x} \leq n^{-(1+\delta)}$.
- Tomando $M_n = n^{-(1+\delta)}$, se obtiene la convergencia uniforme de la serie en B.