Continuidad y límites

2015-01-26 9:00

Continuidad

Definición (Continuidad en un punto)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$, $a \in A$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es continua en a si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(A \cap D(a, \delta)) \subseteq D(f(a), \epsilon).$$

Continuidad

Definición (Continuidad en un punto)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$, $a \in A$ y $f \colon A \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es continua en a si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(A \cap D(a, \delta)) \subseteq D(f(a), \epsilon).$$

Decimos que $f \colon A \to \mathbb{C}$ es continua si es continua en a para todo $a \in A$.

Continuidad

Definición (Continuidad en un punto)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$, $a \in A$ y $f\colon A \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es continua en a si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(A \cap D(a,\delta)) \subseteq D(f(a),\epsilon).$$

Decimos que $f\colon A \to \mathbb{C}$ es continua si es continua en a para todo $a \in A$.

Teorema

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$, $a \in A$ y $f\colon A \to \mathbb{C}$ una función. Entonces f es continua en a si y solo si para toda sucesión z_n en A tal que $z_n \to a$, se tiene que $f(z_n) \to f(a)$.

Teorema

Sean $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ *funciones continuas en* $a \in A$. *Entonces* cf, $\Re f$, $\Im f$, $\overline{f}$, $f + g$, fg *son continuas en* a. *En particular si* f, g *son continuas, entonces cada una de las funciones listadas son continuas.*

Teorema

Sean $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ *funciones continuas en* $a \in A$*. Entonces* cf, $\Re f$, $\Im f$, $\overline{f}$, $f+g$, fg *son continuas en* a*. En particular si* f, g *son continuas, entonces cada una de las funciones listadas son continuas.*

Teorema

Si $g(a) \neq 0$*, entonces* $\frac{f}{g}$ *es continua en* a*. Si* $g(a) \neq 0$ *para todo* $a \in A$*, entonces* $\frac{f}{g}$ *es continua.*

Teorema

Sean $f\colon A \to \mathbb{C}$, $g\colon B \to \mathbb{C}$ funciones tales que $f(A) \subseteq B$. Si f es continua en $\alpha \in A$ y g es continua en $f(\alpha)$, entonces $g \circ f$ es continua en α. En particular, si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.

Teorema

Sean $f: A \to \mathbb{C}$, $g: B \to \mathbb{C}$ funciones tales que $f(A) \subseteq B$. Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a. En particular, si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.

Teorema

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Una función $f: U \to \mathbb{C}$ es continua si y solo si para todo abierto $V \subseteq \mathbb{C}$ se tiene que el conjunto

$$f^{-1}(V) = \{z \in U \mid f(z) \in V\},$$

es abierto.

Definición de límite

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, denotaremos con $D^*(a, r)$ al conjunto $D(a, r) - \{a\}$.

Definición de límite

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, denotaremos con $D^*(a, r)$ al conjunto $D(a, r) - \{a\}$.

Definición (Límite)

Sean $f : A \to \mathbb{C}$ una función y $a \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de A. Decimos que $c \in \mathbb{C}$ es límite de f en a, denotado $\lim_{z \to a} f(z) = c$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(A \cap D^*(a, \delta)) \subseteq D(c, \epsilon).$$

Relación con continuidad

Teorema

Sea $a \in A$ *tal que* a *es punto de acumulación de* A. *Entonces* $f\colon A \to \mathbb{C}$ *es continua en* a *si y solo si* $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$.

Teorema

Sea a punto de acumulación de $A \in \mathbb{C}$. Entonces $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite c en a si y solo si para toda sucesión z_n en $A - \{a\}$ con límite a se tiene que $f(z_n)$ converge a c.

Teorema

Sea a *punto de acumulación de* $A \in \mathbb{C}$. *Entonces* $f : A \to \mathbb{C}$ *tiene límite* c *en* a *si y solo si para toda sucesión* z_n *en* $A - \{a\}$ *con límite* a *se tiene que* $f(z_n)$ *converge a* c.

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ *y* a *un punto de acumulación de* A. *Sean* $f, g : A \to \mathbb{C}$ *funciones tales que* $\lim_{z \to a} f(z) = l_1$ *y* $\lim_{z \to a} g(z) = l_2$. *Entonces* cf, $\Re f$, $\Im f$, $\overline{f}$, $f + g$, fg *tienen todas límite cuando* $z \to a$, *y su valor es* cl_1, $\Re l_1$, $\Im l_1$, $\overline{l_1}$, $l_1 + l_2$ *y* $l_1 l_2$, *respectivamente. Si* $l_2 \neq 0$, *entonces* $\lim_{z \to a} \frac{f}{g}$ *existe y es igual a* $\frac{l_1}{l_2}$.