Series de Laurent

2015-05-04 9:00

1 Definición

Teorema (Expansión de Laurent)

Sean r_1, r_2 *tales que* $0 \leq r_1 < r_2$, $z_0 \in \mathbb{C}$. *Sea* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. *Sea* f *analítica en* A. *Entonces existen* $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

donde ambas series del lado derecho convergen absolutamente en A *y uniformemente en conjuntos de la forma* $B_{\rho_1,\rho_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$, *donde* $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$.

Teorema (Continuación)

Si γ *es un círculo centrado en* z_0 *de radio* r*, con* $r_1 < r < r_2$*, los coeficientes* a_n, b_n *están dados por:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}\, d\xi$$

Además, la expansión de Laurent de f *en* A *es única.*

Observación

La expansión de Laurent con $r_1 = 0$ se utiliza para el estudio de singularidades.

Residuo

Si f tiene una singularidad aislada en z_0, el valor del coeficiente b_1 en la serie de Laurent definida en un disco perforado alrededor de z_0 se llama el *residuo* de f en z_0.