Clasificación de singularidades

2015-04-10 7:00

Singularidades aisladas

Definición (Singularidad)

Si $a \in \mathbb{C}$ es tal que la función compleja f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < \delta\}$ para algún $\delta > 0$, decimos que a es singularidad (aislada) de f.

Singularidades aisladas

Definición (Singularidad)

Si $a \in \mathbb{C}$ es tal que la función compleja f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < \delta\}$ para algún $\delta > 0$, decimos que a es singularidad (aislada) de f.

Si $\lim_{z \to a}(z - a)f(z) = 0$, entonces podemos definir el valor de f en a, de modo que f es analítica en toda una vecindad de a. En tal caso, se dice que a es singularidad removible.

Polos

Definición (Polo)

Si a es una singularidad aislada, y $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, decimos que a es polo de f.

Polos

Definición (Polo)

Si a es una singularidad aislada, y $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, decimos que a es polo de f.

Ejemplo

Por ejemplo, $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$ tiene un polo en $z = -i$.

Observaciones

Observaciones

- Si a es polo, existe $\delta' \leq \delta$ tal que $f(z) \neq 0$ para z tal que $0 < |z - a| < \delta'$.

Observaciones

- Si a es polo, existe $\delta' \leq \delta$ tal que $f(z) \neq 0$ para z tal que $0 < |z - a| < \delta'$.
- En tal dominio, la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ está definida y es analítica, más aún, a es singularidad removible y g se puede definir como $g(a) = 0$.

Observaciones

- Si a es polo, existe $\delta' \leq \delta$ tal que $f(z) \neq 0$ para z tal que $0 < |z - a| < \delta'$.
- En tal dominio, la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ está definida y es analítica, más aún, a es singularidad removible y g se puede definir como $g(a) = 0$.
- Como g no es idénticamente cero, podemos suponer que el cero a tiene un orden h, es decir, $g(z) = (z - a)^h g_h(z)$, donde $g_h(a) \neq 0$.

Observaciones

- Si a es polo, existe $\delta' \leq \delta$ tal que $f(z) \neq 0$ para z tal que $0 < |z - a| < \delta'$.
- En tal dominio, la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ está definida y es analítica, más aún, a es singularidad removible y g se puede definir como $g(a) = 0$.
- Como g no es idénticamente cero, podemos suponer que el cero a tiene un orden h, es decir, $g(z) = (z - a)^h g_h(z)$, donde $g_h(a) \neq 0$.
- En tal caso,
$$f(z) = \frac{f_h(z)}{(z - a)^h},$$
donde $f_h(z) = \frac{1}{g_h(z)}$.

Funciones meromorfas

Definición

Si f es analítica en una región Ω, salvo por polos, decimos que f es meromorfa en Ω.

Funciones meromorfas

Definición

Si f es analítica en una región Ω, salvo por polos, decimos que f es meromorfa en Ω.

Observación

La suma, producto y cociente de funciones meromorfas es meromorfas, siempre que el divisor de un cociente no sea la función idénticamente cero.

Condiciones

Consideremos las siguientes propiedades acerca de la función f con una singularidad aislada a, y $\alpha \in \mathbb{R}$:

Condición 1: $\lim_{z \to a} |z - a|^{\alpha} |f(z)| = 0$,

Condiciones

Consideremos las siguientes propiedades acerca de la función f con una singularidad aislada a, y $\alpha \in \mathbb{R}$:

Condición 1: $\lim_{z \to a} |z-a|^{\alpha} |f(z)| = 0$,

Condición 2: $\lim_{z \to a} |z-a|^{\alpha} |f(z)| = \infty$.

- Supongamos que la condición 1 se cumple para cierta α.

- Supongamos que la condición 1 se cumple para cierta α.
- Entonces, también se cumple para toda $\alpha' > \alpha$, y por lo tanto, para algún entero m.

- Supongamos que la condición 1 se cumple para cierta α.
- Entonces, también se cumple para toda $\alpha' > \alpha$, y por lo tanto, para algún entero m.
- En tal caso, $(z-a)^m f(z)$ tiene una singularidad removible en a, si $f(z)$ no es idénticamente cero, a es un cero, digamos de orden k.

- Supongamos que la condición 1 se cumple para cierta α.
- Entonces, también se cumple para toda $\alpha' > \alpha$, y por lo tanto, para algún entero m.
- En tal caso, $(z-a)^m f(z)$ tiene una singularidad removible en a, si $f(z)$ no es idénticamente cero, a es un cero, digamos de orden k.
- Entonces $(z-a)^m f(z) = (z-a)^k f_k(z)$. Escribimos

$$(z-a)^{m-k} f(z) = f_k(z),$$

de donde se obtiene que, si $\alpha > m-k$, se cumple la condición 1, y si $\alpha < m-k$, se cumple la condición 2.

- Supongamos ahora que la condición 2 se cumple para cierta α.

- Supongamos ahora que la condición 2 se cumple para cierta α.
- Entonces, también se cumple para toda $\alpha' < \alpha$, y por lo tanto, para algún entero n.

- Supongamos ahora que la condición 2 se cumple para cierta α.
- Entonces, también se cumple para toda $\alpha' < \alpha$, y por lo tanto, para algún entero n.
- En tal caso, $(z-a)^n f(z)$ tiene un polo en a, digamos de orden l, es decir $(z-a)^n f(z) = \frac{f_l(z)}{(z-a)^l}$.

- Supongamos ahora que la condición 2 se cumple para cierta α.
- Entonces, también se cumple para toda $\alpha' < \alpha$, y por lo tanto, para algún entero n.
- En tal caso, $(z-a)^n f(z)$ tiene un polo en a, digamos de orden l, es decir $(z-a)^n f(z) = \frac{f_l(z)}{(z-a)^l}$.
- Podemos escribir entonces

$$(z-a)^{n+l} f(z) = f_l(z).$$

- Supongamos ahora que la condición 2 se cumple para cierta α.
- Entonces, también se cumple para toda $\alpha' < \alpha$, y por lo tanto, para algún entero n.
- En tal caso, $(z-a)^n f(z)$ tiene un polo en a, digamos de orden l, es decir $(z-a)^n f(z) = \frac{f_l(z)}{(z-a)^l}$.
- Podemos escribir entonces

$$(z-a)^{n+l} f(z) = f_l(z).$$

- De lo anterior, se obiente que si $\alpha > n + l$, se cumple la condición 1, y si $\alpha < n + l$, se cumple la condición 2.

Singularidades esenciales

Definición (Singularidad esencial)

Si a es una singularidad aislada tal que no se cumple la condición 1 ni la condición 2 para ninguna $\alpha \in \mathbb{R}$, decimos que a es singularidad esencial de f.

Singularidades esenciales

Definición (Singularidad esencial)

Si a es una singularidad aislada tal que no se cumple la condición 1 ni la condición 2 para ninguna $\alpha \in \mathbb{R}$, decimos que a es singularidad esencial de f.

Teorema (Casorati–Weierstrass)

Si a es una singularidad esencial de f, entonces para toda $0 < \delta' < \delta$, se tiene que $f(D(a, \delta'))$ es denso en $\mathbb{C}$.

Demostración

- Si el teorema no fuera cierto, existirían un número complejo A y un $r > 0$ tal que $|f(z) - A| > r$ para todo z en alguna vecindad perforada de a.

Demostración

- Si el teorema no fuera cierto, existirían un número complejo A y un $r > 0$ tal que $|f(z) - A| > r$ para todo z en alguna vecindad perforada de a.
- Para $\alpha < 0$, entonces $\lim_{z \to a} |z - a|^{\alpha} |f(z) - A| = \infty$, lo cual implica que a no es singularidad esencial de $f(z) - A$.

Demostración

- Si el teorema no fuera cierto, existirían un número complejo A y un $r > 0$ tal que $|f(z) - A| > r$ para todo z en alguna vecindad perforada de a.
- Para $\alpha < 0$, entonces $\lim_{z\to a} |z - a|^{\alpha} |f(z) - A| = \infty$, lo cual implica que a no es singularidad esencial de $f(z) - A$.
- Existe $\beta > 0$ tal que $\lim_{z\to a} |z - a|^{\beta} |f(z) - A| = 0$, además $\lim_{z\to a} |z - a|^{\beta} |A| = 0$.

Demostración

- Si el teorema no fuera cierto, existirían un número complejo A y un $r > 0$ tal que $|f(z) - A| > r$ para todo z en alguna vecindad perforada de a.
- Para $\alpha < 0$, entonces $\lim_{z\to a} |z - a|^{\alpha}|f(z) - A| = \infty$, lo cual implica que a no es singularidad esencial de $f(z) - A$.
- Existe $\beta > 0$ tal que $\lim_{z\to a} |z - a|^{\beta}|f(z) - A| = 0$, además $\lim_{z\to a} |z - a|^{\beta}|A| = 0$.
- De lo anterior, se obtiene que

$$\lim_{z\to a} |z - a|^{\beta}|f(z)| = 0,$$

lo cual contradice que a es singularidad esencial.