Series de potencias

2015-04-20 9:00

Definición (Serie de potencias)

Una serie de potencias es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde los a_n y z_0 son números complejos.

Lema (Abel-Weierstrass)

Sean $r_0 \geq 0$ *y* M *una constante tal que* $|a_n|r_0^n \leq M$ *para todo* $n \geq 0$. *Entonces, para cada* $r < r_0$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge uniformemente y absolutamente en* $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$.

Lema (Abel-Weierstrass)

Sean $r_0 \geq 0$ *y* M *una constante tal que* $|a_n| r_0^n \leq M$ *para todo* $n \geq 0$*. Entonces, para cada* $r < r_0$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *converge uniformemente y absolutamente en* $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$*.*

Teorema (Convergencia de series de potencias)

Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$*, existe un único número* $R \geq 0$*, (posiblemente* $+\infty$*), llamado radio de convergencia, tal que si* $|z - z_0| < R$ *la serie converge, y si* $|z - z_0| > R$*, la serie diverge. Además, la convergencia es uniforme en cada disco cerrado contenido en* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$*.*

Corolario

Corolario (Serie es analítica)

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *es una función analítica en su círculo de convergencia* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$.

Teorema (Derivación de series de potencias)

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

una función analítica dada por una serie de potencias en su círculo de convergencia. Entonces:

Teorema (Derivación de series de potencias)

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

una función analítica dada por una serie de potencias en su círculo de convergencia. Entonces:

- $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ *y la serie para* $f'(z)$ *tiene el mismo radio de convergencia que la serie para* $f(z)$*.*

Teorema (Derivación de series de potencias)

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

una función analítica dada por una serie de potencias en su círculo de convergencia. Entonces:

- $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ *y la serie para* $f'(z)$ *tiene el mismo radio de convergencia que la serie para* $f(z)$.
- *Además,* $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Corolario (Unicidad)

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

para todo z *en* $D(z_0, r)$ *con* $r > 0$, *entonces* $a_n = b_n$ *para toda* n.

Teorema (Cálculo del radio de convergencia)

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$*:*

Teorema (Cálculo del radio de convergencia)

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$*:*

- *si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

  existe, es igual a R*, el radio de convergencia de la serie.*

Teorema (Cálculo del radio de convergencia)

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$*:*

- *si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

  existe, es igual a R*, el radio de convergencia de la serie.*
- *Si* $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *existe, entonces* $R = \frac{1}{\rho}$ *es el radio de convergencia. (*$R = \infty$ *si* $\rho = 0$*).*

Teorema (Taylor)

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ *analítica con* $A \subseteq \mathbb{C}$ *abierto. Sean* $z_0 \in A$ *y* $r > 0$ *tal que* $D_r = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subseteq A$*. Entonces, para cada* $z \in D_r$*, la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge en A*, y además:* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = f(z)$.

Corolario (Desarrollo en series de potencias)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ *abierto y sea* $f\colon A \to \mathbb{C}$. *Entonces* f *es analítica en* A *si y solo si para cada* $z_0 \in A$ *existe* $r > 0$ *tal que* $D(z_0, r) \subseteq A$ *y* f *es igual a una serie de potencias convergente en* $D(z_0, r)$.

Corolario (Desarrollo en series de potencias)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $f\colon A \to \mathbb{C}$. Entonces f es analítica en A si y solo si para cada $z_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq A$ y f es igual a una serie de potencias convergente en $D(z_0, r)$.

Corolario (Desarrollo en series de potencias)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $f : A \to \mathbb{C}$. Entonces f es analítica en A si y solo si para cada $z_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq A$ y f es igual a una serie de potencias convergente en $D(z_0, r)$.

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,

Corolario (Desarrollo en series de potencias)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea $f\colon A \to \mathbb{C}$. Entonces f es analítica en A si y solo si para cada $z_0 \in A$ existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq A$ y f es igual a una serie de potencias convergente en $D(z_0, r)$.

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,
- $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.