Funciones derivables

2015-01-30 7:00

Derivada

Definición

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y z_0 en el interior de A. Decimos que $f : A \to \mathbb{C}$ es derivable en z_0 si el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. En caso de existir, al valor del límite lo denotamos por $f'(z_0)$.

Equivalencias de la definición

Teorema

Dados $A \subseteq \mathbb{C}$ *y* z_0 *en el interior de* A*, son equivalentes:*

Equivalencias de la definición

Teorema

Dados $A \subseteq \mathbb{C}$ y z_0 en el interior de A, son equivalentes:

- *f es derivable en z_0.*

Equivalencias de la definición

Teorema

Dados $A \subseteq \mathbb{C}$ *y* z_0 *en el interior de* A*, son equivalentes:*

- f *es derivable en* z_0.
- *El límite*

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

  existe.

Equivalencias de la definición

Teorema

Dados $A \subseteq \mathbb{C}$ y z_0 en el interior de A, son equivalentes:

- *f es derivable en z_0.*
- *El límite*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$
existe.
- *Existen $c \in \mathbb{C}$ y una función $E\colon A \to \mathbb{C}$ tal que*
$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + E(z)$$
con $\lim_{z \to z_0} \frac{E(z)}{z - z_0} = 0$.

Observaciones

- Dada $f\colon A \to \mathbb{C}$, se define $f'\colon B \to \mathbb{C}$, donde $B \subseteq A$ es el conjunto de puntos donde f es derivable.

Observaciones

- Dada $f\colon A \to \mathbb{C}$, se define $f'\colon B \to \mathbb{C}$, donde $B \subseteq A$ es el conjunto de puntos donde f es derivable.
- Si f es derivable en z_0, entonces es continua en z_0.

Teorema

Supongamos que $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ *son derivables en* $z_0 \in A$ *y* $c \in \mathbb{C}$. *Entonces* cf, $f+g$, fg *son derivables en* z_0. *También* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* z_0 *si* $g(z_0) \neq 0$. *Además:*

Teorema

Supongamos que $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ *son derivables en* $z_0 \in A$ *y* $c \in \mathbb{C}$. *Entonces* cf, $f+g$, fg *son derivables en* z_0. *También* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* z_0 *si* $g(z_0) \neq 0$. *Además:*

- $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$,

Teorema

Supongamos que $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ *son derivables en* $z_0 \in A$ *y* $c \in \mathbb{C}$. *Entonces* cf, $f+g$, fg *son derivables en* z_0. *También* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* z_0 *si* $g(z_0) \neq 0$. *Además:*

- $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$,
- $(f+g)(z_0) = f(z_0) + g(z_0)$,

Teorema

Supongamos que $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ *son derivables en* $z_0 \in A$ *y* $c \in \mathbb{C}$. *Entonces* cf, $f+g$, fg *son derivables en* z_0. *También* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* z_0 *si* $g(z_0) \neq 0$. *Además:*

- $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$,
- $(f+g)(z_0) = f(z_0) + g(z_0)$,
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$,

Teorema

Supongamos que $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ *son derivables en* $z_0 \in A$ *y* $c \in \mathbb{C}$*. Entonces* cf*,* $f+g$*,* fg *son derivables en* z_0*. También* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* z_0 *si* $g(z_0) \neq 0$*. Además:*

- $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$,
- $(f+g)(z_0) = f(z_0) + g(z_0)$,
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$,
- $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

Teorema

Supongamos que $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ *son derivables en* $z_0 \in A$ *y* $c \in \mathbb{C}$. *Entonces* cf, $f+g$, fg *son derivables en* z_0. *También* $\frac{f}{g}$ *es derivable en* z_0 *si* $g(z_0) \neq 0$. *Además:*

- $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$,
- $(f+g)(z_0) = f(z_0) + g(z_0)$,
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$,
- $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

Teorema

Para todo $z \in \mathbb{Z}$ *se tiene que* $f(z) = z^n$ *es diferenciable y* $f'(z) = nz^{n-1}$.

Regla de la cadena

Teorema

Sean $f\colon A \to \mathbb{C}$ *y* $g\colon B \to \mathbb{C}$ *funciones tales que* $f(A) \subseteq B$*.*
Sean f *derivable en* $z_0 \in A$ *y* g *derivable en* $f(z_0)$*.*
Entonces $g \circ f$ *es derivable en* z_0*, y*
$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))$*.*

Teorema (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sea $f\colon A \to \mathbb{C}$ *derivable en* z_0*. Si* $f = u + iv$*, entonces*

$$u_x(z_0) = v_y(z_0), \qquad u_y(z_0) = -v_x(z_0).$$