Topología del plano complejo

2015-01-23 7:00

Discos

Definición (Disco)

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y r un real positivo. Definimos el disco con centro en z_0 y radio r, denotado $D(z_0, r)$, como el conjunto:

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Discos

Definición (Disco)

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y r un real positivo. Definimos el disco con centro en z_0 y radio r, denotado $D(z_0, r)$, como el conjunto:

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Definición (Disco cerrado)

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y r un real positivo. Definimos el disco cerrado con centro en z_0 y radio r, denotado $\overline{D}(z_0, r)$, como el conjunto:

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Definición (Conjunto abierto)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es un conjunto abierto si todo punto de A es punto interior de A.

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Definición (Conjunto abierto)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es un conjunto abierto si todo punto de A es punto interior de A.

Teorema (Propiedades de conjuntos abiertos)

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Definición (Conjunto abierto)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es un conjunto abierto si todo punto de A es punto interior de A.

Teorema (Propiedades de conjuntos abiertos)

- *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos abiertos, entonces $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es un conjunto abierto.*

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Definición (Conjunto abierto)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es un conjunto abierto si todo punto de A es punto interior de A.

Teorema (Propiedades de conjuntos abiertos)

- *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos abiertos, entonces $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es un conjunto abierto.*
- *Si U_1, U_2 son abiertos, entonces $U_1 \cap U_2$ es abierto.*

Ejemplos de conjuntos abiertos

Ejemplos de conjuntos abiertos

- $\mathbb{C}$ es abierto.

Ejemplos de conjuntos abiertos

- $\mathbb{C}$ es abierto.
- $\emptyset$ es abierto.

Ejemplos de conjuntos abiertos

- $\mathbb{C}$ es abierto.
- $\emptyset$ es abierto.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $D(z, r)$ es abierto.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es cerrada.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es cerrada.

Teorema

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es cerrada.

Teorema

- *Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos cerrados, entonces $\cap_{\alpha \in I} F_\alpha$ es un conjunto cerrado.*

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es cerrada.

Teorema

- *Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos cerrados, entonces $\cap_{\alpha \in I} F_\alpha$ es un conjunto cerrado.*
- *Si F_1, F_2 son cerrados, entonces $F_1 \cap F_2$ es cerrado.*

Frontera

Definición (Punto frontera)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es un punto frontera de A si para todo $r > 0$ se tiene que $A \cap D(z, r) \neq \emptyset$ y $(\mathbb{C} - A) \cap D(z, r) \neq \emptyset$.

Frontera

Definición (Punto frontera)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es un punto frontera de A si para todo $r > 0$ se tiene que $A \cap D(z,r) \neq \emptyset$ y $(\mathbb{C} - A) \cap D(z,r) \neq \emptyset$.

El conjunto de puntos frontera de A se denota con ∂A.

Frontera

Definición (Punto frontera)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es un punto frontera de A si para todo $r > 0$ se tiene que $A \cap D(z, r) \neq \emptyset$ y $(\mathbb{C} - A) \cap D(z, r) \neq \emptyset$.

El conjunto de puntos frontera de A se denota con ∂A.

Ejemplo

$$\partial D(z_0, r) = \partial \overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

Ejercicios

- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es abierto si y solo si $\partial A \cap A = \emptyset$.

Ejercicios

- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es abierto si y solo si $\partial A \cap A = \emptyset$.
- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado si y solo si $\partial A \subseteq A$.

Ejercicios

- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es abierto si y solo si $\partial A \cap A = \emptyset$.
- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado si y solo si $\partial A \subseteq A$.
- Demuestra que para todo $A \subseteq \mathbb{C}$ se tiene que ∂A es un conjunto cerrado.

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Ejercicios

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Ejercicios

- Demuestra que $z \in \overline{A}$ si y solo si $D(z,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Ejercicios

- Demuestra que $z \in \overline{A}$ si y solo si $D(z,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.
- Demuestra que $\overline{A}$ es cerrado para todo $A \subseteq \mathbb{C}$.

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Ejercicios

- Demuestra que $z \in \overline{A}$ si y solo si $D(z,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.
- Demuestra que $\overline{A}$ es cerrado para todo $A \subseteq \mathbb{C}$.
- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

Definición y notación

Definición (Sucesión)

Una sucesión en un conjunto A es una función $a \colon \mathbb{N} \to A$. Denotaremos $a(n)$ como a_n y a a como $\{a_n\}$.

Definición y notación

Definición (Sucesión)

Una sucesión en un conjunto A es una función $a\colon \mathbb{N} \to A$. Denotaremos $a(n)$ como a_n y a a como $\{a_n\}$.

Definición (Convergencia)

Decimos que la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $a_n \in D(z, \epsilon)$ para todo $n \geq N$. Escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.

Definición y notación

Definición (Sucesión)

Una sucesión en un conjunto A es una función $a\colon \mathbb{N} \to A$. Denotaremos $a(n)$ como a_n y a a como $\{a_n\}$.

Definición (Convergencia)

Decimos que la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $a_n \in D(z, \epsilon)$ para todo $n \geq N$. Escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.

Observación

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} |a_n - z| = 0$.

Propiedades

Teorema

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ *si y solo si* $\lim_{n\to\infty} \Re a_n = \Re z$ *y* $\lim_{n\to\infty} \Im a_n = \Im z$

Propiedades

Teorema

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ *si y solo si* $\lim_{n\to\infty} \Re a_n = \Re z$ *y* $\lim_{n\to\infty} \Im a_n = \Im z$

Teorema

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dos sucesiones de números complejos tales que* $a_n \to z$ *y* $b_n \to w$. *Entonces:*

Propiedades

Teorema

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ *si y solo si* $\lim_{n\to\infty} \Re a_n = \Re z$ *y* $\lim_{n\to\infty} \Im a_n = \Im z$

Teorema

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dos sucesiones de números complejos tales que* $a_n \to z$ *y* $b_n \to w$. *Entonces:*

- $ca_n \to cz$ *para todo* $c \in \mathbb{C}$,

Propiedades

Teorema

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ *si y solo si* $\lim_{n\to\infty} \Re a_n = \Re z$ *y* $\lim_{n\to\infty} \Im a_n = \Im z$

Teorema

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dos sucesiones de números complejos tales que* $a_n \to z$ *y* $b_n \to w$. *Entonces:*

- $ca_n \to cz$ *para todo* $c \in \mathbb{C}$,
- $\overline{a_n} \to \overline{z}$, $|a_n| \to |z|$,

Propiedades

Teorema

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ *si y solo si* $\lim_{n\to\infty} \Re a_n = \Re z$ *y* $\lim_{n\to\infty} \Im a_n = \Im z$

Teorema

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dos sucesiones de números complejos tales que* $a_n \to z$ *y* $b_n \to w$. *Entonces:*

- $ca_n \to cz$ *para todo* $c \in \mathbb{C}$,
- $\overline{a_n} \to \overline{z}$, $|a_n| \to |z|$,
- $a_n + b_n \to z + w$, $a_n b_n \to zw$.

Propiedades

Teorema

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} \Re a_n = \Re z$ y $\lim_{n\to\infty} \Im a_n = \Im z$

Teorema

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones de números complejos tales que $a_n \to z$ y $b_n \to w$. Entonces:

- *$ca_n \to cz$ para todo $c \in \mathbb{C}$,*
- *$\overline{a_n} \to \overline{z}$, $|a_n| \to |z|$,*
- *$a_n + b_n \to z + w$, $a_n b_n \to zw$.*
- *Si $w \neq 0$, entonces $b_n = 0$ a lo más para una cantidad finita de valores de n, y $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{z}{w}$.*

Punto de acumulación

Definición (Punto de acumulación)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es punto de acumulación de A si para todo $\epsilon > 0$ existe un punto en $D(z, \epsilon) \cap A$ *distinto de* z.

Punto de acumulación

Definición (Punto de acumulación)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es punto de acumulación de A si para todo $\epsilon > 0$ existe un punto en $D(z, \epsilon) \cap A$ *distinto de* z.

Definición (Punto de acumulación de una sucesión)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es punto de acumulación de a_n si para todo $\epsilon > 0$ existe una infinidad de valores de n tales que $a_n \in D(z, \epsilon)$.

Definición (Subsucesión)

Se dice que la sucesión $\{b_k\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ si existe una sucesión creciente en $\mathbb{N}$

$$n_1 < n_2 < \cdots$$

tal que $a_{n_k} = b_k$ para $k = 1, 2, \ldots$.

Definición (Subsucesión)

Se dice que la sucesión $\{b_k\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ si existe una sucesión creciente en $\mathbb{N}$

$$n_1 < n_2 < \cdots$$

tal que $a_{n_k} = b_k$ para $k = 1, 2, \ldots$.

Teorema

El complejo $z \in \mathbb{C}$ es punto de acumulación de la sucesión $a = \{a_n\}$ si y solo si existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de a tal que $\lim a_{n_k} = z$.

Teorema

Si una sucesión $a = \{a_n\}$ *tiene límite* z*, entonces toda subsucesión de* a *tiene límite* z*.*

Teorema

Si una sucesión $a = \{a_n\}$ tiene límite z, entonces toda subsucesión de a tiene límite z.

Teorema

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces $z \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión en A con límite z.

Teorema

Si una sucesión $a = \{a_n\}$ tiene límite z, entonces toda subsucesión de a tiene límite z.

Teorema

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces $z \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión en A con límite z.

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Entonces A es cerrado si y solo si A contiene todo punto de acumulación de toda sucesión en A.