

Consecuencias de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

2015-02-06 9:00

1 Consecuencias

Condición suficiente para derivabilidad

Teorema

Sea $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{C}$ donde U es abierto. Supongamos que u_x, u_y, v_x, v_y existen en U , son continuas en $z_0 \in U$, y satisfacen allí las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, $u_x(z_0) = v_y(z_0)$ y $v_x(z_0) = -u_y(z_0)$. Entonces f es derivable en z_0 , y $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$.

Dominios

Definición

Si $D \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo, decimos que D es un **dominio**.

Dominios

Definición

Si $D \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo, decimos que D es un **dominio**.

Lema

Sea $u: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ donde D es un dominio. Si $u_x(z) = u_y(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces u es constante.

Funciones analíticas

Definición

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si f es derivable en todo $z \in U$, decimos que f es **analítica** en U .

Funciones analíticas

Definición

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si f es derivable en todo $z \in U$, decimos que f es **analítica** en U .

Teorema

Sea f una función analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es constante.

Funciones analíticas

Definición

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si f es derivable en todo $z \in U$, decimos que f es **analítica** en U .

Teorema

Sea f una función analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es constante.

Teorema

Sea $f = u + iv$ analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Si alguna de las funciones $u, v, |f|$ es constante en D , entonces f es constante en D .

Funciones armónicas

Definición

Sea $u: D \rightarrow \mathbb{R}$. El **laplaciano** de u es

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

La función u es **armónica** si $\Delta u = 0$

Funciones armónicas

Definición

Sea $u: D \rightarrow \mathbb{R}$. El **laplaciano** de u es

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

La función u es **armónica** si $\Delta u = 0$

Teorema

Sea $f = u + iv$ analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$.
Demostraremos más adelante que u, v son funciones de clase C^∞ . Suponiendo eso, se tiene que u, v son armónicas.