Consecuencias de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

2015-02-06 7:00

1 Consecuencias

Condición suficiente para derivabilidad

Teorema

Sea $f = u + iv \colon U \to \mathbb{C}$ *donde* U *es abierto. Supongamos que* u_x, u_y, v_x, v_y *existen en* U*, son continuas en* $z_0 \in U$*, y satisfacen allí las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir,* $u_x(z_0) = v_y(z_0)$ *y* $v_x(z_0) = -u_y(z_0)$*. Entonces* f *es derivable en* z_0*, y* $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$*.*

Dominios

Definición

Si $D \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo, decimos que D es un dominio.

Dominios

Definición

Si $D \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo, decimos que D es un dominio.

Lema

Sea $u\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ donde D es un dominio. Si $u_x(z) = u_y(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces u es constante.

Funciones analíticas

Definición

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si f es derivable en todo $z \in U$, decimos que f es analítica en U.

Funciones analíticas

Definición

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si f es derivable en todo $z \in U$, decimos que f es analítica en U.

Teorema

Sea f una función analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es constante.

Funciones analíticas

Definición

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Si f es derivable en todo $z \in U$, decimos que f es analítica en U.

Teorema

Sea f una función analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es constante.

Teorema

Sea $f = u + iv$ analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Si alguna de las funciones $u, v, |f|$ es constante en D, entonces f es constante en D.

Funciones armónicas

Definición

Sea $u\colon D \to \mathbb{R}$. El laplaciano de u es

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

La función u es armónica si $\triangle u = 0$

Funciones armónicas

Definición

Sea $u\colon D \to \mathbb{R}$. El laplaciano de u es

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

La función u es armónica si $\triangle u = 0$

Teorema

Sea $f = u + iv$ analítica en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Demostraremos más adelante que u, v son funciones de clase C^∞. Suponiendo eso, se tiene que u, v son armónicas.