Series de funciones analíticas

2015-04-17 7:00

Definiciones

Definición (Convergencia)

Definiciones

Definición (Convergencia)

- Decimos que la sucesión de números complejos z_n converge a $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que
$$n \geq N \text{ implica } |z_n - z_0| < \epsilon.$$
En tal caso, escribimos $z_n \to z_0$.

Definiciones

Definición (Convergencia)

- Decimos que la sucesión de números complejos z_n converge a $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que
$$n \geq N \text{ implica } |z_n - z_0| < \epsilon.$$
En tal caso, escribimos $z_n \to z_0$.
- La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ de números complejos converge a S si la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge a S. En tal caso escribimos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

Teorema (Criterio de Cauchy)

Teorema (Criterio de Cauchy)

- *z_n converge si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $|z_n - z_m| < \epsilon$.*

Teorema (Criterio de Cauchy)

- z_n *converge si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que si* $n, m \geq N$ *entonces* $|z_n - z_m| < \epsilon$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que si* $n \geq N$, *entonces*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon \text{ para } p = 1, 2, \ldots$$

Teorema (Criterio de Cauchy)

- z_n converge si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $|z_n - z_m| < \epsilon$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon \text{ para } p = 1, 2, \ldots$$

Corolario

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $a_n \to 0$.

Definición (Convergencia absoluta)

Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, decimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente.

Definición (Convergencia absoluta)

Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, decimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente.

Teorema

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, entonces converge.

Criterios de convergencia

Teorema

Criterios de convergencia

Teorema

- *Si* $|r| < 1$, *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge a* $\frac{1}{1-r}$. *Si* $|r| \geq 1$, *la serie diverge.*

Criterios de convergencia

Teorema

- *Si* $|r| < 1$, *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge a* $\frac{1}{1-r}$. *Si* $|r| \geq 1$, *la serie diverge.*
- *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge y* $0 \leq a_k \leq b_k$ *converge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge. (Resultado dual para divergencia).*

Criterios de convergencia

Teorema

- *Si* $|r| < 1$, *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge a* $\frac{1}{1-r}$. *Si* $|r| \geq 1$, *la serie diverge.*
- *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge y* $0 \leq a_k \leq b_k$ *converge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge. (Resultado dual para divergencia).*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *converge si* $p > 1$. *Si* $p \leq 1$, *la serie diverge a* ∞.

Criterios de convergencia

Teorema

- *Si* $|r| < 1$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge a* $\frac{1}{1-r}$*. Si* $|r| \geq 1$*, la serie diverge.*
- *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge y* $0 \leq a_k \leq b_k$ *converge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge. (Resultado dual para divergencia).*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *converge si* $p > 1$*. Si* $p \leq 1$*, la serie diverge a* ∞*.*
- *Si* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to r$ *con* $r < 1$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente. Si* $r > 1$*, la serie diverge.*

Criterios de convergencia

Teorema

- *Si* $|r| < 1$, *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge a* $\frac{1}{1-r}$. *Si* $|r| \geq 1$, *la serie diverge.*
- *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge y* $0 \leq a_k \leq b_k$ *converge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge. (Resultado dual para divergencia).*
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *converge si* $p > 1$. *Si* $p \leq 1$, *la serie diverge a* ∞.
- *Si* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to r$ *con* $r < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente. Si* $r > 1$, *la serie diverge.*
- *Si* $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to r$ *y* $r < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente. Si* $r > 1$, *la serie diverge.*

Sucesiones de funciones

Definición

Sucesiones de funciones

Definición

- Sea $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones definidas en D. Si existe $f\colon D \to \mathbb{C}$ tal que $f_n(z) \to f(z)$ para todo $z \in D$, decimos que f_n converge puntualmente a f. En este caso, escribimos $f_n \to f$.

Sucesiones de funciones

Definición

- Sea $f_n : D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones definidas en D. Si existe $f : D \to \mathbb{C}$ tal que $f_n(z) \to f(z)$ para todo $z \in D$, decimos que f_n converge puntualmente a f. En este caso, escribimos $f_n \to f$.
- Si para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $n \geq N$ implica $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in D$, decimos que f_n converge uniformemente a f.

Sucesiones de funciones

Definición

- Sea $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones definidas en D. Si existe $f\colon D \to \mathbb{C}$ tal que $f_n(z) \to f(z)$ para todo $z \in D$, decimos que f_n converge puntualmente a f. En este caso, escribimos $f_n \to f$.
- Si para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $n \geq N$ implica $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in D$, decimos que f_n converge uniformemente a f.
- Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge puntualmente (uniformemente) si la sucesión de sumas parciales converge puntualmente (uniformemente).

Teorema (Criterio de Cauchy)

Teorema (Criterio de Cauchy)

- $f_n(z)$ *converge uniformemente si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $|f_n - f_{n+p}| < \epsilon$ *para todo* $p = 1, 2, \ldots$.

Teorema (Criterio de Cauchy)

- $f_n(z)$ *converge uniformemente si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N > 0$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $|f_n - f_{n+p}| < \epsilon$ *para todo* $p = 1, 2, \ldots$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ *converge uniformemente en* D *si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que si* $n \geq N$, *entonces*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \epsilon \text{ para } z \in D \text{ y } p = 1, 2, \ldots$$

Límite uniforme

Teorema

Si cada f_n es continua y $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es continua.

Criterio de Weierstrass

Teorema

Sea $g_n \colon D \to \mathbb{C}$ *una sucesión de funciones. Supongamos que existe una sucesión* M_n *de reales* $M_n \geq 0$ *tal que:*

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge absoluta y uniformemente en* D.

Criterio de Weierstrass

Teorema

Sea $g_n \colon D \to \mathbb{C}$ *una sucesión de funciones. Supongamos que existe una sucesión* M_n *de reales* $M_n \geq 0$ *tal que:*

- $|g_n(z)| \leq M_n$ *para* $z \in D$,

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge absoluta y uniformemente en* D.

Criterio de Weierstrass

Teorema

Sea $g_n : D \to \mathbb{C}$ *una sucesión de funciones. Supongamos que existe una sucesión* M_n *de reales* $M_n \geq 0$ *tal que:*

- $|g_n(z)| \leq M_n$ *para* $z \in D$*,*
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge*

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge absoluta y uniformemente en* D*.*

Teorema

Teorema

- *Sea* $\gamma : [a, b] \to D$ *una curva en la región* D*, y sea* $f_n : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ *una sucesión de funciones continuas, tal que* $f_n \to f$ *uniformemente, donde* $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$*. Entonces:*
$$\int_\gamma f_n \, dz \to \int_\gamma f \, dz.$$

Teorema

- *Sea* $\gamma\colon [a,b] \to D$ *una curva en la región* D, *y sea* $f_n\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ *una sucesión de funciones continuas, tal que* $f_n \to f$ *uniformemente, donde* $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$. *Entonces:*
$$\int_\gamma f_n\,dz \to \int_\gamma f\,dz.$$
- *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge uniformemente en* $\gamma([a,b])$, *entonces:*
$$\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_\gamma g_n(z)\,dz\right).$$

Teorema

Teorema

- *Sean D abierto y $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones analíticas. Si $f_n \to f$ uniformemente en cada disco cerrado contenido en D, entonces f es analítica. Además $f_n' \to f'$ puntualmente en D y uniformemente en cada disco cerrado contenido en D.*

Teorema

- *Sean D abierto y $f_n \colon D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones analíticas. Si $f_n \to f$ uniformemente en cada disco cerrado contenido en D, entonces f es analítica. Además $f_n' \to f'$ puntualmente en D y uniformemente en cada disco cerrado contenido en D.*
- *Sea $g_k \colon D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones analíticas tal que $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ con convergencia uniforme en cada disco cerrado contenido en D. Entonces $g \colon D \to \mathbb{C}$ es analítica, y $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(z)$ puntualmente en D y uniformemente en cada disco cerrado contenido en D.*