Topología del plano complejo

2015-01-23 7:00

Discos

Definición (Disco)

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y r un real positivo. Definimos el disco con centro en z_0 y radio r, denotado $D(z_0, r)$, como el conjunto:

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Discos

Definición (Disco)

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y r un real positivo. Definimos el disco con centro en z_0 y radio r, denotado $D(z_0, r)$, como el conjunto:

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Definición (Disco cerrado)

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y r un real positivo. Definimos el disco cerrado con centro en z_0 y radio r, denotado $\overline{D}(z_0, r)$, como el conjunto:

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Definición (Conjunto abierto)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es un conjunto abierto si todo punto de A es punto interior de A.

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Definición (Conjunto abierto)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es un conjunto abierto si todo punto de A es punto interior de A.

Teorema (Propiedades de conjuntos abiertos)

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Definición (Conjunto abierto)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es un conjunto abierto si todo punto de A es punto interior de A.

Teorema (Propiedades de conjuntos abiertos)

- *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos abiertos, entonces $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es un conjunto abierto.*

Conjuntos abiertos

Definición (Punto interior)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$.

Definición (Conjunto abierto)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es un conjunto abierto si todo punto de A es punto interior de A.

Teorema (Propiedades de conjuntos abiertos)

- *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos abiertos, entonces $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ es un conjunto abierto.*
- *Si U_1, U_2 son abiertos, entonces $U_1 \cap U_2$ es abierto.*

Ejemplos de conjuntos abiertos

Ejemplos de conjuntos abiertos

- $\mathbb{C}$ es abierto.

Ejemplos de conjuntos abiertos

- $\mathbb{C}$ es abierto.
- $\emptyset$ es abierto.

Ejemplos de conjuntos abiertos

- $\mathbb{C}$ es abierto.
- $\emptyset$ es abierto.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $D(z, r)$ es abierto.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es cerrada.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es cerrada.

Teorema

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es cerrada.

Teorema

- *Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de conjuntos cerrados, entonces $\cap_{\alpha \in I} F_\alpha$ es un conjunto cerrado.*

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que A es cerrado si su complemento en $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} - A$, es un conjunto abierto.

- $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son cerrados.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, se tiene que $\overline{D}(z, r)$ es cerrado.
- La circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es cerrada.

Teorema

- *Si* $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *es una colección de conjuntos cerrados, entonces* $\cap_{\alpha \in I} F_\alpha$ *es un conjunto cerrado.*
- *Si* F_1, F_2 *son cerrados, entonces* $F_1 \cap F_2$ *es cerrado.*

Frontera

Definición (Punto frontera)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es un punto frontera de A si para todo $r > 0$ se tiene que $A \cap D(z, r) \neq \emptyset$ y $(\mathbb{C} - A) \cap D(z, r) \neq \emptyset$.

Frontera

Definición (Punto frontera)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es un punto frontera de A si para todo $r > 0$ se tiene que $A \cap D(z, r) \neq \emptyset$ y $(\mathbb{C} - A) \cap D(z, r) \neq \emptyset$.

El conjunto de puntos frontera de A se denota con ∂A.

Frontera

Definición (Punto frontera)

Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Decimos que z es un punto frontera de A si para todo $r > 0$ se tiene que $A \cap D(z, r) \neq \emptyset$ y $(\mathbb{C} - A) \cap D(z, r) \neq \emptyset$.

El conjunto de puntos frontera de A se denota con ∂A.

Ejemplo

$\partial D(z, r) = \partial \overline{D}(z, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Ejercicios

- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es abierto si y solo si $\partial A \cap A = \emptyset$.

Ejercicios

- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es abierto si y solo si $\partial A \cap A = \emptyset$.
- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado si y solo si $\partial A \subseteq A$.

Ejercicios

- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es abierto si y solo si $\partial A \cap A = \emptyset$.
- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado si y solo si $\partial A \subseteq A$.
- Demuestra que para todo $A \subseteq \mathbb{C}$ se tiene que ∂A es un conjunto cerrado.

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Ejercicios

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Ejercicios

- Demuestra que $z \in \overline{A}$ si y solo si $D(z,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Ejercicios

- Demuestra que $z \in \overline{A}$ si y solo si $D(z,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.
- Demuestra que $\overline{A}$ es cerrado para todo $A \subseteq \mathbb{C}$.

Cerradura

Definición (Cerradura)

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. La cerradura de A, denotada $\overline{A}$, se define como:

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Por ejemplo, $\overline{D(z,r)} = \overline{D}(z,r)$.

Ejercicios

- Demuestra que $z \in \overline{A}$ si y solo si $D(z,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.
- Demuestra que $\overline{A}$ es cerrado para todo $A \subseteq \mathbb{C}$.
- Demuestra que $A \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

Definición y notación

Definición (Sucesión)

Una sucesión en un conjunto A es una función $a\colon \mathbb{N} \to A$. Denotaremos $a(n)$ como a_n y a a como $\{a_n\}$.

Definición y notación

Definición (Sucesión)

Una sucesión en un conjunto A es una función $a\colon \mathbb{N} \to A$. Denotaremos $a(n)$ como a_n y a a como $\{a_n\}$.

Definición (Convergencia)

Decimos que la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $a_n \in D(z, \epsilon)$ para todo $n \geq N$. Escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.

Definición y notación

Definición (Sucesión)

Una sucesión en un conjunto A es una función $a\colon \mathbb{N} \to A$. Denotaremos $a(n)$ como a_n y a a como $\{a_n\}$.

Definición (Convergencia)

Decimos que la sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que $a_n \in D(z, \epsilon)$ para todo $n \geq N$. Escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.

Observación

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} |a_n - z| = 0$.

Propiedades

Teorema

$\lim_{n\to\infty} a_n = z$ *si y solo si* $\lim_{n\to\infty} \Re a_n = \Re z$ *y* $\lim_{n\to\infty} \Im a_n = \Im z$