La función exponencial

2015-02-09 9:00

Observemos que las funciones $u = e^x \cos y$ y $v = e^x \sin y$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Observemos que las funciones $u = e^x \cos y$ y $v = e^x \sin y$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Definición

La función de variable compleja

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

se llama función exponencial compleja.

Propiedades

- $(e^z)' = e^z$.

Propiedades

- $(e^z)' = e^z$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$ para todos $a, b \in \mathbb{C}$.

Propiedades

- $(e^z)' = e^z$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$ para todos $a, b \in \mathbb{C}$.
- $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Propiedades

- $(e^z)' = e^z$.
- $e^{a+b} = e^a e^b$ para todos $a, b \in \mathbb{C}$.
- $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $f(z) = e^z$ es una función entera, es decir, es analítica en el plano complejo $\mathbb{C}$.

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (fórmula de Euler),

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,
- $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,

Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,
- $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$,
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
  $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.

Definición

Definición (Logaritmo)

Dado $w \in \mathbb{C}$, se define $z = \log w$ como una solución de la ecuación $e^z = w$.

Observaciones

Observaciones

- Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se obtiene que 0 no tiene logaritmo.

Observaciones

- Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea $w \neq 0$. Entonces $e^{x+iy} = w$ es equivalente a:

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

Observaciones

- Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea $w \neq 0$. Entonces $e^{x+iy} = w$ es equivalente a:

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

- De lo anterior se obtiene:

$$\log w = \log |w| + i \arg w,$$

donde $\arg w$ representa el conjunto de argumentos de w. Em particular, $\log w$ tiene una infinidad de valores, que difieren por un múltiplo de $2\pi i$.

Observaciones

- Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea $w \neq 0$. Entonces $e^{x+iy} = w$ es equivalente a:

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

- De lo anterior se obtiene:

$$\log w = \log |w| + i \arg w,$$

  donde $\arg w$ representa el conjunto de argumentos de w. Em particular, $\log w$ tiene una infinidad de valores, que difieren por un múltiplo de $2\pi i$.
- Sin embargo, si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, consideraremos en el valor usual (real) de $\log a$.