

# La función exponencial

2015-02-09 9:00

1 Definición

2 Las funciones trigonométricas

3 Logaritmo

Observemos que las funciones  $u = e^x \cos y$  y  $v = e^x \sin y$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

Observemos que las funciones  $u = e^x \cos y$  y  $v = e^x \sin y$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

## Definición

La función de variable compleja

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

se llama **función exponencial compleja**.

# Propiedades

- $(e^z)' = e^z$ .

# Propiedades

- $(e^z)' = e^z$ .
- $e^{a+b} = e^a e^b$  para todos  $a, b \in \mathbb{C}$ .

# Propiedades

- $(e^z)' = e^z$ .
- $e^{a+b} = e^a e^b$  para todos  $a, b \in \mathbb{C}$ .
- $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

# Propiedades

- $(e^z)' = e^z$ .
- $e^{a+b} = e^a e^b$  para todos  $a, b \in \mathbb{C}$ .
- $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
- $f(z) = e^z$  es una función **entera**, es decir, es analítica en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .



## Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

## Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

## Propiedades

## Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

## Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  (fórmula de Euler),

## Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

## Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ,

## Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

## Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ,
- $(\cos z)' = -\sin z$ ,  $(\sin z)' = \cos z$ ,

## Definición (Seno y coseno)

Las funciones trigonométricas de variable compleja se definen como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

## Propiedades

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  (fórmula de Euler),
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ,
- $(\cos z)' = -\sin z$ ,  $(\sin z)' = \cos z$ ,
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ,  
 $\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$ .

# Definición

## Definición (Logaritmo)

Dado  $w \in \mathbb{C}$ , se define  $z = \log w$  como una solución de la ecuación  $e^z = w$ .

## Observaciones



## Observaciones

- Como  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , se obtiene que 0 no tiene logaritmo.

## Observaciones

- Como  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea  $w \neq 0$ . Entonces  $e^{x+iy} = w$  es equivalente a:

$$e^x = |w|, \quad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

## Observaciones

- Como  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea  $w \neq 0$ . Entonces  $e^{x+iy} = w$  es equivalente a:

$$e^x = |w|, \quad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

- De lo anterior se obtiene:

$$\log w = \log |w| + i \arg w,$$

donde  $\arg w$  representa el conjunto de argumentos de  $w$ . En particular,  $\log w$  tiene una infinidad de valores, que difieren por un múltiplo de  $2\pi i$ .

## Observaciones

- Como  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , se obtiene que 0 no tiene logaritmo.
- Sea  $w \neq 0$ . Entonces  $e^{x+iy} = w$  es equivalente a:

$$e^x = |w|, \quad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

- De lo anterior se obtiene:

$$\log w = \log |w| + i \arg w,$$

donde  $\arg w$  representa el conjunto de argumentos de  $w$ . En particular,  $\log w$  tiene una infinidad de valores, que difieren por un múltiplo de  $2\pi i$ .

- Sin embargo, si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , consideraremos el valor usual (real) de  $\log a$ .

# Ramas

## Definición

Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica y  $D \subseteq f(U)$  es un dominio, una **rama de  $f^{-1}$  en  $D$**  es una función continua  $g: D \rightarrow U$  tal que  $f(g(z)) = z$  para todo  $z \in D$ .

# Ramas

## Definición

Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica y  $D \subseteq f(U)$  es un dominio, una **rama de  $f^{-1}$  en  $D$**  es una función continua  $g: D \rightarrow U$  tal que  $f(g(z)) = z$  para todo  $z \in D$ .

## Definición (Argumento principal)

Dado  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ , definimos  $\text{Arg}(z)$  como el argumento de  $z$  que está en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ .

# Ramas

## Definición

Si  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica y  $D \subseteq f(U)$  es un dominio, una **rama de  $f^{-1}$  en  $D$**  es una función continua  $g: D \rightarrow U$  tal que  $f(g(z)) = z$  para todo  $z \in D$ .

## Definición (Argumento principal)

Dado  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ , definimos  $\text{Arg}(z)$  como el argumento de  $z$  que está en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ .

## Observación

La función  $\text{Arg}: \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

# Raíz cuadrada

## Ejemplo

La función

$$z \mapsto \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\text{Arg}(z)}{2} + i \sin \frac{\text{Arg}(z)}{2} \right),$$

es una rama de la inversa de  $f(z) = z^2$ , definida en  $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}$ .



## Raíz cuadrada

### Ejemplo

La función

$$z \mapsto \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\text{Arg}(z)}{2} + i \sin \frac{\text{Arg}(z)}{2} \right),$$

es una rama de la inversa de  $f(z) = z^2$ , definida en  $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}$ .

### Ejemplo

La función

$$z \mapsto \log |z| + i \text{Arg}(z)$$

es una rama de la inversa de  $f(z) = e^z$ , definida en  $D = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 0\}$ .

# Derivabilidad de ramas

## Teorema

*Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  analítica, y sea  $g: D \rightarrow U$  una rama de  $f^{-1}$ . Sean  $z_0 \in D$  y  $w_0 = g(z_0) \in U$ . Si  $f'(w_0) \neq 0$ , entonces  $g$  es derivable en  $z_0$  y  $g'(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}$ .*

*Por lo tanto, si  $f'$  no tiene ceros en  $g(D)$ , entonces  $g$  es analítica en  $D$ , y  $g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$ .*