Instituto Tecnológico de Buenos Aires

ELEMENTO DE LA TEORÍA DE INCERTEZAS EXPERIMENTALES

(Versión preliminar 2.0)

Roberto E Vieytes

Marzo 2021

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Ya sea en ciencia o tecnología la base del desarrollo es la medición, de cuyos resultados se obtienen datos que servirán para realizar predicciones. La utilidad de las predicciones estarán fuertemente relacionadas con la calidad de las medidas realizadas y resulta, entonces, muy importante el cuantificar la calidad de una medición.

Por un lado el valor informado debe estar lo más cerca posible del valor real de la cantidad a medir, este valor, que será desconocido para nosotros, se denominará valor verdadero de la cantidad a medir (mensurando). Cada medida será no un número sino un intervalo, generalmente centrado, en el valor que se informa (valor más probable) donde con alta probabilidad estará contenido el valor verdadero de la cantidad bajo estudio.

En el capítulo 2 desarrollaremos el tema de la medida a partir de un protocolo de medición, discutiendo el tipo de incertezas a las que puede estar afectado su resultado. Discutiremos las incertezas sistemáticas y aleatorias y cómo asignar una incerteza ya sea en una medida única o una serie de medidas de la misma cantidad. Definiremos las mediciones directas y las indirectas. También se definirán las incertezas Tipo A que provienen de las variaciones aleatorias que tiene el proceso de medición y las de Tipo B que provienen de las incertezas de los instrumentos u otras fuentes no aleatorias, según lo establece la Norma ISO [GUM-2008]. Las incertezas las "sumaremos" para obtener la incerteza combinada o total. En algunos sectores de la empresa, sobre todo cuando los datos que se le requieren al sector son críticos, se trabaja con intervalos de incerteza más seguros, de ahí que se estableció la incerteza expandida que se comenta en el apéndice A. Desarrollaremos el método de propagación de las incertezas para el caso de medidas indirectas. Contando con el valor del mensurando y su incerteza, tendremos que definir cómo lo informamos.

En el capítulo 3 fijaremos reglas para el redondeo introduciendo el concepto de cifras significativas y la forma en que se expresa el resultado de una medida.

Cuando el mismo mensurando se mide en diferentes empresas, ya sea porque se quiere evaluar la uniformidad de la medida o por distintos métodos, y queremos obtener de esta serie un solo dato con su incerteza el método empleado se discutirá en el capítulo 4. En el capítulo 6 haremos una recorrida por la forma de obtener relaciones entre variables medidas con el objeto de encontrar valores de parámetros del modelo que pensamos es el adecuado para el experimento bajo estudio y, también, estudiaremos como encontrar un modelo a partir de los datos recolectados en un experimento. Por último, en el capítulo 8 veremos cómo se deben presentar los estudios realizados ante personas que no han estado involucradas en el proceso de medición.

En estas notas, hay también una serie de apéndices que complementan los expuesto en el cuerpo principal, en el apéndice A como ya se citó, discutiremos como obtener la incerteza extendida de una medición; en el apéndice D como disminuir el error Tipo A cuando medimos varias veces la misma cantidad. En el apéndice E se desarrollará el método de los cuadrados mínimos ordinarios para obtener los parámetros de una recta que tiene ordenada al origen y la que no. En el apéndice F implementaremos el cálculo de los parámetros de la recta en una planilla de cálculo.

El alumno de Física 1 requiere tener el conocimiento de los capítulos 2; 3; 5; 6; 7 y los apéndices B, D y E.

Capítulo 2

Medidas e incertezas

2.1. El proceso de medición

El proceso de medición constituye el corazón del quehacer experimental. En términos simples, medir es obtener el valor numérico de una magnitud física, denominada mensurando, relacionada con algún fenómeno de interés. Son magnitudes por ejemplo la longitud, la masa, el tiempo, la fuerza, la intensidad de la corriente eléctrica, la temperatura, la presión, etc.

Es importante destacar que también se trabaja con cantidades (o magnitud particular) que resulta ser la especialización de una magnitud y se refiere al valor que toma la medición de una magnitud determinada. Por ejemplo, el ancho de una mesa, el alto de una habitación o el espesor de una hoja de papel, son todas longitudes, sin embargo representan valores de “distintas cosas”.

El proceso de medición consiste en comparar la magnitud medida con otra magnitud patrón denominada unidad, que le da significado. El resultado de una medición es un número concreto, es decir, un número acompañado por una unidad. Si cambiamos de unidad, claramente el número cambiará aunque la cantidad medida, podría no cambiar.

2.1.1. El proceso de medición

Para establecer el valor de un mensurando es necesario llevar a cabo un proceso de medición. Dicho proceso involucra:

- El sistema OBJETO del cual se quiere medir alguna propiedad.
- El sistema de MEDICIÓN, o sea el conjunto de instrumentos con los que se mide (del cual también forma parte el observador).
- El sistema de COMPARACIÓN o sistema de unidades de medida.
- Un PROTOCOLO experimental que contiene las reglas necesarias para la toma de datos a partir del sistema de medición empleado.

Protocolo:

Medición del diámetro D de un cilindro

1. Cilindro: Sistema objeto.
2. Calibre: sistema de medición.
3. Protocolo de medición.

Figura 2.1: ***Proceso de medición para el diámetro de un cilindro.***
Figura tomada de Simon A. Eugster - Trabajo propio, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7900253. Visitado marzo 2020.

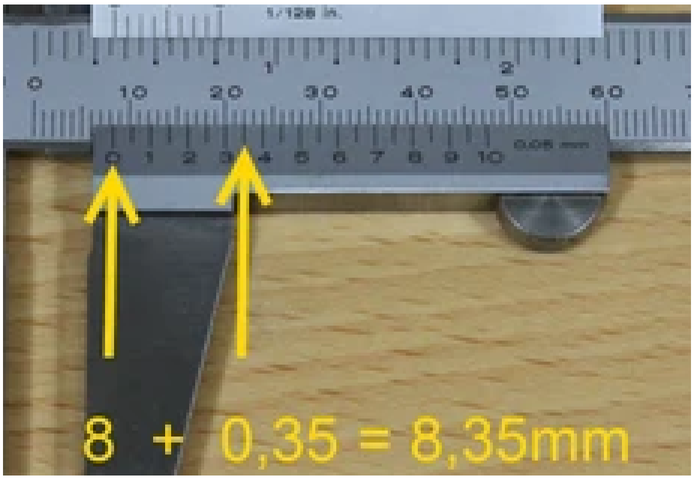


Figura 2.2: ***Lectura de una longitud en un calibre***

- Coloque el objeto a medir entre las mordazas para medidas interiores.
- Determine la menor división en la escala, en la que cae el 0 del vernier (o nonio) Esto será el valor en milímetros de la medida. En la figura 2.2 8mm
- Determine la división del vernier que coincide con una de la escala, esto dará el valor de la fracción de milímetro. En la figura 2.2 0,35

Podría ocurrir que ninguna división del vernier coincide con una división de la escala, en este caso la medida tendrá una incerteza mayor a la establecida por el fabricante (0,05 mm marcado junto a la escala del vernier).

Los instrumentos que indiquen su medida mediante escalas o agujas se denominan analógicos; sin embargo con la tecnología actual muchos instrumentos informan su medida directamente indicando números en un display. En la siguiente figura se presenta un cronómetro analógico y otro digital:

Figura 2.3: ***Cronometro analógico y digital. El analógico tiene una mínima división (apreciación) de*** $\frac{1}{20} = 0{,}05$ ***s y el digital*** $0{,}001$ ***s***

2.2. Precisión y exactitud

Ambos cronómetros presentados en la figura 2.3 mas allá de la mecánica de su funcionamiento se diferencian por su apreciación que, en cuanto a lo que se refiere a la medida, se denomina precisión. Por otra parte, ambos instrumentos tienen que estar avalados por un laboratorio de metrología que certifique su funcionamiento mediante la entrega de un certificado de calibración; es decir nos de información de la exactitud del instrumento. Aparecen entonces dos términos que comúnmente se los asocia, pero que, técnicamente, tienen significados diferentes:

Precisión En ingeniería, ciencia, industria y estadística, se denomina precisión a la capacidad de un instrumento de dar el mismo resultado en mediciones diferentes realizadas en las mismas condiciones o de dar el resultado deseado con exactitud.

Exactitud se denomina exactitud a la capacidad de un instrumento de acercarse al valor de la magnitud real.

En la figura 2.4 se da una representación gráfica de los términos exactitud y precisión.

Supongamos que el mensurando que intentamos medir tiene un valor, si lo medimos exactamente, estará representado por el centro del blanco que aparece en la figura. Si la medida no tiene fluctuaciones estadísticas grandes y el instrumento utilizado es exacto, las medidas realizadas, se concentrarán en un entorno del centro: la medida será precisa y exacta, pero si el instrumento está mal calibrado, las medidas serán precisas, pero no exactas, Por otra parte si por motivos varios, la medida adolece de fluctuaciones estadísticas, tendremos una medida exacta, pero no precisa. Podemos tener también el caso de una serie de mediciones poco precisas e inexactas.

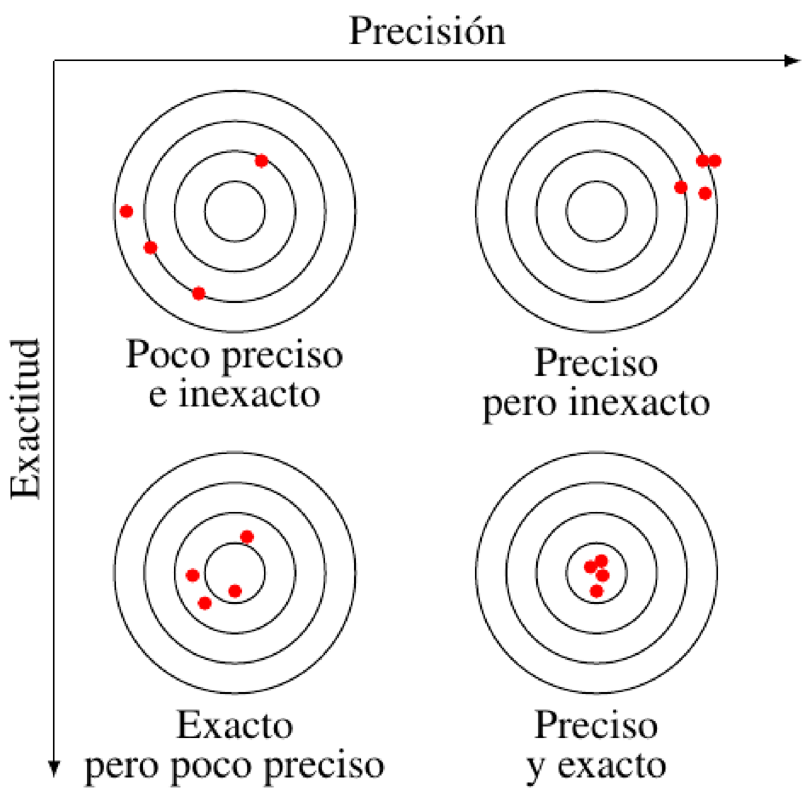


Figura 2.4: ***Representación gráfica de la exactitud y precisión***

La precisión estará asociada tanto con el proceso de medición como con la apreciación del instrumento de medida y la exactitud con la calibración del instrumento.

2.3. Incerteza, error o incertidumbre de medición

Partamos de la base que el mensurando (X) que queremos medir tiene un valor verdadero, desconocido y que lo denotaremos χ_0[1] Al medir dicha cantidad el resultado de la medida es x; muy probablemente el valor medido diferirá del valor verdadero. Llamemos ζ a esta diferencia

$$\zeta = x - \chi_0.$$

Como no conocemos χ_0 no podemos conocer la diferencia. Si embargo podemos acotarla, es decir encontrar un valor $u(X)$ para su cota superior[2]:

$$u(X) \gtrsim \zeta.$$

[1]No todo mensurando tiene un valor verdadero, por ejemplo la altura de las personas, la altura de una persona si tiene un valor verdadero, pero la de un conjunto de personas no.

[2]La notación u proviene de la inicial de la palabra inglesa "uncertainty" que en este contexto se traduce como incertidumbre; antiguamente se usaba la notación ΔX. En estas notas usaremos de manera intercambiable los términos incertidumbre, incerteza y error.

El conocer $u(X)$ da una idea de cuanto nos estamos corriendo del valor verdadero, es decir, da una idea de la dispersión. Es común también denominar a $u(X)$ error de la medición, sin embargo hay que aclarar que en este contexto error no puede ser considerado como sinónimo de equivocación. Toda medición por mejor hecha que esté tiene asociada una incertidumbre, ya sea que provenga del proceso de medición o la cantidad a medir y el objetivo de la teoría de evaluación de las incertezas no es dar un valor pequeño para ellas, sino un valor confiable de las mismas.

2.4. Incertezas sistemáticas y aleatorias

Las incertezas de la medición aparecen fundamentalmente por dos causas que se clasifican en:

Sistemáticas Básicamente provienen de las imperfecciones relacionadas con el proceso de medición elegido, calibración de instrumentos y afectan los resultados siempre en el mismo sentido es decir, siempre por exceso o siempre por defecto.
Su efecto es "alejar" el valor medido del valor verdadero en una determinada "dirección", es decir afectan a la exactitud.

Aleatorias o accidentales Se producen al azar y no son controlables por el experimentador. Se originan en diversas causas y afectan a las mediciones de forma fortuita con igual probabilidad tanto por defecto como por exceso. Estos errores hacen que las medidas se dispersen en torno al valor verdadero, es decir, afectan a la precisión.

Un ejemplo simple de error sistemático es el mal uso de un instrumento: por ejemplo si para medir la longitud de un cuerpo hacemos coincidir la marca de 1 cm con el comienzo del cuerpo a medir, siempre obtendremos un valor de la medida 1cm más grande que el que realmente tiene. Si pesamos en una balanza que sin darnos cuenta tiene tierra en su platillo también estaremos informando el valor de la masa por exceso. Si bien estos ejemplos parecerían ser triviales y de fácil solución, en una medición real no siempre se pueden develar con facilidad.
Un ejemplo de incerteza aleatoria sencillo se puede dar cuando queremos medir un tiempo con un cronómetro. La operación sería, vemos un evento que nos hace comenzar la cuenta y otro que nos hace terminarla. El proceso biomecánico es el siguiente, nuestro cerebro recibe la imagen del evento, la procesa y emite una señal que debe llegar a los músculos que comandan nuestros dedos para que operen sobre el cronómetro. Si bien el procesamiento de la imagen es un proceso relativamente rápido, la orden a los músculos no lo es; las señales viajan de neurona a neurona por el sistema nervioso debido a la liberación de sustancias, en general, de alto peso molecular, llamadas "neurotransmisores" los cuales por su inercia lentifican el viaje de la información, esto genera un retraso ("$delay$") entre la orden y el efecto y este retraso tiene una cierta dispersión ("$jitter$") que se traduce en medidas ligeramente distintas de los tiempos requeridos.

2.5. Mediciones directas o indirectas

Cuando queremos establecer el valor de un mensurando, podemos seguir distintos procedimientos, algunos nos darán su valor directamente, y otros deberemos hacer la medida de varias cantidades para obtenerlo, de aquí que las mediciones se dividen en dos grupos:

Mediciones directas: Se mide directamente la cantidad requerida

Mediciones indirectas: Se miden de manera directa varias cantidades por ejemplo x e y y se obtiene otra magnitud dada por $z = f(x,y)$ la magnitud z se obtuvo por medición indirecta.

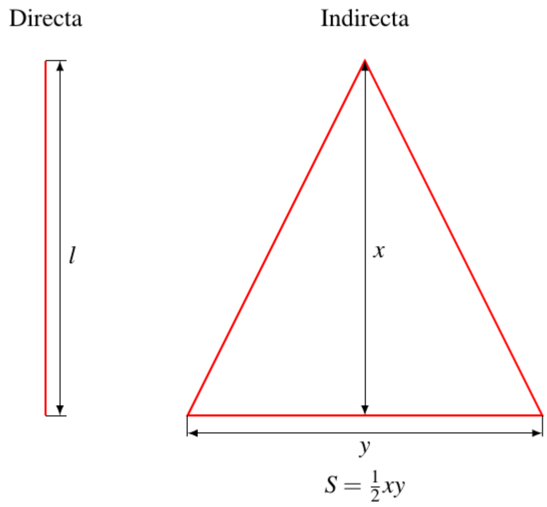


Figura 2.5: ***Ejemplo de mediciones directas e indirectas.***

Debemos aclarar que una misma cantidad se puede medir por un método directo o por uno indirecto, por ejemplo mara evaluar un área se puede interponer una pantalla oscura en la cual le hemos practicado un pequeño hueco cuya área queremos determinar. La pantalla la interponemos en el haz de una linterna y esta luz la medimos con un fotosensor, luego medimos la luz que a él llega sin pantalla, la diferencia entre las intensidades medidas en cada procedimiento nos dará el valor del área.

2.5.1. Valor más probable en mediciones únicas y repetidas

Si medimos sólo una vez una cierta cantidad, no tenemos mucho para decir, el resultado de la medida lo tomamos como valor más probable para el mensurando, pero ¿qué ocurre si medimos varias veces? Es decir tenemos un conjunto de mediciones $\{x_i\}_1^N$, que dependiendo del mensurando podrán ser todas iguales o no. Si son todas iguales cualquiera de sus resultados será el valor más probable, pero y ¿si son distintas? Vamos a tomar como norma que de un conjunto de N resultados el valor más probable[3] se obtiene como el promedio aritmético de los

[3] También se lo denomina valor representativo del mensurando.

datos

$$X \equiv \bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{2.1}$$

2.6. Evaluación de incertezas en mediciones directas

Una vez que tenemos determinado el valor más probable para el mensurando X tenemos que contar con una norma para evaluar su incerteza.
Nuevamente el procedimiento será distinto para el caso en que midamos sólo una vez o midamos la cantidad repetidamente, en las mismas condiciones experimentales. Claramente, cuantas más veces se mida el mensurado, mayor información tendremos para evaluar la incerteza de la medición. Las normas ISO, establecieron de manera arbitraria la división de las incertezas en dos tipos: Las Tipo A (u_A) y las Tipo B (u_B). Las incertezas de Tipo A se calculan a partir de todos los valores obtenidos de una serie de N mediciones independientes y esencialmente tiene en cuenta los errores aleatorios. Las incertezas Tipo B se evalúan usando la información disponible de una sola medición o de fuentes no asociadas directamente con ella. Estas otras fuentes pueden ser, por ejemplo: reportes de calibración, manuales del instrumento, guiás de la industria, etc. Conocidas las incertezas de Tipo A y Tipo B, la incerteza de la medición del mensurando X: u se calcula como:

$$u(x) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

2.6.1. Análisis de una medición con incerteza Tipo B

Analicemos el caso de la medida de la longitud de un objeto con una regla calibrada (instrumento analógico) y la situación que se presenta es la que se muestra en la figura

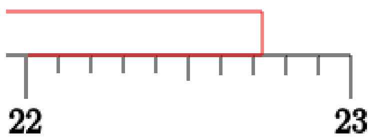


Figura 2.6: ***medición de la longitud de un objeto.***

Si el cuerpo (en rojo) se hizo coincidir con el cero de la regla, entonces podemos afirmar que su longitud X se encuentra entre 22,7 cm y 22,8 cm. Estos valores determinan el llamado intervalo de incertezas de la medición siendo 22,7 cm el valor extremo inferior (X_m) y 22,8 cm el valor extremo superior (X_M). El valor representativo del mensurado (X) se estima como el promedio de los valores extremos del intervalo de incerteza.

$$X = \frac{X_m + X_M}{2}.$$

Una cota superior para la incerteza Tipo B, que en este caso se denomina incerteza de apreciación, es asignarle el valor[4] que usualmente se denomina incerteza instrumental:

$$u_B = \frac{X_M - X_m}{2},$$

Es decir la mitad de la apreciación del instrumento. Tengamos en cuenta que aquí no estamos considerando las incertezas de calibración de la regla. Antiguamente se decía que con un instrumento que tenia una apreciación a no se podía medir con un error menor a $\frac{a}{2}$. Sin embargo debemos tener presente qué es lo que estamos midiendo y cómo lo estamos haciendo. La incerteza resulta del método de medición y no sólo del instrumento. Por ejemplo, si en lugar de medir a ojo desnudo el punto en el que termina el cuerpo a medir, sacamos una fotografía digital, en el monitor de la computadora podremos tener que la mínima división del instrumento es el pixel y en 1 mm tendremos muchos pixeles, por lo tanto si nos aseguramos de la calibración del sistema regla-cámara podremos medir con una apreciación muy inferior a la mitad de un milímetro.

Si la medición la realizamos con un instrumento digital, no podemos utilizar el procedimiento anterior ya que carece de divisiones. La norma establece que la incerteza de este instrumento se tome como el dígito menos significativo de la lectura. Por ejemplo si el cuerpo lo medimos con un calibre digital, y la lectura es 22,75 le asignamos a la incerteza el valor de $u_a = 0{,}01$. Muchas veces en el manual del instrumento se informa que la incerteza de la medición, aparte de del digito menos significativo es, además, un cierto porcentaje del fondo de escala del instrumento. Se llama fondo de escala al valor máximo que se puede medir con él; esta incerteza se denomina incerteza de clase del instrumento u_c. La incerteza de la medida, en este caso, se evalúa como:

$$u_B = \sqrt{u_c^2 + u_a^2}.$$

Con los valores de X_m y X_M expresados resulta que el valor más probable para la longitud del objeto es:

$$x_0 = 22{,}75 \text{ cm},$$

con una estimación de la incerteza dada por:

$$u = 0{,}05 \ \ \texttt{cm}.$$

Esto quiere decir que el valor verdadero del mensurando se encuentra con alta probabilidad[5] entre

$$x_0 - u < X < x_0 + u,$$
$$22{,}70 \text{ cm} < X < 22{,}80 \text{ cm},$$

[4] Las Normas ISO aconsejan utilizar para u_B el valor $\frac{X_M - X_m}{2\sqrt{3}}$.

[5] De la manera que expresaremos las incertezas la probabilidad resulta del 67 %

que, de manera compacta se expresa:

$$X = x_0 \pm u,$$
$$X = (22{,}75 \pm 0{,}05)\ \text{cm}.$$

En la literatura técnica actual se está empleando la notación $X = 22,75(05)$ cm.

Podemos resumir, entonces que los errores de Tipo B se corresponden con los errores de apreciación, de calibración y de clase del instrumento utilizado en la medición [6]. El comprar un instrumento con menor valor para la apreciación, pero con defectos en la calibración, no necesariamente llevará a reducir este error. En ciertas ramas de la ciencia se utiliza el concepto de incerteza extendida para dar mayor significación estadístico a la incerteza; el significado de expresar $x_0 \pm u$ es que el valor más probable se encontrará en ese intervalo, con una probabilidad cercana al 68 %, o de otra manera, si repetimos el proceso de medición para llegar a x_0, el nuevo resultado tendrá esa probabilidad de caer en $(x_0 - u, x_0 + u)$. La incerteza extendida, aumenta en ancho del intervalo para que la probabilidad sea, por ejemplo de un 90 %, en el Apéndice A se detalla el procedimiento.

2.6.2. Análisis de una medición con incerteza Tipo A y Tipo B

Para ejemplificar la evaluación de la incerteza de Tipo A y Tipo B, supongamos que nos entregan la siguiente tabla de tiempos de oscilación (período, medidos en segundos) de un péndulo, medidos con un cronómetro digital. El análisis nos servirá para contestar estas preguntas:

Tabla 2.1: ***Serie de valores obtenida al medir el período de un péndulo***

Medida	T [s]	Medida	T [s]
1	10,22	6	10,22
2	9,98	7	9,88
3	10,03	8	10,05
4	10,20	9	10,22
5	9,99	10	10,15

- ¿Cuál es el valor representativo para la serie?
- ¿Cual es la incerteza que le asignamos a cada medición?
- ¿Cuál es la incerteza asignada al valor representativo?

La primera pregunta se contesta fácilmente, el valor más probable del período será el promedio (expresión (2.1)) de todas las mediciones:

[6] En la sección 5 se dan otras componentes de la incerteza Tipo B se dará un ejemplo con incerteza de calibración.

$$\bar{T} = 10{,}0940 \text{ s.}$$

Como las mediciones no resultaron ser “iguales” está claro que existe error Tipo A. La norma establece que la dispersión de una serie de datos $\{x_i\}_1^N$ se calcula como[7]:

$$D_X = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^2}. \tag{2.2}$$

La incerteza Tipo A de cada medida será $D_X = 0{,}11732...$ s. Cada dato, también, tendrá un error de Tipo B (en este ejemplo sólo de apreciación) $u_B = 0{,}01$ s y un error Tipo A $u_A = D_X$ s con lo cual la incerteza de cada período medido será:

$$u_T = \sqrt{u_T^2 + u_B^2} = 0{,}11774... \text{ s.}$$

En el apéndice 7 se presenta una manera alternativa cuando en número de mediciones es pequeño ($n < 10$). Por último nos queda el tema de cual es la incerteza asignada al promedio de los datos, que como hemos dicho es el valor representativo para el período. La norma establece (y será demostrado más adelante) que la incerteza que se le asigna al promedio, y la dispersión de los datos están relacionadas por la expresión:

$$u_{\overline{X}} = \frac{D_X}{\sqrt{N}} \tag{2.3}$$

Entonces $u_{A\overline{T}} = 0{,}03709...$ s y con $u_B = 0{,}01$ s resulta que

$$u_{\overline{T}} = 0{,}03841... \text{ s.}$$

Notemos que el error asignado al valor representativo resulta ser menor que el que se le asigna a cada dato. La razón es la siguiente: al tomar como valor representativo el promedio de la serie de mediciones no estamos utilizando el valor de una medición sino de un conjunto, la información que hay en este conjunto es mayor y por tanto esta información permite reducir la cota de la incerteza.

Observemos también que en principio el error del promedio (Tipo A) puede reducirse tanto “como se quiera”: basta aumentar el número de mediciones que se involucran en el promedio para lograrlo. En el apéndice D se discutirá este hecho.

[7] La estadística diría que en el denominador de la ecuación 2.2 debe ir $N-1$ en lugar de N, pero a los fines prácticos $N \gtrsim 10$ no cambia apreciablemente el resultado usar N.

2.7. Evaluación de las incertezas en mediciones indirectas

Cuando se desea conocer el valor y la incerteza de una cantidad que viene dada por la siguiente expresión matemática:

$$Y = f(x_1, x_2, ...x_N).$$

La incertidumbre de la cantidad y estará relacionada tanto con las incertezas de las variables independientes x_i como así también de la forma de la función f. El valor más probable del mensurando Y se calcula evaluando la función f en el valor más probable de la variables x_{0i}

$$Y = f(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}).$$

Las normas ISO-GUM establecieron que este tipo de incerteza se la denomine combinada $u_c(y)$ y se calcule como:

$$u_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 u_{x_i}^2 \qquad (2.4)$$

donde los factores de peso c_i, denominados factores de sensibilidad en la norma, se toman como:

$$c_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_0;$$

El significado de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es la evaluación de cuanto cambia f por un pequeño cambio en x_i, a los fines de cálculo se tomará la derivada de f respecto de x_i, suponiendo que las demás variables son constantes y evaluada en el valor más probable de sus variables independientes.En muchos de los problemas prácticos el termino que contiene las derivadas cruzadas tiene peso nulo, así que en lo que resta no lo tendremos en cuenta.

Supongamos que queremos conocer el área de un triángulo conociendo la medida de si base y su altura. Aquí $Y = S$, $x_1 = b$, $x_2 = h$, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2$. Sean $b = 3{,}705$ cm, $u_b = 0{,}005$ cm, $h = 10{,}30$ cm, $u_h = 0{,}10$ cm.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bh = \frac{3{,}705 \times 10{,}30}{2} = 19{,}08075 \text{ cm}^2. \\
c_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} = \left.\frac{1}{2}x_2\right|_0 = \frac{1}{2}h = 5{,}15 \text{ cm}. \\
c_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2} = \left.\frac{1}{2}x_1\right|_0 = \frac{1}{2}b = 1{,}53525 \text{ cm}. \\
u_c(S) &= \sqrt{c_1^2u_b^2 + c_2^2u_h^2} \\
&= \sqrt{[(5{,}15)^2 * (0{,}005)^2 + (1{,}53525)^2(0{,}10)^2]} \text{ cm}^2 \\
&= 0{,}155669483602278 \text{ cm}^2.
\end{aligned}$$

En el Apéndice B se hará un resumen de las incertezas obtenidas para funciones de varias variables de uso frecuente.

Está claro que el informar las cantidades involucradas con su error con tanta cantidad de decimales, es un despropósito. Es necesario tener una norma que nos permita quedarnos con la mayor cantidad de decimales que sean confiable, y esto se hará limitando el número de cifras significativas que tiene la incerteza y acomodando las cifras decimales de la cantidad a informar acorde a la que tiene su incerteza.

Capítulo 3

Expresión del resultado de la medida

Hasta el momento sabemos como obtener el valor más probable o representativo de un mensurando y como evaluar una cota para su incerteza. La precisión de un resultado experimental está implícita en el número de dígitos registrados en el resultado, aunque en general la incerteza también debe citarse específicamente. Las normas ISO establecen en su punto 7.2.6 que la incerteza de una medición, en su expresión final se debe dar con (hasta) 2 cifras significativas. Para continuar con el objetivo de esta sección se requiere tener acabada idea de lo que significa cifras significativas de una cantidad.

3.1. Cifras significativas

Las cifras significativas de un número son aquellas que tienen un significado real y por tanto, aportan alguna información. Definimos cifras significativas (c.s.) de la siguiente manera:

1. Todas las cifras no nulas son significativas.
   Ej. 5,4789. Todos los dígitos son distintos de cero. Por lo tanto, tiene 5 c.s.

2. Los ceros situados entre cifras diferentes de cero son significativos.
   Ej. 2,000 08. Todos los ceros en este número son significativos. Por lo tanto, tiene 6 c.s.

3. Los ceros al final de un número son significativos si el número contiene un separador decimal.
   Ej. 45,00- Los ceros en este número son significativos. Por lo tanto, tiene 4 c.s.

4. Los ceros al final de la parte entera de un número son no significativos si el número no contiene un separador decimal.
   Ej. 3 400. Los ceros al final de un número son insignificantes pues el número no contienen un punto decimal. Por lo tanto tiene 2 c.s.

5. Los ceros a la izquierda del primer dígito distinto de cero después de un punto decimal no son significativos.
   Ej. 0,000 076. Los ceros en este número no son significativos. Por lo tanto, tiene 2 c.s..

6. Los ceros después del primer dígito distinto de cero después de un punto decimal son significativos.
   Ej. 0,000 560 0. Los primeros 3 ceros no son c.s. Los 2 últimos ceros sí lo son. Por lo tanto, este número tiene 4 c.s.

3.2. Criterio de redondeo

Una vez que delimitamos la cantidad de cifras significativas de la incerteza y la cortamos puede ocurrir que el decimal siguiente amerite el aumentar una unidad del último significativo. El criterio establecido para el redondeo de una cantidad se expresa de la siguiente manera:

1. Si el dígito a redondear es mayor que 5, el dígito anterior se incrementa al entero inmediato superior.
   Ej: A dos cifras decimales 8,237 $\longrightarrow$ 8,24.

2. Si el dígito a redondear es menor que 5, el dígito anterior no se modifica al redondear.
   Ej: A dos cifras decimales 8,234 $\longrightarrow$ 8,23.

3. Si el dígito a redondear es igual a 5, hay que analizar el dígito anterior. Si dicho dígito es impar se lo incrementa al entero inmediato superior. En caso de ser par (o cero) no se lo modifica.
   Ej: A dos cifras decimales 8,235 $\longrightarrow$ 8,24; 8,245 $\longrightarrow$ 8,24

3.3. Informe del resultado de la medida

En este ultimo punto se darán las pautas para la presentación del resultado de una medida en un informe técnico. Como ejemplo utilizaremos el caso del período del péndulo, Sabemos que $\overline{T} = 10{,}094$ s t que $u_{\overline{T}} = 0{,}6226...$ s. Trabajemos, para mostrar un ejemplo a una cifra significativa, eso diría que la incerteza la debemos cortar a dos cifras decimales, como la tercera es un cero no se modifica la segunda, entonces $u = 0{,}062$ s la cantidad la debemos redondear a dos cifras significativas, entonces quedará $\overline{T} = 10{,}094$ s y el resultado se expresará como

$$T = (10{,}094 \pm 0{,}062)\ \mathrm{s},$$

O de una manera más compacta $T = 10{,}094(62)$ s.
Otro ejemplo trabajando a dos cifras significativas, en el caso de la superficie del triángulo tendremos $S = 19{,}08075\ \mathrm{cm}^2$ $u = 0{,}155669483602278\ \mathrm{cm}^2$. El error a dos cifras significativas tiene dos decimales, como el tercero es cinco y el segundo es par se redondea a $u = 0{,}16\ \mathrm{cm}^2$ y la superficie queda $S = 19{,}08\ \mathrm{cm}^2$, entonces

$$S = (19{,}08 \pm 0{,}16)\ \mathrm{cm}^2,$$

o más compacto $S = 19{,}08(16)$ cm^2.

3.4. Incerteza absoluta, relativa y porcentual

Muchas veces la incerteza no nos da una idea acabada de la precisión de la medida, por ello se define la incerteza relativa de un mensurando x como el cociente:

$$\varepsilon_x = \frac{u}{x}.$$

La incerteza relativa porcentual será:

$$\varepsilon_{\%x} = 100 * \varepsilon_x.$$

Cuanto menor sea la incerteza relativa, más precisa será la medida (aunque no tenemos manera de saber si es exacta. Para el caso del período tendremos que la incerteza relativa porcentual es:

$$\varepsilon_{\%T} = 100\frac{0{,}062}{10{,}094} \sim 0{,}6\,\%.$$

Y para la superficie

$$\varepsilon_{\%S} = 100\frac{0{,}16}{19{,}08} \sim 0{,}8\,\%.$$

3.5. Criterio de las diferencias significativas

Hemos visto que el resultado de una medición no es un número concreto, sino un intervalo donde con mayor o menor probabilidad podría estar el valor verdadero del mensurando. Esto plantea un problema cuando queremos decidir si la misma cantidad medida por dos observadores distintos, o por dos procedimientos de medida son o no iguales: Supongamos que medimos la longitud de un cuerpo por dos procedimientos y obtenemos $L_1 = \ell_1 \pm u_1$ y $L_2 = \ell_2 \pm u_2$. El criterio de igualdad que aplicaremos: criterio de las diferencias significativas, es el siguiente:

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Esta desigualdad se interpreta de la siguiente manera: si se cumple diremos que no hay evidencia experimental para decir que ℓ_1 es distinta medida que ℓ_2, de otra manera dentro de la incerteza experimental con que trabajamos las cantidades ℓ_1 y ℓ_2 no se pueden considerar como distintas y, si no se cumple, diremos que al nivel de incertezas con que trabajamos las cantidades ℓ_1 y ℓ_2 pueden suponerse distintas. Como ejemplo supongamos que queremos analizar los tiempos que se informan en la tabla 2.1 y analicemos si hay diferencias significativas entre el valor más grande $T_1 = 10{,}22$ s y el menor $T_2 = 9{,}88$ s. El módulo de la diferencia será $|T_1 - T_2| = 0{,}34$ s. Habíamos establecido que la incerteza de cada medición venía dada por la desviación de la serie $D_T = 0{,}11732...$ s por lo tanto el módulo de la diferencia hallado se debe comparar con $\sqrt{2}D_T = 0{,}16591...$ s como 0,34 no es menor que 0,1659.. podemos concluir que existe evidencias para concluir que hay diferencia significativas entre las mediciones citadas.

Cuando se tenga que informar el resultado de una medida, aparte del valor con su incerteza combinada, es conveniente informar también: la incerteza relativa; la incerteza Tipo A y la Tipo B. de manera tal que quede registro de como procesar los datos ante un cambio de criterio.

Capítulo 4

Valor más probable en datos de distintas fuentes

Cuando tenemos una serie de mediciones realizadas con el mismo instrumento y procedimiento, hemos discutido cómo evaluar el valor más probable del mensurando y su incerteza. Pero una situación que se presenta frecuentemente es tener mesurando con su incerteza proveniente de distintas fuentes. Supongamos que tenemos un conjunto de M mensurandos con su incerteza $\{x_i \pm u_i\}$ y que las incertezas son distintas y se verifica que hay algún par que no verifica el criterio de las diferencias significativas; otro caso podría ser tener el conjunto de medidas pero tomadas por distintos operarios con marcada diferencia en su trabajo; ¿cómo podemos obtener el valor más probable en este caso?

Una respuesta sería hacer el promedio, pero de esta manera todos serían equivalentes, no tendríamos en cuenta la información que viene en la incerteza. Una forma sencilla es la de asignar pesos a cada medida, técnicamente se dice que se hará un promedio ponderado, si $\bar{X}$ es el valor más probable a informar, entonces:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{M} \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^{M} \omega_i}. \tag{4.1}$$

Si todos los pesos son iguales, tenemos el promedio acostumbrado. La idea es argumentar cómo podríamos hacer que los pesos sean distintos. Hay dos posibilidades asignarlos subjetivamente, o mediante la regla de asignarle mayor peso a la medida que tenga menor error, en este último caso se suele utilizar

$$\omega_i = \frac{1}{u_i^2}. \tag{4.2}$$

La asignación subjetiva consiste en la asignación de los pesos en base a una cantidad no cuantificable, por ejemplo supongamos tenemos 20 mediciones 10 las realizó un técnico A, 5 un técnico B, 4 un técnico C y 1 un técnico D. Podemos asignar los pesos de la siguiente manera $\omega_j = 0{,}48$ si es la medición del físico $\omega_j = 0{,}47$ si la medición la realizó un ingeniero, $\omega_j = 0{,}049$ si la medición la realizó un abogado y por último $\omega_j = 0{,}001$ si la realizó un político.

La asignación de la dispersión para el caso del promedio ponderado se obtendrá de la siguiente expresión:

$$D_\omega = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M} \omega_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{M} \omega_i}} \tag{4.3}$$

Con lo cual la incerteza del promedio ponderado será:

$$u_{\bar{X}} = \frac{D_\omega}{\sqrt{N}}$$

Analicemos el método del promedio ponderado con los datos de la tabla 4.1

Tabla 4.1: ***Valores para un mensurando X informados por distintos laboratorios***

X [m]	u_X [m]	ω
10,23	0,01	10000
10,215	0,005	40000
10,21	0,02	2500
10,13	0,05	400
10,24	0,05	400
10,2	0,1	100
10,2	0,2	25

Lo primero que observamos es que las medidas son informadas con distinta precisión, de ahí que para dar el valor representativo optamos por el del promedio ponderado con los pesos calculados por 4.2 que se muestran en la tercer columna de la tabla 4.1. El calculo en una planilla de calculo indica que:

$$\overline{X} = 10{,}2170893776322[\text{ m}] \qquad u_{\overline{X}} = 0{,}003745852967972[\text{ m}]$$

Trabajando a dos cifras significativas tendremos

$$\overline{X} = (10{,}2171 \pm 0{,}0037)\text{ m}.$$

No existe un criterio único para la asignación de los pesos; de ahí que se deba informar, en caso de utilizarlos, cuál es el criterio asignado.

Capítulo 5

Aplicaciones prácticas

1. El espesor de una fina película de aluminio depositada sobre una vidrio plano se mide en varios puntos usando un perfilómetro cuya mínima división es 2 nm. Los valores obtenidos se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 5.1: ***Serie de valores obtenida al medir el espesor de una fina capa de aluminio***

Medida	d [nm]	Medida	d [nm]
1	320	6	330
2	325	7	315
3	320	8	312
4	317	9	321
5	315	10	320

Determine a) el valor medio del espesor de la película, su incerteza Tipo A y B y la incerteza combinada. Exprese los resultados con dos cifras significativas. b) ¿Si realiza una medición extra del espesor, en que intervalo estará contenida, con mayor probabilidad la nueva medida? b) y si realiza una nueva serie de 10 mediciones?

El valor medio se obtiene como el promedio de los datos. Para hacer los cálculos utilizaremos una hoja de cálculo Libreoffice o Excel, cargando los datos en la columna A desde la fila 1 hasta la 10. En la celda B12 introduciremos `=PROMEDIO(A1:A10)` y obtendremos el promedio. Para calcular la incerteza tipo A debemos, primero, evaluar la dispersión de los datos con la expresión (2.2). Las planillas de cálculo ya tienen una función que la calcula, por lo tanto, entramos en la celda B13 la expresión: `=DESVEST.P(A1:A10)`.
En la celda B14 calcularemos la incerteza Tipo A con la expresión `=B13/RAIZ(10)`. En la celda B15 ingresamos la incerteza Tipo A y la incerteza total la calculamos en la celda

B16 introduciendo la expresión `=RAIZ(B14*B14+B15*B15)`. Tendremos entonces:

Promedio	319,5
D	4,965
uA	1,57
uB	1
u	1,861

La incerteza total a dos cifras significativas será: 1,9 entonces el espesor medio de la película de aluminio será: $\bar{d} = (319{,}5 \pm 1{,}9)$ nm. Si medimos un único valor del espesor, entonces el resultado de dicha medida muy probablemente caerá en el intervalo
$(\bar{d} - D, \bar{d} - D) = (314{,}53, 324{,}47)$ nm
Si repetimos una serie de mediciones, el valor del promedio de dicha serie caerá en el intervalo:
$(\bar{d} - uA, \bar{d} - uA) = (321{,}07, 317{,}93)$ nm

2. La distancia focal de una lente delgada, inmersa en aire, se va a medir usando la relación:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_o}$$

en donde: x_o es la posición donde se ubica el objeto medida desde la lente $x_o = (-0{,}120 \pm 0{,}001)$ m y x_i es la posición donde se ubica la imagen $x_i = (0{,}360 \pm 0{,}001)$ m. ¿Cuál es el valor más probable de la distancia focal f, con su incertidumbre y su incertidumbre relativa porcentual?

De la expresión dada se obtiene que:

$$f = \frac{x_i x_o}{x_o - x_i} = \frac{0{,}360\,(-0{,}120)}{-0{,}120 - 0{,}360} = 0{,}090 \text{ m}$$

Como se obtuvo de manera indirecta, para hallar la incerteza, hay que utilizar la expresión (2.4), con

$$\begin{aligned} c_{x_o} &= \tfrac{\partial f}{\partial x_o} = -\tfrac{x_o^2}{(x_o - x_i)^2} \\ c_{x_i} &= \tfrac{\partial f}{\partial x_i} = \tfrac{x_i^2}{(x_o - x_i)^2} \\ u(f) &= \sqrt{c_{x_i}^2 u(x_i)^2 + c_{x_o}^2 u(x_o)^2} \\ &= 0{,}00079 \text{ m} \end{aligned}$$

A dos cifras significativas en la incerteza, la distancia focal de la lente se expresará:

$$f = (0{,}900000 \pm 0{,}00080) \text{ m}$$

La incertidumbre relativa porcentual será:

$$\varepsilon_{\% f} = 100\frac{u(f)}{f} = 8{,}8$$

3. Supongamos que necesitamos hallar el volumen de un paralelepípedo rectangular cuyas dimensiones son: largo ℓ, ancho a, altura h. Para ello se procede a tomar diez medidas para cada una de estas dimensiones, con un instrumento que tiene una apreciación de 0,01 mm. Los datos obtenidos están consignados en la siguiente tabla:

Tabla 5.2: ***Serie de valores obtenida al medir la longitud da las aristas de un paralelepípedo***

Medida	l [mm]	a [mm]	h [mm]	Medida	l [mm]	a [mm]	h [mm]
1	9,23	4,32	6,54	6	9,19	4,36	6,47
2	9,25	4,38	6,50	7	9,21	4,33	6,49
3	9,30	4,35	6,48	8	9,22	4,38	6,53
4	9,18	4,34	6,52	9	9,17	4,37	6,49
5	9,22	4,35	6,46	10	9,23	4,36	6,50

¿Cual es el valor más probable para la medida de cada lado del paralelepípedo, cual la incerteza tipo A, tipo B y la combinada? ¿Cual es la incerteza relativa de cada medida? ¿Cual es el valor para el volumen del paralelepípedo?
Cargando los datos de la tabla 5.2 y aplicando el procedimiento del problema anterior podemos informar. para la longitud de las aristas del paralelepípedo los que figuran en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: ***Serie de valores obtenida al medir la longitud da las aristas de un paralelepípedo***

	l [mm]	a [mm]	h [mm]
Valor más probable	9,2200	4,3540	6,4980
Dispersión	0,0355	0,0191	0,02441
inc. Tipo A	0,0112	0,0060	0, 0077
inc. Tipo B	0,0050	0,0050	0,0050
inc combinada.	0, 0123	0, 0078	0,0092

Resultando entonces, que los valores más probables con su incerteza total, a dos cifras significativas, son:

$$\bar{\ell} = (9{,}220 \pm 0{,}012)\ \text{mm}$$
$$\bar{a} = (4{,}3540 \pm 0{,}0078)\ \text{mm}$$
$$\bar{h} = (6{,}4980 \pm 0{,}0092)\ \text{mm}$$

Las incertezas relativas de cada mensurando se obtienen de dividir la incerteza combinada por el valor representativo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\ell &= 0{,}013 \qquad (1{,}3\,\%)\\
\varepsilon_a &= 0{,}0018 \qquad (1{,}8\,\%)\\
\varepsilon_h &= 0{,}0014 \qquad (1{,}4\,\%)
\end{aligned}$$

El volumen del paralelepípedo se obtiene como

$$V = \ell a h = 260{,}8549 \text{ mm}^3$$

Para encontrar su incerteza, como resulta una medida indirecta, tendremos que usar la expresión (2.4) con:

$$\begin{aligned}
c_\ell &= \frac{\partial V}{\partial \ell} = ah\\
c_a &= \frac{\partial V}{\partial a} = \ell h\\
c_h &= \frac{\partial V}{\partial h} = \ell a
\end{aligned}$$

La incerteza del volumen será, entonces:

$$u(V) = \sqrt{(ah)^2 u(\ell)^2 + (\ell h)^2 u(a)^2 + (\ell a)^2 u(h)^2} = 0{,}6911 \text{ mm}^3$$

Por lo tanto a 2 cifras significativas tendremos que el volumen se informa como;

$$V = (260{,}85 \pm 0{,}69) \text{ mm}^3$$

4. Para determinar el coeficiente de roce estático entre dos superficies, se realiza el siguiente experimento: se coloca un cuerpo plano de material 1, sobre un plano inclinado de material 2. El plano se eleva lentamente hasta que el cuerpo 1 comienza a moverse. El ángulo en el cual ocurre el movimiento (denominado crítico θ_c) y los valores medidos se presentan en la tabla siguiente:
   Los ángulos fueron medidos con un transportador cuya menor división fue de 1° y se de-

Tabla 5.4: ***Serie de valores obtenida al medir el ángulo crítico***

Medida	θ_c [°]	Medida	θ_c [°]
1	34	7	35
2	36	8	37
3	37	9	38
4	38	10	36
5	36	11	35
6	34	12	37

terminó por calibración que su cero estaba corrido en 35 ± 5 minutos de arco. Determine el valor más probable del coeficiente de roce estático con su incerteza.

Planteando el problema teóricamente se encuentra que

$$\mu_E = \tan(\theta_c)$$

El valor más probable de μ_E resulta de la expresión anterior con θ_c el valor más probable del ángulo crítico que resulta ser el promedio de los datos corregidos que se consignaron, en efecto, el cero está corrido en 35 minutos, por lo tanto a los ángulos medidos hay que restarle esa cantidad, los valores corregidos figuran en la siguiente tabla:

Tabla 5.5: ***Serie de valores del angulo crítico corregidos por el corrimiento del cero***

Medida	θ_c [°]	Medida	θ_c [°]
1	33,41667	7	37,41667
2	35,41667	8	36,41667
3	36,41667	9	37,41667
4	37,41667	10	35,41667
5	35,41667	11	34,41667
6	33,41667	12	36,41667

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_c &= 35{,}5000^\circ \\ \mu_E &= 0{,}713293067897 \end{aligned}$$

La incerteza de coeficiente de roce vendrá dada por:

$$u(\mu_E) = \left|\frac{\partial \mu_E}{\partial \theta_c}\right| u(\theta_c) = \frac{u(\theta_c)}{\cos^2 \theta_c} \tag{5.1}$$

Debemos encontrar, ahora, cual es el valor de la incerteza combinada de θ_c. Tenemos una serie de datos del ángulo crítico, por lo tanto podremos estimar el error Tipo A de la medida vía ecuación (2.3), resultando

$$u_A(\theta_c) = 0{,}3811^\circ$$

Pero también tendremos errores que no devienen de un estudio estadístico: los de Tipo B, y aquí no solo tendremos el que proviene de la apreciación (mínima división de la escala) sino que también tendremos la incerteza consignada en el corrimiento de cero. La incerteza combinada será:

$$u_B(\theta_c) = \sqrt{0{,}5^2 + \left(\frac{5}{60}\right)^2} = 0{,}5069^\circ$$

Como siempre, la incerteza combinada se obtiene como:

$$u(\theta_c) = \sqrt{u_A(\theta_c)^2 + u_B(\theta_c)^2} = 0{,}6342^\circ$$

Debemos tener cuidado al momento de evaluar la incerteza en μ_E; en efecto el coeficiente de roce estático es una magnitud adimensional, por lo tanto su incerteza también lo debe ser, la incerteza combinada para el ángulo crítico, la hemos calculado en grados sexagecimales, así no la podemos utilizar en la expresión (5.1); para que la incerteza sea adimensional, debemos expresarla en radianes:

$$0{,}6342^\circ \equiv \frac{0{,}6342^\circ \times \pi}{180^\circ} = 0,0111$$

Podemos expresar la incerteza de μ_E como:

$$u(\mu_E) = \frac{0{,}0111}{\cos^2(35{,}5^\circ)} = 0{,}0167$$

Por lo tanto, a dos cifras significativas el coeficiente de roce estático se presenta como:

$$\mu_E = 0{,}713 \pm 0{,}017$$

5. Se determinó que la arista de un cubo es de 5,000 cm, en una serie de 24 mediciones resultó una dispersión de 0,005 cm. El instrumento utilizado, analógico, tiene una mínima división de 0,01 cm. Si se determina la masa de material que llena el cubo se obtiene m = 1052,65 g con una incerteza de 0,02 g. Determine la densidad media del material que ocupa el cubo.

   La densidad viene dada por:
   $$\rho = \frac{M}{V}$$
   Donde M es la masa del material y V el volumen del cubo. Con los datos con que contamos podemos saber que $V = a^3 = 125{,}000$ cm^3; por lo tanto la densidad media será

   $$\rho = \frac{1052{,}65 \text{ g}}{125 \text{ cm}^3} = 8{,}4212 \text{ g/cm}^3$$

   Para encontrar su incerteza, debemos calcular y propagar las incertezas tanto de M como de V. La incerteza de M ya es dato, sin embargo la de V requiere de un calculo, en efecto, el valor de la longitud de la arista resulta del promedio de 24 mediciones independientes cuya dispersión es $D = 0{,}005$ cm, por lo tanto la incerteza Tipo A de esta medición será $u_A(a) = 0{,}005/\sqrt{24} = 0{,}0010$ cm. La incerteza Tipo B la tomaremos como la de apreciación que resulta $u_B(a) = 0{,}005$ cm (la mitad de la mínima división). Entonces la incerteza combinada para la longitud de la arista será:

$$u(a) = \sqrt{u_A(a)^2 + u_B(a)^2} = \sqrt{(0{,}0010)^2 + (0{,}005)^2} = 0{,}0051 \text{ cm}$$

Con lo cual la incerteza del volumen resulta:

$$u(v) = 3a^2 u(a) = 3 \times 5{,}000^2 \times 0{,}0051 = 0{,}3825 \text{ cm}^3$$

La expresión de propagación de incertezas establece el cálculo de los coeficientes de peso:

$$\begin{aligned} c_M &= \frac{\partial \rho}{\partial M} = \frac{1}{V} \\ c_V &= \frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{M}{V^2} \\ u(\rho) &= \sqrt{\frac{u(M)^2}{V^2} + \frac{M^2 u(V)^2}{V^4}} \\ &= 0{,}02577 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto la densidad a dos cifras significativas será:

$$\rho = (8{,}421 \pm 0{,}026) \text{ g/cm}^3$$

Observemos que la expresión para el cálculo de $u(\rho)$ se puede reescribir como:

$$u(\rho) = \rho \sqrt{\left(\frac{u(M)}{M}\right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2}$$

O lo que es lo mismo

$$\varepsilon_\rho^2 = \varepsilon_M^2 + \varepsilon_V^2$$

Por los valores obtenidos, $\varepsilon_M \ll \varepsilon_V$. Se dice que la incerteza dominante en la determinación de la densidad por este método es la incerteza en el volumen, es decir, nada se ganaría en cuanto a precisión si se piensa en comprar una mejor balanza, ya que la incerteza en la determinación de la masa es despreciable. Por otra parte la incerteza Tipo A de la medición del largo de la arista es menor que la precisión del instrumento utilizado, el medir un número mayor de veces el largo de la arista, con la idea de disminuir el error Tipo A, no modificaría mucho el resultado, ya que la incerteza Tipo B es la dominante. En conclusión, para determinar con mayor precisión la densidad del material, debemos medir la arista con otro instrumento con mayor resolución.

6. Se quiere conocer la rapidez media de un móvil midiendo el tiempo t que demora en recorrer una distancia prefijada x. Si se debe conocer la velocidad con una incerteza menor al 5 % y se pueden medir el tiempo con una incerteza del 2 %: a) ¿Cual debe ser la incerteza porcentual con la que se debe conocer la distancia? b) Si se cuenta con una cinta métrica graduada al centímetro, cual es la distancia mínima que se debe establecer para cumplir

con el objetivo?

La rapidez media se calcula como

$$v = \frac{x}{t}$$

Por lo tanto la incerteza relativa porcentual de v será:

$$\varepsilon_v^2 = \varepsilon_t^2 + \varepsilon_x^2$$

Con lo cual resulta:

$$\varepsilon_x = \sqrt{\varepsilon_v^2 - \varepsilon_t^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = 2{,}24\,\% \qquad \text{Rta a)}$$

Conocida la incerteza relativa necesaria para la determinación de la longitud, sabemos que:

$$\varepsilon_x = \frac{u(x)}{x}$$

Por más que midamos muchas veces la longitud, la incerteza combinada no podrá ser menor que la incerteza Tipo A, que supondremos que viene dada por la apreciación (5 mm). resulta que

$$x = \frac{u(x)}{\varepsilon_x} = \frac{5\ \text{mm}}{0{,}0224} = 223\ \text{mm}$$

Esto quiere decir que para cumplir con los requerimientos de incerteza relativa en la medición de la velocidad la longitud del recorrido debe ser mayor que 22 cm.

7. Con un Multímetro digital (de $4\,1/2$ dígitos) se mide la caída de tensión sobre una resistencia en una escala de 2 V con una precisión de $\pm(0{,}5\,\% + 1)$ y la corriente en una escala de 200 mA con una precisión ($\pm(1\,\% + 2)$). Sabiendo que la resistencia viene dada por:

$$R = \frac{V}{I}$$

y los valores registrados de tensión y corriente se presentan en la tabla 5.6 determinemos el valor más probable de la resistencia. El valor más probable para la corriente y la caída

Tabla 5.6: ***Serie de valores obtenida al medir la longitud da las aristas de un paralelepípedo***

Medida	I [mA]	V [V]
1	56,97	1,6001
2	57,01	1,5998
3	56,98	1,5999
4	57,10	1,6010
5	56,99	1,5999
6	56,97	1,6001

de tensión se obtendrá como el promedio de las mediciones realizadas, así el valor más probable para la tensión resulta

$$i = 57{,}01 \text{ mA} \qquad v = 1{,}6001 \text{ V}$$

Dado que tenemos una serie de valores correspondientes a la misma cantidad, tendremos dos tipos de incertezas, las de Tipo A y las de Tipo B. Para evaluarlas comenzaremos con las de Tipo A. con 6 datos no es correcto aplicar la ecuación (2.2) para el calculo de la dispersión, ya que para su empleo se requiere que el numero de datos sea mayor o igual a 10. En el capítulos 7 se verá que en este caso (5¡n¡10)la dispersión se puede estimar como:

$$D_X = \frac{X_M - x_m}{4}$$

Donde x_m es el menor valor medido y x_M el mayor valor, así para la corriente y la tensión tendremos:

$$D_I = 0{,}0325 \qquad D_V = 0,00030$$

Con lo cual la incerteza Tipo A (incerteza del promedio) resulta

$$u_A(I) = \frac{D_I}{\sqrt{6}} = 0{,}01327 \text{ mA} \qquad u_A(V) = \frac{D_V}{\sqrt{6}} = 0{,}000122 \text{ V}$$

Para evaluar las incertezas Tipo B, seguiremos las pautas de lo discutido en el apéndice C. resultando:

$$\begin{aligned} u_B(I) &= (57{,}01 \times \frac{1}{100} + 2 \times 0{,}01) = 0{,}59 \text{ mA} \\ u_B(V) &= 1{,}6001 \times \frac{0{,}5}{100} + 1 \times 0{,}0001) = 0{,}0081 \text{ V} \end{aligned}$$

La incerteza combinada para cada cantidad resulta ser:

$$u(I) = \sqrt{u_A(I)^2 + u_A(I)^2} = 0{,}5901$$
$$u(V) = \sqrt{u_A(V)^2 + u_A(V)^2} = 0{,}0081$$

El valor más probable de la resistencia se obtiene como:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1{,}6001 \text{ V}}{0{,}05701 \text{ A}} = 28{,}067\,\Omega$$

Para estimar la incerteza calculamos los factores de peso

$$
\begin{aligned}
c_V &= \frac{\partial R}{\partial V} = -\frac{I}{V^2} \\
c_I &= \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{1}{V} \\
u(R) &= \sqrt{c_V^2 u(V)^2 + c_I^2 u(I)^2} = 0{,}3234\,\Omega
\end{aligned}
$$

A dos cifras significativas la resistencia valdrá:

$$R = (28{,}07 \pm 0{,}32)\,\Omega$$

Notemos que la incerteza relativa porcentual de esta medida es del $1{,}1\,\%$ y proviene casi exclusivamente de la incerteza en la medición de la corriente.

Capítulo 6

Análisis de datos

Muchas veces las mediciones se realizan para estudiar si una determinada teoría (modelo) puede explicar un experimento dado, o para buscar una relación (correlación) entre cantidades que nos parecen asociadas. En estos casos, una vez que tengamos un conjunto de mediciones confiable, debemos realizar un análisis de datos como para determinar el modelo que los explica.

Para ejemplificar estudiaremos primero el estiramiento de un resorte del cual conocemos el modelo, y el período de oscilación de un péndulo del cual, en un curso tradicional de física 1 en una escuela de ingeniería, no contamos con el modelo. En la tabla presentamos los datos obtenidos para el resorte y para el péndulo.

Tabla 6.1: ***Estiramiento de un resorte en función de la masa de carga***

ℓ [m]	m [kg]	u_m [kg]
0,309	0,200	$0,001$
0,318	0,399	$0,001$
0,322	0,512	$0,001$
0,324	0,553	$0,001$
0,331	0,721	$0,001$
0,339	0,899	$0,001$
0,342	0,980	$0,001$
0,347	1,100	$0,001$
0,351	1,201	$0,001$
0,366	1,527	$0,001$

Tabla 6.2: ***Período de oscilación de un péndulo en función de su longitud.***

ℓ [m]	$\bar{T}$ [s]	$u_{\bar{T}}$ [s]
$0,150$	$0,83$	$0,05$
$0,250$	$0,99$	$0,02$
$0,350$	$1,20$	$0,01$
$0,450$	$1,37$	$0,01$
$0,550$	$1,46$	$0,02$
$0,650$	$1,65$	$0,03$
$0,750$	$1,76$	$0,05$
$0,850$	$1,83$	$0,03$
$0,950$	$1,99$	$0,02$
$1,050$	$2,07$	$0,02$
$1,150$	$2,11$	$0,03$
$1,250$	$2,26$	$0,02$

El planteo del análisis de datos consiste en cómo, a partir de los datos experimentales, obtener el valor numérico con sus incertezas de los parámetros que intervienen en el modelo y estos valores compararlos con mediciones independientes de ellos. Una segunda posibilidad es la de obtener una relación funcional entre las variables involucradas, esta relación funcional o correlación puede ser la base para encarar el estudio teórico del modelo o utilizarla para cálculos más complejos.

6.1. Análisis de datos para obtener parámetros del modelo

En la tabla 6.1 se presentan las mediciones de la longitud actual de un resorte, medida con una cinta métrica graduada al milímetro en función de la masa de carga. A partir del análisis de estos datos obtendremos el valor de la constante elástica y la longitud natural del resorte. En resumen, con este análisis obtendremos parámetros relacionados con el modelo supuesto este conocido.

Efectivamente, la fuerza que realiza el resorte, es una función lineal de su estiramiento (si este no es “grande”), por lo tanto si lo cargamos con una masa m, en equilibrio se habrá estirado una distancia $\ell - \ell_0$ con ℓ_0 su longitud natural y ℓ la longitud actual del mismo. El modelo de Hooke dirá que

$$mg = k(\ell - \ell_0)$$

que puede ser transformada en:

$$m = \frac{k}{g}\ell - \frac{k\ell_0}{g}. \tag{6.1}$$

El primer paso a seguir para el análisis de los datos es graficarlos, para ello podemos utilizar una planilla de cálculo como Microsoft Excel™, Libreoffice Calc o algún software específico como Origin™, Matlab™, Octave, Scilab, entre otros. En la figura **??** se presenta una captura de pantalla de la planilla de calculo que se utilizó para la representación gráfica de los datos contenidos en la tabla 6.1. En el gráfico se nota que los puntos están alineados, por lo tanto parecería que el modelo lineal se adapta al experimento realizado.

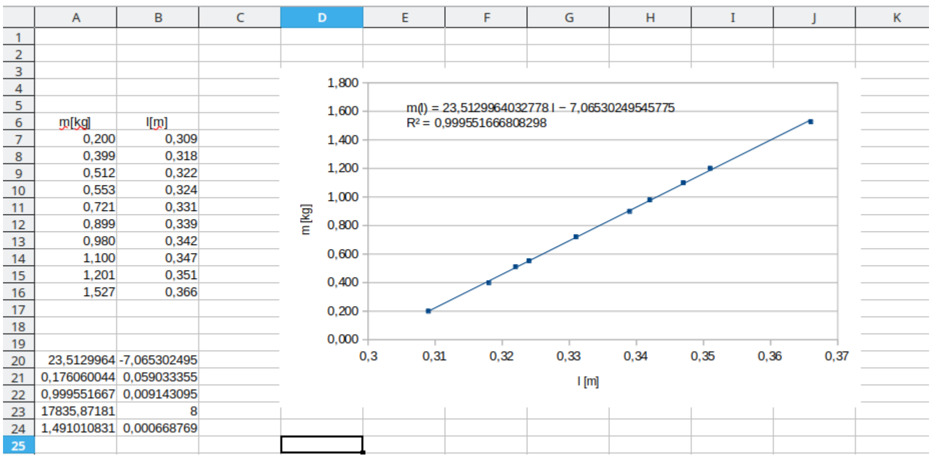


Figura 6.1: ***Captura de pantalla de la hoja de cálculo utilizada para el estudio del resorte.***

En la columna `A` se cargaron los datos de las masas en el rango `A7:A16` mientras que en la columna `B` se cargaron los datos correspondientes a la longitud del resorte.

La pregunta ahora es cómo obtener la recta que mejor aproxima los puntos y cómo analizar la validez de ella a nuestro modelo. El método que desarrollaremos se denomina Método de los Cuadrados Mínimos (o de los mínimos cuadrados, según la traducción). Como las incertezas son iguales para todos los puntos, será el método ordinario el que se utilice, el cual se desarrolla detalle en el apéndice E. Cómo calcular los estimadores de la pendiente y la ordenada la origen, como así también sus incertezas, en una planilla de cálculo se presenta en el apéndice F. Si aproximamos los datos experimentales por el modelo lineal:

$$y = b_0 + b_1 x,$$

con $y \equiv m$ y $x \equiv \ell$ resulta que, a dos cifras significativas en el error:

$$b_1 = (23{,}51 \pm 0{,}15)\ \text{kg/m} \qquad b_0 = (-7{,}063 \pm 0{,}058)\ \text{kg}.$$

Esto quiere decir que los parámetros se han determinado con una incerteza relativa porcentual de 0,7 % para b_1 y 0,8 % para b_0. Ampliaremos el alcance del modelo obtenido (ecuación (6.1)), la pendiente está asociada con la constante elástica del resorte y la aceleración de la gravedad, mientras que la ordenada al origen con la longitud libre del resorte

$$b_1 = \frac{k}{g}, \qquad b_0 = -\frac{\ell_0 k}{g}.$$

Por lo tanto $k = g b_1$ y $\ell_0 = -g b_0/k$. La incerteza en k y ℓ_0

$$u_k = \sqrt{b_1^2 u_g^2 + g^2 u_{b_1}^2}, \qquad u_{\ell_0} = \sqrt{\left(\frac{b_0}{k}\right)^2 u_g^2 + \left(\frac{g}{k}\right)^2 u_{b_0}^2 + (g b_0)^2 \left(\frac{u_k}{k^2}\right)^2}$$

La aceleración de la gravedad, en Bs As se puede tomar como $(9{,}79692 \pm 0{,}00013)\ \text{m/s}^2$ con lo cual obtenemos para los parámetros del modelo:

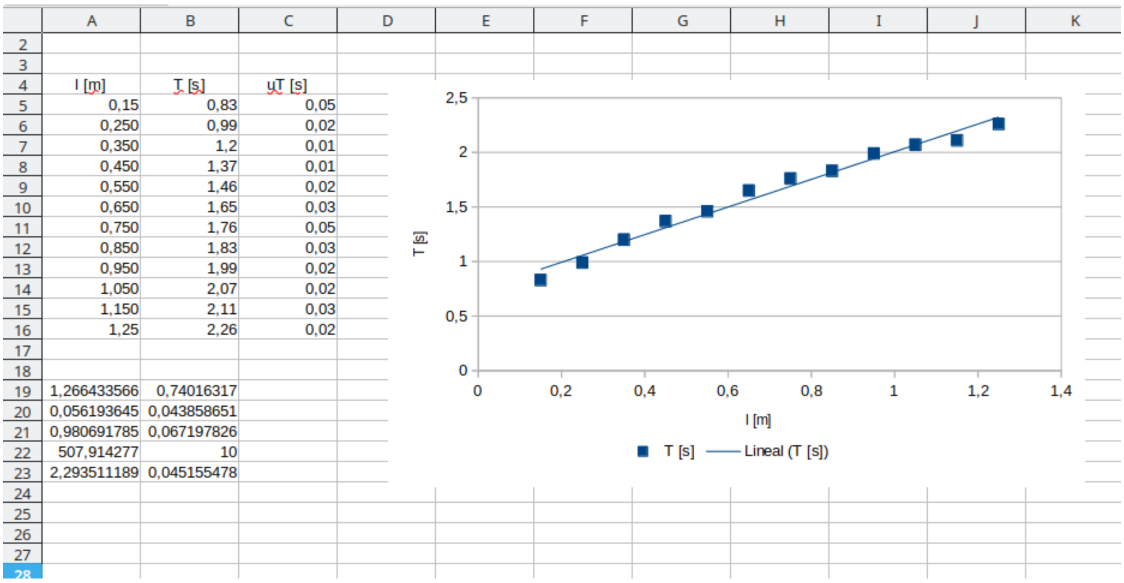
$$k = (230{,}2 \pm 1{,}7)\ \text{N/m}, \qquad \ell_0 = (0{,}3005 \pm 0{,}0033)\ \text{m}.$$

6.2. Obtención de la relación que liga los datos registrados

El segundo análisis lo realizaremos sobre el período de oscilación de un péndulo, en este caso no contamos con una teoría que nos indique en función de su longitud los datos recolectados figuran el la tabla 6.2. Del análisis de datos obtendremos la relación funcional entre $\bar{T}$ y la longitud del péndulo. Con este análisis trataremos de determinar la relación funcional entre $\bar{T}$ y ℓ para poder crear, a posteriori un modelo mecánico del péndulo.

Analizaremos en esta sección los datos de la tabla 6.2 correspondientes al período de oscilación de un péndulo. Si seguimos el procedimiento utilizado para los datos de la tabla 6.1 tendremos la planilla de cálculo que se presenta en la figura 6.2.

Observemos que el coeficiente de determinación R^2 es 0,9806, pero sin embargo los datos



	A	B	C
4	l [m]	T [s]	uT [s]
5	0,15	0,83	0,05
6	0,250	0,99	0,02
7	0,350	1,2	0,01
8	0,450	1,37	0,01
9	0,550	1,46	0,02
10	0,650	1,65	0,03
11	0,750	1,76	0,05
12	0,850	1,83	0,03
13	0,950	1,99	0,02
14	1,050	2,07	0,02
15	1,150	2,11	0,03
16	1,25	2,26	0,02
19	1,266433566	0,74016317	
20	0,056193645	0,043858651	
21	0,980691785	0,067197826	
22	507,914277	10	
23	2,293511189	0,045155478	

Figura 6.2: ***Planilla de calculo para el análisis del período de un péndulo.***

no parecen estar bien alineados, vemos que para valores extremos de la variable independiente los puntos "se caen de la recta estimada", lo cual abre fundadas sospechas que el modelo no es el propuesto: lineal. En estos casos, se comprueba la idea estudiando los residuos que resultan la diferencia entre el valor medido y_i y el predicho por el modelo propuesto $\hat{y} = b_0 + b_1 x_i$.

$$\Delta = y_i - \hat{y}_i$$

y graficando Δ vs x. Para el caso que nos ocupa tendremos:

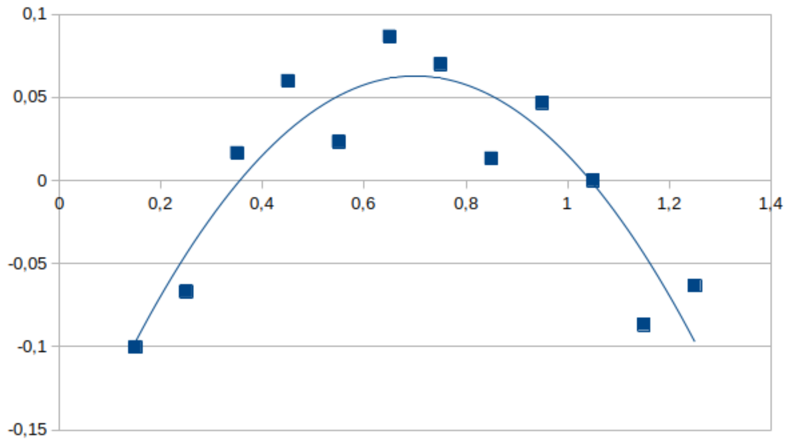


Figura 6.3: ***Dispersión de los residuos para el caso del período de un péndulo, en función de su longitud.***

Si el modelo propuesto es el adecuado, se tendría una dispersión en torno a $\Delta = 0$. Vemos que en este caso parecerían seguir una tendencia de distribución cóncava hacia abajo, lo cual condice con la observación inicial de modelo no lineal.

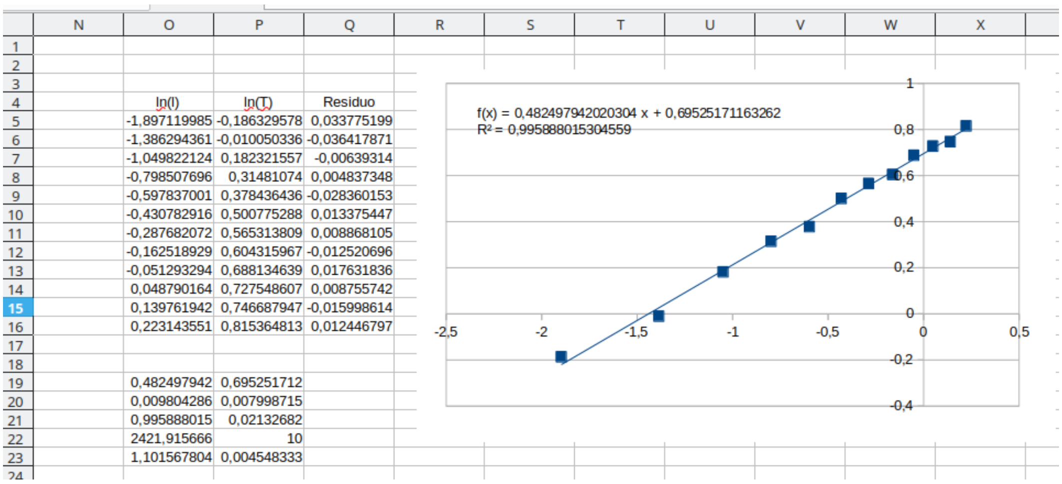
El segundo intento, si la correlación lineal falla es ir por una ley de potencias tipo:

$$y = ax^b,$$

que aunque es no lineal se puede linealizar si tomamos logaritmo a ambos lados del igual

$$\ln(y) = \ln(a) + b\ln(x)$$

En la figura 6.4 se presentan los resultados para esta correlación



	N	O	P	Q
1				
2				
3				
4		ln(l)	ln(T)	Residuo
5		-1,897119985	-0,186329578	0,033775199
6		-1,386294361	-0,010050336	-0,036417871
7		-1,049822124	0,182321557	-0,00639314
8		-0,798507696	0,31481074	0,004837348
9		-0,597837001	0,378436436	-0,028360153
10		-0,430782916	0,500775288	0,013375447
11		-0,287682072	0,565313809	0,008868105
12		-0,162518929	0,604315967	-0,012520696
13		-0,051293294	0,688134639	0,017631836
14		0,048790164	0,727548607	0,008755742
15		0,139761942	0,746687947	-0,015998614
16		0,223143551	0,815364813	0,012446797
17				
18				
19		0,482497942	0,695251712	
20		0,009804286	0,007998715	
21		0,995888015	0,02132682	
22		2421,915666	10	
23		1,101567804	0,004548333	

Figura 6.4: ***Ajuste lineal de*** $\ln(T)$ ***vs*** $\ln(\ell)$**.**

Observemos en este caso, los puntos están mejor distribuidos alrededor de la recta y que el coeficiente de determinación es 0,996. El gráfico de los residuos, que se presenta en la figura 6.5, en este caso es más saludable:

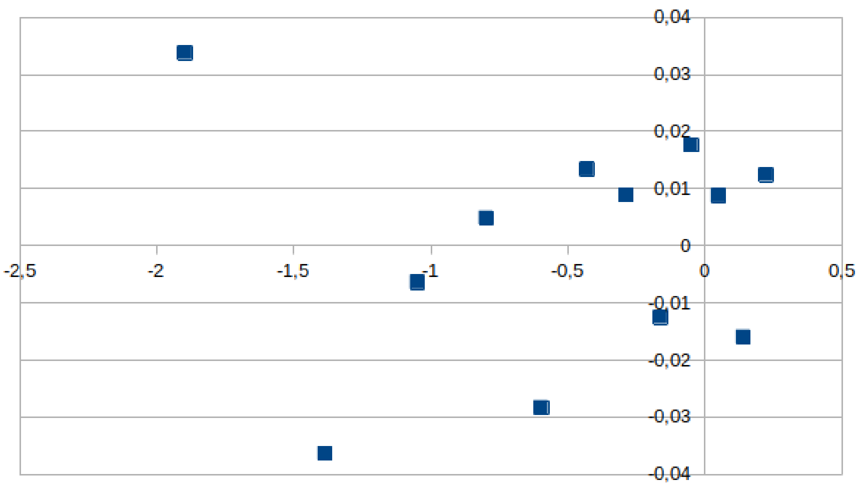


Figura 6.5: ***Gráfico de los residuos del ajuste lineal*** $\ln(T)$ ***vs*** $\ln(\ell)$**.**

Se observa que no hay una tendencia como en el caso del ajuste $T\,vs\,\ell$.

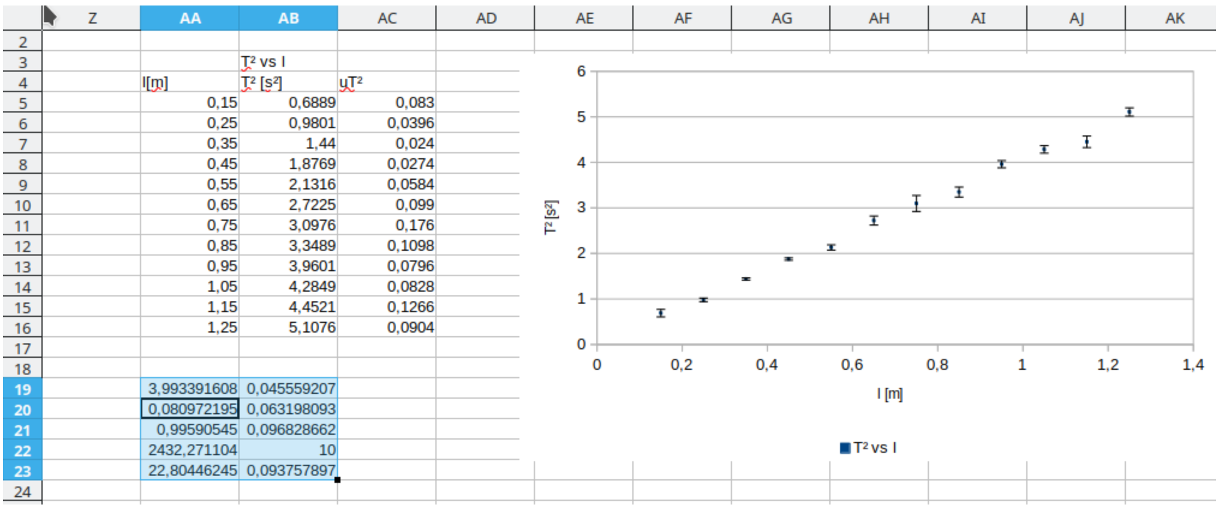
Encontramos que el valor de b, pendiente de la recta en este plano ln-ln es $b \sim 0{,}48$, o sea que el período escalaría aproximadamente con la raíz de la longitud. Pero... $0{,}50 \neq 0{,}48$.

¿Cómo podemos afirmarlo? y resulta sencillo, si pensamos que los números de la física difieren de los números matemáticos, en efecto, los números en la física son concretos, es decir tienen unidades y en una ley debe haber, no solo igualdad de números matemáticos sino también de unidades. Un simple análisis nos indica que la aceleración que experimenta el péndulo tiene que ser función de la aceleración local de la gravedad, y además de su longitud, por lo tanto, las unidades del período se tiene que poder "armar" con las de su longitud ℓ y las de g y la combinación válida es

$$T \sim \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Por lo tanto, la diferencia entre 0,49 y 0,50 debe atribuirse a incertezas (posiblemente sistemáticas) ya que hay razones de peso para negar cualquier combinación que no sea 0,5; por otra parte el 0,49 obtenido depende de los datos analizados y no resulta lógico que las relaciones sean dependientes de las mediciones realizadas, debe haber una ley por encima de la observación, aunque no la conozcamos.

Seguiremos, entonces, buscando una correlación T^2 vs ℓ. En la figura 6.6 se presenta la imagen de la hoja de cálculo. Se puede ver que los puntos están alineados y que sus incertezas,



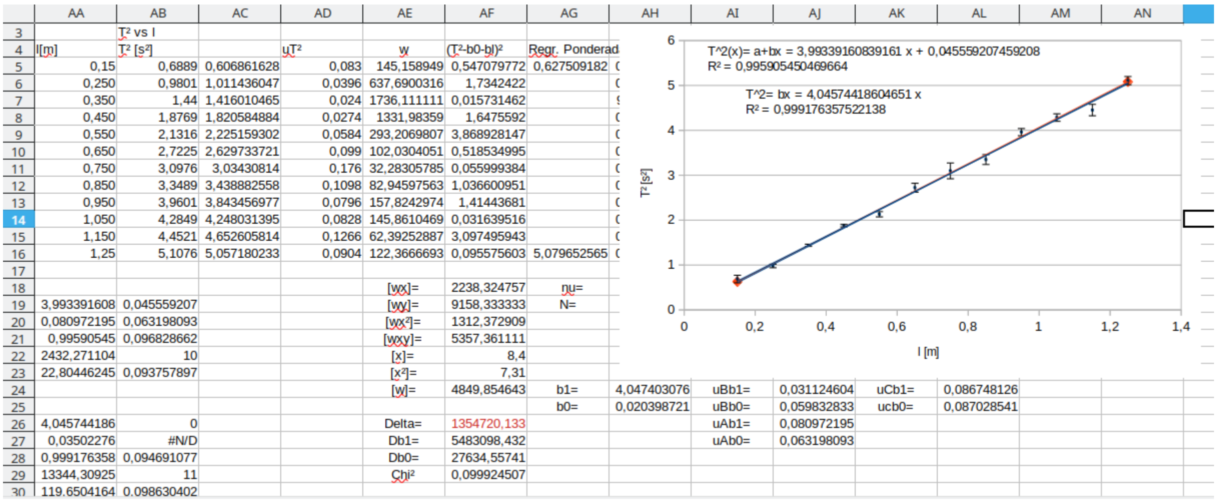
	Z	AA	AB	AC
2				
3			T² vs l	
4		l[m]	T² [s²]	uT²
5		0,15	0,6889	0,083
6		0,25	0,9801	0,0396
7		0,35	1,44	0,024
8		0,45	1,8769	0,0274
9		0,55	2,1316	0,0584
10		0,65	2,7225	0,099
11		0,75	3,0976	0,176
12		0,85	3,3489	0,1098
13		0,95	3,9601	0,0796
14		1,05	4,2849	0,0828
15		1,15	4,4521	0,1266
16		1,25	5,1076	0,0904
17				
18				
19		3,993391608	0,045559207	
20		0,080972195	0,063198093	
21		0,99590545	0,096828662	
22		2432,271104	10	
23		22,80446245	0,093757897	
24				

Figura 6.6: ***Vista de la hoja de cálculo para la correlación T^2 vs ℓ***

que en este caso se distinguen del punto en cuestión son diferentes para cada punto, por lo tanto se debe realizar un modelo MCMP, asignando como pesos la incerteza de los puntos $u_{T^2} = 2Tu_T$.

Lamentablemente las planillas de calculo, esta estimación no la entregan, pero que su cálculo es inmediato programando las expresiones (E.5), (E.6) para el cálculo de los parámetros: (E.7);(E.8);(E.11) y (E.12) para el calculo como se detalla en el apéndice F.

Los valores obtenidos por el MCMP son distintos a los que se obtienen por el MCMO.



	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
3		T² vs l										
4	l[m]	T² [s²]		uT²	w	(T²-b0-bl)²	Regr. Ponderad					
5	0,15	0,6889	0,606861628	0,083	145,158949	0,547079772	0,627509182					
6	0,250	0,9801	1,011436047	0,0396	637,6900316	1,7342422						
7	0,350	1,44	1,416010465	0,024	1736,111111	0,015731462						
8	0,450	1,8769	1,820584884	0,0274	1331,98359	1,6475592						
9	0,550	2,1316	2,225159302	0,0584	293,2069807	3,868928147						
10	0,650	2,7225	2,629733721	0,099	102,0304051	0,518534995						
11	0,750	3,0976	3,03430814	0,176	32,28305785	0,055999384						
12	0,850	3,3489	3,438882558	0,1098	82,94597563	1,036600951						
13	0,950	3,9601	3,843456977	0,0796	157,8242974	1,41443681						
14	1,050	4,2849	4,248031395	0,0828	145,8610469	0,031639516						
15	1,150	4,4521	4,652605814	0,1266	62,39252887	3,097495943						
16	1,25	5,1076	5,057180233	0,0904	122,3666693	0,095575603	5,079652565					
17												
18					[wx]=	2238,324757	nu=					
19	3,993391608	0,045559207			[wy]=	9158,333333	N=					
20	0,080972195	0,063198093			[wx²]=	1312,372909						
21	0,99590545	0,096828662			[wxy]=	5357,361111						
22	2432,271104	10			[x]=	8,4						
23	22,80446245	0,093757897			[x²]=	7,31						
24					[w]=	4849,854643	b1=	4,047403076	uBb1=	0,031124604	uCb1=	0,086748126
25							b0=	0,020398721	uBb0=	0,059832833	ucb0=	0,087028541
26	4,045744186	0			Delta=	1354720,133			uAb1=	0,080972195		
27	0,03502276	#N/D			Db1=	5483098,432			uAb0=	0,063198093		
28	0,999176358	0,094691077			Db0=	27634,55741						
29	13344,30925	11			Chi²	0,099924507						
30	119,6504164	0,098630402										

Figura 6.7: ***Vista de la planilla de cálculo para el cálculo de los parámetros de ajuste de la relación $T^2 = b_1\ell$.***

Podemos decir que a dos cifras significativas tendremos:

$$T^2 = b_0 + b_1\ell$$
$$b_0 = (0{,}020 \pm 0{,}087)\ \mathrm{s}^2$$
$$b_1 = (4{,}047 \pm 0{,}087)\ \mathrm{s}^2/\mathrm{m}.$$

Observamos que, dentro del error experimental el parámetro b_0 no puede considerarse distinto de cero, lo cual nos habilita a realizar la correlación de la recta que pasa por el origen que se detalla en el apéndice E.2.

$$T^2 = b_1\ell$$
$$b_1 = (4{,}082 \pm 0{,}044)\ \mathrm{s}^2/\mathrm{m}.$$

El modelo teórico para la oscilación del péndulo, no tiene término independiente (b_0, si las oscilaciones son de pequeña amplitud) valor aceptado para la constante b_1 en Buenos Aires resulta ser $(4{,}020676 \pm 0{,}000053)\ \mathrm{s}^2/\mathrm{m}$. La determinación de b_1 realizada tiene una incerteza relativa del 1,1 % pudiéndose calificar como precisa, sin embargo comparándola con el valor aceptado (realizando el test de diferencias significativas) nos indica que entre ellas hay diferencia, por lo tanto podemos afirmar que la determinación de b_1, es precisa, pero no exacta.

Capítulo 7

Estimación de incertezas y ajustes de una manera “quick and dirty”

Muchas veces nos encontramos en que la cantidad de mediciones que se hacen de un mensurando no son suficientes para aplicar los procedimientos descriptos en el sección 2.6.2, en este capítulos se describen métodos para ese caso.

7.1. Dispersión con menos de 10 datos

Supongamos tener una serie de mediciones $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ con $n < 10$ la expresión para el calculo de la dispersión (2.2) no estima correctamente esta cantidad, entonces se puede establecer como regla que:

$$D_X \approx \frac{x_M - x_m}{m},$$

Donde x_M/x_m es el valor de la medición más grande/mas pequeño de la serie y m se toma como 2 si el número de mediciones el menor que 5 ($n < 5$) y 4 si esté se encuentra entre 6 y 10 ($6 \leq n \leq 10$).

7.2. Recta por el método de máxima y mínima pendiente

Si tenemos una serie de datos con su incerteza y queremos aproximar sus datos por una recta:

$$y = b_0 + b_1 x,$$

podemos seguir el siguiente procedimiento : Una vez que nos aseguramos graficándolos que guardan una relación lineal

1. Calculamos el promedio de la variable independiente: $\bar{x}$ y el de la variable dependiente $\bar{y}$. Sabemos que la recta por cuadrados mínimos pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

2. Consideramos el punto mas alejado del origen (x_N, y_N) y definimos los puntos

$$P_M = (x_N, y_N + u_{y_N}) \qquad P_m = (x_N, y_N - u_{y_N})$$

3. Calculamos la pendiente y la ordenada al origen de la recta que pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$ y P_M, estos valores los llamaremos m_M y b_M. A esta recta se la denomina de máxima pendiente.

4. Calculamos la pendiente y la ordenada al origen de la recta que pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$ y P_m, estos valores los llamaremos m_m y b_m. A esta recta se la denomina de mínima pendiente. Los valores de m_m y m_M vendrán dados por

$$m_M = \frac{y_N + u_{y_N} - \bar{y}}{x_N - \bar{x}} \qquad b_M = \bar{y} - m_M \bar{x}$$
$$m_m = \frac{y_N - u_{y_N} - \bar{y}}{x_N - \bar{x}} \qquad b_m = \bar{y} - m_m \bar{x}$$

5. Tenemos dos rectas, de aquí sacaremos una y evaluaremos las incertezas de los parámetros según las expresiones:

$$m = \frac{1}{2}(m_M + m_m) \qquad u_m = \frac{1}{2}|m_M - m_m|$$
$$b = \frac{1}{2}(b_M + b_m) \qquad u_b = \frac{1}{2}|b_M - b_m|$$

Con la disponibilidad de software y potencia de cálculo que tienen los dispositivos actuales este método ya cayó en desuso.

Capítulo 8

Confección de un informe

En la vida profecional de un ingeniero casi tan importante como obtener medidas confiables, es el saber presentarlas.

Apéndice A

Incerteza extendida

Analicemos nuevamente el significado de una medida, cuando decimos que la medida de una cantidad viene dada por

$$X = x_0 \pm u_x.$$

Estamos diciendo que, si realizamos una medida de X, en las mismas condiciones experimentales, con una cierta probabilidad la medida no diferirá de x_0 en más de u_x; o de otra manera que el valor verdadero del mensurando difiere del valor más probable en menos de u con la mencionada probabilidad.

Si el número de mediciones realizadas para dar el valor de X es muy grande (más de 50), se puede determinar que la probabilidad mencionada es tan solo del 68 %. Sin embargo en muchos campos de la ciencia y la tecnología, se requiere trabajar con mayor seguridad sobre los datos informados, es decir aumentar la probabilidad de que el valor verdadero difiera del informado con una probabilidad de por ejemplo el 95 % o 99 %, en general $1-\alpha$. Técnicamente se expresa diciendo que damos un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$.

Aclaremos la notación: $1-\alpha$ es la probabilidad de que el valor verdadero esté en el intervalo informado y α es la probabilidad de que se encuentre fuera de él. Está claro que un intervalo confiable debe tener α "chico" o lo que el lo miso $1-\alpha$ "grande". En probabilidades y estadística es común trabajar con α y en el cálculo de las incerteza se utiliza su complemento a uno y se lo denomina nivel de confianza $p = 1-\alpha$.

Para lograr esto se trabaja con la denominada incerteza expandida U_p que se calcula de la siguiente manera:

$$U_p = k_p u$$

donde k_p es un factor de cobertura y depende tanto del nivel de confianza deseado p como de la cantidad de datos utilizados para evaluar el mensurando n, más precisamente del número de grados de libertad que tiene el problema estadístico que resulta ser $\nu = n-1$. En la tabla se presentan los valores aceptados de k_p para distintos valores de ν: Si el número de mediciones es muy grande (mayor a 50) se suele suponer que $k(\infty)_p$ viene dado por los valores presentados en la tabla.

Tabla A.1: ***Valores del factor de cobertura*** k ***en función del grado de confidencia y el número de grados de libertad.***

ν	90 %	95 %	98 %	99 %	ν	90 %	95 %	98 %	99 %
1	6,31	12,71	31,82	63,66	10	1,81	2,23	2,76	3,17
2	2,92	4,30	6,96	9,92	12	1,78	2,18	2,68	3,05
3	2,35	3,18	4,54	5,84	14	1,76	2,14	2,62	2,98
4	2,13	2,78	3,75	4,60	16	1,75	2,12	2,58	2,92
5	2,02	2,57	3,36	4,03	18	1,73	2,10	2,55	2,88
6	1,94	2,45	3,14	3,71	20	1,72	2,09	2,53	2,85
7	1,89	2,36	3,00	3,50	30	1,70	2,04	2,46	2,75
8	1,86	2,31	2,90	3,36	50	1,68	2,01	2,40	2,68
9	1,83	2,26	2,82	3,25	∞	v1,64	1,96	2,33	2,58

Apéndice B

Expresión para la propagación de incertezas

A continuación se presenta una tabla con las expresiones que se utilizan para la propagación de las incertezas en mediciones indirectas para funciones comúnmente utilizadas. Partimos de la base que conocemos $y = f(x_1, x_2)$.

Tabla B.1: ***Tabla de la propagación de incertezas para funciones de uso común.***

	y	u_y^2
a	$Ax_1 + Bx_2$	$A^2u_{x_1}^2 + A^2u_{x_2}^2$
b	Ax_1x_2	$A^2\left((x_2u_{x_1})^2 + (x_1u_{x_2})^2\right)$
c	Ax_1/x_2	$A^2\left((x_2u_{x_1})^2 + (x_1u_{x_2})^2\right)$
d	$Ax_1^nx_2^m$	$A^2\left((nx_1^{n-1}x_2^mu_{x_1})^2 + (mx_2^{m-1}x_1^nu_{x_2})^2\right)$
e	$A\ln(Bx_1)$	$A^2B^2\frac{u_{x_1}^2}{x_1^2}$
f	$A\cos(Bx_1)$	$(AB\,\mathrm{sen}(Bx_1))^2u_{x_1}^2$
g	$A\,\mathrm{sen}(Bx_1)$	$(AB\cos(Bx_1))^2u_{x_1}^2$
h	$A\tan(Bx_1)$	$\left(\frac{AB}{\cos^2(Bx_1))}\right)^2 u_{x_1}^2$

Como ejemplo supongamos que tenemos el promedio:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

donde cada x_i tiene una incerteza D_x igual para todos los puntos, generalizando la expresión a

de la table B.1 tendremos que:

$$u_{\overline{x}}^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} D_x^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 N D_x^2,$$

por lo tanto

$$u_{\overline{x}} = \frac{D_x}{\sqrt{N}}.$$

Muchas veces, se conoce el valor de la incerteza relativa de las variables, en este caso, resulta útil utilizar la regla:

$$y = A x_1^n x_2^m$$
$$\varepsilon_y = \sqrt{(n\varepsilon_{x_1})^2 + (m\varepsilon_{x_2})^2}$$

Apéndice C

Incerteza instrumental en instrumentos digitales

Los instrumentos digitales, informan el resultado de una medida en un display, por lo tanto tiene un número discreto de dígitos, su resolución está acotada, por ejemplo, un instrumento analógico, aunque no podamos leerlo muestra una posición en una escala continua, pero uno digital no puede mostrar valores por debajo del su ultimo dígito. Sin embargo la incerteza, a diferencia de los analógicos es más comĺeja de evaluar que la de su contraparte analógico, en efecto. en el proceso de medición interviene una etapa de digitalización, que si bien no podemos entrar en detalle en ella, sería la manera en que una cantidad continua se transforma en una cantidad discreta (y se muestra en el visor del instrunmento). Esta discretización puede ser el resultado de un conteo (como en el caso de los cronómeros digitales) o de conversión Analógica Digital ADC (como en el caso de los calibres digitales o multimetros para medir magnitudes eléctricas). Nos ocuparemos en lo que sigue en dioscutir el caso de un multimetro.

El primer punto a analizar, es que la incerteza de un instrumento digital que no se basa en conteo, tien dos factores relevantes, uno corresponde a su calibración que usualmente se indica como un porcentaje, y otro que se indica como variación en el último dígito de la lectura, así por ejemplo un Multímetro Megalite DT-830D informa, en su manual, que para la medición de una tensión continua en el rango 0-20V tiene una incerteza $\pm(0{,}5\,\% + 3)$. Pero ¿cómo sabemos cuál es el último dígito? Usualmente los intrumentos nos indican la cantidad de dígitso en el formato $n1/2$ ¿Qué significa esto? NO es sencillo de entender, el n indica el número de dígitos que tiene la medida (no confundir con decimales) y el $1/2$ indica que hay un dígito extra, pero que sólo puede tomar el valor 0 o 1; así un multímetro $31/2$ puede informar cantidades entre 0 y 1999, y ¿donde está el punto decimal? eso depende de la escala. Supongamos que queremos medir una tensión continua en la escala de 200V con el multimetro de $31/2$, esto nos indica que podremos medir entre 0 y 199,9 V (con un solo decimal). Pensemos ahora cual sería la incerteza de la medición si esta esperamos sea de 1,2 V; esta medida tendrá una incerteza del 0,5 % debido a efectos de la calñibración y 3 unidades en el úlimo dígito (0,1), entonces la incerteza será:

$$1{,}2 \times \frac{0{,}5}{100} + 0{,}1 \times 3 = 0{,}006 + 0{,}3 \approx 0{,}30 \text{ V}$$

La medida será, entonces, $(1{,}2 \pm 0{,}3)$ V es bastante mala ya que tiene una incerteza relativa porcentual del 25 %. Si la medida la ubieramos hecho en la escala de 2 V (podríamos medir valores entre 0 y 1,999, el error de calibración no cambia, pero ahora el último dígito es 0,001 por lo tanto tendremos

$$1{,}2 \times \frac{0{,}5}{100} + 0{,}001 \times 3 = 0{,}006 + 0{,}003 \approx 0{,}0090 \text{ V}$$

Con lo cual la incerteza relativa porcentual baja al 0,75 %.

Apéndice D

Cómo disminuir la incerteza Tipo A

Las cantidades a medir pueden tener una dispersión que provenga a que hay una dispersión intrínseca de la medida, como podría ser determinar la altura de las personas que pasan por una determinada esquina de tu ciudad, o que la cantidad no presente una dispersión intrínseca, y la que resulta del proceso de medida sea propia de él, como el caso de la medición de tiempos con un cronómetro manual.

En las cantidades con dispersión intrínseca no habrá manera de eliminarla, pero en las que la dispersión resulte del proceso de medición sí. Cabe aclarar que en cualquier caso, dado un procedimiento para realizar la medida, no se podrá bajar su incerteza por debajo de la incerteza de Tipo B.

Para eliminar, o disminuir la incerteza de medición se debe aumentar el número de medidas hasta que la contribución de la incerteza Tipo A (ecuación 2.3) sea despreciable frente a la contribución de la de Tipo B. Sabemos que:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = u_B \sqrt{1 + \left(\frac{u_A}{u_B}\right)^2}$$

Con lo cual resulta que

$$\left(\frac{D_X}{\sqrt{N} u_B}\right)^2 \ll 1$$
$$N \gg \left(\frac{D_X}{u_B}\right)^2$$

Pero prácticamente ¿qué significa el símbolo "$\gg$"? No hay una norma que establezca su significado, sin embargo se acepta que por cada signo $>$ que aparezca en una desigualdad se tomará que hay un factor 10 de diferencia (orden de magnitud) por lo tanto tenemos que

$$N \sim 100 \left(\frac{D_X}{u_B}\right)^2, \tag{D.1}$$

Este análisis presupone que la dispersión de la medición D_X no cambia durante la serie de N

medidas y, además, nos indica que el número de mediciones se ve afectado por la incerteza instrumental, a mayor precisión del instrumento, mayor será la cantidad de mediciones a realizar. A continuación presentamos tablas de incertezas Tipo A para la medición del período del péndulo analizado en la sección 2.6.2.

Tabla D.1: ***Incerteza Tipo A, total y contribución porcentual en función del número de mediciones para con*** $u_B = 0{,}01$ ***s*** $\left(\frac{D_X}{u_B}\right)^2 \sim 1{,}9$**.**

N	u_A	u	$\Delta_{\%}$
10	$0,004352$	$0,010906$	$9,06$
20	$0,003078$	$0,010463$	$4,63$
50	$0,001946$	$0,010188$	$1,88$
100	$0,001376$	$0,010094$	$0,94$
200	$0,000973$	$0,010047$	$0,47$
500	$0,000616$	$0,010019$	$0,19$
1000	$0,000435$	$0,010009$	$0,09$
2000	$0,000308$	$0,010005$	$0,05$
5000	$0,000195$	$0,010002$	$0,02$
10000	$0,000137$	$0,010001$	$0,01$
20000	$0,000010$	$0,010000$	$0,00$

Tabla D.2: ***Incerteza Tipo A, total y contribución porcentual en función del número de mediciones para con*** $u_B = 0{,}1$ ***s,*** $\left(\frac{D_X}{u_B}\right)^2 \sim 0{,}019$

N	u_A	u	$\Delta_{\%}$
10	$0,004352$	$0,100095$	$0,09$
20	$0,003078$	$0,100047$	$0,05$
50	$0,001946$	$0,100019$	$0,02$
100	$0,001376$	$0,100009$	$0,01$
200	$0,000973$	$0,100005$	$0,00$
500	$0,000616$	$0,100002$	$0,00$
1000	$0,000435$	$0,100001$	$0,00$
2000	$0,000308$	$0,100000$	$0,00$
5000	$0,000195$	$0,100000$	$0,00$
10000	$0,000137$	$0,100000$	$0,00$
20000	$0,000010$	$0,100000$	$0,00$

¿Cómo interpretamos lo que muestran estas tablas? La columna rotulada con $\Delta_{\%}$ nos muestra la contribución porcentual del la incerteza Tipo A a la incerteza total:

$$\Delta_{\%} = 100\left(\frac{u}{u_B} - 1\right)$$

Con el criterio adoptado para las desigualdades, en el caso de trabajar con un cronometro de 0,01 s de resolución requeriremos ≈ 200 mediciones; la tabla D.1 muestra que para $N = 200$ la contribución del error estadístico está por debajo del 1 % y para el cronometro con apreciación 0,1 en la tabla 2 encontramos que con 10 mediciones la contribución está por debajo del 0,1. Tengamos en cuenta que el valor de D_X está asociado con la dispersión que genera el proceso de medición y no con el instrumento.

Apéndice E

Método de los Cuadrados Mínimos

Cuando debemos ajustar un modelo, generalmente tenemos el conjunto de datos:

$$\{x_i, y_i, u_{y_i}, u_{x_i}\}.$$

y una función tal que:

$$y = f(x, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m), \tag{E.1}$$

Donde los β_j son los parámetros de ajuste del modelo. La idea es a partir del conjunto de mediciones, estimar a los parámetros β_j. Como en el caso de una medición individual β_j sería el valor verdadero, que no podemos conocer; el valor más probable para este parámetro será b_j. Lo que desarrollaremos es como obtener los b_j con la menor incerteza posible. La ecuación representa una curva, y los puntos (x_i, y_i) podrán o no estar sobre ella.

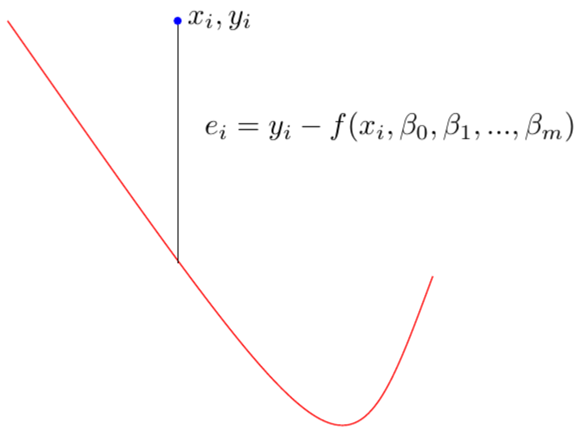


Figura E.1: ***distancia entre el punto medido y la curva del modelo.***

La idea que desarrollaremos es la de minimizar la distancia e_i entre los puntos y la curva que surge del modelo, la distancia e_i cambia aleatoriamente, también supondremos que las incertezas en la variable dependiente se pueden suponer despreciables, es decir sólo la cantidad

y_i tiene incerteza.[1] Si las desviaciones e_i son aleatorias, entonces se puede demostrar que

$$\sum_{i=1}^{N} e_i = 0.$$

De ahí que se minimizará la suma del cuadrado de las diferencias, de ahí el nombre del método: Método de los Cuadrados Mínimos Ordinarios o MCMO por sus siglas.

Entonces sea la función χ^2 tal que:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - f(x_i, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m))^2.$$

El problema matemático es, entonces resolver el sistema de m ecuaciones que resulta de

$$\left.\frac{\partial \chi^2}{\partial \beta_j}\right|_{b_j} = 0, \qquad j = 0 \ldots m. \tag{E.2}$$

La solución de este sistema nos dará los mejores valores de b_j que estiman a los parámetros del modelo β_j. La solución del sistema (E.2). La solución podrá ser más o menos trabajosa, y podrá tener un juego, o varios, de soluciones, dependiendo de la complejidad del modelo.

Los estimadores encontrados b_j tendrán también su incerteza, que será de Tipo A, la cual está asociada con la dispersión de los puntos en torno a la curva del modelo, y de Tipo B que resultará de la incerteza propia de los puntos medidos. La incerteza de Tipo A se obtiene a partir de métodos estadísticos que no vamos a desarrollar y la de Tipo A se obtiene por propagación de errores:

$$u_{Aj} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial b_j}{\partial y_i}\right)^2 u_{y_i}^2}$$

Una variante de este método es el denominado Método de los Cuadrados Mínimos Pesados (MCMP), el cual se basa en la siguiente idea: si los puntos no tienen la misma incerteza, le voy a dar menor peso a aquellos que tengan mayor error

$$\chi_\omega^2 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \omega_i (y_i - f(x_i, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m))^2.$$

La elección del peso a utilizar depende mucho del problema a tratar habitualmente se elige para un MCMO $\omega_i = \frac{1}{u_{y_i}^2}$. En este caso se llega a un problema con la misma complejidad que el MCMO, que se presentó en (E.2).

[1] Es importante notar que hay métodos en los que se minimiza la distancia horizontal, o la distancia perpendicular a la cuerva, y también métodos donde se tienen en cuenta las incertezas en las dos variables; pero que no se tratarán en estas notas.

E.1. Estimación de los parámetros para un modelo lineal

Antes de continuar, debemos aclarar algo importante, un modelo lineal en el marco de los MCMO, no es necesariamente una recta; el termino Lineal se aplica a los parámetros, es decir,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \tag{E.3}$$

$$y = \beta_0 e^{\beta_1 x} \tag{E.4}$$

La ecuación (E.3) aunque no es una recta, es una función lineal de los parámetros, pero la ecuación (E.4) no lo es ya que un parámetro está multiplicado por la exponencial de otro. Los modelos lineales son mas sencillos de resolver que los no lineales. Comenzaremos estudiando el caso más elemental que es el de una recta.

E.1.1. Parámetros de ajuste de una linea recta

Supondremos que los datos medidos tienen distinta incerteza, de manera tal que debemos ir por la variante MCMP, cosa que tendremos en cuenta asignando un peso distinto a cada medición, Sin quisiéramos usar un modelo con igual peso para todos los puntos ω saldría como factor común en las expresiones que encontremos

$$y \; = \; \beta_0 + \beta_1 \, x.$$

La función χ^2_ω es:

$$\chi^2_\omega(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)^2,$$

Realizando los cálculos necesarios, es decir, resolviendo el sistema algebraico

$$\left.\frac{\partial \chi^2_\omega}{\partial \beta_0}\right|_{b_0,b_1} = -2\sum_{i=1}^{N} \omega_i (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

$$\left.\frac{\partial \chi^2_\omega}{\partial \beta_1}\right|_{b_1,b_1} = -2\sum_{i=1}^{N} \omega_i (y_i - b_0 - b_1 x_i) x_i = 0,$$

Utilizando la notación $[x] = \sum_{i=1}^{N} x_i$ y teniendo en cuenta que $[1] = N$ tenemos queda

$$[\omega y] = [\omega] b_0 + [\omega x] b_1$$

$$[\omega xy] = [\omega x] b_0 + [\omega x^2] b_1$$

El sistema de ecuaciones que resulta es lineal en las incógnitas b_0 y b_1, (de ahí que el modelo se llame lineal) y se resuelve dando:

$$b_0 = \frac{[\omega x^2][\omega y] - [\omega x][\omega xy]}{[\omega][\omega x^2] - [\omega x]^2}, \tag{E.5}$$

$$b_1 = \frac{[\omega][\omega xy] - [\omega x][\omega y]}{[\omega][\omega x^2] - [\omega x]^2}. \tag{E.6}$$

E.1.2. Estimación de las incertezas de los parámetros cuando los y tiene incertezas distintas.

Los estimadores b_0 y b_1, son funciones tanto de x_i, y_i como de los pesos ω_i. Estarán afectados por incertezas Tipo A que "miden" cuan dispersos están los puntos de la recta estimada y son de naturaleza estadística, y los de Tipo B que tiene en cuanta las incertezas con que se conocen los puntos experimentales que fueron ajustados. Las incertezas Tipo A, se deducirán en cursos de probabilidad y estadística y vendrán dados por:

$$u_{Ab_0} = \sqrt{\frac{\chi^2(b_0, b_1)}{\nu}} \sqrt{\frac{[x^2]}{N[x^2] - [x]^2}}, \tag{E.7}$$

$$u_{Ab_1} = \sqrt{\frac{\chi^2(b_0, b_1)}{\nu}} \sqrt{\frac{N}{N[x^2] - [x]^2}}. \tag{E.8}$$

Observemos que χ^2 no tiene los pesos, no es χ^2_ω y aquí $\nu = N - 2$ son los grados de libertad del sistema para obtener su incerteza es necesario, entonces, aplicar propagación de teniendo en cuenta que sólo la variable dependiente se considera con error: y_i. Utilizando las recomendaciones de la International Standard Organization (ISO-GUM) su incerteza Tipo B, se estima como

$$u_{Bb_0} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial b_0}{\partial y_i} u_{y_i} \right)^2} \tag{E.9}$$

$$u_{Bb_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial b_1}{\partial y_i} u_{y_i} \right)^2} \tag{E.10}$$

Que realizando los cálculos resulta:

$$u_{Bb_0} = \sqrt{\frac{[\omega x^2]}{[\omega][\omega x]^2 - [\omega x]^2}}. \tag{E.11}$$

$$u_{Bb_1} = \sqrt{\frac{[\omega]}{[\omega][\omega x^2] - [\omega x]^2}}. \tag{E.12}$$

Por último, la incerteza total de los parámetros vendrá dada por:

$$u_{cb_0} = \sqrt{u^2_{Ab_0} + u^2_{Bb_0}}, \qquad u_{cb_1} = \sqrt{u^2_{Ab_1} + u^2_{Bb_1}}.$$

Las expresiones (E.7) y (E.8) las entregan directamente las planillas de cálculo, en cambio las expresiones (E.11) y (E.12), en general hay que evaluarlas.
Tengamos en cuenta que en muchas páginas de la Internet, o programas dedicados como Origin™ al calcular las dispersiones de los parámetros de ajuste, utilizan las expresiones (E.11) y (E.12) sin embargo, es claro que de esta manera no se tiene en cuenta el error del instrumento de medida.

Caso particular variable dependiente con la misma incerteza

Si los pesos son proporcionales a la inversa de la incerteza de y_i, es decir $\omega_i = 1/u_{y_i}^2$ y esta última es constante (la misma para todo y_i) el error Tipo B se reduce a:

$$u_{Bb_0} = u_y\sqrt{\frac{[x^2]}{N[x^2]-[x]^2}}, \tag{E.13}$$

$$u_{Bb_1} = u_y\sqrt{\frac{N}{N[x^2]-[x]^2}}. \tag{E.14}$$

Notemos que si dividimos (E.7) por (E.13) o (E.8) por (E.14)resulta que

$$\frac{u_B}{u_A} = \frac{u_y}{\sqrt{\chi^2(b_0,b_1)/\nu}},$$

Por lo tanto, el error total será

$$u_c^2 = u_A^2 + u_b^2 = u_A^2\left(1+\left(\frac{u_B}{u_A}\right)^2\right),$$

El cual se puede trabajar hasta llegar a:

$$\begin{aligned} u_{cb_0}^2 &= u_{Ab_0}^2\left(\frac{u_y^2\nu}{\chi^2(b_0,b_1)}+1\right), \\ u_{cb_1}^2 &= u_{Ab_1}^2\left(\frac{u_y^2\nu}{\chi^2(b_0,b_1)}+1\right). \end{aligned} \tag{E.15}$$

Esta es la forma más conveniente de indicar las incertezas ya que tanto los errores Tipo A: u_A, como el valor de $\chi^2(b_0,b_1)/\nu$ se pueden obtener fácilmente en una planilla de calculo.

E.1.3. Significado físico de b_0

Podría ocurrir que el modelo físico que representa el experimento que estamos estudiando tenga ordenada al origen nula, es decir $b_0 = 0$ y la estimación obtenida nos da cero. Entonces debemos probar si el valor para b_0 obtenido es significativo desde el punto de vista estadístico; este estudio requiere de conocimientos estadísticos que no se cuentan al comienzo de la carrera de ingeniería, por lo tanto daremos un criterio alternativo y dejamos el desarrollo avanzado para los cursos de estadística. El problema que queremos resolver es el siguiente, conocemos la ordenada al origen con su incerteza y queremos saber si esta es nula, la manera de responder en primera aproximación es la siguiente: Buscamos si existen diferencias significativas entre el valor hallado y cero, es decir, aplicamos el criterio desarrollado en 3.1, que para este caso se reduce a verificar si

$$|b_0| < u_{cb_0}$$

Si la desigualdad se verifica, entonces b_0 es nulo dentro de las incertezas con las que trabajamos, si no se verifica entonces es significativo, lo que podría estar expresando dos cosas a) el modelo propuesto no se ajusta estrictamente a las condiciones experimentales, o b) hay una fuente de incertezas sistemáticas que se manifiestan en este valor de $b_0 \neq 0$.

Si la desigualdad se verifica, entonces se amerita el cálculo de la resta de ajuste imponiendo que la misma debe pasar por el origen como veremos más adelante.

E.1.4. Propiedades de los parámetros obtenidos por MCM

Los parámetros obtenidos por el método de los cuadrados mínimos se puede probar que son los de menor dispersión, es decir, cualquier otro método para hallarlos dará valores para b_0 y b_1 con mayor incerteza Tipo A.

Otra propiedad importante de el MCM es que la recta ajustada pasa por el centroide (centro de masa) de la distribución de datos, es decir que

$$\bar{y} = b_0 + b_1\bar{x}.$$

Por lo tanto, si conocemos b_1 por calculo directo, b_0 se lo puede calcular como:

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}.$$

E.1.5. ¿Cuan alineados están los puntos experimentales?

Otra pregunta que debemos contestarnos en el trabajo experimental es: ¿y si los datos se alinearon por casualidad? o cual sería el porcentaje de dispersión de los datos respecto de una recta que están explicados? La primera de las preguntas tiene una respuesta compleja y la dejaremos de lado como análisis particular, para contestar la segunda emplearemos un estadístico que nos ayudará en el camino. Primero supondremos que el modelo que estamos utilizando es verdadero, es decir, no hay efectos, mas allá de los aleatorios que aparecen y se cuantifican en las incertezas, que hagan que nuestros datos no lo verifiquen. Si podemos asegurarnos de esto, entonces hay un coeficiente, denominado coeficiente de determinación R^2; en el caso de MCMO es un dato que entrega la planilla Excel™, y en el caso del MCMP se calcula con la siguiente expresión :

$$R^2 = \frac{[\omega(\hat{y}-\bar{y})^2]}{[\omega(y-\bar{y})^2]}$$

Donde $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ es el valor predicho por el modelo de la variable dependiente.

Se puede probar que este número es $0 \leqq R^2 \leqq 1$. Si el modelo propuesto es lineal y representa las mediciones, entonces R^2 estará más cerca de 1. típicamente una muy buena correlación implica $R^2 \sim 0{,}9999$. La inversa, es decir, afirmar que un modelo es válido porque $R^2 \sim 1$ no es estadísticamente cierto, mucho se ha escrito sobre el tema, pero creo que los mas interesante figura en el trabajo de Höfer el al. de 2004 [Höfer-2004] donde se correlaciona el origen de los bebes humanos con la cantidad de cigüeñas en un determinado lugar.

Existe otro coeficiente que se utiliza, también, cuando se quiere informar el grado de correlación y se lo llama coeficiente de correlación r que está acotado $-1 \leq r \leq 1$ que, para el caso de una recta, coincide con $r = sign(b_1)\sqrt{R^2}$. La explicación de este coeficiente se puede resumir en: la variación de la variable independiente se explica tanto más cuanto mas cercano a los extremos esté este coeficiente, la correlación se dice positiva cuando al crecimiento de la variable independiente x le corresponde un aumento en la variable y y se dice negativa cuando al aumento de x le corresponde la disminución de y. En la tabla E.1 se presentan los rangos y los limites de los distintos tipos de correlación que se establecieron.

Tabla E.1: ***Valores y tipo de correlación entre x e y que se utilizan habitualmente.***

-1,00	Correlación negativa perfecta
-0,90	Correlación negativa muy fuerte
-0,75	Correlación negativa considerable
-0,50	Correlación negativa media
-0,10	Correlación negativa débil
0,00	No existe correlación lineal alguna entre las variables
0,10	Correlación positiva débil
0,50	Correlación positiva media
0,75	Correlación positiva considerable
0,90	Correlación positiva muy fuerte
1,00	Correlación positiva perfecta

E.2. Estimación de la pendiente de una recta que pasa por el origen

Cuando en un modelo lineal completo $y = b_0 + b_1 x$ se puede establecer por razones estadísticas que el valor de la ordenada al origen es no significativo b_0, y el modelo real establece que $b_0 = 0$ podemos afirmar que no habría incertezas sistemáticas en el sistema de recolección de datos. Si esto ocurre podremos realizar la correlación lineal sin contener el termino b_0. Es oportuno aclarar aquí que por más que agreguemos el dato $x = 0, y = 0$ no aremos que la recta pase por el origen, ya que el MCMO minimiza las diferencias entre el punto y la recta ajustada y no se basa en lo que ocurra con un solo punto.

Vamos a determinar el valor de la pendiente en una correlación tipo:

$$y = b_1 x.$$

Y utilizaremos el método MCMP. La condición de mínimo que se debe plantear es:

$$\chi^2_\omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(y_i - b x_i\right)^2$$

La solución es inmediata y resulta que

$$b_1 = \frac{[\omega x y]}{[\omega x^2]} \tag{E.16}$$

Para hallar el error de esta pendiente, utilizamos el método de propagación de errores citado resulta que

$$u_{Bb_1} = \sqrt{\frac{1}{[\omega x^2]}} \tag{E.17}$$

y ls estadística marca que:

$$u_{Ab_1} = \sqrt{\frac{\chi^2}{\nu} \frac{1}{[x^2]}} \tag{E.18}$$

y el coeficiente de determinación dado por

$$R^2 = \frac{\chi^2_\omega}{[\omega y]}.$$

Al respecto de R^2 debemos hacer un comentario. Microsoft Excel™ es capaz de informar en el gráfico la linea de ajuste de los datos graficados mostrando tanto los parámetros de la recta como el coeficiente de determinación R^2, y es posible establecer que la recta de ajuste pase por un punto dado, en este caso el cero, sin embargo, al elegir esta opción el valor de R^2 informado es incorrecto. La función `ESTIMACION.LINEAL` si da los valores correctos. La planilla de cálculo LibreOffice Calc no presenta este inconveniente.

Apéndice F

Obtención de los parámetros de una recta y sus dispersiones en una planilla de cálculo

Se desarrollará aquí la manera de ajustar los datos experimentales a modelos sencillos, empleando para ello, planillas de cálculo.

F.1. Incertezas iguales en todas la medidas

Comencemos por analizar un caso en que la estimación de los parámetros y su incerteza Tipo A puede resolverse en una planilla de cálculo. Para estas notas se utiliza LibreOffice Calc, pero lo mismo se podría hacer con una planilla Excel$^{\mathrm{TM}}$. El ejemplo a desarrollar es el presentado en la tabla 6.1. Comenzamos por cargar los datos en, por ejemplo la columna A desde la celda 6 en adelante. Vamos a considerar que la variable de pendiente y es la masa y la independiente x es la longitud.

Queremos encontrar los parámetros de la recta:

$$y = b_0 + b_1 x.$$

Para ello nos posicionamos en una celda que tenga libre una columna a su derecha y cuatro filas hacia abajo (por lo menos, la celda D6 en el ejemplo que se muestra en la figura F.1) Vamos a usar la función matricial `ESTIMACION.LINEAL` que tiene como parámetros el rango de valores que corresponden a la variable dependiente (`A6:A15`), el rango de valores que corresponde a la variable independiente (`B6:B15`), un valor 1 que indica que la recta no necesariamente pasa por el origen (un valor cero la obliga), y el ultimo parámetro 1 indica que queremos la información completa de la estimación (con cero la evitamos).

Como la formula es matricial, una vez que la cargamos en la celda D6 no debemos dar ENTER sino CONTROL+MAYUSCULA+ENTER; si todo salió bien el contenido de la celda

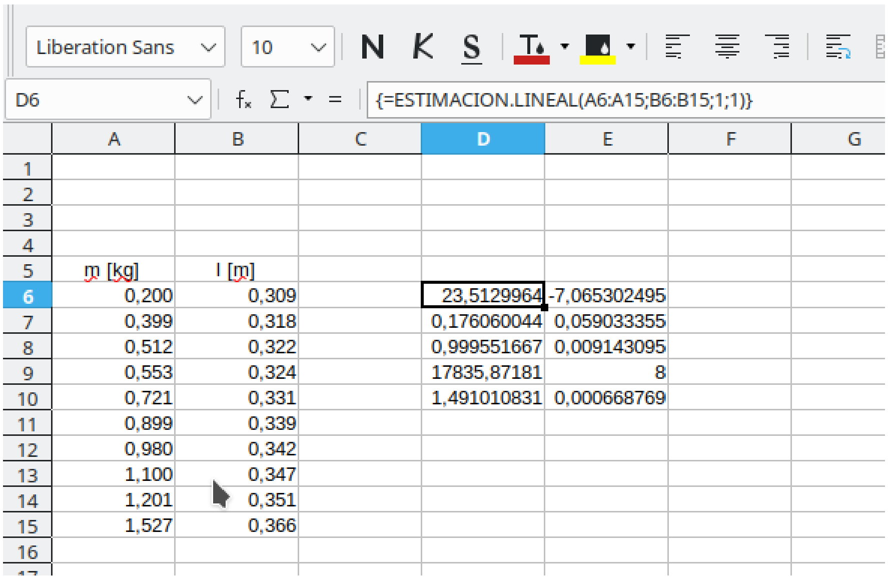


Figura F.1: ***Hoja de calculo para la obtención de los estimadores de la pendiente y ordenada al origen con sus incertezas Tipo A de una recta.***

D6 será la fórmula entre llaves: {`=ESTIMACION.LINEAL(A6:A15;B6:B15;1;1)`} El separador entre parámetros, en este caso es el ";" ya que LibreOffice está configurado para que el separador decimal sea ",". Lo que entrega esta función se resume en la tabla siguiente: En la posición M_{11}

Tabla F.1: ***Salida de la función*** `ESTIMACION.LINEAL` ***de una planilla de cálculo***

23,5129964032778	−7,06530249545775
0,176060044092102	0,059033355473697
0,999551666808298	0,009143094908626
17835,8718079871	8
1,49101083052394	0,000668769476065

b_1	b_0
u_{Ab_1}	u_{Ab_0}
R^2	$\sqrt{\chi^2/\nu}$
F	ν
$[(\hat{y}-\bar{y})^2]$	χ^2

y M_{21} tenemos el estimador de la pendiente y su incerteza Tipo A, en M_{12} y M_{22} el estimador de la ordenada al origen y su incerteza Tipo A. En M_{31} el coeficiente de determinación y en M_{25} el valor de la función χ^2 evaluada en b_0, b_1. De esta tabla podemos sacar que:

$$b_0 = -7{,}06530249545775 \text{ kg} \qquad b_1 = 23{,}5129964032778 \text{ kg/m}$$

En el caso que estudiamos, todas las masas (variable dependiente) tienen la misma incerteza ($u_y = 0{,}001$ kg, entonces, podemos emplear las expresiones (E.15) para calcular el error total:

$$u_{Ab0} = 0{,}059033... \times \sqrt{\left(\frac{0{,}001}{0{,}009143...}\right)^2 + 1} = 0{,}059385...\ \text{kg}$$

$$u_{Ab1} = 0{,}177109... \times \sqrt{\left(\frac{0{,}001}{0{,}009143...}\right)^2 + 1} = 0{,}177109...\ \text{kg/m}$$

Por lo tanto, trabajando a dos cifras significativas, tendremos que:

$$u_{cb_0} = (-7{,}065 \pm 0{,}059)\ \text{kg}, \qquad u_{cb_1} = (23{,}51 \pm 0,18)\ \text{kg/m}$$

Esto significa que la pendiente (b_1) y la ordenada al origen (b_0) se determinaron con una incerteza relativa porcentual de 0,8 %

F.2. Incertezas distintas en todas la medidas

En este caso debemos aplicar el MCMP, pero lamentablemente las planillas de cálculo no traen esta facilidad, por lo tanto deberemos implementar las expresiones (E.5) y (E.6) manualmente, para ello, en una hoja de cálculo cargaremos los datos de la variable independiente(x) en la columna A, por ejemplo de la celda A6 hasta A16, los correspondientes a la variable dependiente (y) en la columna B (`B6:B16`) y las incertezas de la variable dependiente en la columna C (`C6:C16`). De esta manera tenemos los datos a procesar ordenados. Primero calculamos los pesos, que los colocaremos en la columna D, así que nos ubicamos en la celda `D6` y cargamos `1/(C6*C6)` y la copiamos hasta la fila 16.

El calculo de los coeficientes de ajuste de la recta requiere conocer las sumas que se presentan en la tabla:

Tabla F.2: ***Calculo de las sumas requeridas para estimar los parámetros de una recta por MCMP y sus incertezas Tipo A y Tipo B, en una planilla de cálculo, función a utilizar y celda donde se almacena***

$[\omega x]$	`=SUMA.PRODUCTO(D6:D16; A6:A16)`	A20
$[\omega y]$	`=SUMA.PRODUCTO(D6:D16;B6:B16)`	B20
$[\omega x^2]$	`=SUMA.PRODUCTO(D6:D16; A6:A16;A6:A16)`	C20
$[\omega]$	`=SUMA(D6:D16)`	D20
$[\omega xy]$	`=SUMA.PRODUCTO(D6:D16; A6:A16;B6:B16)`	E20
$[\omega y^2]$	`=SUMA.PRODUCTO(D6:D16; B6:B16;B6:B16)`	F20
$[x]$	`=SUMA(B6:B16)`	A21
$[y]$	`=SUMA(B6:B16)`	B21
$[x^2]$	`=SUMA.PRODUCTO(A6:A16; A6:A16)`	A22
$[y^2]$	`=SUMA.PRODUCTO(D6:D16; D6:D16)`	B22
N	`=CONTAR.(D6:D16)`	C23

La ordenada al origen y la pendiente (ecuaciones (E.6) y (E.5)) como así también su incerteza Tipo B (ecuaciones (E.11) y (E.12))se podrán calcular mediante las fórmulas:

$$b_0 = \frac{\texttt{C20*B20-A20*E20}}{\texttt{D20*C20-A20*A20}} \qquad u_{Bb_0} = \texttt{RAIZ(C20/(D20*C20-A20*A20))}$$
$$b_1 = \frac{\texttt{D20*E20-A20*B20}}{\texttt{D20*C20-A20*A20}} \qquad u_{Bb_1} = \texttt{RAIZ(D20/(D20*C20-A20*A20))}$$

Para evaluar las Tipo A de los parámetros calculados, requeriremos datos de la estimación lineal sin pesos; para ello, en la celda `A23` ingresamos la función
`=ESTIMADOR.LINEAL(B6:B16, A6:A16, 1,1)`
con `CONTROL+MAYUSCULA+INTRO`.

Las expresiones (E.7) y (E.8) daran las incertezas Tipo A

$$u_{Ab_0} = \texttt{B25*RAIZ(A22/((C23*A22-A21*A21))}$$
$$u_{Ab_1} = \texttt{RAIZ(C23/(C23*A22-A21*A21))}$$

Si lo que se desea es la obtención de la pendiente y su incerteza de la recta que pasa por el origen por el MCMP; con la misma carga de datos y sumas de la tabla F.2 se puede evaluar b_1 mediante la expresión (E.16). Para la incerteza de Tipo A y Tipo B con (E.17) y (E.18) Se requiere la salida de la función en `A23`:
`=ESTIMADOR.LINEAL(B6:B16, A6:A16, 0,1)`

$$b_1 = \texttt{E20/C20},$$
$$u_{Bb_1} = \texttt{RAIZ(1/C20)},$$
$$u_{Ab_0} = \texttt{B25*RAIZ(1/A22)}.$$

Bibliografía

[GUM-2008] Guide to the Expression of uncertainty in measurement- GUM: 2008.

[Höfer-2004] Höfer T, Przyrembel H, Verleger S. New evidence for the theory of the stork. Paediatr Perinat Epidemiol. 2004 Jan;18(1):88-92. puede leerlo en http://www.astro.umd.edu/~peel/CPSP119D/Stork_article.pdf (axcesado 1 de agosto 2020).