Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Departamento de Ing Mecánica y Naval.

Mecánica de Fluidos

Notas de Clase

Dr Roberto Eduardo Vieytes

1C 2019

Estas notas fueron compuestas con la ayuda de LaTeX TiKZ y KOMA-Script

Una oportunidad que deben tener los seres humanos es la de elegir quien ser, independientemente que esa elección este a favor o en contra de la corriente. Van estas páginas dedicadas a quienes dejan al otro elegir libremente, y por sobre todas las cosas a quienes tienen la valentía de elegir.

A Lucía y Roberto que me dieron la libertad de poder elegir.

Índice general

[1]También se conoce estos flujos como multifásicos

5 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

> Dar ejemplos no es la principal manera de influir sobre los demás. Es la única manera
>
> *(Albert Einstein)*

Contenido

[1] También se conoce estos flujos como multifásicos

En este capítulo aplicaremos las ecuaciones en forma local encontradas en el capítulo a casos elementales para poder conocer el comportamiento de los fluidos. Comenzaremos estudiando casos estacionarios, es decir casos en que la derivada local es nula, para fluidos en régimen laminar y en geometrías sencillas. Comenzaremos por casos puramente mecánicos en los cuales no habrá cambio de temperatura del fluido (fluidos isotérmicos) en los cuales la disipación viscosa será despreciable para luego considerar cambios de la temperatura por efecto de la conducción térmica o la compresibilidad.

Las soluciones las buscaremos tanto con las condiciones de contorno que corresponden para flujos macroscópicos (no deslizamiento, y sin saltos de temperatura) como para microscópicos.

Se deberán resolver simultaneamente la ecuación de la conservación de la masa, (continuidad (4.2)) la de conservación de la cantidad de movimiento (Navier–Stokes (4.6)) y la de la energía (4.21)

5.1. Flujos estacionarios e isotérmicos sin disipación.

En esta sección estudiaremos flujos para los cuales se verifica que la derivada local es nula, es decir, desde su establecimiento pasó el tiempo suficiente como para que el fluido se encuentre en un estado en el cual cualquier variable asociada con él no cambia en el tiempo. Además serán unidimensionales, y laminares, esto quiere decir que la velocidad tiene una componente y varía en una de las direcciones ortogonales, localmente, a ella. También se supondrá que no existen flujos de calor dentro del fluido o desde/hacia las superficies sólidas (esto es equivalente a suponer que no existen gradientes de temperatura en el seno del fluido), Esta hipótesis permite suponer que las propiedades, en particular la viscosidad, son una contante. La no existencia de gradientes de temperatura también está asociada con que en el seno del fluido no se convierte energía cinética macroscópica en energía interna, cosa que está relacionada con la disipación.

Estas soluciones son una de las muchas que tiene el sistema de ecuaciones de Navier Stokes y las mismas se podrán observar, o no, en la vida real dependiendo de la estabilidad de las mismas, entendiéndose por estabilidad la permanencia temporal de la solución encontrada. La estabilidad de las soluciones es un tema crucial de la mecánica de fluidos que no será tratado en estas notas, pero que se puede resumir diciendo que: cada sistema tiene un conjunto de parámetros que mientras que se mantengan en un cierto rango, las soluciones son estables, pero que si se van de él pequeñas perturbaciones, siempre presentes en los flujos reales desatan inestabilidades que llevan al flujo a comportarse de una manera diferente que la encontrada en el papel.

Los problemas que nos ocupan tienen como parámetro representativo de la estabilidad al número de Reynolds $\mathscr{Re}$. Si este es relativamente bajo las soluciones laminares calculadas se encontraran en la realidad, el número límite, depende de las propiedades del fluido, y geometría del flujo pero para fijar ideas podemos decir que hasta un valor típico de $\mathscr{Re} \simeq 10^3$ las soluciones laminares son estables, pasando este valor, el flujo se inestabiliza y, luego de una región de transición, se convierte en turbulento en mayor o menor medida.

Se verá que para este tipo de soluciones, en geometría cartesiana, la derivada convectiva es nula, lo cual establece que el flujo es ordenada, el transporte de masa se hará sólo en la dirección de la velocidad, transversalmente a ella solo habrá transferencia de calor por conducción.

5.1.1. Flujos en geometría plana

Comenzaremos aplicando las ecuaciones de Navier–Stokes a flujos sencillos en geometría plana, la dinámica estará regida por la aplicación de un gradiente de presión externo, una fuerza de volumen o el movimiento de los contornos sólidos. La condición de incompresibilidad impone que la velocidad depende de las coordenadas perpendiculares a su dirección y esto, a su vez, anula varios de los componentes del término convectivo. En geometría plana, estos flujos se caracterizan por tener lineas de corriente planas, no hay curvatura y esto tiene una consecuencia inmediata porque el gradiente de presión que aparece en la dirección perpendicular a la velocidad será hidrostático, o lo que es lo mismo el termino convectivo de la derivada material será nulo, cosa que no se cumple si tenemos lineas de corriente curvas.

(a). Flujos de Couette, de Poiseuille y de Couette–Poiseuille

Comenzaremos estudiando el flujo unidimensional de un fluido newtoniano confinado entre dos placas que se mueve por efecto de arrastre de sus contornos, (flujo de Couette) la imposición de un gradiente de presión o una fuerza de volumen (flujo de Poiseuille) o una combinación de ambos (flujo de Couette–Poiseuille). Comenzaremos a estudiar una geometría sencilla: plana, como la que se presenta en la figura 5.1, en la que la distancia h es macroscópica de manera de poder tomar como válida la condición de no deslizamiento. El caso con deslizamiento lo estudiaremos más adelante en este capítulo.

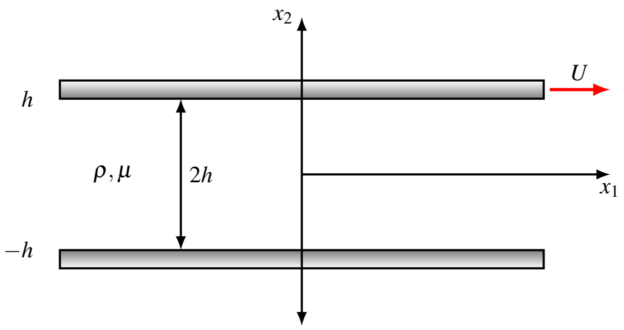

Figura 5.1.: Geometría para estudiar los flujos de Couette, Poiseuille y Couette–Poiseuille.

El hecho que sólo se mueva la placa superior no es restrictivo si el problema es estacionario, en efecto, si la placa inferior también se mueve basta con considerar un sistema de referencia fijo al la placa inferior y entonces la velocidad con que se mueve la superior es la relativa, el campo de velocidades será también relativo a la placa inferior. El fluido, de densidad ρ y viscosidad μ, lo consideraremos isotérmico (a una temperatura T) esto significa que no puede haber flujo de calor desde el fluido a las superficies que lo limitan y por lo tanto la temperatura de estas será la misma que la del fluido y la disipación viscosa la consideraremos despreciable resultando que la ecuación de la energía no se debe resolver. En la dirección x_3, se supondrá que hay simetría de traslación de manera que las soluciones encontradas en el plano $x_3 = 0$ se repiten en todo plano paralelo a él. Si las superficies son infinitas en la dirección del eje x_1 ninguna de las cantidades asociadas con el fluido, a excepción de la presión, podrá depender de ella. El campo de velocidades será:

$$\vec{v} = v_1(x_2)\hat{\imath} + v_2(x_2)\hat{\jmath}$$

Las ecuaciones por resolver serán:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \tag{5.1a}$$

$$\rho v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \rho g_1 \tag{5.1b}$$

$$\rho v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \rho g_2 \tag{5.1c}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0 \tag{5.1d}$$

Notemos que al ser la fuerza de volumen ρg conservativa, entonces se puede definir una presión generalizada:

$$\mathbb{P} = p - g_i x_i,$$

con lo cual se puede eliminar las fuerza de volumen (peso en este caso) de las ecuaciones. En general en la presión generalizada se podrán inculir las fuerzas conservativas, ya que las mismas derivan de un potencial y matematicamente se las puede incluir en el termino gradiente de presión. Para seguir adelante convertiremos el modelo dimensional a uno adimensional. Utilizaremos los siguientes cambios de escala:

$$y = \frac{x_2}{h}, \;\; x = \frac{x_1}{h}, u = \frac{v_1}{u^*}, \;\; v = \frac{v_2}{u^*}, \;\; \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x} = \frac{\Delta \mathbb{P}}{L}. \tag{5.2}$$

La manera de adimensionalizar las variables dependerá del tipo de problema. En particular para los que nos ocupan se presenta una dificultad con la elección de la velocidad u^*; en el caso del flujo de Couette puro, se puede tomar $u^* = U$, pero en el de Poiseuille puro las placas no se mueven, entonces, en este caso se debe formar una velocidad con los parámetros del problema que resulta $u^* = \frac{h^2}{\mu}\left|\frac{\Delta\mathbb{P}}{L}\right|$ (la velocidad media del flujo, y resulta $\mathscr{P}o = \pm 1$, el signo tendrá en cuanta si el gradiente de presión, está en la dirección de la velocidad o se opone a ella). En un caso mixto existirán dos posibilidades de elegir u^*, la que seguiremos en estas notas es la siguiente, si existe gradiente de presión u^* se forma a partir de él, de manera que el flujo de Poiseuille puro se tiene cuando $\mathscr{P}o = \pm 1$, y $\mathscr{U} \neq 1$ en el caso de Couette puro $\mathscr{P}o$ será nulo y $\mathscr{U} = 1$ resultan ser:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{5.3a}$$

$$\mathscr{R}e\, v\frac{\partial u}{\partial y} = -\mathscr{P}o\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{5.3b}$$

$$\mathscr{R}e\, v\frac{\partial v}{\partial y} = -\mathscr{P}o\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{5.3c}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial y^2} = 0, \tag{5.3d}$$

y las condiciones de contorno:

$$u(y=1) = \mathscr{U}, \qquad u(y=-1) = 0 \text{ no deslizamineto,} \tag{5.4a}$$

$$v(y=1) = 0, \qquad v(y=-1) = 0 \text{ el fluido no penetra al sólido,.} \tag{5.4b}$$

En esta formulación aparecen tres números adimensionales: dos en las ecuaciones: $\mathscr{R}e$ y $\mathscr{P}o$ y uno en las condiciones de contorno $\mathscr{U}$. El número adimensional $\mathscr{P}o$ es denominado número de Poiseuille $\frac{h^2\Delta\mathbb{P}}{u^*L\mu}$, este número puede interpretarse de varias maneras, una de ellas es la razón entre los esfuerzos normales (presión) con los viscosos sobre la placa, o la razón entre la velocidad de la placa y la característica que es generada por el gradiente de presión. $\mathscr{R}e$ es el número de Reynolds $\frac{\rho u^* h}{\mu}$. Esta adimensionalización es útil ya que en el caso de un flujo de Poiseuille puro, es decir, con contornos fijos, $\mathscr{P}o$ =1 y $\mathscr{U} = 0$. Mientras que en el flujo de Couette puro, sin gradiente de presión $\mathscr{U} = 1$ y $\mathscr{P}o$ =0. En un flujo combinado tanto $\mathscr{U}$ como $\mathscr{P}o$ serán ambos distintos de cero y su valor dependerá de que cantidades se tomen para formarlos, por ejemplo si se toma como velocidad característica la velocidad de la placa resultará $\mathscr{U} = 1$. Por otra parte, en el caso de que el valor de $\mathscr{R}e \ll 1$ los términos convectivos se hacen depreciable y el perfil de velocidades como así tambien el campo de presiones es independiente de la viscosidad. Comencemos con la resolución. La ecuación (5.3a) nos indica que la componente dos del campo de velocidades es constante, y como sobre las placas debe ser nula, inmediatamente sale que no hay componente dos en este problema. Esta conclusión deriva fundamentalmente de la condición de incompresibilidad impuesta y la imposición sobre que los campos sólo son función de x_2. Distinta sería la conclusión si al menos a la componente dos de la velocidad le hubiéramos permitido que dependa además de x_1, o que el flujo fuese compresible. Notemos también que la ausencia de la componente dos, hace que los elementos de fluido se muevan de manera muy ordenada, sin poder alejarse o acercarse a, por ejemplo el plano inferior, esto se pone de manifiesto en la anulación de los terminos convectivos en las ecuaciones (5.3b) y (5.3c).

Con este dato el sistema a resolver será:

$$-\mathscr{P}o + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.5a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial y} = 0 \tag{5.5b}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial y^2} = 0 \tag{5.5c}$$

$$u(y=1) = \mathscr{U}, \qquad u(y=-1) = 0 \text{ no deslizamineto.} \tag{5.5d}$$

La ecuación (5.5b) establece que la presión generalizada no depende de la coordenada y, si esta información se agrega a la ecuación (5.5c) resulta que de existir un gradiente de presión en la dirección de x éste es constante, o lo que es lo mismo no depende de x, por lo tanto conocida la presión (generalizada) en dos puntos separados una distancia L el gradiente se puede evaluar exactamente como $\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x} = \frac{\Delta \mathbb{P}}{L}$, es decir que el gradiente adimensional toma el valor 1. Es importante notar, en base a como se construyó la presión generalizada, que aun si hubiera una componente de la aceleración de la gravedad, el efecto de esta no generaría un gradiente de presión generalizada, en efecto en esta cantidad se incluyen sólo los gradientes impuestos al sistema por medios mecánicos, debemos entender que las fuerzas de volumen, en el equilibrio, son las causas de la aparición de gradientes de presión, que contrarrestan sus efectos, pero que en condiciones fuera del equilibrio como esta, no es posible apelar a esta idea. Podemos decir, entonces que en este tipo de flujos, si se impone externamente un gradiente de presión, la presión varía a lo largo del eje x, pero esta variación es lineal, y es impuesta por una condición mecánica más que por una termodinámica. Como la única variable dependiente del problema es y, las derivadas parciales se convierten en totales, por lo tanto la ecuación (5.5a) se puede escribir como:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \mathscr{P}o.$$

Recordemos que la derivada segunda de una función esta relacionada con la curvatura local, y que las curvas con curvatura nula son las rectas, por lo tanto si el número de Poiseuille es nulo (no hay aplicado gradientes de presión en la dirección del movimiento, entonces es un flujo de Couette puro) el perfil de velocidades será lineal. Integrando esta ecuación resulta:

$$u(y) = \frac{\mathscr{P}o}{2}\,y^2 + C_{1v}y + C_{2v}. \tag{5.6}$$

Las constantes C_{iv} se obtienen a partir de las condiciones de contorno del problema:

$$u(y=1) = \mathscr{U} = \frac{\mathscr{P}o}{2} + C_{1v} + C_{2v}, \qquad u(y=-1) = 0 = \frac{\mathscr{P}o}{2} - C_{1v} + C_{2v}.$$

Llegamos a un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que se puede resolver por cualquiera de los métodos conocidos. Resolviendo para C_{iv} resulta:

$$C_{1v} = \frac{1}{2}\mathscr{U}, \qquad C_{2v} = \frac{1}{2}(\mathscr{U} - \mathscr{P}o).$$

Con lo cual el perfil de velocidades y la componente relevante del tensor de tensiones (adimensional) vendrá dado por:

$$u(y) = \frac{\mathscr{P}o}{2}\left(y^2 - 1\right) + \frac{\mathscr{U}}{2}(1+y), \tag{5.7}$$

$$s_{xy} = \mathscr{P}oy + C_{1v} = \mathscr{P}o\,y + \frac{\mathscr{U}}{2}. \tag{5.8}$$

A partir de (5.7) se pueden obtener distintas cantidades asociadas con el flujos como el caudal: Q (por unidad de longitud en la dirección del eje x_3), la posición donde se da la velocidad extrema (máxima o mínima): y_e (o el esfuerzo cortante nulo), la posición donde la velocidad es nula y_0 (aparte de la placa inferior), la velocidad extrema u_e, la función disipación φ:

$$\mathscr{Q} = \int_{-1}^{+1} u(y')\,\mathrm{d}y' = \frac{\mathscr{P}o}{3} + 2C_{2v} = -\frac{2}{3}\mathscr{P}o + \mathscr{U}, \tag{5.9}$$

$$y_0 = 1 - \frac{\mathscr{U}}{\mathscr{P}o} \quad \text{si } \frac{\mathscr{P}o}{\mathscr{U}} > 0{,}5, \qquad y_0 = -1 \quad \text{si } \frac{\mathscr{P}o}{\mathscr{U}} \leq 0{,}5, \tag{5.10}$$

$$y_e = -\frac{C_{1v}}{\mathscr{P}o} = -\frac{\mathscr{U}}{2\mathscr{P}o} \quad \text{si } \left|\frac{\mathscr{P}o}{\mathscr{U}}\right| > 0{,}5; \qquad y_e = 1 \quad \text{si } \left|\frac{\mathscr{P}o}{\mathscr{U}}\right| \leq 0{,}5; \tag{5.11}$$

$$u_e = -\frac{\mathscr{U}^2}{8\mathscr{P}o} + \frac{\mathscr{U} - \mathscr{P}o}{2} \quad \text{si } \left|\frac{\mathscr{P}o}{\mathscr{U}}\right| > 0{,}5; \qquad u_e = \mathscr{U} \quad \text{si } \left|\frac{\mathscr{P}o}{\mathscr{U}}\right| \leq 0{,}5; \tag{5.12}$$

$$\varphi = (\mathscr{P}o\,y + C_{1v})^2 = \left(\mathscr{P}o\,y + \frac{\mathscr{U}}{2}\right)^2. \tag{5.13}$$

Notemos que C_{2v} controla escencialmente el caudal, y C_{1v} la disipación y la posición entre las placas donde ocurre el extremo de la velocidad. Más adelante veremos las consecuencias que tiene esto cuando se utilicen otras condiciones de contorno.

(B). Análisis del flujo de Couette-Poiseuille

A continuación marcaremos los detalles y características de de cada tipo de flujo.

Flujo de Couette Como ya mencionamos, el flujo de Couette se da cuando no hay gradientes de presión y esto significa que el número de Poiseuille es nulo, es decir $\mathscr{P}o = 0$. Comencemos por decir que el perfil de velocidades que se establece entre las placas es lineal, y que los esfuerzos cortantes son constantes en todo el volumen.

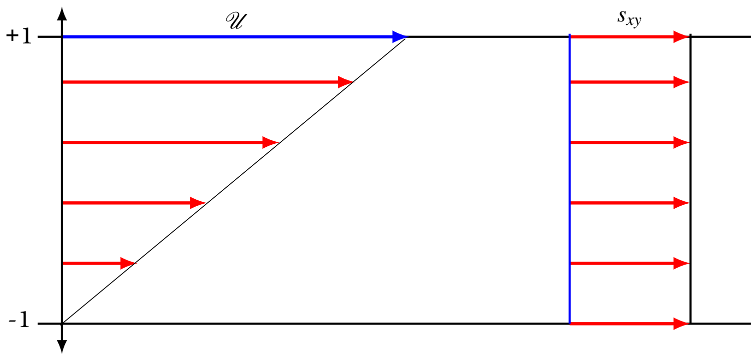

Figura 5.2.: Campo de velocidades y esfuerzos para un de Couette.

Del hecho que el perfil de velocidades es lineal, implica que el máximo de velocidad se da sobre la placa móvil, por lo tanto no habrá zonas con reflujo (zonas donde la velocidad tiene el sentido de $-x$. El esfuerzo que aplica el fluido a cada una de las placas viene dado por $S_{12}n_2 = \pm s_{xy}$ donde el signo positivo corresponde al caso de la placa inferior y el negativo a la placa superior (recordemos que el cambio de signo está asociado con el cambio de sentido de la normal); como s_{xy} no cambia de signo el esfuerzo en cada placa tiene el sentido opuesto, lo que significa que "el fluido frena" a la placa superior y trata de desplazar a la derecha la inferior.

Flujo de Poiseuille El campo de velocidades para el flujo de Poiseuille se obtiene de la ecuación (5.7) fijando el valor de $\mathscr{U} = 0$.

En la figura 5.3 se presenta el perfil de velocidades y el de tensiones en el fluido, para el caso en que $\mathscr{P}o$ <0, es decir la presión generalizada a la izquierda es mayor que la de la derecha. Notemos que en este caso el perfil es curvo, y que presenta un extremo en la mitad del cana ($y = 0$) como loas componentes relevantes del tensor

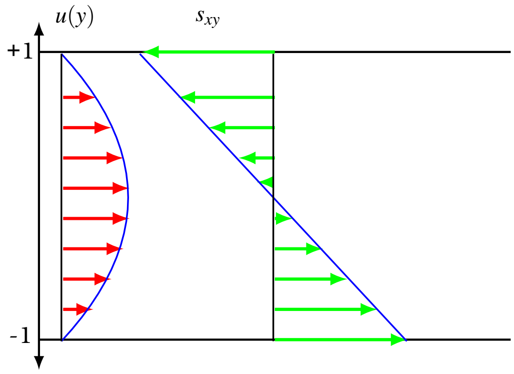

Figura 5.3.: Campo de velocidades y esfuerzos para un de Poiseuile.

de tensiones ($s_{xy} = s_{yx}$) son proporcionales a $\frac{\partial u}{\partial y}$ presentarán un cruce por cero, es decir, en la parte superior del canal existirá un s_{xy} negativo y en la inferior uno negativo, con lo cual en cada una de las placas el esfuerzo que realiza el fluido será en sentido de las x, es decir, tratando de desplazar las placas en la dirección del flujo.

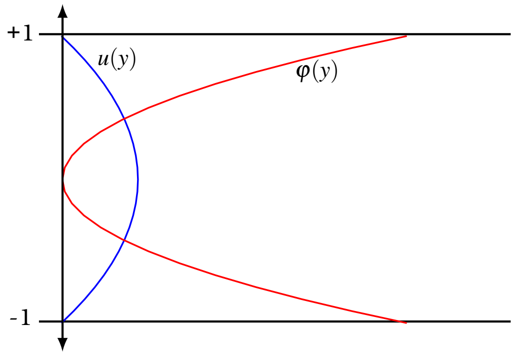

Figura 5.4.: Campo de velocidades y esfuerzos para un de Poiseuile.

En la figura 5.4 podemos ver el perfil de velocidades junto con la función disipación y nos damos cuenta que en las zonas de mayor velocidad la disipación es menor, este resultado no nos tiene que sorprender ya que la disipación está relacionada con los gradientes de velocidad y no con el valor que ella tome, en las zona de mayor velocidad los gradientes son menores, entonces es razonable que la disipación sea menor. La energía disipada podrá aumentar la energía interna del fluido, con lo cual aumentará la temparatura o fluirá hacia el exterior del canal a través de las placas o el interior del fluido. Más adelante haremos modelos para estudiar éste fenómeno.

Flujo de Couette–Poiseuille En este caso tanto $\mathscr{P}o$ como $\mathscr{U}$ son distintos de cero, y en particular como la placa superior se mueve, se puede elegir como escala de velocidades el valor de su velocidad, por lo tanto $\mathscr{U}=1$. El perfil de velocidades vendrá dado por (5.7) que puede factoriarse como:

$$u(y)=[\mathscr{P}o\,(y-1)+1]\,\frac{y+1}{2} \tag{5.14}$$

El lo que sigue supondremos que la velocidad de la placa superior es en la dirección del eje $+x$. El gradiente de presión aplicado se denominara favorable cuando la presión disminuya en el sentido de $+x$, es decir si en x_1 la presión es p_1 y x_2, p_2 entonces $p_2-p_1<0$ Lo cual significa que el el gradiente de presión tiene el mismo efecto sobre el fluido que el movimiento de la placa. Por otra parte si el gradiente de presión es positivo, diremos que es favorable (o adverso). Obviamente si el gradiente de presión es nulo (p_1-p_2), estaremos en el caso ya estudiado del flujo de Couette. El cambio de signo del gradiente de presión conduce a un cambio de signo en el número de Poiseuille y geométricamente se observa en un cambio en la concavidad del perfil de velocidades (notemos que la derivada segunda del mencionado campo es proporcional a $\mathscr{P}o$).

La forma del perfil, se establece como una consecuencia de la competencia entre los efectos del gradiente de presión y el movimiento de la placa. Para valores extremos del parámetro $\mathscr{P}o$ ($|\mathscr{P}o|>1$)) dominará el efecto de la diferencia de la presión por sobre el movimiento y tendremos perfiles de velocidad donde los elementos de fluido se mueven hacia $+x$, en el caso de un gradiente favorable, o $-x$ en el caso de un gradiente desfavorable. Sin embargo, si $|\mathscr{P}o|\sim 1$), el efecto del movimiento de la placa y el gradiente de presiones no tiene un efecto dominante neto, en efecto, si tenemos un gradiente desfavorable, este tenderá a frenar el flujo impuesto por la placa, de manera tal que en las cercanías de ella el elemento de fluido se mueve hacia $+x$, pero lejos, el efecto de la placa se pierde y el elemento de fluido se moverá hacia $-x$; esto quiere decir que tiene que haber un punto intermedio en el que la velocidad es nula.

De la ecuación (5.14) se desprende que la velocidad es nula en $y=-1$ (que es la condición de no deslizamiento sobre la placa inferior) y en la coordenada y_0:

$$y_0=1-\frac{1}{\mathscr{P}o}.$$

Recordemos que esta expresión es válida si $|y_0|\leq 1$. Si $\mathscr{P}o$ es negativo, no hay soluciones con sentido físico, esto es, con un gradiente favorable de presión no habrá inversión de velocidad, lo mismo ocurre para $0\leq\mathscr{P}o\leq 0{,}5$. A medida que aumenta el número $\mathscr{P}o$ desde $0{,}25$, el punto donde la velocidad se anula se desplaza por el eje $+y$, el caudal va disminuyendo hasta que $\mathscr{P}o = \frac{3}{2}$ donde se anula, (esto ocurre cuando $y_0 = \frac{1}{3}$) a partir de este punto el caudal sigue creciendo pero con dirección $-x$.

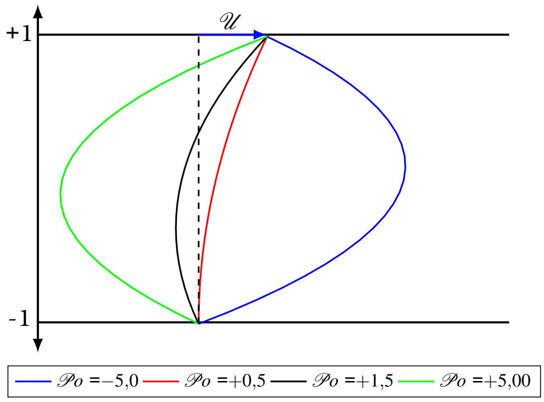

Figura 5.5.: Perfil de velocidad de un flujo de Couette–Poiseuile para distintos valores de $\mathscr{P}o$.

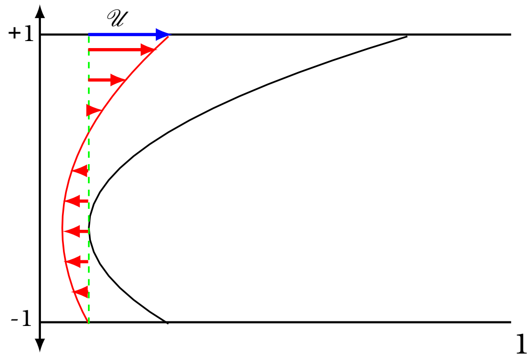

Figura 5.6.: Perfil de velocidad y función de disipación para un flujo de Couette–Poiseuille con $\mathscr{P}o = 1{,}5$.

En la figura 5.5 se presentan perfiles de velocidad para $\mathscr{P}o = 5; 1{,}5; 0{,}5; -5$. En la figura 5.6 se puede observar, nuevamente, que la disipación es “baja” en la zona donde la velocidad es máxima. Y, para este caso, en la zona superior se tiene la mayor disipación. 5.1a

5.1.2. Flujos en geometría cilíndrica

En esta sección se estudiaran flujos sencillos en geometría cilíndrica. Existen dos tipos de flujos que tienen importancia industrial y que son manejables mantemáticamente a nivel de este curso. El primero es el movimiento transversal de un fluido entre dos cilíndros coaxiales que rotan relativamente, el segundo es el de un fluido con movimeinto dentro de una tubería de sección circular, este flujo tiene que ser impulsado por la aplicación de un gradiente de presión. El primero de los flujos citados es el denominado flujo de Couette cilíndrico, o de Couette–Taylor y al segundo se lo denomina flujo de Hagen-Poiseuille. El flujo de Couette–Taylor tiene gran importancia tecnológica pues muchos de los viscosímetros que se utilizan en la industria poseen este flujo. Por otra parte la facilidad del equipo para su generación permite estudiar la inestabilidad de flujos, sistemas no lineales, caóticos y transición a la turbulencia con facilidad, de ahí que tembien tiene importancia académica.

(A). Flujo de Couette–Taylor

Este flujo es similar al flujo de Couette plano estudiado anteriormente, pero tiene una particularidad que lo hace interesante de estudiar, en efecto, el flujo de Couette plano es incondicionalmente estable para el caso en que el número de Reynolds sea pequeño, es decir, se obtiene una solución estacionaria; el de Couette–Taylor puede llegar a inestabilizarse, sin llegar a ser turbulento, aún para número de Reynolds bajos, dando lugar a flujos estacionarios pero de complejidad mayor al “laminar” El fluido, de densidad ρ y viscosidad cinemática ν, se encuentra en el espacio anular entre dos cilindros, el interno de radio R_1 que gira a velocidad angular ω_1 y el externo, de radio R_2 que gira a velocidad angular ω_2. Si bien en flujos sencillos el parámetro que marca el cambio de régimen es el número de reynolds, en este caso el parámetro adimensional que describe este sistema es el denominado número de Taylor definido como[2]

$$\mathscr{T}a = \frac{2\omega_1^2 R_2^2 (R_2 - R_1)^4}{\nu (R_2^2 - R_2^2)} \left(\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \right)$$

Que con un poco de álgebra se reescribe como:

$$\mathscr{T}a = \mathscr{R}e_1^2 \frac{d}{\bar{R}} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \right)$$

Donde $\bar{R}$ es el promedio aritmético de los radios de los cilindros, d es el tamaño del huelgo y $\mathscr{R}e_1 = \frac{\omega_1 R_1 d}{\nu}$ es el número de Reynolds evaluado con los parámetros dinámicos del cilindro interno. La primer transición ocurre para un número de Taylor de 1708, es decir que el flujo sencillo de couette se rompe en una serie de vórtices toroidales generados de a pares que rotan en sentido opuesto, estos vórtices se aprecian como en la fotografía de la izquierda en la figura 5.9 , sobre estos vórtices aparecen ondas cada vez más complejas que terminan desatando el flujo turbulento. Cuando el número de Taylor es grande, el sistema no puede caracterizarse por un solo parámetro y su estado queda especificado por el número de Reynolds calculado con los parámetros del cilindro interno $\mathscr{R}e_1$ y el calculado con los parámetros del externo $\mathscr{R}e_2$.

Si el número de Taylor verifica que $\mathscr{T}a < 1700$, es decir la parte inferior del plano $\mathscr{R}e_1, \mathscr{R}e_2$ mostrado en la figura 5.7 se tiene el flujo de Couette cilíndrico. A medida que el número de Taylor crece el flujo se inestabiliza pasando a un flujo con simetría axisimétrica toroidal, estos toroides, llamados vórtices de Taylor, se espacian en la

[2] Si bien en la literatura existen varias definiciones para este número, la presentada aquí es la más general. Si el cilindro externo está fijo, $\omega_2 = 0$ la expresión que queda es la que figura en los libros de texto de mecánica de fluidos.

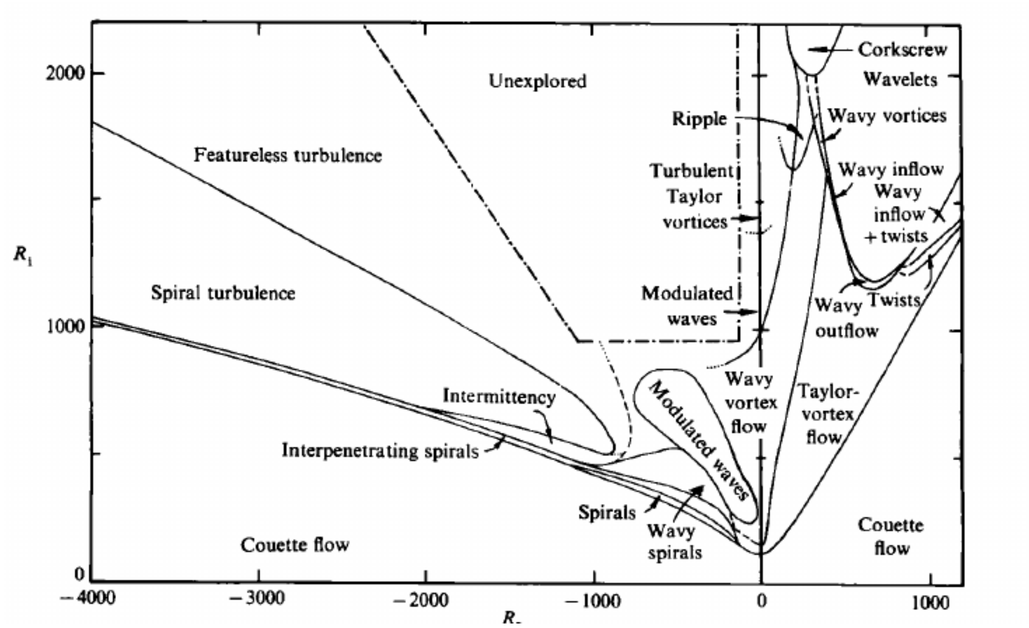

Figura 5.7.: Plano $\mathscr{Re}_1$ R_i,$\mathscr{Re}_2$, R_o donde se presentan los distintos tipos de flujo que aparecen el el flujo de Couette–Taylor. El número $\mathscr{Re}_2 < 0$ significa que los cilindros están rotando en sentido opuesto. Figura tomada de **Andereck1986**

dirección axial con una longitud de onda que viene dada por $\lambda = \pi d/1{,}56$, en estos toroides, los elementos de fluido se mueven en su superficie rotando y avanzando en la dirección transversal. El sentido de giro de los elementos de fluido, es opuesto en cada vórtice de Taylor contiguo. Si el número de Taylor aumenta aún más, los vórtices pierden la simetría axial ver figura 5.8 hasta terminar por desordenarse totalmente la estructura desatándose un flujo turbulento. En la figura se muestran distintas estructuras de flujos para distintas velocidades de rotación relativa de los cilindros, el numero de Taylor crece de izquierda a derecha: Supongamos que el espacio interior, no necesariamente pequeño, entre los cilindros cilindros coaxiales, se encuentra ocupado por un fluido Newtoniano, incompresible, de densidad ρ y viscosidad μ. Buscaremos soluciones en régimen laminar,es decir que el numero $\mathscr{T}a < \mathscr{T}a_c$[3] y trabajaremos en coordenadas cilíndricas[4] entonces tendremos:

$$\vec{v} = v_2(x_1, x_3)e_2.$$

Suponiendo que los cilindros son infinitos en la dirección axial (x_3) la solución no puede depender de esta coordenada, entonces se tendrá que, por otra parte supondremos que tampoco puede depender de x_2 debido a la simetría que tiene el problema tendremos y tampoco puede haber gradientes de presión en esa direc-

[3] En la literatura a este flujo se lo denomina flujo de Couette cilíndrico.
[4] En este caso $x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = z$

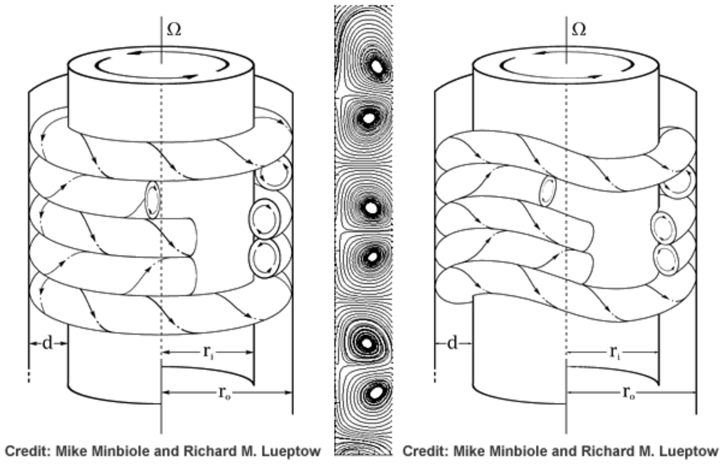

Figura 5.8.: Estructura del flujo para $\mathscr{T}a > 1708$. En el centro de la figura se observan las lineas de corriente de este flujo.

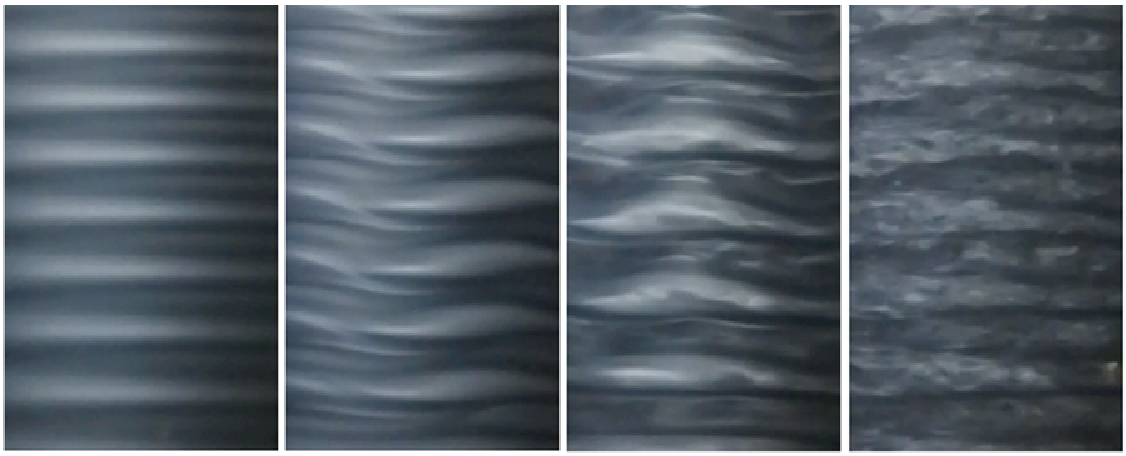

Figura 5.9.: Distintas estructuras que se forman en el flujo de Couette–Taylor. El número de Taylor (ver texto) crece de izquierda a derecha. Figura tomada de https://www.compadre.org/advlabs/wiki/Taylor-Couette_Flow

ción, entonces, las ecuaciones a resolver, descriptas desde un sistema inercial de referencia son son:

$$\theta : \qquad 0 = \mu \left[\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) - \frac{v_2}{x_1^2} \right] \tag{5.15}$$

$$r : \ -\rho \frac{v_2^2}{x_1} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} \tag{5.16}$$

Las condiciones de contorno aplicables serán

$$v_2(x_1 = R_1) = \omega_1 R_1 \qquad v_2(x_1 = R_2) = \omega_2 R_2.$$

Es conveniente notar que $R_2 = d + R_1$ con d el tamaño del huelgo. Si dividimos por R_1

llegamos a que hay dos parámetros geométricos en este problema (aparte de otro que incluye la altura de los cilindros pero que la consideramos infinita)

$$\kappa = \frac{R_2}{R_1} \qquad \varepsilon = \frac{d}{R_1},$$

escalamos las longitudes con el radio del cilindro interno y llamamos ε al huelgo adimencionalizado tendremos que:$\kappa = 1+\varepsilon$. Se dirá que el huelgo es estrecho cuando $\varepsilon \ll 1$ y esta es la condición geométrica de muchos viscosímetros. Con el siguiente escalado:

$$x_1 = rd \qquad v_2 = v\omega_1 R \qquad P = p\rho\omega_1^2 R^2,$$

las ecuaciones y condiciones de contorno se transforman en:

$$\theta: \qquad 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2}, \tag{5.17}$$

$$r: \ -\frac{v^2}{r} = -\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial r}, \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} v(r=1) &= 1, \\ v(r=\kappa) &= \Omega\kappa, \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$p(r=1) = p_1. \tag{5.20}$$

Una forma alternativa de la ecuación (5.17) es la siguiente:

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right)$$

Esta ecuación tiene un contenido físico que resulta evidente al estudiarla en detalle, en efecto la cantidad $r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)$ es la componente θ del esfuerzo viscoso que se ejerce sobre una superficie de normal $\hat{r}$ Al multiplicar esta cantidad por r nos da el momento respecto al eje de rotación de los cilindros al multiplicar nuevamente por r y salvo por un factor 2π la cantidad $r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)$ resulta ser el momento por unidad de longitud en la dirección del eje de los cilindros y la ecuación indica que no depende de r. Como la única variable independiente es r, las derivadas parciales se pueden cambiar por totales las ecuaciones se transforman en

$$r^2\frac{d^2v}{dr^2} + r\frac{dv}{dr} - v = 0,$$

$$\frac{d\mathscr{P}}{dr} - \frac{v^2}{r} = 0.$$

La primera ecuación indica que el campo de velocidades viene dado por:

$$v(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 r.$$

Aplicando las condiciones de contorno surge que:

$$C_1 = \frac{\kappa^2(\Omega - 1)}{1-\kappa^2} \qquad C_2 = \frac{1-\Omega\kappa^2}{1-\kappa^2}.$$

El campo de velocidad será:

$$v(r) = \frac{\kappa^2(\Omega-1)}{1-\kappa^2}\frac{1}{r} + \frac{1-\Omega\kappa^2}{1-\kappa^2} r, \tag{5.21}$$

y para la presión tendremos que:

$$\begin{aligned} p(r) &= p_1 + \frac{C_2^2}{2}\left[\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2\left(1-\frac{1}{r^2}\right) + \left(r^2-1\right) + 4\frac{C_1}{C_2}\ln r\right] \\ &= p_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\Omega\kappa^2}{1-\kappa^2}\right)^2\left[\left(\frac{\kappa^2(\Omega-1)}{1-\Omega\kappa^2}\right)^2\left(1-\frac{1}{r^2}\right) + \left(r^2-1\right) + 4\frac{\kappa^2(\Omega-1)}{1-\Omega\kappa^2}\ln r\right] \end{aligned} \tag{5.22}$$

Donde p_1 es la presión adimensional que hay en la cara en contacto con el fluido del cilindro interno.

Análisis del flujo de Couette–Taylor En los campos encontrados, fijar el valor de κ es fijar la geometría y el de Ω es fijar la cinemática. Si los cilindros giran en distinto sentido Ω será negativo, cero si el cilindro externo no gira, y positivo se los cilindros giran en el mismo sentido, un caso particular cuando los cilindros giran en el mismo sentido y con la misma velocidad angular corresponde a $\Omega = +1$, este movimiento es el que corresponde al fluido moviéndose como un cuerpo rígido, en efecto si $\Omega = +1$, el campo de velocidades adimensional será

$$v(r) = r,$$

.y el campo de presiones

$$p(r) = p_1 + \frac{1}{2}\left(r^2-1\right).$$

El campo adimensional de velocidades es el de un sólido rígido, y el de presiones coincide con lo encontrada en el capítulo de equilibrio relativo.

El campo de velocidades obtenido en la (5.21) y la presión de (5.22) se presentan en las figuras 5.21 y 5.22. en este caso se tomó $\kappa = 2$, es decir el cilindro externo tiene un radio el doble que el interno.

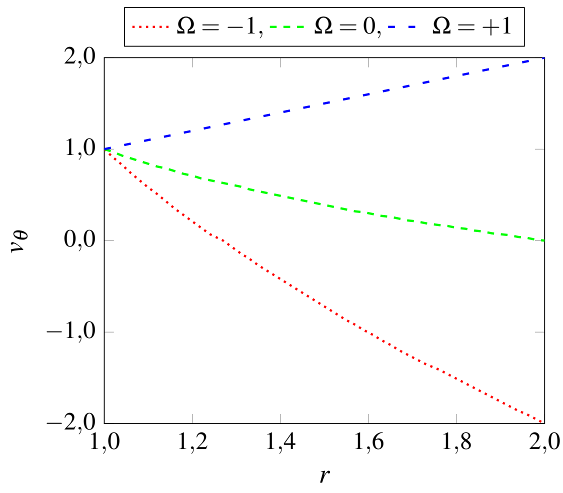

Figura 5.10.: Campo de velocidades para $\kappa = 2$ y distintos valores del parámetro Ω.

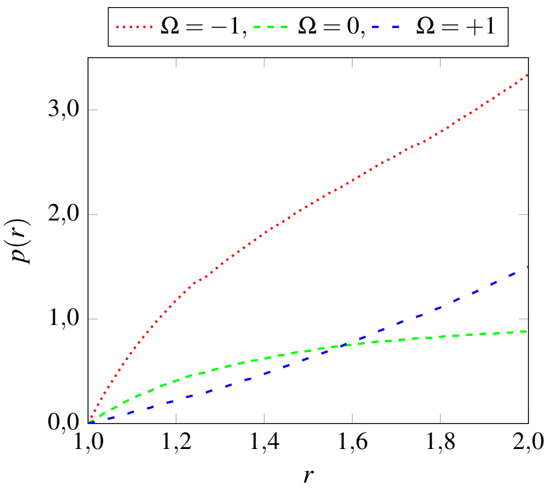

Figura 5.11.: Campo de presiones para $\kappa = 2$ y distintos valores del parámetro Ω.

El campo de velocidades se puede pensar como la superposición de dos, uno es la rotación rígida del fluido, con una velocidad angular, constante, dada por

$$\Omega_R = \frac{1-\Omega\kappa^2}{1-\kappa^2},$$

y otra una rotación no rígida, con una velocidad angular variable en el espacio dada por

$$\Omega_{NR}(r) = \frac{\kappa^2(\Omega-1)}{1-\kappa^2}\frac{1}{r^2}.$$

De manera que el campo de velocidades se puede escribir como:

$$v(r) = (\Omega_R + \Omega_{NR}(r))\, r \tag{5.23}$$

Desde el punto de vista matemático la velocidad correspondiente al movimiento como sólido rígido es rotacional (su rotor es $2C_2$) y la correspondiente al la velocidad variable es irrotacional (su rotor es nulo). Conocido el campo de velocidades es interesante, para entender la dinámica, calcular los esfuerzos que actúan sobre los cilindros dados por $S_{r\theta}$ del tensor de tensiones (4A.I.3d). Si los esfuerzos los adimensionalizamos con $\mu\omega_1/R_1$ tendremos

$$S_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)$$

Como v_r es nulo y v_θ viene dado por (5.23), resulta que

$$S_{r\theta} = r\frac{\partial\Omega_{NR}(r)}{\partial r} = -2\frac{\kappa^2(\Omega-1)}{1-\kappa^2}\frac{1}{r^2},$$

es decir, que sólo la componente de rotación no rígida genera esfuerzo. Calculemos ahora el momento que ejerce el fluido sobre los cilindros (por unidad de altura de estos); el momento que aparece sobre el cilindro interior $\mathscr{M}_1$ $(r = 1)$ por unidad de longitud será:

$$\mathscr{M}_1 = 2\pi\, r^2 S_{r\theta}\big|_{r=1} = -4\pi \frac{\kappa^2(\Omega - 1)}{1-\kappa^2},$$

y el que aparece sobre el cilindro exterior $\mathscr{M}_2$ $(r = \kappa)$

$$\mathscr{M}_2 = 2\pi\, r^2 S_{r\theta}\big|_{r=\kappa} = 4\pi \frac{\kappa^2(\Omega - 1)}{1-\kappa^2}.$$

En estado estacionario, entonces, la suma de los esfuerzos que actúan sobre el fluido es nula. Si se tiene que un sistema no recibe energía (momento) externo y se parte desde un estado donde $\Omega \neq 1$ (los cilindros giran a velocidad angular distinta), el efecto de estos momentos sobre ellos hará que el lento se acelere y el rápido se frene, con lo cual se llegará al estado en que los dos se mueven a la misma velocidad angular y el fluido que hay en su interior rorará como un sólido rígido. Otro punto interesante para destacar de este movimiento es que los elementos de fluido no tienen esfuerzos viscosos netos, en efecto, la suma de los esfuerzos viscosos que actúan sobre un elemento de fluido que se encuentra en la posición r vendrán dados por el termino viscoso de la ecuación de Navier Stokes y por la forma funcional de la misma (5.15) este será nulo. Por otra parte si estudiamos la función disipación, que para el campo de velocidades considerado se escribe como (ver ecuación (4A.I.7)):

$$\Phi = 2\mu \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right],$$

vemos que para el caso del la componente de rotación como sólido rígido no genera disipación. Resumiendo todo lo visto encontramos que si un sistema compuesto por dos cilindros con su interior ocupado por un fluido newtoniano isotérmico, y sobre el cual no actúan momentos externos, en estado estacionario, ambos cilindros rotaran a la misma velocidad angular y el fluido lo hará como un sólido rígido sin disipar energía.

Si uno de los cilindros, el exterior por ejemplo, está fijo, entonces para mantener la velocidad angular de rotación del interno constante, habrá que aplicarle un momento exterior, y habrá disipación de energía (conversión de energía cinética en energía interna de manera irreversible). Estas observación es importante pues los viscosímetros de cilindro se modelan escencialmente así, y por lo tanto si a alta velocidad de deformación se observa una disminución de la viscosidad, bien podría ser debido a la reología del fluido (pseudoplastico) o bien al aumento de su temperatura.

(B). Flujo de Poiseuille

Estudiaremos ahora el caso de un fluido viscosos que se mueve dentro de una tubería de sección circular por efecto de: un gradiente de presión aplicado, o una fuerza de volumen que actúa a lo largo de su eje. A fines de la tercer década del siglo XIX Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen y Jean Léonard Marie Poiseuille estudiaron experimentalmente la dependencia del caudal volumétrico (Q_v) de un liquido viscosos movido por un gradiente de presión (P/L) por una tubería de sección circular de radio D, llegando a una ecuación empírica que establecía:

$$Q_V = \frac{K'' P D^4}{L}.$$

Donde K'' se denomina constante de Poiseuille y es función del tipo de fluido que se desplace por la tubería y la temperatura, si bien la viscosidad de los fluidos ya era conocida (desde 1823) Poiseuile no la menciona en sus trabajos. Poiseuille se dio cuenta que la ley era valida para longitudes de la tubería mayores que un cierto valor, esto en la actualidad se conoce con el nombre de efectos de borde y es por ello que en mucha de la literatura a el flujo se lo denomina solo de Poiseuille. LA demostración teórica que la ley de Hagen–Poiseuille aparece en 1860 y se debe a Eduard Hagenbach. Una interesante historia de los experimentos que llevaron a entender el flujo de Poiseuille se pueden encontrar en **Sutera1993** (**Sutera1993**). En lo siguiente, desarrollaremos el tema a partir de las ecuaciones de Navier–Stokes. El flujo que se desarrolla en el supuesto de estar en régimen laminar se denomina axial; Si utilizamos un sistema cilíndrico de coordenadas de manera tal que el eje z sea colineal con el eje de la tubería el régimen laminar establece que el campo de velocidades tiene una sola componente que depende sólo de la coordenada radial, entonces:

$$\vec{v} = v_3(x_1) e_3.$$

Si suponemos un flujo isotérmico e incompresible, la ecuación de continuidad (4A.I.1) y la componente 3 del campo de velocidades (4A.I.5c) se transforma en:

$$0 = -\rho \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial x_1 v_1}{\partial x_1} + \frac{1}{x_1} \frac{v_2}{x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \tag{5.24}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{v_2}{x_1} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \Delta v_3 + f_{v3} \tag{5.25}$$

Si aplicamos el hecho de que las soluciones que buscamos son incompresibles y laminares, las ecuaciones por resolver son

$$0 = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \qquad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + f_{v3}$$

La primera de las ecuaciones indica que la componente 3 del campo de velocidades no puede depender de la coordenada axial (x_3). Si las fuerzas de volumen que están actuando sobre el fluido, se suponen conservativas, se las podrá agrupar con la presión en un solo término, ya que derivan de un potencial, el el caso de la fuerza de la gravedad definimos la presión generalizada como

$$\mathbb{P} = p - g_3 x_3$$

resultando que la ecuación por resolver es:

$$0 = -\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x_3} + \mu \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)$$

Si a esta ecuación la derivamos respecto de x_3 vemos inmediatamente que la componente 3 del gradiente de la presión generalizada debe ser constante, ya que de la ecuación de continuidad sale que $\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$; resultando que la única variable independiente del problema es x_1, con lo cual las derivadas parciales se pueden cambiar por totales. Antes de encontrar la solución adimensionalizaremos la ecuación con el siguiente escalado:

$$x_1 = rR, \qquad v_3 = U^* v, \qquad Q = \frac{U^* R^2}{\pi} \mathcal{Q}.$$

En este caso U^* es una velocidad característica del flujo, su velocidad media por ejemplo; a diferencia del problema ya estudiado del flujo de Couette, en este no hay una velocidad característica que imponga el movimiento de los contornos por lo tanto tomamos como velocidad característica

$$U^* = \frac{R^2 \Delta \mathbb{P}}{\mu L},$$

Con ΔP la caída de presión generalizada, una cantidad positiva, de tal manera que

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x_3} = \frac{\Delta \mathbb{P}}{L}.$$

Con esta elección para U^* resulta que el número de Poiseuille para este tipo de problemas, como ya habíamos discutido es 1. La ecuación por resolver resulta entonces:

$$1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right).$$

cuya solución es:

$$v(r) = \frac{r^2}{4} + C_1 \ln(r) + C_2$$

las constantes C_1 y C_2, se obtendrán de las condiciones de contorno que se impongan. Como primer caso impondremos que se cumple la condición de no deslizamiento entre el fluido y el sólido, por lo tanto $v(1) = 0$, sin embargo reuqrimos otra condición más LO primero que vemos en la solución encontrada es que tiene un sumando logaritmico, el cual diverge si $r \to 0$ y la solución física no tiene este comportamiento por lo tanto se pide que la solución sea acotada para $r \to 0$, alternativamente se suele invocar el principio de simetría el cual establece que la velocidad del fluido es máxima en $r = 0$, o lo que es lo mismo $\frac{dv}{dr}\big|_{r=0} = 0$ obviamente, ambas condiciones llevan al mismo resultado $C_1 = 0$. El campo de velocidades vendrá dado, entonces, por:

$$v(r) = \frac{1}{4}\left(1 - r^2\right). \tag{5.26}$$

Análisis del flujo de Poiseuille El caudal volumétrico Q que circula por la tubería vendrá dado por:

$$\mathcal{Q} = \int_0^1 v(r) 2\pi r \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}.$$

Con lo cual la velocidad media adimensional es $v_m = \frac{1}{8}$. Llevando a variables dimensionales resulta que:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta \mathbb{P}}{L}.$$

Que es la ley encontrada por Poiseuille en 1840 con $K'' = \frac{\pi}{2^4 8\mu}$. Otro parámetro importante de calcular es el esfuerzo cortante que ejerce el fluido sobre la pared sólida: $\tau_w \equiv - S_{zr}\big|_{r=1}$ con $\frac{\mu U^*}{R}$ como escala para los esfuerzos, resulta

$$\tau_w = \frac{1}{2}.$$

En el cálculo de tuberías un parámetro importante es la determinación de la pérdida de energía que experimenta un fluido al moverse por una tubería recta. Un simple análisis basado en el teorema de transporte de reynolds, permite evaluar las pérdidas mensionadas mediante la expresión:

$$h_p = \frac{\Delta \mathbb{P}}{\rho g}$$

Donde h_p es la denominada altura de pérdidas y se modela por:

$$h_p = f \frac{L}{D} \frac{v_m^2}{2g}.$$

El factor f se denomina factor de fricción de Darcy y para el caso de flujo laminar puede ser evaluado exactamente, en efecto

$$f\frac{L}{2R}\frac{v_m^2}{2}=\frac{\Delta\mathbb{P}}{\rho}.$$

Resolviendo para f tenemos

$$f=\frac{\Delta\mathbb{P}}{\rho}\frac{4R}{Lv_m^2},$$

reacomodando esta expresión

$$f=\frac{\Delta\mathbb{P}R^2}{L\mu}\frac{\mu}{\rho v_m 2R}\frac{8}{v_m},$$

y recordando que $v_m=U^*/8$, y la expresión para U^* resulta que

$$f=\frac{64}{\mathscr{R}e_D}.$$

Para el factor de fricción existen otras expresiones, que difieren esencialmente en el factor numérico y esto se debe a que para armar el número de Reynolds se usan otras velocidades en lugar de la velocidad media.

5.1.3. Flujo helicoidal en la región anular entre dos cilindros concéntricos

Estudiaremos ahora el flujo de un fluido newtoniano que se genera en la región anular entre dos cilindros concéntricos, el interior de radio R_1 y el exterior de radio R_2 cuando el exterior está fijo y el interior tiene un doble movimiento: por un lado rota a velocidad angular contante ω y se traslada en la dirección de su eje a una velocidad constante V_3. Los efectos de la aceleración de la gravedad los supondremos en la dirección del eje de los cilindros, para mantener la simetría del problema, es decir que la variable independiente sea solo la radial. este tipo de flujo se tiene las bombas tipo tornillo para la extrusión de polímeros o plásticos fundidos.

Considerando un sistema de referencia fijo al cilindro externo y empleando un sistema de coordenadas cilíndricas, el campo de velocidades se podrá escribir como:

$$\vec{v}(x_1)=v_2(x_1)\hat{e}_2+v_3(x_1)\hat{e}_3$$

Esto significa que el movimiento del fluido se puede pensar como una superposición de dos. La veracidad de esta suposición está fuertemente emparentada con el carácter lineal de las ecuaciones que resultan en el caso en que el flujo sea laminar, dejando de ser válida cuando el flujo es turbulento. En el eje x_3 actúa la aceleración de la gravedad, por lo tanto definimos la presión generalizada de manera que:

$$\mathbb{P} = p - g_z$$

El gradiente de esta presión tendrá dos componentes, una en la dirección axial, que genera una fuerza de volumen que impulsa al fluido (que la provee la aceleración de la gravedad o un gradiente externo) y una componente transversal que aporta la aceleración centrípeta necesaria para que los elementos de fluido roten. Debido a la forma funcional que se estableció para el campo de velocidades (solo depende de la coordenada radial x_1), ni la presión generalizada ni la presión depende de la coordenada axial (x_3), por lo tanto

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x_3} = \frac{\Delta \mathbb{P}}{L}$$

Las ecuaciones que determinan el campo de velocidades son la (4A.I.5c) y (4A.I.5b) Haremos el escalado habitual:

$$r = x_1 R_1, \qquad v_2 = v_\theta \omega R, \qquad v_3 = v_z V_3, \qquad p$$

Las ecuaciones adimensionales resultantes son:

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\mathscr{P}o\lambda}{\mathscr{R}e_\omega}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{5.27}$$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2} \tag{5.28}$$

$$0 = -\mathscr{P}o + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{5.29}$$

en la ecuación (5.27) aparece un numero adimensional que puede prensarse como el producto de tres: el numero de Poiseuill ($\mathscr{P}o$) el numero de reynolds calculado con la velocidad transversal del cilindro interno ($\mathscr{R}e = \frac{\rho\omega R^2}{\mu}$ y el cociente λ entre la velocidad de traslación del mismo cilindro y su velocidad transversal.

La ecuación (5.28) tiene como solución

$$V_\theta(r) = \frac{C_{1\theta}}{r} + C_{2\theta} r$$

mientras que la (5.29)

$$v_z(r) = -\frac{\mathscr{P}o}{4} r^2 + C_{1z}\ln r + C_{2z}$$

Las cuatro constantes se deben obtener de las condiciones de contorno. Supondremos que el fluido en contacto con las superficies sólidas cumple la condición de no deslizamiento, entonces.

$$v_\theta(r=1)=1; v_\theta(r=\kappa)=0$$
$$v_z(r=1)=1; v_z(r=\kappa)=0$$

Con lo cual resulta:

$$C_{1\theta}=\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}; \qquad C_{2\theta}=-\frac{1}{1-\kappa^2}$$
$$C_{1z}=\frac{\mathscr{P}o}{4}+1; \qquad C_{2z}=-\frac{\frac{\mathscr{P}o}{4}\left(1-\kappa^2\right)+1}{\ln\kappa}$$

Con lo cual la componentes del campo de velocidades vienen dadas por:

$$v_\theta(r)=\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}\frac{1}{r}-\frac{r}{1-\kappa^2},$$
$$v_z(r)=-\frac{\mathscr{P}o}{4}\left[1-r^2+\frac{(1-\kappa^2)\ln r}{\ln\kappa}\right]+\frac{\ln r}{\ln\kappa}.$$

(A). Análisis del flujo helicoidal

5.2. Flujos con Interfases[5]

En estos flujos hay una superficie, no necesariamente plana, que por un lado, está en contacto con una superficie sólida o un fluido inmiscible con él y por otro con otro fluido. Este otro fluido, generalmente se lo denomina pasivo, (cuando las fuerzas viscosas son despreciables en esa interfase), y que generalmente es un gas. Este tipo de flujos son de gran interés tanto teórico como industrial, por ejemplo el proceso de ebullición del agua en una caldera, genera un flujo con interfases, el flujo de nafta y aire en el multiple de admisión de una motor de combustion interna, el movimiento del petroleo en un yacimiento maduro son algunos ejemplos. Si los fluidos son miscibles, el sistema global no se encontrará en equilibrio termodinámico, y en general habrá flujo de masa a travez de las interfases, la forma de las mismas dependerá fuertemente del estado dinámico y parámetros propios del sistema como lo es la tensión interfasial.

Otro tipo de flujos con interfases que tienen importancia son aquellos en los que aparte de dos fluidos, existe una fase sólida con contacto con ambos. En este caso aparece una línea, denominada de contacto, que en la actualidad no está bien descripta su dinámica y que tiene fundamental importancia en problemas de escurriemiento o disperción de fluidos sobre superficies sólidas. En particular, si bien

[5] También se conoce estos flujos como multifásicos

para el fluido que está lejos de la línea de contacto se puede tomar como válida la condición de no deslizamiento, en las proximidades de esta, el fluido debe deslizar sobre el sólido. La complejidad de estos problemas exceden ampliamente los contenidos de estas notas y por ende serán dejados de lado. Sin embargo algunos casos particulares pueden ser atacados con los conocimientos adquiridos, en particular cuando las fases de fluidos son continuas, en el sentido que no tienen burbujas de la otra fase en su interior, y las superficies sólidas están completamente mojadas.

Comenzaremos estudiando la condición de contorno fluido– fluido:

$$[\sigma_{ij}]\, n_j^{\mathrm{I}} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial x_i} + \Upsilon \kappa n_i^I = 0, \tag{4.30}$$

Notemos que los saltos de los esfuerzos (tangenciales o normales, están asociados con: los gradientes del coeficiente de tensión superficial y la curvatura de la superficie. El coeficiente de tensión superficial en general es función de la temperatura (T) y, eventualmente, de la concentración (c) de algún químico disuelto, A primer orden en estas variables termodinámicas se podrá escribir:

$$\Upsilon(T,c) = \Upsilon_0 + \Gamma_T(T - T_0) + \Gamma_c(T - T_0)$$

y su gradiente será:

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial x_i} = \Gamma_T \frac{\partial T}{\partial x_i} + \Gamma_0 \frac{\partial c}{\partial x_i} \tag{5.30}$$

si escalamos las variables del problema como

$$x_i = h\hat{x}_i \qquad ,\sigma_{ij} = \frac{\mu}{h^2 u^*}\hat{\sigma}_{ij}, \qquad T = \frac{T - T_0}{T_0}\hat{T}, \qquad c = \frac{c - c_0}{c_0}\hat{c}, \qquad \Upsilon = \Upsilon_0 \hat{\Upsilon}$$

la ecuación (5.31) con la aproximación a primer orden para Υ se escribirá de manera adimensional:

$$[\hat{\sigma}_{ij}]\, n_j^{\mathrm{I}} + \frac{h\Gamma_T T_0}{\mu u^*}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}_i} + \frac{h\Gamma_c c_0}{\mu u^*}\frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\Upsilon_0 h}{\mu u^* \lambda}\hat{\Upsilon}\hat{\kappa} n_i^I = 0. \tag{5.31}$$

En esta ecuación se pueden distinguir cuatro números adimensionales:

Número de Marangoni térmico: $\mathscr{M}a_T = \dfrac{h\Gamma_T T_0}{\mu u^*}$

Número de Marangoni concentración: $\mathscr{M}a_c = \dfrac{h\Gamma_c c_0}{\mu u^*}$

Número capilar: $\mathscr{C}a = \dfrac{\Upsilon_0}{\mu u^*}$

Número de Derjaguin: $\mathscr{D}e = \dfrac{h}{\lambda} = h\sqrt{\dfrac{\rho g}{\Upsilon_0}}$

La condición de contorno se escribirá entonces:

$$[\hat{\sigma}_{ij}]\,n_j^{\mathrm{I}} + \mathscr{M}a_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}_i} + \mathscr{M}_c \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\mathscr{D}e}{\mathscr{C}a}\hat{\Upsilon}\hat{\kappa} n_i^I = 0. \tag{5.32}$$

Por lo tanto en los sistemas que están en equilibrio termodinámico ($\frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}_i} = 0$) e isotérmicos ($\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}_i} = 0$) estos términos no intervienen sólo tendremos los efectos de la tensión superficial, vía la curvatura de la superficie, en los esfuerzos normales, la cual es nula si la interfase es plana. Si el sistema está fuera del equilibrio, pero se cumple que los números de Marangoni son pequeños, al igual que el cociente entre el número de Derjaguin y el capilar, se podrá suponer que el tensor de tensiones es continuo en la interfase. Para un fluido con reología newtoniana las condición de contorno sobre la interfase serán:

$$\mu^{\mathrm{I}} \frac{\partial v_1^{\mathrm{I}}}{\partial x_2} - \mu^{\mathrm{II}} \frac{\partial v_1^{\mathrm{II}}}{\partial x_2} = 0, \tag{5.33}$$

$$p^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{II}} = 0. \tag{5.34}$$

5.2.1. Película delgada cayendo por un plano inclinado

Este ejemplo es una aplicación sencilla a los modernos sistemas de recubrimiento superficial. En este proceso, mediante el escurrimiento de una delgada capa de fluido se recubre una superficie la cual puede estar inmóvil o no. El fluido en contacto con la superficie es generalmente un líquido y el que está por sobre él será un gas, en estas condiciones el sistema será gravitatoriamente estable (el fluido más denso se halla "debajo" del menos denso), sin embargo en la intersfase se podrán generar ondas que perturben y saquen al sistema de la solución que aquí encontraremos. Por otra parte fisicamente, la capa de fluido tiene un principio y un fin donde las fuerzas dominantes pueden ser distintas a las que hay en el medio; es decir habrá una región central donde predominan las fuerzas viscosas y gravitatorias, pero en la entrada y la salida de la película las fuerzas capilares serán de importancia. Por otro lado, su espesor quedará determinado por el caudal circulante y este a su vez vendrá dado por la fuerza que predomine, en particular habrá dos regímenes, uno dominado por la fuerza gravitatoria y otro por las fuerzas capilares. Nosotros supondremos que el mismo se mantiene constante.

Estudiar un sistema como el que se presenta en la figura 5.12 en régimen estacionario, laminar, isotérmico e incompresible para dos fluidos newtonianos. Las ecuaciones a resolver, con el sistema de coordenadas presentado en la figura 5.12 son: Supondremos también que $\rho^{\mathrm{I}} \gg \rho^{\mathrm{II}}$ y $\mu^{\mathrm{I}} \gg \mu^{\mathrm{II}}$ lo cual representaría el caso en el que un líquido se mueve sobre el plano inclinado y por encima de él existe una fase

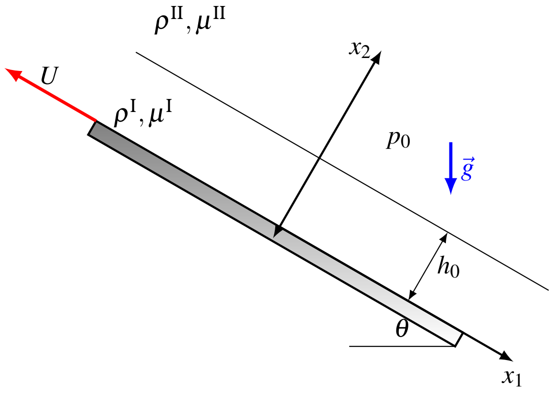

Figura 5.12.: Esquema

$$\vec{v}^{\mathrm{I,II}} = v^{\mathrm{I,II}}(x_2)\hat{x}_1 \tag{5.35a}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x_1} + \rho^{\mathrm{I}} g_1 + \mu^{\mathrm{I}} \frac{\partial^2 v_1^{\mathrm{I}}}{\partial x_2^2} \tag{5.35b}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x_2} + \rho^{\mathrm{I}} g_2 \tag{5.35c}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial x_1} + \rho^{\mathrm{II}} g_1 + \mu^{\mathrm{II}} \frac{\partial^2 v_1^{\mathrm{II}}}{\partial x_2^2} \tag{5.35d}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial x_2} + \rho^{\mathrm{II}} g_2 \tag{5.35e}$$

gaseosa. Las soluciones laminares presentarián un capo de velocidades que verifica que: $v_j^{\mathrm{I,II}} = 0$ si $j \neq 1$. Las condiciones de contorno a aplicar a estas ecuaciones son: en la superficie interfase las ecuaciones (5.33) y (5.34) sobre la superficie sólida la condición de no deslizamiento

$$v^{\mathrm{I}}(y=0) = \mathscr{U}$$

La condición de contorno (5.33) se puede escribir como

$$\frac{\partial v_1^{\mathrm{I}}}{\partial x_2} = \frac{\mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}}} \frac{\partial v_1^{\mathrm{II}}}{\partial x_2} \approx 0$$

en virtud de la relación de viscosidades. Esto quiero decir que el fluido más denso no arrastra al fluido menos denso, muchas veces esto se comenta como que el fluido superior es “dinámicamente pasivo”, es decir no se mueve; como consecuencia de esto, sobre la interfase no se verifica la condición de no deslizamiento dada por la (4.29).

Comencemos analizando el campo de presiones. En la fase II, esperamos que debido a su baja densidad, en la región que es válido el modelo que estamos desarrollando, la presión sea constante, es decir que la superficie libre sea una superficie isobara, por lo tanto $\frac{\partial p^{\mathrm{II}}}{\partial x_1} = 0$, lo mismo ocurrirá en la fase I, aunque por otras causas, en efecto, si derivamos la ecuación (5.35b) respecto de la coordenada x_1 resulta que $\frac{\partial^2 p^{\mathrm{I}}}{\partial x_1^2} = 0$, es decir que $\frac{\partial p^{\mathrm{I}}}{\partial x_2}$ es constante; para evaluar este gradiente tomamos dos puntos sobre la superficie libre de la fase I, por continuidad de las presiones (ecuación (5.34)) resulta que este gradiente es también nulo, con lo cual la presión resulta ser constante sobre los planos $x_2 = cte$. La ecuación (5.35c) indica que el campo de presiones en la fase I varía linealmente con la coordenada x_2 (es un campo hidrostático pero las superficies isobáricas no son perpendiculares a la dirección de g sino paralelas al plano sólido. El campo de presiones queda:

$$p(x_2) = \begin{cases} p_0 & \text{si } h_0 < x_2 \\ p_0 + \rho^{\mathrm{I}} g(h_0 - x_2) & \text{si } h_0 > x_2 \end{cases} \tag{5.36}$$

realicemos el siguiente escalado de las ecuaciones:

$$x_2 = y h_0 \qquad v_2 = u^* v$$

Donde u^* es una velocidad característica del problema que puede tomarse como U si el plano es móvil o la velocidad media del flujo si no lo es. Las ecuaciones por resolver y las condiciones de contorno resultan

$$0 = \frac{1}{\mathscr{F}r^2} + \frac{1}{\mathscr{R}e} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{5.37}$$

$$\mathscr{U} = v(y = 0) \tag{5.38}$$

$$0 = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=1} \tag{5.39}$$

Los números adimensionales que intervienes son, por un lado el numero de Froude $\mathscr{F}r = \frac{u^*}{\sqrt{g_x h_0}}$ y el numero de Reynolds $\mathscr{R}e = \frac{\rho^{\mathrm{I}} u^* h_0}{\mu^{\mathrm{I}}}$. Notemos que aunque en este problema la solución depende del cociente $\frac{\mathscr{R}e}{\mathscr{F}r^2} = \mathscr{P}o$ en un problema no estacionario dependerá del numero de Froude y el de Reynols por separado. La solución del problema resulta ser

$$v(y) = \mathscr{P}o\, y \left(1 - \frac{y}{2}\right) + \mathscr{U}$$

Notemos que en este caso $\mathscr{P}o$ siempre es positivo y $\mathscr{U}$ puede ser tanto positivo como negativo.En la figura se presenta un gráfico de la velocidad como función de la posición y para varios valores de $\mathscr{P}o$. A partir de esta expresión podemos calcular varios parámetros del problema, por ejemplo El caudal la velocidad sobre la superficie libre v_s y el esfuerzo cortante sobre la pared τ_w

$$\mathscr{Q} = \frac{1}{3}\mathscr{P}o + \mathscr{U}$$

$$v_s = \frac{1}{2}\mathscr{P}o + \mathscr{U}$$

$$\tau_w = \mathscr{P}o(1 - \mathscr{U})$$

Notemos que el esfuerzo cortante sobre la pared es escencialmente el gradiente de presión.

5.2.2. Flujo de Couette–Poiseuille estratificado

Estudiaremos el problema ya presentado en la sección 5.1.1-(a) con el agregado de una interfase fluido-fluido en el interior del plano (ver figura 5.13) . Cada fase tiene un caudal $q^{\mathrm{I,II}}$y ocupa una región caracterizada por un ancho $d^{\mathrm{I.II}}$. En problemas de interés industrial, en general, se conocen los caudales y no la geometría interna del flujo, para dar una vuelta a estos problemas desarrollaremos la solución del flujo base y la particualrizaremos para determinar, los parámetros icógnitas

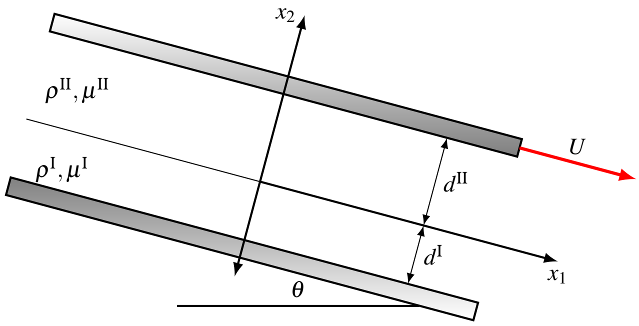

Figura 5.13.: Esquema para el estudio del flujo de Couette–Poiseuille estratificado

.

Las ecuaciones que rigen la dinámica del flujo son las presentadas en (5.35). Con las condiciones de contorno dadas por el no deslizamiento sobre las superficies sólidas y en la interfase fluido–fluido suplementadas por la continuidad de los esfuerzos cortantes y normales en ella (ecuaciones (5.33) y (5.34)). Como siempre llevaremos el problema a una forma adimensional utilizando las escalas:

$$x_2 = yD \qquad v_1^{\mathrm{I,II}} = u^{\mathrm{I,II}} u^{\mathrm{I,II}*}$$

Donde $u^{\mathrm{I,II}*} = \frac{q^{\mathrm{I,II}}}{D}$ es la denominada velocidad superficial, que difiere de la velocidad media de cada fase, pero que se puede evaluar con los datos del problema.

$$0 = -\frac{\mathscr{P}o}{mq} + \frac{\mathscr{R}e}{mq\mathscr{F}r^2}(r-1) + \frac{\partial^2 u^{\mathrm{I}}}{\partial y^2}$$

$$0 = -\mathscr{P}o + \frac{\partial^2 u^{\mathrm{II}}}{\partial y^2}$$

Donde $m = \frac{\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{II}}}$, $r = \frac{\rho^{\mathrm{I}}}{\rho^{\mathrm{II}}}$, $q = \frac{q^{\mathrm{I}}}{q^{\mathrm{II}}}$, $\mathscr{P}o = \frac{D^2 \frac{\Delta P}{L}}{u^{\mathrm{II}*}\mu^{\mathrm{II}}}$, $\mathscr{R}e = \frac{\rho^{\mathrm{II}} u^{\mathrm{II}*} D}{\mu^{\mathrm{II}}}$ y $\mathscr{F}r^2 = \frac{\left(u^{\mathrm{II}*}\right)^2}{g_1 D}$. Notemos que los números adimensionales involucrados: el de Poiseuille, el de Reynolds y el de Froude, están calculados sobre los parámetros del flujo II. Las soluciones de estas ecuaciones son:

$$u^{\mathrm{I}}(y) = \left[\mathscr{P}o - \frac{\mathscr{R}e}{\mathscr{F}r^2}(r-1)\right]\frac{y^2}{2mq} + C_1^{\mathrm{I}}y + C_2^{\mathrm{I}}$$

$$u^{\mathrm{II}}(y) = \frac{\mathscr{P}o}{2}y^2 + C_1^{\mathrm{II}}y + C_2^{\mathrm{II}}$$

Para hallar las constantes involucradas, hay que imponer las condiciones de contorno:

$$u^{\mathrm{I}}(y=-n) = 0 \tag{5.40}$$

$$u^{\mathrm{II}}(y=1-n) = \mathscr{U} \tag{5.41}$$

$$u^{\mathrm{I}}(y=0) = u^{\mathrm{II}}(y=0) \tag{5.42}$$

$$m\left.\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial y}\right|_{y=0} \tag{5.43}$$

donde $n = d_1/D$ y $\mathscr{U} = \frac{U}{u^{\mathrm{I}*}}$ Resolviendo resulta para las constantes

$$C_1^{\mathrm{I}} = \frac{\mathscr{P}o\left(mq(n-1)^2 - n^2\right)}{2mq\left(m(n-1)-n\right)} + \frac{\mathscr{R}e}{\mathscr{F}r^2}\frac{n^2(r-1)}{2mq\left(m(n-1)-n\right)} - \frac{\mathscr{U}}{m(n-1)-n}$$

$$C_1^{\mathrm{II}} = mC_1^{\mathrm{I}}$$

$$C_2^{\mathrm{I}} = \frac{\mathscr{P}on(n-1)\left(q(n-1)-n\right)}{2q\left(m(n-1)-m\right)} + \frac{\mathscr{R}e}{\mathscr{F}r^2}\frac{n^2(r-1)(n-1)}{2q\left(m(n-1)-m\right)} - \frac{\mathscr{U}}{m(n-1)-n}$$

$$C_2^{\mathrm{II}} = C_2^{\mathrm{I}}$$

Que luego de reordenar queda para los campos de velocidades:

$$
\begin{aligned}
u^{\mathrm{I}}(y) = \frac{\mathscr{P}o}{2mq}\left[y^2 + \frac{mq(n-1)^2 - n^2}{m(n-1)-n}y + \frac{mn^2(n-1)}{m(n-1)-n}\right] + \\
\frac{\mathscr{R}e(r-1)}{2mq}\left[-y^2 + \frac{n^2}{m(n-1)-n}y + \frac{mn^2(n-1)}{m(n-1)-n}\right] - \\
\frac{\mathscr{U}}{m(n-1)-n}\left[y+1\right]
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

$$
\begin{aligned}
u^{\mathrm{II}}(y) = \frac{\mathscr{P}o}{2}\left[y^2 + \frac{mq(n-1)^2 - n^2}{q\,(m(n-1)-n)}y + \frac{(n-1)n(q(n-1)-n}{q(m(n-1)-n)}\right] + \\
\frac{\mathscr{R}e(r-1)}{2mq}\left[-y^2 + \frac{n^2}{m(n-1)-n}y + \frac{mn^2(n-1)}{m(n-1)-n}\right] - \\
\frac{\mathscr{U}}{m(n-1)-n}\left[my+1\right]
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

$$Estasexpresionesestanmal \tag{5.46}$$

$$puesuIen1-ntienequeserUuIIeny=-n \tag{5.47}$$

$$tienequesercero. \tag{5.48}$$

Un estudio paramétrico de éste campo de velocidades resulta complicado pues, a diferencia con el caso del fluido monofásico estudiado anteriormente ahora intevienen mayor cantidad de parámetros: $\mathscr{P}o$, $\mathscr{U}$, y_s y m.

(A). Análisis del flujo estratificado

Lo primero que debemos notar es que las soluciones halladas no dependen de la densidad, cosa que evidentemente resulta chocante., y efectivamente, las soluciones halladas no necesariamente se encuentran en la naturaleza ya que las mismas se inestabilizan y el flujo cambia su dinámica. En la interfase entre los dos fluidos se generarán ondas que bien pueden ser atenuadas, o crecer indefinidamente causando que el fluido más pesado caiga.

5.2.3. Flujo de Poiseuille estratificado

5.2.4. Película delgada cayendo por un plano inclinado

Este ejemplo es una plicación sencilla de los modernos sistemas de recubrimiento superficial. En este proceso, mediante el escurrimiento de una delgada capa de fluido se recubre una superficie la cual puede estar inmóvil ono. El fluido en contacto con la superficie es generalmente un líquido y el que está por sobre él será un gas, en estas condiciones el sistema será gravitatoriamente estable, sin embargo en la intersfase se podrán generar ondas que perturben y saquen al sistema de la solución que aquí encontraremos. Partamos de la base de estudiar soluciones de las ecuaciones (5.35b) y (5.35d) bajo la hipótesis que $\mu^{\mathrm{I}} \gg \mu^{\mathrm{II}}$. En este caso nos concentraremos en las condiciones de contorno que se deben aplicar a los campos de velocidades en la interfase. Sobre la superficie sólida supondremos que vale el principio de no deslizamiento, por lo tanto, sobre él la velocidad debe ser la del plano.

$$v^{\mathrm{I}}(y=0) = \mathscr{U}$$

En la inerfase supondremos que la velocidad es continua,

$$v^{\mathrm{I}}(y=h(x)) = v^{\mathrm{II}}(y=h(x)),$$

y si los efectos de curvatura se pueden despreciar ($h(x) = cte$), las condición de empalme entre el campo de velocidades del liquido y del fluido superior será:

5.2.5. Película delgada cayendo axialmente por el exterior de un cilindro

5.2.6. Flujo coaxial cilíndrico estratificado

5.3. Flujos isotérmicos con deslizamiento

En esta sección estudiaremos flujos en los cuales la condición de no deslizamiento no es adecuada. Estos flujos se dan cuando el fluido es un gas a baja presión o cuando las dimensiones del canal por el que circula el fluido son comparables con el camino libre medio molecular.

5.3.1. Flujo de Couette–Poiseuille con deslizamiento (*"slip"*) .

Habíamos especificado que para sistemas no macroscópicos el fluido podía deslizar sobre la superficie, es decir podía haber una velocidad relatica entre la placa y el fluido, el en caso que estamos tratando significará que:

$$u(y=1) - \mathscr{U} = u_{desl1}, \qquad u(y=-1) = u_{desl2}.$$

Donde u_{desli} son las velocidades de deslizamiento sobre la placa i ($i=1$ para la superior e $i=2$ para la inferior). Recordemos que la velocidad de deslizamiento se modela por (4.25).

Para gases a baja presión, la teoría cinética permite calcular la longitud de desplazamiento λ_v, sin embargo para líquidos no hay modelos robustos y su conocimiento se basa en mediciones de caudal como veremos más adelante.

La única modificación que se debe hacer en el modelo es el cálculo de las constantes C_{iv} ya que las ecuaciones no cambian, es decir hay que cambiar la ecuación (5.5d) por:

$$
\begin{aligned}
u(y=1) - \mathscr{U} &= \lambda_{1v} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=1} \\
u(y=-1) &= \lambda_{2v} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=-1} .
\end{aligned}
$$

Al haber dos distancias de desplazamiento distintas, se deja la posibilidad que la interacción entre el fluido y la placa sea diferente en cada una de ellas, es decir, puedan ser de distinto material. Hay que tener en cuenta que sobre la placa 1, la normal es $-j$ y que por lo tanto:

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=1} = -\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=1} = -(\mathscr{P}o + C_{1v}),
$$

y para la placa 2, la derivada normal es directamente la derivada de u respecto de y, por lo tanto las condiciones de contorno se escribirán como:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathscr{P}o}{2} + C_{1v} + C_{2v} &= \mathscr{U} - \lambda_{1v}\left(\mathscr{P}o + C_{1v}\right), \\
\frac{\mathscr{P}o}{2} - C_{1v} + C_{2v} &= \lambda_{2v}\left(-\mathscr{P}o + C_{1v}\right).
\end{aligned}
$$

Resolviendo para C_{iv} y ordenando sale que:

$$
\begin{aligned}
C_{1v} &= \frac{\mathscr{U} - \mathscr{P}o(\lambda_{1v} - \lambda_{2v})}{2 + \lambda_{1v} + \lambda_{2v}}, \\
C_{2v} &= \frac{1 + \lambda_{2v}}{2 + \lambda_{1v} + \lambda_{2v}} \mathscr{U} + \left(\frac{(\lambda_{2v} - \lambda_{1v})(1 + \lambda_{2v})}{(2 + \lambda_{1v} + \lambda_{2v})} - (1 + 2\lambda_{2v}) \right) \frac{\mathscr{P}o}{2}.
\end{aligned}
$$

Notemos que si se cumple la condición de no deslizamiento ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) las constantes C_{iv} son las mismas que las encontradas en el caso macroscópico. Además, los coeficientes se ven modificados no sólo por la existencia del deslizamiento, como por la diferencia en la longitud de deslizamiento en cada placa visible en los términos que contienen $\lambda_{1v} - \lambda_{2v}$.

Para facilitar el análisis supondremos que la interacción del fluido y el sólido es la misma en cada placa de manera que $\lambda_{1v} = \lambda_{2v} = \lambda$. Por lo tanto se tendrá que:

$$u(y) = \frac{\mathscr{P}o}{2} y^2 + \frac{\mathscr{U}}{2(1+\lambda)} y + \frac{\mathscr{U} - \mathscr{P}o}{2} - \lambda \mathscr{P}o,$$

$$Q = -\left(\frac{2}{3} + 2\lambda\right) \mathscr{P}o + \mathscr{U},$$

$$\varphi = \left(\mathscr{P}oy + \frac{\mathscr{U}}{2(1+\lambda)}\right)^2.$$

Podemos observar, inmediatamente, que la existencia del no delizamiento aumenta la velocidad máxima, el caudal y disminuye la disipación por unidad de volumen. Claramente, la condición de fijar la velocidad al sólido genera disipación. Recordemos que la disipación es mayor en las zonas donde la velocidad es menor.

En la figura 5.15 podemos ver el perfil de velocidad para un número de Poiseuille $\mathscr{P}o = -5$ y diferentes valores de la longitud de deslizamiento. Observamos que a mayor valor del parámetro λ mayor es la velocidad de deslizamiento. Se puede pensar que el perfil de velocidades está formado por una distribución uniforme (con el valor de la velocidad de desplazamiento en el plano inferior), superpuesto con perfil de velocidad de no deslizamiento; esta claro, entonces el porqué aumenta el caudal ya que al caudal de no deslizamiento se le suma el de este flujo uniforme.

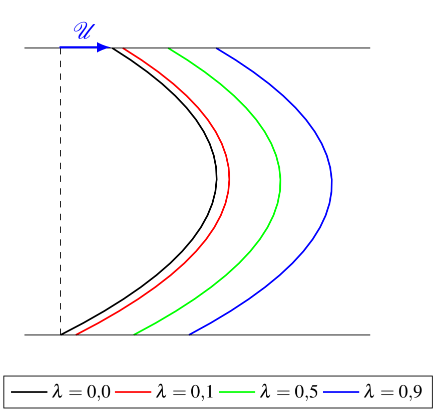

Figura 5.14.: Perfiles de velocidad de un flujo de Couette–Poiseuille con deslizamiento para varios valores del parámetro λ.

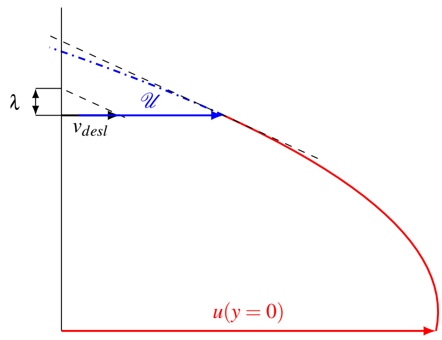

Figura 5.15.: Detalle del perfil de velocidad de un flujo de Couette–Poiseuille con deslizamiento.

En la figura 5.15 podemos ver un detalle del campo de velocidades en la cercanía del plano 1, es decir, el móvil, para $\mathscr{P}o = -5$ y $\lambda = \frac{1}{8}$. En línea de trazo y punto está prolongado el perfil de velocidades y en línea de trazos, una paralela a su tangente en $y = +1$ sobre esta recta se establece que:

$$u_{desl} = \lambda \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

Podemos observar que la mencionada recta y la prolongación, no se anulan en el mismo lugar, es decir, la prolongación del campo de velocidades (trazo raya-punto) se anula a mayor “profundidad” que la correspondiente tangente[14]. Debemos entender claramente, el uso del término hipotético ya que dentro de la placa no hay movimiento de fluido y por ende la extensión de los perfiles, es sólo un artilugio matemático. En la figura **??** se nota que la velocidad del fluido sobre la superficie se puede pensar como la suma de dos, la propia de la placa (la velocidad que tendría el fluido con la condición de no deslizamiento) y la deslizamiento, por lo tanto, el flujo uniforme que habíamos “pronosticado antes”, no es otra cosa que un flujo uniforme con velocidad v_{despl}.

5.3.2. Flujo de Poiseuille con deslizamiento.

En esta sección se estuduiará el flujo de Poiseuille cuando la condición de no deslizamiento no se cumple. Se estudiarán dos casos en el primero se determinará a partir del caudal medido en un ensayo, cual es la longitud de deslizamiento, y en una segundo caso se determinará el campo de velocidades para el caso en que la velocidad de deslizamiento se manifieste cuando el esfuerzo cortante sobre la pared supera un cierto valor crítico.

(a). Determinación de la longitud de deslizamiento para el modelo de deslizamiento de Navier

Si la condición de no deslizamiento no se cumple la solución obtenida no es válida. En la sección 5.3.1 se resolvió el problema plano cuando se conoce la longitud de deslizamiento, ahora iremos por un camino más tecnológico mediante el cual podremos dar una expresión para evaluar esta longitud, en efecto supondremos que la solución, con la condición de deslizamiento se expresa como:

$$v_s(r) = v_{ns} + v_{desl}$$

con v_{ns} la solución obtenida con la condición de no deslizamiento (ecuación (5.26)) y v_{desl} la velocidad de deslizamiento es decir:

$$v_s(r) = -\frac{1}{4}\left(1-r^2\right) + v_{desl}.$$

[14] Cabe aclarar que en alguno libros de mecánica de fluido, y en varios sitios de Internet se presenta la distancia de deslizamiento con un perfil lineal de velocidades, de manera que la prolongación de la tangente y la prolongación del perfil son la misma curva, con esta presentación queda la errónea idea de que la distancia de deslizamiento es la distancia a la cual se anularía el hipotético perfil de velocidades prolongado sobre el sólido, lo cual en general es falso.

El caudal que se obtendría con este campo de velocidades sería:

$$\mathcal{Q}_s = \left(\frac{1}{8} + v_{desl}\right)\pi.$$

Claramente mayor que el que se obtendría si la condición de no deslizamiento se cumpliese, en otras palabras, el deslizamiento del fluido en la siuperficie sólida de la tubería genera un aumento del caudal en una cantidad πv_{desl}, por lo tanto si $\mathcal{Q}_{exp}$ es el caudal medido se puede evaluar la velocidad de desplazamiento como:

$$v_{desl} = \frac{\mathcal{Q}_{exp}}{\pi} - \frac{1}{8}$$

con este valor y empleando la relación (4.25) se obtiene la longitud de desplazamiento (Λ, adimensionalizada con el radio de la tubería) como:

$$\Lambda = 2\left(\frac{\mathcal{Q}_{exp}}{\pi} - \frac{1}{8}\right).$$

(B). Flujo de Poiseuille con deslizamiento con límite de fluencia.

En aplicaciones industriales donde se transporta fluidos complejos, aún sin ser no newtonianos, la velocidad de deslizamiento se pone de manifiesto cuando el esfuerzo cortante sobre la pared supera un cierto valor crítico (limite de fluencia). Esta sección está basada en el trabajo de **Kaoullas2013** El modelo de la velocidad de deslizamiento es, en este caso[15]

$$v^*_{desl} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \tau^*_w \le \tau^*_c \\ \lambda^*_v\,(\tau^*_w - \tau^*_c) & \text{si} \quad \tau^*_w > \tau^*_c \end{cases} \tag{5.49}$$

La introducción de este modelo incluye, ademas de un parámetro con dimensiones de longitud (λ^*) otro con dimensiones de fuerza por unidad de superficie τ^*_c, por lo tanto habrá otra posibilidad para obtener una velocidad característica, la usada anteriormente basada en el gradiente de presión o esta otra basada en el esfuerzo cortante:

$$U^* = \frac{\tau^*_c R}{\mu}$$

Por el análisis que realizaremos más adelante convendrá reescalar las ecuaciones en base a estos variables:

$$x_1 = rR, \quad v_3 = \frac{\tau^*_c R}{\mu} v \quad \frac{\Delta\mathbb{P}}{L} = \frac{\mathscr{P}o\,\tau^*_c}{R}, \quad \tau^* = \tau\tau^*_c, \quad \lambda = \Lambda R, \quad Q = \frac{\tau^*_c R^3}{\mu\pi}\mathcal{Q}. \tag{5.50}$$

[15] en este caso las variables con asterisco son dimensionales

donde $\mathscr{P}o$ es el número de Poiseuille quedando por resolver:

$$-\mathscr{P}o = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dv}{dr}\right)$$

Esta ley nos indica que habrá un valor de critico G por encima del cual habrá deslizamiento y por debajo del cual vale la solución sin deslizamiento Las ecuaciones a resolver son las mismas tratadas en las secciones anteriores, solo se modifican las condiciones de contorno. Como el parámetro que fija el régimen (deslizamiento o no) es el gradiente de presión, es conveniente escribir las condiciones de contorno en término de este valor. Teniendo en cuenta que $\tau_w = -\frac{dv_{desl}}{dr} = -\frac{\mathscr{P}o}{2}$ tendremos las condiciones de contorno:

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=1} = 0$$

$$v(r=1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathscr{P}o \leq \mathscr{P}o_c \\ -\Lambda\left(\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=1} + 1\right) & \text{si} \quad \mathscr{P}o > \mathscr{P}o_c \end{cases}$$

La expresión para el campo de velocidades resulta ser:

$$v(r) = -\frac{\mathscr{P}o}{4}r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$$

Por lo discutido anteriormente o la condición de simetría $C_1 \equiv 0$ Resolviendo para C_2 llegamos a que el campo de velocidades es:

$$v(r) = \begin{cases} \frac{\mathscr{P}o}{4}\left(1-r^2\right) & \text{si} \quad \mathscr{P}o \leq \mathscr{P}o_c \\ \frac{\mathscr{P}o}{4}\left(1+2\Lambda-r^2\right) - \Lambda & \text{si} \quad \mathscr{P}o > \mathscr{P}o_c \end{cases} \tag{5.51}$$

El valor de $\mathscr{P}o_c$ se fija, ahora con la condición $\tau_w = \tau_c$ resultando $\mathscr{P}o_c = 2$. El caudal vendrá dado por:

$$\mathscr{Q} = \begin{cases} \frac{\mathscr{P}o}{8} & \text{si} \quad \mathscr{P}o \leq 2 \\ \frac{\mathscr{P}o}{8}(1+4\Lambda) - \Lambda & \text{si} \quad \mathscr{P}o > 2 \end{cases} \tag{5.52}$$

EL parámetro Λ se denomina número de deslizamiento, cuanto más grande sea significa que los efectos del deslizamiento serán más importantes. El la figura se muestra la relación que existe entre el caudal que circula y el número el número de Poiseuille. Si $\Lambda = 0$ tenemos el flujo de Poiseuille estudiado anteriormente, pero si $\Lambda > 0$ el caudal se incrementa más rapidamente con el número de Poiseuille. Es importante notar que en el caso del flujo de Poiseuille estudiado anteriormente (sin deslizamiento) se había llegado a un caudal constante, en realidad la manera de adimensionalizar el problema escondió al número de Poiseuille, la incorparación en el modelo de un aprámetro físico extra como es la tensión de fluiencia, cambia la naturaleza dimensional del problema, ahora hay dos números Pi independientes:

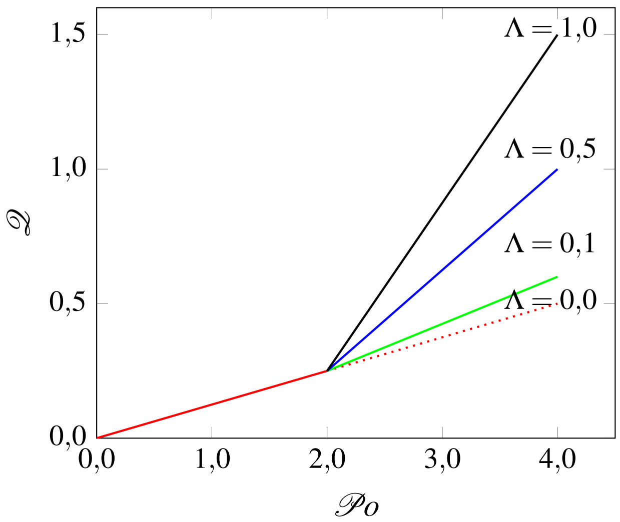

Figura 5.16.: Relación caudal numero de Poiseuille para varios valores del parámetro Λ.

$\mathscr{P}o$ y Λ.

5.4. Flujos No estacionarios

A continuación estudiaremos algunos problemas no estacionarios, ya sea en geometría cartesiana u otra, pero que la matemática requerida para su solución se mantenga dentro de los niveles que requiere el curso. Para uniformizar la notación usaremos x_0 cuando nos refiramos a la variable dimensional tiempo.

5.4.1. Primer problema de Stokes: Plano que arranca súbitamente

Este conocido problema lo resuelve por primera vez stokes en el siglo XIX[16]. Consite en determinar el campo de velocidades que se genera en un fluido semi-infinito por el movimiento súbito de un plano. Supondremos que el fluido ocupa el semiespacio $x_2 > 0$, se encuentra inicialmente en reposo y que el plano arranca subitamente con velocidad en la dirección del eje x_1. Sobre el plano se supone se cumple la condición de no deslizamiento Bajo la aproximación de flujo laminar se tendrá la ecuación y

[16]También se conoce con el nombre de problema de Rayleigh

las condiciones de contorno e iniciales:

$$\rho \frac{\partial v_1}{\partial x_0} = \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \tag{5.53}$$

$$v(x_2, 0) = 0, \tag{5.54}$$

$$v(x_2 \to \infty, x_0) = 0 \tag{5.55}$$

$$v(0, x_0) = V_0 \quad t > 0. \tag{5.56}$$

La ecuación (5.53) se puede resolver empleando la técnica de la transformada de laplace[17], pero nosotros tomaremos un camino más físico empleando el análisis dimensional. el campo de velocidades dependerá, en principio de

$$v_1(x_2, x_0, \rho, \mu, V_0)$$

Notemos que este problema no tiene ni longitudes características (el fluido ocupa una región infinita), ni tiene tiempos característicos (el plano arranca subitamente). De la inspección de las ecuaciones con sus condiciones iniciales y de contorno surge que la velocidad no depende de ρ y μ por separado sino que depende de su cociente $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, quedando entonces el modelo dimensional:

$$v_1(x_2, x_0, \nu, V_0)$$

El análisis dimensional nos indica que hay sólo un numero Π independiente

$$\frac{v_1}{V_0} = f\left(\frac{x_2}{\sqrt{\nu x_0}}\right)$$

Llamado $\xi = \frac{x_2}{\sqrt{\nu x_0}}$ la ecuación diferencial en derivadas parciales (5.53) se transforma en la ecuación diferencial ordinaria

$$f'' + \frac{1}{2}\xi f' = 0$$

Las condiciones de contorno se traducen en

$$f(0) = 1; \quad f(\xi \to \infty) = 0$$

si definimos $f' = F$

$$\frac{dF}{d\xi} = -\frac{1}{2}\xi F$$

Cuya solución es:

$$F(\xi) = C_1 e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$$

[17] la ventaja de este método es que permite, también, resolver la solución transitoria del problema.

Aplicando las condiciones de contorno y volviendo a las variables originales queda

$$v(x_2,x_0) = V_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{\sqrt{4\nu x_0}}\right). \tag{5.57}$$

La funcion erfc(x) es la denominada funcion error complementaria que viene definida por:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{5.58}$$

(A). Análisis

5.4.2. Segundo Problema de Stokes: Plano oscilante en contacto con un fluido semi-infinito

Considermos el problema de la sección anterior, pero con un movimiento distinto del plano, en este caso el plano está oscilando con una velocidad que viene dada por:

$$U = U_0 \cos(\omega x_0)$$

No estamos interesados en estudiar el arranque del plano sino el equivalente del estádo estacionario, que en este caso se denomina estado de régimen, en el cual todo el movimiento ocurre con la misma pulsación que la de la excitación. Si suponemos un flujo laminar, la ecuación que ríge el campo de velocidades es la (5.53) con las condiciones de contorno:

$$v_1(0,x_0) = U_0 \cos(\omega x_0), \tag{5.59}$$

$$v_1(x_2 \to \infty, x_0) = 0. \tag{5.60}$$

A diferencia del primer problema de Stokes, en este caso hay una escala para los tiempos y por lo tanto la variable espacial y la temporal apareceran independientes. Haremos el escalado siguiente

$$x_0 = \frac{t}{\omega}; \quad v_1 = U_0 v; \quad x_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho\omega}}y. \tag{5.61}$$

Quedando por resolver la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$v(y=0,t) = \cos(t)$$

$$v(y \to \infty, t) = 0$$

Para resolverla proponemos

$$v(y,t) = \mathbb{R}e\left(u(y)e^{\imath t}\right)$$

quedando para $u(y)$ la siguiente ecuación

$$\imath u(y) = \frac{d^2u}{dy^2} \tag{5.62}$$

$$u(0) = 1 \tag{5.63}$$

$$u(y \to \infty) = 0 \tag{5.64}$$

que tiene como solución que cumple las condiciones de contorno

$$u(y) = e^{-\frac{(1+\imath)}{\sqrt{2}}y}.$$

Resultando

$$v(y,t) = \mathbb{R}e\left(e^{-\frac{(1+\imath)}{\sqrt{2}}y}e^{\imath t}\right) = e^{-\frac{y}{\sqrt{2}}}\cos\left(t - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

(A). Análisis del flujo

El flujo establecido por la oscilación del plano se puede pensar como una onda viajera que se propaga en la dirección perpenducular al mismo, pero que se atenúa exponencialmente. En variables dimensionales, la pulsación de la onda es ω y su número de onda $\delta = \sqrt{\frac{\mu}{2\rho\omega}}$. Recordemos que la longitud de onda se relaciona con el número de onda mediante la relación:

$$k_2 \equiv \delta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Esto nos da idea que la distancia característica de la atenuación de la onda es del orden de su longitud de onda, es de esperar, por tanto, que la onda no penetre una gran distancia en el fluido. Esta distancia δ de denomina distancia de penetración y nos está indicando que longitud de fluido es esperable sea perturbada por el movimiento del plano.

En la figura 5.17 se presenta la evolución espacio temporal del campo de velocidades para el 2do problema de Stokes. Se observa claramente que los elementos de fluido que están cerca del plano oscilan con amplitud decreciente, pero los que se encuentran más allá de $y \approx 4$ casi no se desplazan. En el plano vy de la misma figura se observan los perfiles de velocidad como función de la posición y para distintos tiempos adimensionales ($t = 0, \pi/2, 3\pi/2$ y 2π). Es notable encontrarnos que, en todo instante, el máximo de la velocidad no se encuentra sobre el plano sólido, sino que para algunos instantes de tiempo este ocurre dentro del fluido. Este es un

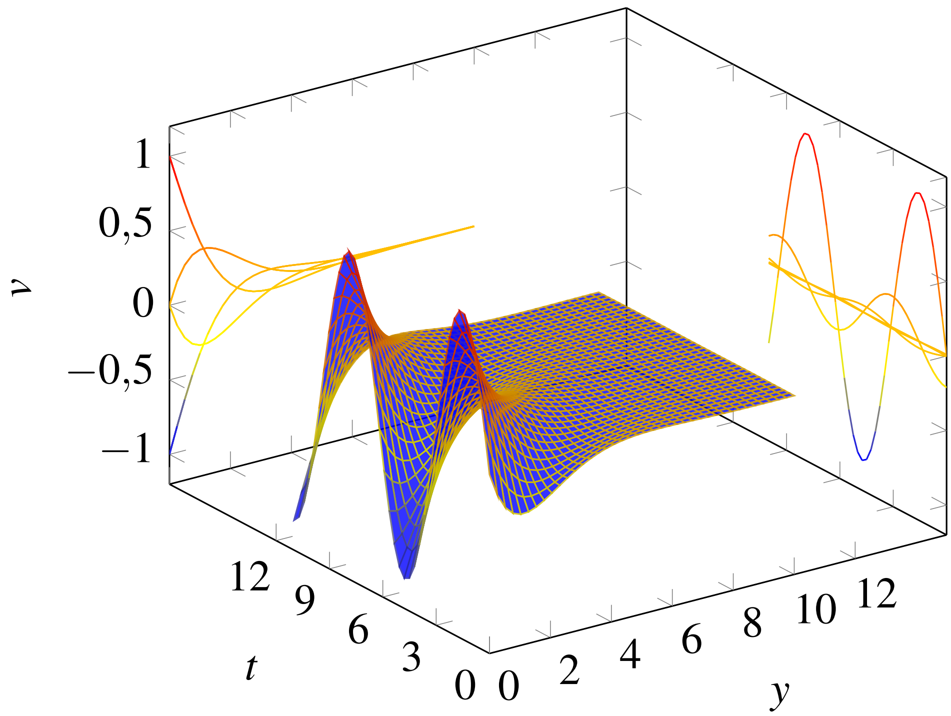

Figura 5.17.: Evolución espacio temporal del perfil de velocidades para el segundo problema de Stokes.

fenómeno típico de los sistemas difusivos donde la cantidad que difunde es variable en el tiempo. En el plano vt se observa la velocidad como cunción del tiempo para cuatro posiciones adimensionales ($y = 0, 3, 6, 9$) Se puede ver que la oscilación es armónica pero con una amplitud, efecto de la atenuación que disminuye cuanto más nos internamos en el fluido, aparece tambien un desfasaje entre la velocidad de los elementos pagados al plano oscilante y los más interiores.

El esfuerzo cortante s que el sólido le hace al fluido vendrá dado por

$$s = -\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=0} = cos(t - \frac{\pi}{4})$$

Inmediatamente observamos que el esfuerzo sobre el plano y su velocidad estan desfazados, por lo tanto en un ciclo completo el plano entrega al sistema fluido una cierta energía, que este disipa en una región que se extiendo perpendicularmente una distancia del orden de δ hacia adentro del fluido. En efecto, la potencia instantanea que entrega el plano al fluido será será

$$P_w(t) = cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) cos(t)$$

cuyo promedio temporal viene dado por:

$$P_w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_w(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

El signo menos significa que la energía es transferida al fluido. La energía que disipa el fluido por unidad de volumen y de tiempo está relacionada con la función disipación, que para este problema viene dada por

$$\Phi(y,t) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 2e^{-\frac{y}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{sen}^2\left(t - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

La Potencia que se dicipa en todo el volumen de fluido se calcula como:

$$P_f(t) = \int_0^{\infty}\Phi(y,t)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Promediando temporalmente se llega a que:

$$P_f = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto llegamos a la conclusión que toda la energía que recibe el fluido del plano en un período de oscilación, la disipa con lo cual su energía media permanece constante, no así la instantánea. Este típo de movimiento que no es estacionario, pero las variables permanecen constantes en valor medio, recibe el nombre de flujos pulsantes. La energía que se disipa genera un aumento local de temperatura en el fluido, con lo cual se producen flujos de calor internos que son “grandes” pueden romper la hipótesis de fluido isotérmico, mas adelante analizaremos este caso.

5.4.3. Transitorio de un flujo isotérmico de Couette–Poiseuille con velocidad de placa y gradiente de presión contante

En esta sección estudiaremos esencialmente el transitorio que ocurre desde que se aplican las causas del movimiento en un flujo de Couette–Poiseuille del tipo que se estudió en la sección (a). Las ecuaciones que rigen el problema, condiciones de contorno e iniciales, escritas en términos dimensionales, para un flujo laminar serán:

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \tag{5.65}$$

$$v_1(x_2 = 0, t) = 0 \qquad v_1(x_2 = +d, t) = U, \tag{5.66}$$

$$v_1(x_2, t = 0) = 0. \tag{5.67}$$

Notemos que, para simplificar la matemática posterior hemos cambiado el sistema de coordenadas utilizado, en este caso, el cero de la coordenada x_2 se encuentra sobre el plano fijo, y al ancho del canal se lo nota con la letra d. También hemos agrupado los efectos del gradiente de presión y de las fuerzas de volumen en el término $\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho g_i x_i$. Con escalado habitual más el agregado del escaldo temporal

$$\tau = \frac{1}{\mathscr{R}e}\frac{tu^*}{d} \qquad y = \frac{x_2}{d} \tag{5.68}$$

$$u = \frac{v_2}{u^*} \qquad \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x} = \frac{\Delta \mathbb{P}}{L}\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x_1}. \tag{5.69}$$

La ecuación adimensional resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\mathscr{P}o + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{5.70}$$

$$u(y=0,\tau) = 0 \qquad u(y=+1,\tau) = \mathscr{U}, \tag{5.71}$$

$$u(y,\tau=0) = 0. \tag{5.72}$$

La solución de este sistema comienza con la separación de la función $u(y,\tau)$ como suma de dos

$$u(y,\tau) = u_e(y) + u_t(y,t).$$

$u_e(y)$ representa la solución estacionaria del problema mientras que la $u_t(y,\tau)$ representa la parte transitoria. Las ecuaciones y condiciones de contorno asociadas con esta descomposición serán:

$$0 = -\mathscr{P}o + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2}, \tag{5.73}$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2}, \tag{5.74}$$

$$u_e(y=-1) = 0 \qquad u_e(y=+1) = \mathscr{U}, \tag{5.75}$$

$$u_t(y=-1,\tau) = 0 \qquad u_t(y=+1,\tau) = 0, \tag{5.76}$$

$$u_t(y,\tau=0) + u_e(y) = 0. \tag{5.77}$$

Notemos que la suma de (5.73) con (5.74) resulta (5.70) y lo mismo ocurre con las condiciones de contorno. La componente $u_e(y)$ se denomina estacionaria, y corresponde justamente a la solución encontrada antes, es decir

$$u_e(y) = \frac{\mathscr{P}o}{2}y^2 + \left(\mathscr{U} - \frac{\mathscr{P}o}{2}\right)y.$$

Para resolver la ecuación (5.74) proponemos la siguiente factorización:

$$u_t(y,\tau) = Y(y)T(\tau),$$

que reemplazada en (5.74) y luego de ordenar resulta:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2},$$

para que se verifique esta igualdad para cualquier valor de y e instante de tiempo τ necesariamente debe cumplirse que:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial \tau} = -\lambda^2, \tag{5.78}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda^2.. \tag{5.79}$$

Donde λ recibe el nombre de constante de desacople y deberá ser determinada a partir de las condiciones de contorno e iniciales. La solución de (5.78) da para la función:

$$T(\tau) = C_1 e^{-\lambda^2 \tau},$$

$$Y(y) = C_2 \operatorname{sen}(\lambda y) + C_3 \cos(\lambda y).$$

Con lo cual resulta queda

$$u_t(y,\tau) = e^{-\lambda^2 \tau}\left(A \operatorname{sen}(\lambda y) + B \cos(\lambda y)\right)$$

Con A, B a determinar a partir de las condiciones de contorno e iniciales del problema. Las condiciones de contorno establecen que:

$$0 = e^{-\lambda^2 \tau}\left(A \operatorname{sen}(\lambda 0) + B \cos(\lambda 0)\right),$$

$$0 = e^{-\lambda^2 \tau}\left(A \operatorname{sen}(-\lambda) + B \cos(-\lambda)\right).$$

Inmediatamente vemos que necesariamente $B \equiv 0$ y que $\operatorname{sen}(\lambda) = 0$ o lo que es lo mismo $\lambda = n\pi$; con n entero. La solución se escribirá como una serie de senos:

$$u_t(y,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 \tau} \operatorname{sen}(n\pi y).$$

Para hallar el valor de los coeficientes A_n recurrimos a la condición inicial (ecuación (5.77))

$$u_t(y,0) + u_e(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi y) + u_e(y) = 0.$$

Con lo cual resulta que los coeficientes buscados A_n son los coeficientes del desarrollo de Fourier en cosenos de la solución estacionaria cambiados de signo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi y) = -\frac{\mathscr{P}o}{2} y^2 - \left(\mathscr{U} - \frac{\mathscr{P}o}{2}\right) y.$$

Para hallar el valor de los A_n multiplicamos por $\operatorname{sen}(m\pi y)$ e integramos entre 0 y 1, resultando

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi y)\operatorname{sen}(m\pi y)\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi y)\frac{\mathscr{P}o}{2}y^2\,\mathrm{d}y$$
$$-\int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi y)\left(\mathscr{U} - \frac{\mathscr{P}o}{2}\right)y\,\mathrm{d}y.$$

Si tenemos en cuanta que

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi y)\operatorname{sen}(m\pi y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\delta_{nm}.$$

Resulta que:

$$A_n = \mathscr{P}o\left[\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^3}(1-(-1)^n)\right] + 2\left(\mathscr{U} - \frac{\mathscr{P}o}{2}\right)\frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

En la figura se presentan los perfiles de temperatura obtenidos para un flujo de Couette–Poiseuille con parametros $\mathscr{P}o = -5, \mathscr{U} = 1$ para distintos tiempos adimencionales $t = 0{,}001; 0{,}010; 0{,}050; 0{,}100; \infty$.

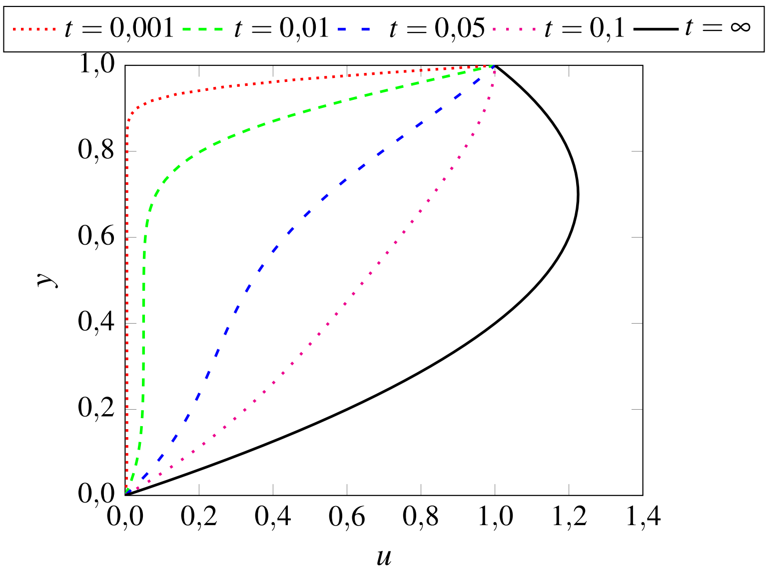

Figura 5.18.: Perfil de velocidad poara distintos instantes de tiempo adimensional. $\mathscr{P}o = -5, \mathscr{U} = 1$.

(A). Análisis del flujo transitorio

De lo expuesto podemos decir que el perfil de velocidades queda determinado por los parámetros $\mathscr{P}o$ y $\mathscr{U}$, ya que el número de reynolds sólo aparece como una escala temporal, es decir fija en cuanto tiempo se llega a la solución estacionaria. En efecto, si pensamos a la solución transitoria como una suma de armónicos, vemos que cada uno se atenúa con una constante de tiempo proporcional a $(n\pi)^{-2}$, con lo cual los de ato orden desaparecen rápidamente.

5.4.4. flujos Poiseuille con gradiente de presión pulsantes.

Como primer problema estudiaremos el movimiento armónico de un plano que está en contacto con un fluido semi infinito. El plano tiene una velocidad que vendrá dada por una función del tipo:

$$U(x_0) = U_0 \cos(\omega x_0)$$

Este tipo de flujos tiene importancia tanto en la mecánica del automotor, como así también la medicina, en efecto, un flujo se llamará pulsante cuando es generado por un gradiente de presión que varía periódicamente en el tiempo de manera tal que se pueda escribir en serie de senos y cosenos

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \sum_{n=0} \left[G'_n e^{\imath \omega x_0} \right]$$

5.5. Flujos con disipación.

5.5.1. Flujo de Couette-Poiseuille con disipación.

Estudiaremos ahora el efecto que la disipación tiene sobre la distribución de temperaturas, dejando para más adelante el efecto que el campo de temperatura tiene sobre la dinámica del fluido, en otras palabras, supondremos que en el flujo la disipación es importante pero que las propiedades del fluido (la viscosidad y densidad) no se ven afectadas por este cambio; de manera que estudiaremos el flujo incompresible y de un fluido newtoniano que ocupa el volumen entre dos placas planas paralelas separadas una distancia $2h$ y dispuestas horizontalmente, de manera que sobre el fluido no actúan fuerzas de volumen que causen su movimiento. El movimiento del fluido se generará por el movimiento de la placa superior y/o por la presencia de un gradiente de presión externo. buscamos soluciones en régimen laminar, la ecuación de Navier Stokes con sus respectivas condiciones de contorno ya se presentaron en las ecuaciones (5.3a)–(5.4b) o su versión adimensional (5.5a)–(5.5d). A este sistema se deberá agregar la ecuación de la energía, con las condiciones de contorno que correspondan:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2=0.$$

$$u(x_2=+h)=U \qquad u(x_2=-h)=0,$$

$$T(x_2=+h)=T_1 \qquad T(x_2=-h)=T_0.$$

Antes de encarar la solución del problema escalado de las variables intervinientes siguiendo las transformaciones presentadas en (5.2) agregando el escalado de la temperatura:

$$\theta=\frac{T-T_b}{T_1-T_b}. \tag{5.80}$$

donde T_b es una temperatura de referencia que más adelante discutiremos en detalle. Para la velocidad u y la coordenada y utilizamos la adimensionalización habitual:

$$u=\frac{v_1}{u^*}, \qquad y=\frac{x_2}{h}$$

Las ecuaciones a resolver, con sus respectivas condiciones de contorno resultan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\mathscr{B}r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0,$$

$$u(y=-1)=0, \qquad u(y=1)=\mathscr{U},$$

$$\theta(y=-1)=\beta, \qquad \theta(y=1)=1.$$

En este escalado aparece el número de Brinkman $\mathscr{B}r=\frac{\mu u^{*2}}{k(T_1-T_b)}$ el cual marca la importancia de la disipación: si $\mathscr{B}r \ll 1$ el sistema dependerá levemente de ella quedando, para la temperatura, un perfil lineal. El número adimensional β contiene información de las temperaturas de las placas y la temperatura de referencia (notemos que si se toma $T_b=T_0$ resulta que $\beta=0$. Si las propiedades del fluido son independientes de la temperatura, la elección de T_b, es arbitraria, sin embargo se torna crítica su elección, en la evaluación de varios parámetros (ver por ejemplo **Kay2016**). En lo que sigue utilizaremos que $T_b=T_0$ ya que los parámetros físicos y el álgebra involucrada resulta más fáciles de tratar. Las ecuaciones que resultan no están acopladas, la temperatura no interviene en la ecuación hidrodinámica, por lo tanto su solución, teniendo en cuenta las condiciones de contorno para $\mathscr{U}$, resulta la solución presentada en la (5.7):

$$u(y) = \frac{\mathscr{P}o}{2}y^2 + \frac{\mathscr{U}}{2}y + \frac{\mathscr{U} - \mathscr{P}o}{2},$$

Y la ecuación de la energía se transforma en:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\mathscr{B}r\left(\mathscr{P}oy + \frac{\mathscr{U}}{2}\right)^2.$$

Cuya solución general es:

$$\theta(y) = -\mathscr{B}r\left(\frac{\mathscr{P}o^2}{12}y^4 + \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6}y^3\frac{\mathscr{U}^2}{8}y^2\right) + C_1 y + C_2,$$

implementando las condiciones de contorno impuestas resulta:

$$0 = -\mathscr{B}r\left(\frac{\mathscr{P}o^2}{12} - \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6} + \frac{\mathscr{U}^2}{8}\right) - C_1 + C_2,$$
$$1 = -\mathscr{B}r\left(\frac{\mathscr{P}o^2}{12} + \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6} + \frac{\mathscr{U}^2}{8}\right) + C_1 + C_2.$$

Resolviendo para C_1 y C_2 resulta:

$$C_1 = \frac{\mathscr{B}r\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6} + \frac{1}{2}, \qquad C_2 = \frac{\mathscr{B}r\mathscr{P}o^2}{12} + \frac{\mathscr{B}r\mathscr{U}^2}{8} + \frac{1}{2}.$$

Con lo cual se obtiene para la temperatura adimensional:

$$\begin{aligned}\theta(y) = &-\frac{\mathscr{B}r\mathscr{P}o^2}{12}y^4 - \frac{\mathscr{B}r\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6}y^3 - \frac{\mathscr{B}r\mathscr{U}^2}{8}y^2 + \\ &+\left(\frac{\mathscr{B}r\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6} + \frac{1}{2}\right)y + \frac{\mathscr{B}r\mathscr{P}o^2}{12} + \frac{\mathscr{B}r\mathscr{U}^2}{8} + \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{5.81}$$

Esta expresión se puede reordenar para su mejor análisis como:

$$\begin{aligned}\theta(y) = \frac{1+y}{2} + (1-y^2)\frac{\mathscr{B}r}{24}\Big(&\mathscr{P}oy^2 + \mathscr{P}o\,(2\mathscr{U} + \mathscr{P}o - 2)\,y \\ &+\frac{3}{2}\mathscr{U} + \mathscr{P}o^2 + \mathscr{P}o\Big).\end{aligned} \tag{5.82}$$

Vemos que el efecto de la disipación, representado por el número $\mathscr{B}r$ es el de deformar el perfil lineal de temperatura, generado en el caso de disipación nula. También se observa que para un cierto valor en adelante del número $\mathscr{B}r$, que la temperatura en el fluido, sea mayor que el de la placa más caliente; En efecto, ta transferencia de calor desde o hacia la placa más caliente es proporcional al gradiente de temperatura sobre la misma, la transferencia cambia de sentido cuando el mencionado gradiente se anula. Derivando la ecuación (5.81) respecto de y obtenemos:

$$\frac{d\theta}{dy} = -\mathscr{B}r\left(\frac{\mathscr{P}o^2}{3}y^3 + \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{3}y^2 + \frac{\mathscr{U}^2}{4}y - \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6}\right) + \frac{1}{2}. \tag{5.83}$$

Evaluando esta derivada sobre la placa superior $y = 1$ y la inferior $y = -1$ resultan las ecuaciones

$$\left.\frac{d\theta}{dy}\right|_{y=+1} = -\mathscr{B}r\left(\frac{\mathscr{P}o^2}{3} + \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{3} + \frac{\mathscr{U}^2}{4} - \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6}\right) + \frac{1}{2}. \tag{5.84}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dy}\right|_{y=-1} = -\mathscr{B}r\left(\frac{-\mathscr{P}o^2}{3} + \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{3} - \frac{\mathscr{U}^2}{4} - \frac{\mathscr{P}o\mathscr{U}}{6}\right) + \frac{1}{2}. \tag{5.85}$$

El flujo de calor, sobre la correspondiente placa será nulo cuando la derivada se anule, con lo que resultan los números de $\mathscr{B}r$ limites

$$\mathscr{B}r_{L^+} = \frac{3}{2\left(\mathscr{P}o + \frac{\mathscr{U}}{2}\right)^2 + \mathscr{U}^2}.$$

$$\mathscr{B}r_{L^-} = -\frac{3}{2\left(\mathscr{P}o - \frac{\mathscr{U}}{2}\right)^2 + \mathscr{U}^2}.$$

El flujo de calor en la placa inferior se hace nulo, para un $\mathscr{B}r$ negativo, lo cual significa que $T_0 > T_1$. Si $\mathscr{B}r > \mathscr{B}r_L$ el perfil de temperatura tendrá un máximo en seno del fluido que se desplaza hacia la placa inferior. Si fijamos los parámetros hidrodinámicos del flujo ($\mathscr{P}o$ y $\mathscr{U}$) la posición del máximo de temperatura queda determinada por la diferencia de temperatura entre las placas. por lo tanto, al variarla se podrá modificar su posición. Por ejemplo si $\mathscr{P}o$ =-5 y $\mathscr{U} = 1$ con $T_1 > T_0$ habrá un máximo interno de temperatura si $\mathscr{B}r > 0{,}072$ y si $T_1 < T_0$ para $\mathscr{B}r < 0{,}049$. En la figura **??** se presentan varios perfiles para el caso $T_1 > T_0$.

En cálculos prácticos se establece que el flujo de calor a través de una superficie se calcula como:

$$q = h_c(T_s - T_b) = k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_S$$

El subíndice S denota la posición temperatura de la superficie donde se quiere evaluar el flujo y T_b es la temperatura de mezcla en baso abierto. Antes de continuar con el análisis debemos encontrar una expresión para la temperatura T_b. Si bien estaríamos libres de elegir cualquier valor para la temperatura T_b, lo usual en la literatura es definirla, para el cáluclo de q como el promedio pesado con la energía

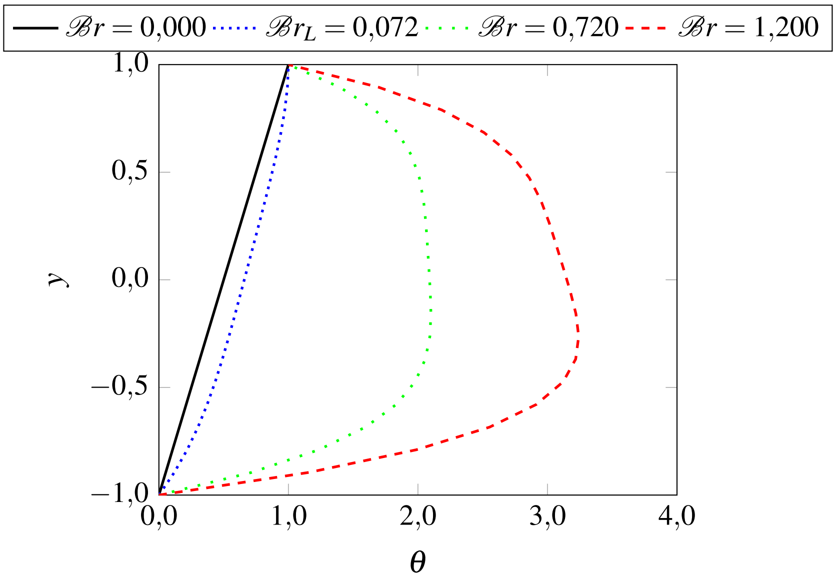

Figura 5.19.: Distribución de temperatura en el seno del fluido para un flujo de Couette–Poiseuille con parámetros $\mathscr{P}o = -5, \mathscr{U} = 1$ *y varios valores del número de Brinkman:* $0{,}0$ *sin disipación y* $0{,}072, 0{,}720, 1{,}200$.

en la sección, es decir:

$$T_b = \frac{\int_{-h}^{+h} \rho c_p v_1(x_2) T(x_2)\, \mathrm{d}x_2}{\int_{-h}^{+h} \rho c_p v_1(x_2)\, \mathrm{d}x_2}$$

En esta expresión, el numerador representa el flujo de energía interna a través de la sección del canal, y el denominador, el flujo másico multiplicado por el calor específico. En casos donde los cambios de la densidad y el calor específico se pueden despreciar, (como es el caso que nos ocupa) el cálculo de la temperatura de mezcla se torna en:

$$T_b = \frac{\int_{-h}^{+h} v_1(x_2) T(x_2)\, \mathrm{d}x_2}{\int_{-h}^{+h} v_1(x_2)\, \mathrm{d}x_2}$$

Pasando a variables adimensionales quedaría que:

$$\theta_b = \frac{\int_{-1}^{+1} u(y)\theta(y)\, \mathrm{d}y}{\int_{-1}^{+1} u(y)\, \mathrm{d}y}$$

El valor de θ_b resulta:

$$\theta_b = \mathscr{B}r \frac{\left(\frac{1}{4}\mathscr{U}^3 - \frac{2}{15}\mathscr{P}o\mathscr{U}^2 + \frac{1}{5}\mathscr{P}o^2\mathscr{U} - \frac{16}{105}\mathscr{P}o^3\right)}{3\mathscr{U} - 2\mathscr{P}o} - \frac{\mathscr{U} - \mathscr{P}o}{3\mathscr{U} - 2\mathscr{P}o} + 1$$

APÉNDICES

5A.I. FUJOS DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Cada vez m’as los fluidos no newtonianos tienen interes práctico

(A). FLUJO ISOTÉRMICO DE UNA PELÍCULA FLUIDA SOBRE UN PLANO INCLINADO PARA UN FLUIDO CON REOLOGÍA LEY DE POTENCIAS

(B). FLUJO ISOTÉRMICO DE HAGEN–POISEUILLE PARA UNA REOLOGÍA LEY DE POTENCIAS

5A.II. TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN

Ver BATCHELOR—- El objetivo de la lubricación es reducir la fricción, el desgaste y el calentamiento de las superficies en una maquinaria que están en movimiento relativo entre sí. Para ello se hace circular un fluido viscoso que comúnmente se denomina lubricante el cual, cuando es insertado entre dos superficies móviles, cumple con estos propósitos. En esta sección trataremos lo que se conoce como lubricación hidrodinámica dejando otro tipos de teorías para materias específicas

La interacción entre el lubricante y las superficies sólidas genera una fuerza que puede descomponerse en dos componentes, una de sustentación y otra de arrastre, si el huelgo por el que circula el lubricante es lo suficientemente delgado, la componente de arrastre puede considerarse despreciable quedando sólo la de sustentación que es la relevante. En esta sección estudiaremos el movimiento de un fluido viscoso que es impulsado por un canal convergente. Como resultado de este movimiento, en el flujo se genera un campo de presiones que bajo ciertas condiciones permite soportar grandes cargas con lo cual impide el contacto entre superficies sólidas reduciendo así su desgaste. Esta teoría fue desarrollada por Petroff para cilindros coaxiales concéntricos en 1883 y ampliada por Reynolds en 1886 para geometría plana, por Sommerfeld en 1904 para el caso de dos cilindros coaxiales excéntricos. Esta teoría se denomina, también, de lubricación hidrodinámica. Presentaremos aquí el modelo de Reynolds que muestra lo importante del tema dejando la matemática lo más simple posible.

Consideremos un problema bidimensional en el que se tiene una superficie sólida fija y otra móvil, como se muestra en la figura 5.20. Las superficies fija se la considerará plana mientras que la móvil está definida por una ecuación $x_3 = h(x_1, x_2, t)$,en el plano x_1, x_2 hay una distancia característica L que es mucho mayor que la separación media de las superficies[18].

[18]Si bien en este desarrollo suponemos que la móvil es material, su carácter no interviene en el

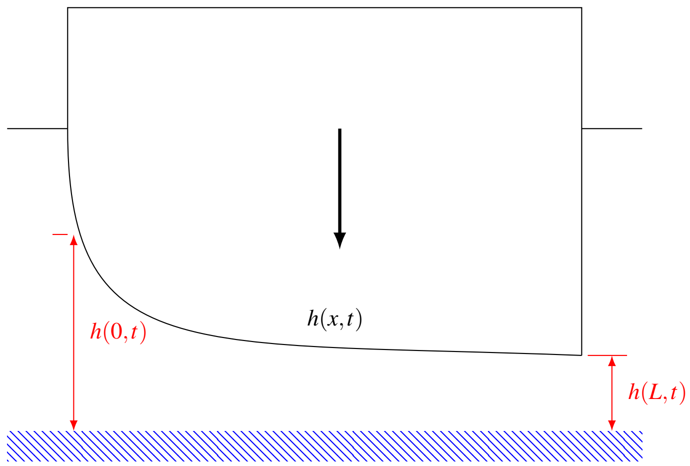

Figura 5.20.: Esquema del deslizador

Propongamos un campo de velocidades

$$\vec{v} = v_1(x_1,x_2,t)\hat{e}_1 + v_2(x_1,x_2,t)\hat{e}_2 + v_3(x_1,x_2,t)\hat{e}_3$$

Si planteamos la hipótesis de flujo incompresible, isotérmico, y fluido newotniano, las ecuaciones que rigen el fenómeno son:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \tag{5A.II.1a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t'} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right) + f_{v1} \tag{5A.II.1b}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t'} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right) + f_{v2} \tag{5A.II.1c}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial t'} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right) + f_{v3} \tag{5A.II.1d}$$

Aquí f_{vi} representa las fuerzas de volúmen que actúan sobre el fluido y que consideraremos conservativas. Estas ecuaciones se deben suplementar con las condiciones de contorno que correspondan al problema a tratar. Para lo que sigue es conveniente definir la presión generalizada $\mathbb{P}$ de manera que $\mathbb{P} = p - \rho\Phi$.

(A). Adimensionalización de las ecuaciones

Antes de buscar una solución de las ecuaciones, comencemos por pensar que lo que ocurre en la dirección del plano y tendrá una distancia característica distinta a la que se tendrá en la dirección perpendicular, este hecho nos hace poder emplear

modelo hasta imponer las condiciones de contorno el análisis dimensional discriminado y plantear:

$$x_1 = L_0 x; \qquad x_2 = L_0 y; \qquad x_3 = h_0 z \qquad v_1 = U_0 x \qquad v_2 = U_0 v \qquad v_3 = W_0 w \qquad t' = \frac{t}{T_0}$$

La escala de velocidad de la componente 3, W_0 resulta de hacer este cambio de variables en la ecuación 5A.II.1a:

$$\frac{U_0}{L_0}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_0}{L_0}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{W_0}{h_0}\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Resulta que obtenemos la misma ecuación de continuidad si tomamos $W_0 = \varepsilon U_0$, con $\varepsilon = \frac{h_0}{L_0}$. Si el movimiento de la superficie movil, no tiene uno característico la escala de tiempos, T_0 se puede tomar como $\frac{L_0}{U_0}$. Las escalas para la velocidad U_0 y la presión generalizada P_0 estarán asociadas con el tipo de problema a resolver, por ejemplo, si la superficie móvil es sólida y el flujo está generado por la fuerza de gravedad con un caudal Q las escalas que se toman habitualmente son:

$$h_0 = \sqrt{\frac{2\mu U_0}{\rho g \operatorname{sen}\theta}} \tag{5A.II.2}$$

Con estas escalas, las ecuaciones a resolver quedan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{5A.II.3a}$$

$$\varepsilon \mathscr{R}e\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5A.II.3b}$$

$$\varepsilon^3 \mathscr{R}e\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial y} + \varepsilon^4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{5A.II.3c}$$

Estas ecuaciones conformas la llamada teoría de la lubricación. Es conveniente Para hallar una solución a ellas haremos la hipótesis de que $\varepsilon \ll 1$ con lo cual los terminos convetivos en la ecuaciones 5A.II.3b y 5A.II.3c desaparecen como así también las derivadas segundas espaciales de u y la derivada segunda respecto de y de v.

$$-\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5A.II.4a}$$

$$-\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial y} = 0 \tag{5A.II.4b}$$

La ecuación 5A.II.4b nos indica que en la dirección 2 el campo de presiones generalizado es hidrostático y que éste es solo función de la cordenada x, con lo cual la integración de la ecuación 5A.II.4a resulta inmediata:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2$$

El valor de C_1 y C_2 se obtienen de aplicar las condiciones de contorno: $u(x, y = 0) = 1$, $u(x, y = h(y)) = 0$ oresulta que $C_2 = 1$ y $C_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}h - \frac{1}{h}$ La función $h(x)$ no es otra cosa que la expresión de la superficie plana que está por sobre el plano móvil $h(x) = H - \tan\alpha x$. Para hallar el valor de $\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}$ tenemos presente que al ser el flujo incompresible el caudal volumétrico $\mathscr{Q}$ es constante, entonces:

$$\mathscr{Q} = \int_0^{h(x)} u(y)\,\mathrm{d}y,$$

resultando

$$\mathscr{Q} = -\frac{1}{12}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}h^3 + \frac{1}{2}h.$$

Derivando respecto a x queda la denominada ecuación de Reynolds de la lubricación.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{12}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}h^3 + \frac{1}{2}h\right) = 0,$$

y llegamos a una ecuación diferencial para $\mathscr{P}$ conocida la forma de la superficie superior $h(x)$.

$$\mathscr{P}(x) = C_2 + 6\left[\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{h^2} - C_1\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{h^3}\right]$$

Teniendo en cuenta que $\mathscr{P}(0) = \mathscr{P}_1$ y que $\mathscr{P}(1) = \mathscr{P}_2$ resulta que:

$$\mathscr{P}(x) = \mathscr{P}_1 + 6\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{h^2} - \left[\frac{\mathscr{P}_2 - \mathscr{P}_1}{\int_0^1 \mathrm{d}x/h^3} + 6\frac{\int_0^1 \mathrm{d}x/h^2}{\int_0^1 \mathrm{d}x/h^3}\right]\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{h^3}$$

5A.III. Difusión del calor en medios sólidos unidimensionales

5A.IV. Convección natural entre Placas verticales

3682