Parcial #1

Señales y sistemas

Nombre: Ruben Dario villa Torres

ID: 1.117.732.448

Preguntas.

1. La distancia media entre dos señales periodicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se pueden expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = P_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = Ae^{-Jnw_0t}$$
$$x_2(t) = Be^{Jmw_0t}$$

Con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Determine la distancia entre las dos señales. compruebe sus resultados con python

Desarrollo.

La distancia media entre las dos señales es:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Esto es igual a la potencia del error y es:

$$\bar{P}e = \bar{P}_{x_1} - \frac{2}{T} \int x_1(t)\, x_2^*(t)\, dt + \bar{P}_{x_2}$$

Se calcula por partes:

$$P_{x_1} = \frac{1}{T} \int_T |x_1(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T (Ae^{-Jnw_0t})(Ae^{-Jnw_0t})^* dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_T A^2 e^{-Jnw_0t} e^{Jnw_0t} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T A^2 e^0\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} A^2\, dt = \frac{1}{T} A^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt = \left(\frac{A^2}{T}\right)\left(t \Big|_{-T/2}^{T/2}\right)$$

$$= \left(\frac{A^2}{T}\right)\left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) = \frac{A^2}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T}$$

$$= A^2 //$$

$$\bar{P}_{x_2} = \frac{1}{T}\int_T (Be^{jmwot})(Be^{jmwot})^* dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T B^2 e^{jmwot - jmwot}\, dt = \frac{B^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt$$

$$= \left(\frac{B^2}{T}\right)\left(t\Big|_{-T/2}^{T/2}\right) = \left(\frac{B^2}{T}\right)\left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{B^2}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T} = B^2 //$$

$$-\frac{2}{T}\int_T (Ae^{-jnwot})(Be^{jmwot})^* dt = -\frac{2}{T}\int ABe^{-jnwot} e^{-jmwot} dt$$

$$= -\frac{2}{T} AB \int e^{-jwot(n+m)}\, dt$$

* dos posibles casos.

- Caso # 1 ; $n = -m$

$$-\frac{2}{T} AB \int_T e^{-jwot(n+m)}\, dt = -\frac{2}{T} AB \int_T e^{-jwot(-m+m)}\, dt$$

$$= -\frac{2}{T} AB \int_T e^0\, dt = -\frac{2}{T} AB \int_{-T/2}^{T/2} dt = \left(-\frac{2}{T}AB\right)\left(t\Big|_{-T/2}^{T/2}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{T}AB\right)\left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) = -\frac{2}{\cancel{T}} AB \cdot \cancel{T} = -2AB$$

• Caso #2: $n \neq -m$

$$-\frac{2}{T}AB\int_T e^{-Jw_0t(n+m)}\,dt = -\frac{2}{T}AB\int_{-T/2}^{T/2} e^{-Jw_0t(n+m)}\,dt$$

$$= -\frac{2}{T}AB\left(\frac{e^{-Jw_0t(n+m)}}{-Jw_0(n+m)}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} = -\frac{2}{T}AB\left[\frac{\cos(w_0t(n+m)) - J\operatorname{sen}(w_0t(n+m))}{-Jw_0(n+m)}\right]\Bigg|_{-T/2}^{T/2}$$

Pero como $n, m \in \mathbb{Z}$ luego $n+m = p \rightarrow p \in \mathbb{Z}$

$$= -\frac{2}{T}AB\left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}p\right) - J\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}p\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)p\right) + J\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)p\right)}{-Jw_0p}\right]$$

$$= -\frac{2}{T}AB\left[\frac{\cos(\pi p) - J\operatorname{sen}(\pi p) - \cos(\pi p) + J\operatorname{sen}(-\pi p)}{-Jw_0p}\right]$$

Ya que coseno es par

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

$$= -\frac{2}{T}AB\left[\frac{\cos(\pi p) - \cos(\pi p) - J\operatorname{sen}(\pi p) + J\operatorname{sen}(-\pi p)}{-Jw_0p}\right]$$

$$= -\frac{2}{T}AB\,\frac{J\operatorname{sen}(-\pi p) - J\operatorname{sen}(\pi p)}{-Jw_0p}$$

$\operatorname{sen}(\pi p)$ $p \in \mathbb{Z}$ es igual a cero por definición.

$$= -\frac{2AB}{T}\left[\frac{0}{-Jw_0p}\right] = 0.$$

Para las 2 señales tenemos 2 valores posibles.

• Caso 1: $n = -m$

$$\bar{P}_e = A^2 + B^2 - 2AB$$
$$= (A-B)^2$$

• Caso 2: $n \neq -m$

$$\bar{P}e = A^2 + B^2$$

El ejercicio dice que

$$d^2 = (x_1, x_1) = \bar{P}e$$

Entonces.

$$d^2 = \begin{cases} (A-B)^2, & n=-m \\ A^2 + B^2, & n \neq -m \end{cases}$$

$$d = \sqrt{d^2} = \begin{cases} |A-B|, & n=-m \\ \sqrt{A^2+B^2} & n \neq -m \end{cases}$$

2. Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor analogo digital con frecuencia de muestreo de 5kHz y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\operatorname{sen}(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Realizar la simulación del proceso de discretización (incluyendo al menos tres periodos de $x(t)$). En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada

Desarrollo

Para discretizar una señal $x(t)$, $t = nTs$ donde Ts es el periodo de muestra y se encuentra de la siguiente manera:

$Ts = \frac{1}{Fs}$ → la frecuencia de muestreo, que para nosotros es de 5kHz

$$Ts = \frac{1}{5000} = 2 \times 10^{-4}$$

Ahora.

$$x(nTs) = 3\cos(1000\pi(2\times10^{-4}n)) + 5\cos(3000\pi(2\times10^{-4}n)) + 10\cos(11000(2\times10^{-4}n))$$

$x(n) = 3\cos(0{,}2\pi n) + 5\,sen(0{,}6\pi n) + 10\cos(2{,}2\pi n)$

La nueva variable discreta n podemos llamarla α y recordando lo observado en clase.

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi$$

Para este caso existe una α que no satisface la condición, por eso le resto 2π ya que de lo contrario estaríamos observando la replica.

$$2{,}2\pi - 2\pi = 0{,}2\pi$$

Para calcular α originalmente se hizo:

$$WTS = 0{,}2\pi \rightarrow 2\pi F = \frac{0{,}2\pi}{TS}$$

$$F = \frac{0{,}2\pi \cdot 5000}{2\pi} = 500\,Hz$$

originalmente esta señal era

$$2\pi F = 11000\pi \rightarrow F = 5500\,Hz$$

Esto significa que de los 5500 Hz solo estamos observando 500Hz, significa que no se cumple Nyquist porque:

$$F_{max} = 5500\,Hz \text{ y } F_S = 5000\,Hz$$

$$F_S < 2F_{max}$$

Para llegar a una solución a este ejercicio es ideal que el conversor cumpla Nyquist.

Cuantización (4 bits)

Numero de niveles $L = 2^4 = 16$, para evitar sobrecarga, acotamos el rango. El maximo posibles (suma de amplitudes) es $|x(t)| \leq 3 + 5 + 10 = 18$

- Suposición estandar: Rango con $x_{max} = 18$
- Paso (LSB): $\Delta = \frac{2x_{max}}{L-1} = \frac{36}{15} = 2.4S$ seran los saltos

Lo demas sera desarrollado en python.

3. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_F]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se puede calcular según:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_F) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_F} x''(t) e^{-Jnw_0t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}$$

¿Como se puede calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonometrica de Fourier?

Desarrollo

Utilizamos todos los armonicos

$$x(t) = \sum C_n e^{-Jnwot}$$

derivamos

$$x'(t) = \sum C_n e^{-Jnwot} (-Jnwot)$$

derivamos por segunda vez

$$x''(t) = \sum C_n e^{-Jnwot} (-Jn wo)^2$$

$$= \sum C_n e^{-Jnwot} (J^2 n^2 wo^2)$$

$$= \sum \underbrace{(-C_n n^2 wo^2)}_{C_n'} e^{-Jnwot}$$

$$C_n' = \frac{1}{T} \int_T x''(t) e^{-Jnwot} dt$$

$$-C_n n^2 wo^2 = \frac{1}{T} \int_T x''(t) e^{-Jnwot} dt$$

$$C_n = -\frac{1}{T n^2 wo^2} \int_T x''(t) e^{-Jnwot} dt$$

Pero $T = (t_F - t_i)$

$$C_n = -\frac{1}{(t_F - t_i) n^2 wo^2} \int_T x''(t) e^{-Jnwot} dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_F) n^2 wo^2} \int_T x''(t) e^{-Jnwot} dt$$

//

La otra Forma es:

$$x(t) = \sum a_n \cos(nw_0t) + b_n \operatorname{Sen}(nw_0t)$$

Si lo derivamos obtenemos.

$$x'(t) = \sum -a_n \operatorname{Sen}(nw_0t) n w_0 + b_n \cos(nw_0t) n w_0$$

Y su Segunda derivada es:

$$x''(t) = \sum \underbrace{-n^2 w_0^2 a_n}_{a_n'} \cos(nw_0t) \underbrace{- n^2 w_0^2 b_n}_{b_n'} \operatorname{Sen}(nw_0t)$$

Por defición

- $a_n' = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\cos(nw_0t)dt$

$$-n^2 w_0^2 a_n = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\cos(nw_0t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{(t_i - t_F)n^2 w_0^2}\int_T x''(t)\cos(nw_0t)dt \; //$$

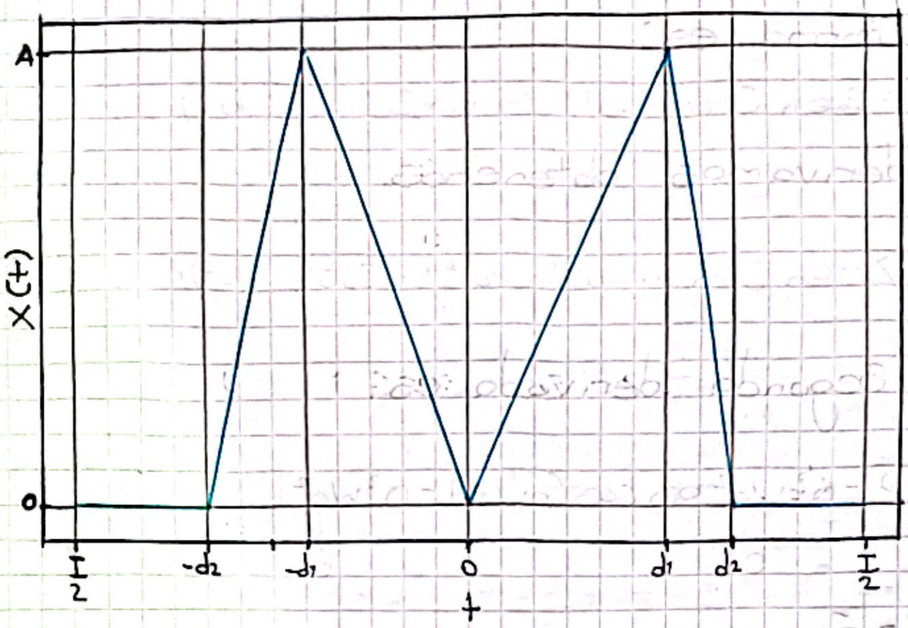
- $b_n' = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\operatorname{Sen}(nw_0t)dt$

$$-n^2 w_0^2 b_n = \frac{2}{T}\int_T x''(t)\operatorname{Sen}(nw_0t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{(t_i - t_F)n^2 w_0^2}\int_T x''(t)\operatorname{Sen}(nw_0t)dt \; //$$

4. Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, Imaginaria, magnitud, Fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x''(t)$ para la Señal $x(t)$ en la Figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$ presente las simulaciones de python respectivas

→



Desarrollo

La señal $x(t)$ es una periodica de periodo $T_0 = T$ (asumiendo que la figura muestra un periodo fundamental, que va de $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$) y es una función par, ya que $x(-t) = x(t)$.

La señal se define a trozos en el intervalo fundamental $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

$$x(t) \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < -d_2 \\ A\,\dfrac{t+d_2}{d_2-d_1} & \text{si } -d_2 \leq t < -d_1 \\ -A\,\dfrac{t}{d_1} & \text{si } -d_1 \leq t < 0 \\ A\,\dfrac{t}{d_1} & \text{si } 0 \leq t < d_1 \\ -A\,\dfrac{t-d_2}{d_2-d_1} & \text{si } d_1 \leq t < d_2 \\ 0 & \text{si } d_2 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Ahora calcularemos la primera derivada:

$$x'(t) \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < -d_2 \\ \frac{A}{d_2 - d_1} & \text{si } -d_2 < t < -d_1 \\ -\frac{A}{d_1} & \text{si } -d_2 < t < 0 \\ \frac{A}{d_1} & \text{si } 0 < t < d_1 \\ -\frac{A}{d_2 - d_1} & \text{si } d_1 < t < d_2 \\ 0 & \text{si } d_2 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Para la segunda $x''(t)$ son impulsos de dirac $\delta(t)$ en los puntos donde $x'(t)$ tiene un salto, con una area igual a la magnitud del salto (valor despues del salto menos valor antes del salto

$$x''(t) \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < -d_2 \\ \frac{A}{d_2-d_1}\delta(t+d_2) & \text{si } t=-d_2 \\ 0 & \text{si } -d_2 < t < -d_1 \\ -A\frac{d_2}{d_1(d_2-d_1)}\delta(t+d_1) & t=-d_1 \\ 0 & \text{si } -d_1 < t < 0 \\ 2\frac{A}{d_1}\delta(t) & t=0 \\ 0 & \text{si } 0 < t < d_1 \\ -A\frac{d_2}{d_1(d_2-d_1)}\delta(t-d_1) & t=d_1 \\ 0 & \text{si } d_1 < t < d_2 \\ \frac{A}{d_2-d_1}\delta(t-d_2) & t=d_2 \end{cases}$$

Calculo C_n

El coeficiente de Fourier C_n de $x''(t)$ es

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x''(t)e^{-Jnw_0t}\,dt$$

Sustituyendo los valores de $x''(t)$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2}\left(\frac{A}{d_2-d_1}[\delta(t+d_2)+\delta(t-d_2)] - A\frac{d_2}{d_1(d_2-d_1)}[\delta(t+d_1)+\delta(t+d_1)] + \frac{2A}{d_1}\delta(t)\right)e^{-Jnw_0t}\,dt$$

Usando la propiedad del tamizado $\int F(t)\delta(t-t_0)dt = F(t_0)$:

$$C_n = \frac{1}{T}\left[\frac{A}{d_2-d_1}(e^{-Jnw_0(-d_2)}+e^{-Jnw_0d_2}) - A\frac{d_2}{d_1(d_2-d_1)}(e^{-Jnw_0(-d_1)}+e^{-Jnw_0d_1}) + \frac{2A}{d_1}e^{-Jnw_0(0)}\right.$$

Usando $e^{J\theta}+e^{-J\theta} = 2\cos(\theta)$

$$C_n = \frac{1}{T}\left[\frac{A}{d_2-d_1}(2\cos(nw_0d_2)) - A\frac{d_2}{d_1(d_2-d_1)}(2\cos(nw_0d_1)) + \frac{2A}{d_1}\right]$$

$$C_n = \frac{2A}{T}\left[\frac{\cos(nw_0d_2)}{d_2-d_1} - \frac{d_2}{d_1(d_2-d_1)}\cos(nw_0d_1) + \frac{1}{d_1}\right]$$

Formula de C_n para $n \neq 0$

$$C_n = -\frac{1}{(nw_0)^2}c_n$$

Su magnitud viene dada por

$$|C_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

Y al no tener parte imaginaria $b_n=0$ luego

$$|C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2}}{2} = \frac{|a_n|}{2} = \frac{|2\,Re\{C_n\}|}{2}$$

o sencillamente la magnitud de la señal es:

$$C_n = -\frac{2A}{(nw_0)^2 T}\left[\frac{\cos(nw_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{d_2}{d_1(d_2-d_1)}\cos(nw_0 d_1) + \frac{1}{d_1}\right]$$

Mientras que el angulo sera:

$$\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & a_n > 0 \\ \pi & \text{si} & a_n < 0 \\ \text{Indefenido} & \text{si} & a_n = 0 \end{array}$$

El error relativo se calcularo por medio de python si asumimos que la formula directa $X_{dir}[n]$ es el valor de referencia, y la formula por doble derivada $x[n]$ es la estimacion

$$E(n) = \frac{|x(n) - X_{dir}(n)|}{|X_{dir}(n)|}$$