Ronaldo Vieira Lobato

Introdução ao formalismo da Relatividade Geral

Brasil
2016

Sumário

1 A RELATIVIDADE DE EINSTEIN 5
1.1 Introdução 5
1.2 O princípio da relatividade de Einstein 7
1.3 Dilatação temporal e contração de Lorentz 7
1.4 Aberração da luz e efeito Doppler relativístico 7
1.5 Intervalo 7
1.6 Cinemática relativística 7

2 INTRODUÇÃO MATEMÁTICA AO ESTUDO DA RELATIVIDADE NUM ESPAÇO QUADRIDIMENSIONAL 9
2.1 Vetores e tensores no espaço tridimensional 9
2.2 O espaço de Minkowski 9
2.3 Algumas aplicações na cinemática relativística 9
2.3.1 Efeito Compton 9
2.3.2 Foguete relativístico 9
2.3.3 Movimento retilíneo sob aceleração constante 9

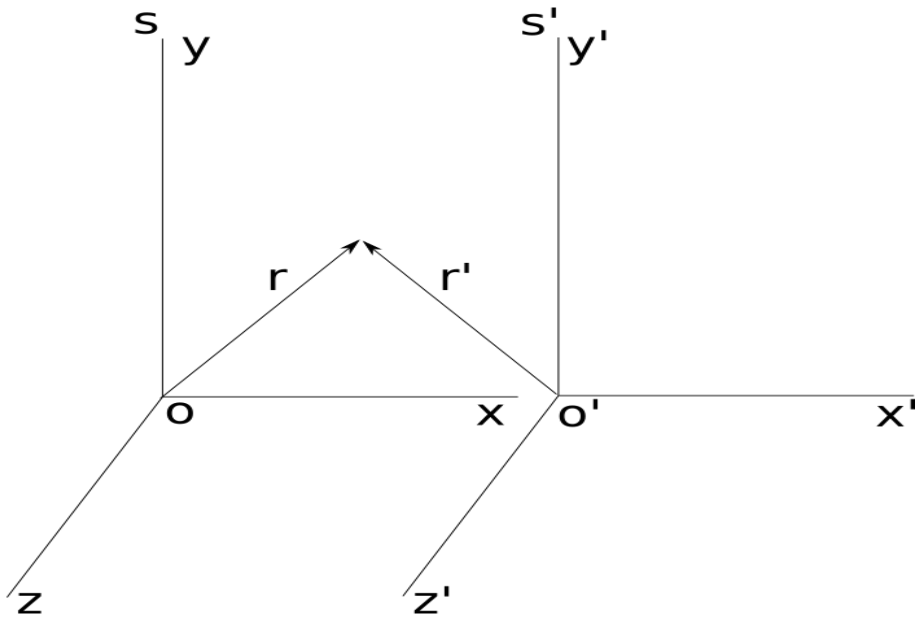
3 FORMULAÇÃO COVARIANTE DA TEORIA ELETROMAGNÉTICA 11
3.1 Introdução 11
3.2 A covariância do eletromagnetismo 11
3.3 Campo eletromagnético devido a uma carga em movimento 11
3.4 Tensor energia-momento 11

4 ASPECTOS GERAIS DO GRUPO DE LORENTZ 13
4.1 As transformações de Lorentz novamente 13
4.2 O grupo de Lorentz 13
4.3 Representação spinorial do grupo de Lorentz 13
4.4 A álgebra da supersimetria 13

1 A Relatividade de Einstein

1.1 Introdução

Vamos começar relembrando o conceito de *referencial inercial*. Para tal, basta relembrar a primeira lei de Newton, i.e., consideremos um corpo que se move em relação a um certo sistema de referência e que não esteja sujeito a nenhuma interação. Se a velocidade do corpo for constante, este sistema é dito inercial. Obviamente, outros sistemas que se movam com velocidades constantes em relação a este serão também inerciais.
Um outro ponto importante a ser relembrado é o *princípio da relatividade de Galileo*, segundo o qual as leis da natureza devam ser as mesmas para todos os referenciais inerciais. Em outras palavras, as equações que expressam determinada lei da natureza, num certo sistema de referência inercial, possuem a mesma forma quando vistas de um outro referencial inercial. Quando isto acontece, elas são ditas *covariante*.
É importante, agora, saber como se faz as transformações de um sistema inercial a outro. Apenas para nos situarmos melhor, dentro deste desenvolvimento que está sendo apresentado, relembremos mais uma coisa, as *transformadas de Galileo*. Sejam dois sistemas de referência inerciais S e S'. Consideremos que S' tenha velocidade $\vec{V}$ (constante) em relação a S. Um determinado evento[1] é localizado por S pelo vetor posição $\vec{r}$ e por S' pelo vetor $\vec{r}'$. A figura a seguir mostra-nos isto mais claramente. Devido à isotropia



do espaço e, consequentemente, sem perda de generalidade, consideramos os eixos x e x'

[1] Um evento é algo que ocorre num determinado ponto do espaço e num determinado tempo.

coincidentes. Imediatamente podemos escrever

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{OO'}. \tag{1.1}$$

Considerando que em $t = 0$, O e O' estejam coincidentes, temos

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde acrescentamos que o instante em que o evento ocorre para um observador em S é o mesmo para um observador em S'. De acordo com o que foi exposto até agora, não há motivo algum para que esses tempos sejam diferentes. Conforme veremos mais adiante, isto se deve porque, neste estágio, a velocidade de propagação das interações é considerada infinita. As relações (1.2) são conhecidas como *transformadas de Galileo*.

É imediato verificar que a mecânica Newtoniana satisfaz ao princípio da relatividade de Galileo. Consideremos, no referencial S, um sistema de partículas interagindo via potenciais do tipo $V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$. Ao estabelecer que o potencial de interação entre duas partículas depende, apenas, da distância entre eles, estamos, indiretamente, assumindo que a velocidade de propagação das interações é infinita. A força resultante sobre uma certa partícula i é dada por

$$\vec{F}_i = -\nabla_i \sum_j V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \tag{1.3}$$

onde o símbolo ∇_i representa o operador nabla expresso em termos das coordenadas da partícula i. A dinâmica da partícula i é dada pela segunda lei de Newton

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -\nabla_i \sum_j V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \tag{1.4}$$

Usando as transformadas de Galileo e tendo conta que V é constante, temos $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}_i'}{\partial t'}$, $\nabla_i = \nabla_i'$ e $\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_i' - \vec{r}_j'$. Portanto, no referencial S' a dinâmica da partícula é dada pela relação

$$m_i \frac{dv_i'}{dt'} = -\nabla_i' \sum_j V_{ij}(|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|), \tag{1.5}$$

o que mostra a invariância da teoria para os dois referenciais inerciais S e S'. Assim, é impossível determinar a velocidade absoluta de um referencial inercial por experiências mecânicas.

Vejamos, agora, se a teoria eletromagnética satisfaz ao princípio da relatividade de Galileo, o que significa verificar se as equações de Maxwell possuem a mesma dependência funcional sob as transformações (1.2). Na verdade, não estamos em condições de tratar por completo este assunto no momento, pois não sabemos como os campos se transformam. Entretanto, podemos obter algumas informações analisando a equação da onda. Vista do referencial S, esta equação é dada por

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \tag{1.6}$$

onde Φ é um escalar (invariante sob transformações de Galileo). Vejamos, agora, a forma desta equação quando se passa para o referencial S', através das transformadas de Galileo.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}. \tag{1.7}$$

Como $\frac{\partial x'}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y'}{\partial x} = 0 = \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \tag{1.8}$$

e similarmente

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \tag{1.9}$$

em consequência,

$$\nabla^2 = \nabla'^2. \tag{1.10}$$

Temos, ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'} & \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.2 O princípio da relatividade de Einstein

1.3 Dilatação temporal e contração de Lorentz

1.4 Aberração da luz e efeito Doppler relativístico

1.5 Intervalo

1.6 Cinemática relativística

2 Introdução matemática ao estudo da relatividade num espaço quadridimensional

2.1 Vetores e tensores no espaço tridimensional

2.2 O espaço de Minkowski

2.3 Algumas aplicações na cinemática relativística

2.3.1 Efeito Compton

2.3.2 Foguete relativístico

2.3.3 Movimento retilíneo sob aceleração constante

3 Formulação covariante da teoria eletromagnética

3.1 Introdução

3.2 A covariância do eletromagnetismo

3.3 Campo eletromagnético devido a uma carga em movimento

3.4 Tensor energia-momento

4 Aspectos gerais do grupo de Lorentz

4.1 As transformações de Lorentz novamente

4.2 O grupo de Lorentz

4.3 Representação spinorial do grupo de Lorentz

4.4 A álgebra da supersimetria