ΕΚΠΑ, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Τμήμα Άρτιων

Εαρινό Εξάμηνο 2019-2020
Εργασία 1

Παραδώστε τις λύσεις όλων των ασκήσεων σε ένα αρχείο pdf (ή jpg) στο e-class, κατά προτίμηση δακτυλογραφημένες σε Latex (ή Word).

1. Έχετε να επιλέξετε ανάμεσα στους παρακάτω αλγορίθμους, που επιλύουν το πρόβλημα P διάστασης n:

- Τον αλγόριθμο A, που διαιρεί το αρχικό πρόβλημα σε 4 υποπροβλήματα διάστασης $\frac{n}{2}$, επιλύει αναδρομικά κάθε υποπρόβλημα και συνδυάζει τις λύσεις σε χρόνο $\Theta(\frac{n^2}{logn})$.
- Τον αλγόριθμο B, που διαιρεί το αρχικό πρόβλημα σε 9 υποπροβλήματα διάστασης $\frac{n}{3}$, επιλύει αναδρομικά κάθε υποπρόβλημα και συνδυάζει τις λύσεις σε χρόνο $\Theta(n^2)$.
- Τον αλγόριθμο C, που διαιρεί το αρχικό πρόβλημα σε $\sqrt{n}$ υποπροβλήματα διάστασης $\sqrt{n}$, επιλύει αναδρομικά κάθε υποπρόβλημα και συνδυάζει τις λύσεις σε γραμμικό χρόνο.

Ποιοι είναι οι χρόνοι εκτέλεσης αυτών των αλγορίθμων; Δίνεται $T(1) = 1$.

Ποιον θα επιλέγατε;

2. Υποθέστε ότι έχετε $k = 2^r, r > 0$, ταξινομημένες ακολουθίες, η καθεμία με n στοιχεία, και θέλετε να τις συνδυάσετε σε μία ταξινομημένη ακολουθία με kn στοιχεία. Δώστε μία αποδοτική λύση σε αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική 'Διαίρει και Βασίλευε'. Ποια είναι η χρονική πολυπλοκότητα της λύσης σας;

3. Δίνονται n μη κενά κλειστά διαστήματα φυσικών αριθμών: $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$. Δυο διαστήματα λέγονται φωλιασμένα όταν το ένα είναι υποσύνολο του άλλου. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο (σε φυσική γλώσσα) που υπολογίζει το πλήθος των ζευγών φωλιασμένων διαστημάτων στο $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και να υπολογίσετε την πολυπλοκότητά του. Παράδειγμα: για τα διαστήματα [1, 8], [2, 3], [3,4], [7,12], το πλήθος είναι 2, αφού $[2, 3] \subset [1, 8], [3, 4] \subset [1, 8]$.

4. Θεωρήστε ότι σας δίνεται ένας πίνακας με όλους τους ακέραιους από το 0 ως το n εκτός από έναν. Έστω επίσης ότι $n = 2^k - 1$ για κάποιο ακέραιο k. Σχεδιάστε αλγόριθμο τύπου 'Διαίρει και Βασίλευε', που βρίσκει τον αριθμό που λείπει. Δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε αλγορίθμους ταξινόμησης.
Βοήθεια: Θεωρήστε γνωστό ότι μπορείτε να βρείτε τον διάμεσο ενός πίνακα σε χρόνο $O(n)$.

5. Το πρόβλημα του Μέγιστου μερικού αθροίσματος (ΜΜΑ) ορίζεται ως εξής. Δίνεται πίνακας αριθμών $A[1, \ldots, n]$. Να βρεθούν οι τιμές i και j με $1 \leq i \leq j \leq n$ που μεγιστοποιούν το άθροισμα

$$\sum_{k=i}^{j} A[k].$$

Παράδειγμα: Αν $A = [4, -5, 6, 7, 8, -10, 5]$, τότε $i = 3$ και $j = 5$ (καθώς 6+7+8=21).

Για να σχεδιάσουμε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο για το ΜΜΑ εισάγουμε το πρόβλημα $A(x)$, το οποίο συνίσταται στην εύρεση του δείκτη $j : x \leq j \leq n$ που μεγιστοποιεί την ποσότητα

$$\sum_{k=x}^{j} A[k].$$

Όμοια, το πρόβλημα $\Delta(x)$, που συνίσταται στην εύρεση του δείκτη $i : 1 \leq i \leq x$ που μεγιστοποιεί την ποσότητα

$$\sum_{k=i}^{x} A[k].$$

Παράδειγμα: $A = [4, -5, 6, 7, 8, -10, 5]$, τότε $A(4) = 5$ [7+8=15], $\Delta(7) = 3$ [6+7+8-10+5=16].

(α΄) Σχεδιάστε αλγορίθμους που υπολογίζουν τις συναρτήσεις A, Δ σε χρόνο $O(n)$.

(β΄) Δοθέντος αλγορίθμου που υπολογίζει την A σε χρόνο $O(n)$, σχεδιάστε έναν απλό αλγόριθμο χρόνου $O(n^2)$ για το ΜΜΑ.

(γ΄) Δοθέντων αλγορίθμων που υπολογίζουν τις A, Δ σε χρόνο $O(n)$, σχεδιάστε έναν αλγόριθμο τύπου ‘Διαίρει και Βασίλευε’ που λύνει το ΜΜΑ σε χρόνο $O(n \log n)$.

Διευκρίνηση: Οι αλγόριθμοι θα πρέπει να δοθούν σε φυσική γλώσσα και όχι σε κώδικα.