

## Εργασία 2 - Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Εαρινό 2020

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/5/2020

### 1 Ασκήση (20 μονάδες)

Έστω  $G$  ένας συνδεδεμένος, μη κατευθυνόμενος γράφος (γράφημα), του οποίου κάθε ακμή  $e$  έχει ένα θετικό μήκος  $\ell_e$ . Έστω  $G'$  ο ίδιος γράφος με το  $G$  με τη διαφορά ότι το μήκος της κάθε ακμής έχει αλλάξει από  $\ell_e$  σε  $2^{\ell_e}$ . Να αποδείξετε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω εκφράσεις

1. Αν ένα σύνολο των ακμών σχηματίζει ένα ΕΕΔ του  $G$ , τότε θα σχηματίζει επίσης ένα ΕΕΔ του  $G'$
2. Για κάθε ζευγάρι κορυφών  $s, t$ , αν  $P$  είναι το συντομότερο μονοπάτι από τον  $s$  στον  $t$  του  $G$ , αυτό θα είναι επίσης το συντομότερο μονοπάτι από τον  $s$  στον  $t$  του  $G'$

### 2 Ασκήση (20 μονάδες)

Δίνονται  $n$  ράβδοι χρυσού διαφορετικού βάρους. Θέλουμε να τις ενώσουμε σε μια. Το κόστος της ένωσης 2 ράβδων χρυσού είναι ίσο με το άθροισμα των βαρών τους. Δώστε έναν αποδοτικό άπληστο αλγόριθμο, που να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος. Δεν ζητείται απόδειξη ορθότητας. Να υπολογιστεί η πολυπλοκότητα.

### 3 Ασκήση (30 μονάδες)

Είναι ώρα που όλοι στο αγρόκτημα ξυπνάνε, το οποίο σημαίνει ότι είναι ώρα για το πρωινό άρμεγμα γάλακτος και ώρα για φαγητό και νερό από την ταϊστρα. Οι αγελάδες του αγρότη Κώστα (σε περίπτωση που δεν το έχετε ήδη καταλάβει) είναι περίεργα πλάσματα και θέλουν να κάνουν πάντα αυτές τις τρεις δουλειές με μια συγκεκριμένη σειρά. Είναι επίσης όλες διαφορετικές, οπότε η καθεμιά χρειάζεται το δικό της χρόνο για να την αρμέξεις, να φάει και να πιεί νερό. Δυστυχώς, ο αγρότης Κώστας μπορεί να αρμέγει μόνο μια αγελάδα τη φορά, το οποίο σημαίνει ότι οι περισσότερες αγελάδες θα πρέπει να περιμένουν πάρα πολύ ώρα μέχρι να φτάσει η στιγμή να φάνε και να πιούν νερό. Από την άλλη πλευρά, η ταϊστρα είναι αρκετά μεγάλη οπότε υπάρχει αρκετός χώρος για να φάνε και να πιούν νερό όλες οι αγελάδες, οπότε είναι καλό να υπάρχουν περισσότερες από μια αγελάδες που τρώνε ή πίνουν την ίδια χρονική στιγμή. Ο αγρότης Κώστας θέλει να τελειώσει τη διαδικασία για ολόκληρο το κοπάδι του το συντομότερο δυνατό, οπότε ψάχνει να βρει ποια είναι η καλύτερη σειρά για να αρμέξει τις αγελάδες του.

Πιο μαθηματικά: Δίνοντας μια λίστα  $n$  τριάδων  $(m_i, e_i, d_i)$  που αντιστοιχούν στους χρόνους που χρειάζεται η  $i$ -οστή αγελάδα για να την αρμέξεις, να φάει και να πιεί νερό, ψάχνουμε να βρούμε τη

διατάξη την οποία θα έχουν οι αγελάδες που θα ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο που θα χρειαστεί η τελευταία αγελάδα ώστε να ολοκληρώσει και τις τρεις δραστηριότητες. Είναι ο αλγόριθμος σας βελτιστός; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Να υπολογιστεί η πολυπλοκότητα.

#### **4 Άσκηση (30 μονάδες)**

Δίνεται συνεκτικός κατευθυνόμενος γράφος  $G$  με θετικά βάρη στις ακμές. Δώστε έναν αποδοτικό άπληστο αλγόριθμο, που να επιστρέφει το μήκος του συντομότερου κύκλου στο  $G$ . (Αν το  $G$  άκυκλο θα πρέπει να το αναγνωρίζει.) Τι πολυπλοκότητα έχει ο αλγόριθμός σας;

**Γενική Παρατήρηση:** Δεν θέλουμε κώδικα αλλά αλγόριθμο σε φυσική γλώσσα.