

Εργασία 3 - Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Εαρινό 2020

1 Άσκηση 25 Μονάδες

Έστω δυο πεπερασμένες συμβολοσειρές $X = \langle x_1 x_2 \dots x_n \rangle$ και $Y = \langle y_1 y_2 \dots y_m \rangle$. Επιθυμούμε να βρούμε το μήκος της Μέγιστης Κοινής Υποσυμβολοσειράς, δηλαδή το μεγαλύτερο k για το οποίο υπάρχουν δείκτες i και j με $x_i x_{i+1} \dots x_{i+k-1} = y_j y_{j+1} \dots y_{j+k-1}$.

Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο Δυναμικού Προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα. Τι πολυπλοκότητα έχει ο αλγόριθμός σας;

2 Άσκηση 25 Μονάδες

Έστω $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ μια ακολουθία n θετικών ακεραίων. Το σύνολο δεικτών $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ονομάζεται ανεξάρτητο αν για κάθε ζεύγος δεικτών $i, j \in I$, $|i - j| > 1$, δηλαδή το I δεν περιέχει διαδοχικούς δείκτες. Το βάρος $W(J)$ ενός συνόλου δεικτών $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ είναι το άθροισμα των αντίστοιχων x_i , δηλαδή $W(J) = \sum_{i \in J} x_i$.

Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο Δυναμικού Προγραμματισμού που να υπολογίζει ένα ανεξάρτητο σύνολο μέγιστου βάρους. Τι πολυπλοκότητα έχει ο αλγόριθμός σας;

3 Άσκηση 25 Μονάδες

Ως υπεύθυνος δικτύου μιας αλυσίδας εστιατορίων, πρέπει να επιλέξετε που θα ανοίξουν καταστήματα κατά μήκος της νέας εθνικής οδού. Έχουν προεπιλεγεί n υποψήφια θέσεις, και για κάθε υποψήφια θέση i , $i = 1, \dots, n$, έχει υπολογισθεί το αναμενόμενο κέρδος από το κατάστημα στη θέση i με βάση το αν θα ανοίξουν άλλα καταστήματα σε γειτονικές θέσεις. Αν δεν ανοίξει κατάστημα σε καμία από τις θέσεις $i - 1$ και $i + 1$, το αναμενόμενο κέρδος από το κατάστημα στη θέση i είναι a_i , αν ανοίξει κατάστημα σε μία από τις θέσεις $i - 1$ και $i + 1$, το αναμενόμενο κέρδος είναι b_i , και αν ανοίξουν καταστήματα σε αμφότερες τις θέσεις $i - 1$ και $i + 1$, το αναμενόμενο κέρδος είναι c_i . (τα c_1 και c_n δεν ορίζονται, και για κάθε θέση i , ισχύει ότι $a_i \geq b_i \geq c_i$.)

Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο Δυναμικού Προγραμματισμού που με είσοδο τις τριάδες (a_i, b_i, c_i) $i = 1, \dots, n$, επιλέγει τις θέσεις, που θα ανοίξουν τα καταστήματα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος. Τι πολυπλοκότητα έχει ο αλγόριθμός σας;

4 Άσκηση 25 Μονάδες

Θέλετε να επισκεφτείτε μια ακολουθία από N αξιοθέατα στη Θεσσαλονίκη η οποία, ως γνωστόν, δεν έχει μετρό. Δεν έχετε αυτοκίνητο και τα λεωφορεία έχουν απεργία. Οπότε οι επιλογές σας είναι ή ταξί,

στο οποίο πληρώνετε r Ευρώ ανά χιλιόμετρο ή μια νέα υπηρεσία της Μούφερ η οποία για ένα σάνταρ ποσό B σας πηγαίνει σε οποιουδήποτε 5 διαδοχικούς προορισμούς, ανεξάρτητα από τις μεταξύ τους αποστάσεις.

Οπότε, είσοδος είναι η ακολουθία από τους N προορισμούς (τους οποίους πρέπει να επισκεφτείτε με τη σειρά τους στην ακολουθία) και οι $N - 1$ αποστάσεις μεταξύ των διαδοχικών προορισμών. Εξοδος είναι μια ανάθεση της καθεμιάς από τις $N - 1$ διαδρομές σε ταξί ή Μούφερ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος και, επιπλέον, με τον περιορισμό ότι κάθε φορά που παίρνετε μούφερ κάνετε ακριβώς 4 διαδρομές (5 διαδοχικοί προορισμοί). Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο Δυναμικού Προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα. Τι πολυπλοκότητα έχει ο αλγόριθμός σας;

Διευκρίνιση: Οι αλγόριθμοι θα πρέπει να δωθούν σε φυσική γλώσσα και όχι σε κώδικα.