Εργασία 4 - Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα Εαρινό 2020
Ιωάννης Ροβιθάκης | sdi1800164

Άσκηση 1:
Διαγράφοντας μια ακμή (**e** που ενώνει δύο κόμβους: **L** και **R**) , είτε η ροή που παρείχε ο κόμβος αυτός θα καλυφθεί από άλλη διαδρομή, είτε αν αυτό δεν είναι δυνατό, η συνολική ροή θα μειωθεί. Αφού από υπόθεση όλες οι χωρητικότητες είναι μοναδιαίες, διαγράφοντας μια μονο ακμή το μέγιστο που μπορούμε να μειώσουμε την συνολική ροή είναι κατά μια μονάδα μόνο.

Ο Αλγόριθμος που προτείνω για την εύρεση μέγιστης ροής στον **G** μετά τη διαγραφή της **e**:
i) Αν στην ακμή αυτή δεν υπήρχε ροή, τότε η συνολική ροή μετά τη διαγραφή μένει ίδια (**f**).
ii) Αν υπήρχε ροή στην **e**, δημιουργώ έναν νέο γράφο **G'** με τους ίδιους κόμβους με τον **G**, μόνο που ο **G'** περιέχει μόνο τις ακμές του **G** στις οποίες υπάρχει ροή, δηλαδή αυτές που "χρησιμοποιούνται". Στη συνέχεια, κάνουμε BFS στον **G'** στον κόμβο πηγή **s** και βρίσκουμε μια διαδρομή προς τον κόμβο **L** (χωρίς βλάβη γενικότητας) σε **O(m+n)**, και έναν ακόμα BFS από τον άλλο κόμβο **R** (χβγ) και βρισκουμε μια διαδρομή προς τον κομβο καταβόθρα **t**. Έτσι, αφού γνωρίζουμε ότι οι **L** και **R** συνδέονται μέσω της **e**, και στην περίπτωση αυτή η **e** έχει ροή, συνδυάζοντας τις δύο διαδρομές, στην πράξη έχουμε βρεί μια διαδρομή ροής από τον **s** στον **t** που να περνάει από τον κομβο **e** (Οι διαδρομές αυτές δεν είναι απαραίτητα μοναδικές, όποιες και να διαλέξουμε χβγ δεν επηρεάζουν το τελικό αποτέλεσμα).
iii) Οι χωρητικότητες είναι μοναδιαίες άρα για να διορθώσουμε τον γράφο θα πρέπει να "κλείσουμε" την ροή στην διαδρομή αυτή έστω και προσωρινά. Διατρέχουμε όλη την διαδρομή αυτή **στον G** και "κλεινουμε" τις ροές (**f(e)=0** για κάθε ακμή στη διαδρομή αυτή). με αποτέλεσμα η **συνολική ροή να μειωθεί κατα 1** (αφού ολες οι ακμές μοναδιαίες) (Απλά προσπελαυνουμε σειρά από κόμβους => **O(m)**)
iv) Διαγράφουμε την ακμή **e**
v) Τώρα που έχει αφαιρεθεί από τον γράφο η "επιρροή" της ακμής e, για να ελέγξουμε αν μπορεί η ροή να καλυφθεί από άλλη διαδρομή, υπολογίζουμε τον υπολειπόμενο γράφο **O(m+n)** και σε αυτόν κάνουμε BFS για να βρούμε δυνατό μονοπάτι επαύξησης από τον **s** στον **t.** Αν βρουμε τότε η συνολική ροή θα αυξηθεί πάλι σε **f**. Αν όχι τότε η ροή θα παραμείνει **f-1**, δηλαδή στην τελική η συνολική ροή θα μειωθεί κατά ένα.

Πολυπλοκότητα: **O(m+n).**

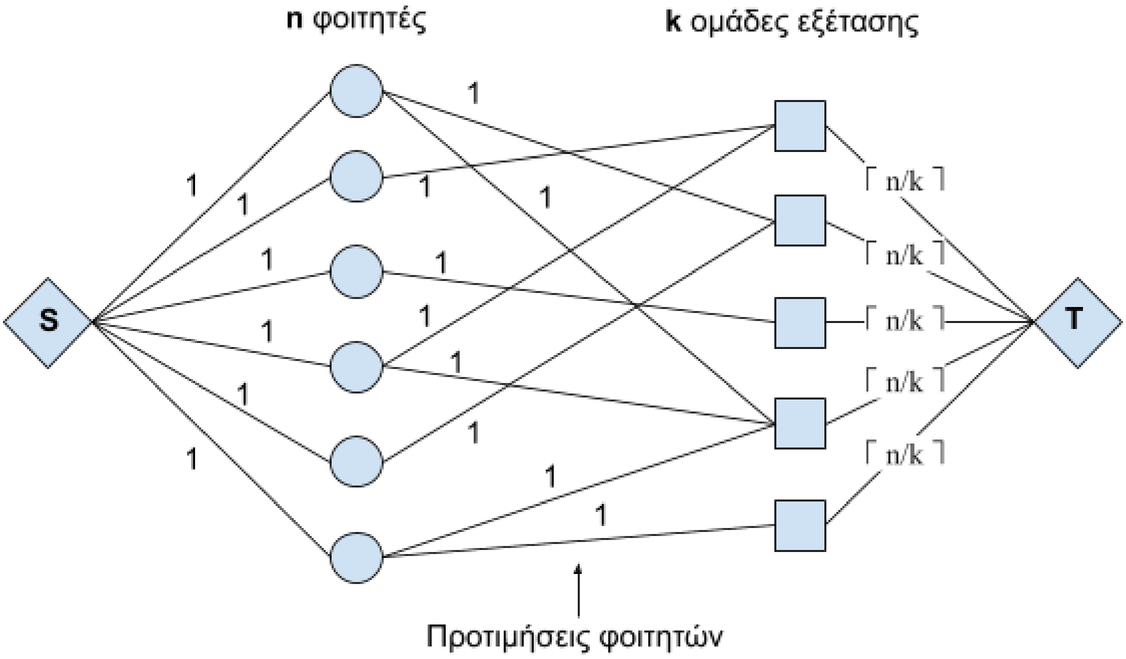
Άσκηση 2: Παρατηρούμε ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα ροής και συγκεκριμένα ταιριάσματος, προσθέτοντας έναν κόμβο πηγή S και έναν κόμβο καταβόθρα T.

> Κάθε φοιτητής τροφοδοτείται από την πηγή με μόνο μια μονάδα (χωρητικότητα = 1) αφού μπορεί να εξεταστεί σε μια μόνο ομάδα εξέτασης

> Κάθε φοιτητής έχει ένα σύνολο ακμών που τον συνδέουν με διαφορετικούς κόμβους από το σύνολο των ομάδων εξέτασης που συμβολίζουν τις προτιμήσεις του. Οι ακμές αυτές έχουν επίσης χωρητικότητα 1 για τον λόγο που εξηγήθηκε παραπάνω (Εναλλακτικά δουλεύει το ιδιο και με άπειρη χωρητικότητα για απλότητα χβγ εβαλα 1)

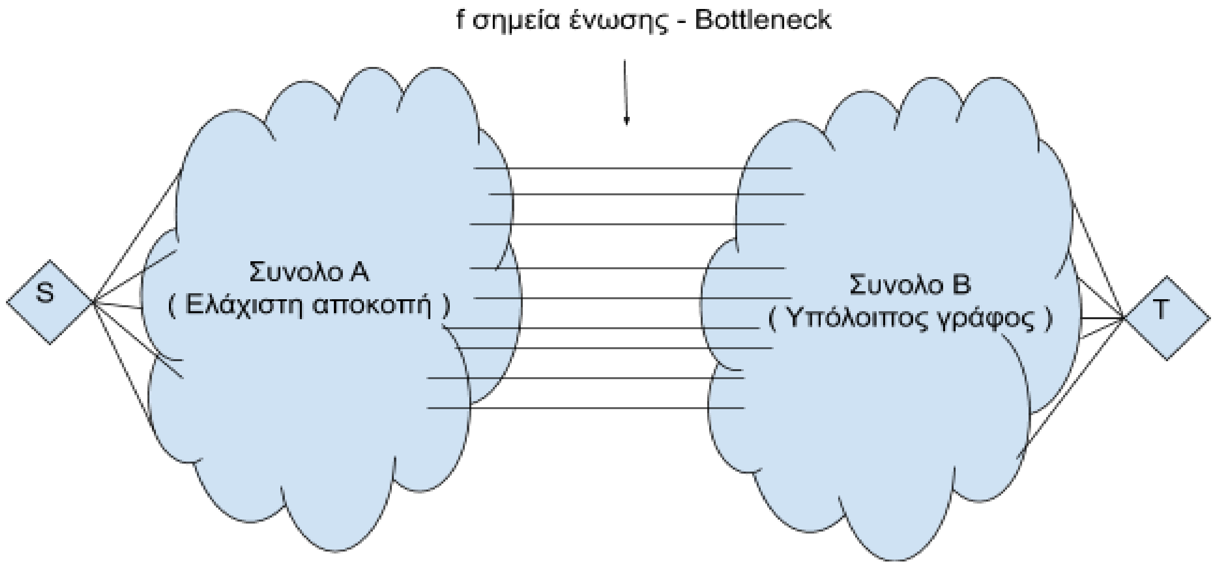
> Αφού θέλουμε οι φοιτητές να ισομοιραστούν, από τους n φοιτητές σύνολο, κάθε ομάδα εξέτασης θα έχει $\lceil n/k \rceil$ φοιτητές. (ταβάνι για την περίπτωση που δεν διαιρούνται ακριβώς, ωστε τελικά να μην περισσεύει κανείς) Συνεπώς θα θέσουμε την χωρητικότητα των ακμών που ενώνουν τις αίθουσες με την καταβόθρα σε $\lceil n/k \rceil$ ώστε να θέσουμε ένα όριο στο πόσους φοιτητές μπορεί να έχει κάθε αίθουσα.

> Το παρακάτω σχέδιο είναι μια τυχαία αναπαράσταση της παραπάνω μοντελοποίησης



Με βάση το μοντέλο που περιγράφηκε μπορούμε πλέον να βρούμε την λύση του προβλήματος μας με χρήση του αλγορίθμου **Ford–Fulkerson** (κλιμάκωσης χωρητικότητας) για τον υπολογισμό της μέγιστης ροής στον γράφο μας με πολυπλοκότητα **O(m^2)** (m = συνολικό πλήθος ακμών γράφου. Η πολυπλοκότητα του FF εξαρτάται και από το C αλλά στην περίπτωση αυτή είναι O(1)). Στη συνέχεια, αρκεί να ελέγξουμε αν η τιμή της μέγιστης ροής είναι ίση με το πλήθος n των φοιτητών. Αν είναι ίσα, καταλαβαίνουμε ότι κάθε φοιτητής “πέρασε την μοναδα του” στο σύνολο των διαθέσιμων ομάδων εξέτασης και κατα συνέπεια έγινε ταίριασμα το οποίο ικανοποίησε τις προτιμήσεις όλων των φοιτητών ενώ ταυτόχρονα το “φράγμα” που θέσαμε στο πλήθος φοιτητών σε κάθε ομάδα δεν περιόρισε τη ροή. Τελικά αν η μέγιστη ροή είναι ίση με το πλήθος των φοιτητών, το ταίριασμα που θέλουμε είναι εφικτό. Αν είναι διάφορα σημαίνει ότι έστω και ένας φοιτητής δεν μπορεί να ικανοποιηθεί και συνεπώς το ταίριασμα είναι αδύνατο. Η συνολική πολυπλοκότητα προκύπτει στην πράξη από την χρήση του **Ford–Fulkerson** και είναι **O(m^2).**

Άσκηση 3:
> Έστω ότι στον γράφο μας υπάρχει μία ροή με τιμή **f**:
> Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα όλων των ακμών είναι 1, οπότε προφανώς αφαιρώντας k κόμβους, η μέγιστη δυνατή μείωση στη ροή μπορεί να είναι μέχρι και k αλλα όχι παραπάνω.
> Επιθυμούμε την **μέγιστη** δυνατή μείωση, άρα ένα σύνολο κόμβων που να μειώνει την ροή **f** κατα **ακριβώς k**.
> Από θεώρημα μέγιστης ροής ελάχιστης αποκοπής γνωρίζουμε ότι η μέγιστη ροή σε έναν γράφο είναι ίση με την χωρητικότητα της ελάχιστης αποκοπής αφού αυτή αποτελεί το bottleneck του προβλήματος. Συνεπώς μπορούμε να απλοποιήσουμε την εικόνα του προβλήματος χωρίζοντας τους κόμβους σε δύο σύνολα: ένα A που περιέχει τους κόμβους του ελάχιστου συνόλου αποκοπής και ένα B που περιέχει όλους τους υπόλοιπους.
> Αφού γνωρίζουμε από υπόθεση ότι οι χωρητικότητα κάθε ακμής είναι 1, με κοινή λογική και με βάση το παραπάνω θεώρημα, έχουμε να “γεφυρώνουν” τα A και B, f μοναδιαίες ακμές οι οποίες επιτρέπουν συνολική ροή f (είναι το bottleneck).



> Προφανώς, ένας σίγουρος τρόπος για να πετύχουμε μέγιστη μείωση ροής είναι να αφαιρέσουμε ακμές από το σύνολο f ακμών που ενώνει τα A και B (πιο στενό bottleneck).
> Παρατηρώντας το σχήμα γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι αφαιρώντας μια οποιαδήποτε από τις f ακμές-γέφυρες μειώνουμε την χωρητικότητα της ελάχιστης ανακοπής κατά 1 και κατα συνέπεια και την συνολική ροή κατα 1.
> Άρα για να μειώσουμε τη συνολική ροή κατά ακριβώς k, αρκεί να αφαιρέσουμε οποιεσδήποτε k από τις f ακμές-γέφυρες.
> Αλγοριθμικά αυτό μπορεί να γίνει με εφαρμογή του αλγορίθμου **Ford–Fulkerson** (κλιμάκωσης χωρητικότητας) για την εύρεση του μέγιστης ροής σε **O(m^2)** και στη συνέχεια εύρεση ελάχιστου συνόλου αποκοπής σε **O(m+n)** όπου m το πλήθος των ακμών του γράφου και n το πλήθος των κόμβων. Στη συνέχεια, αρκεί να διαγράψουμε οποιεσδήποτε k από τις ακμές-γέφυρες με ένα άκρο στο σύνολο ανακοπής που βρήκαμε, μειώνοντας έτσι τη ροή κατά την μέγιστη δυνατή ποσότητα λύνοντας έτσι το πρόβλημα μας. (Συνολική πολυπλοκότητα **O(m^2)**)
(Παρατήρηση Αν k>=f τότε έχουμε πλήρη αποκοπή και η ροή σταματάει τελείως)