LICENCIATURA EM CIÊNCIA DE DADOS
2º ANO - 2º SEMESTRE

OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA

TRABALHO INDIVIDUAL 1

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJECTIVO:

PROGRAMAÇÃO LINEAR POR METAS - NÃO PREEMPTIVA E PREEMPTIVA

DOCENTE: MAFALDA DE PONTE

ALUNO: JOSÉ RICARDO DE ALMEIDA VALÉRIO **Nº** 112255


[1]

---

[1] Fonte da imagem usada na capa: https://www.freepik.com/free-vector/custom-style-script-website-optimization-coding-software-development-female-programmer-cartoon-character-working-adding-javascript-css-code_11669143.htm

ÍNDICE

Introdução

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito da unidade curricular de Otimização Heurística e marcou o meu primeiro contacto com os métodos de otimização multiobjetivo, em particular com a Programação Linear por Metas — tanto na sua versão não preemptiva como preemptiva.

O objetivo principal foi aplicar estes métodos a um caso prático: apoiar a agência de publicidade *Pubs* na definição de um plano de publicidade televisiva para a empresa *Cars*, que se dedica à comercialização de automóveis. Este plano tinha de respeitar várias restrições e procurar atingir metas associadas a diferentes públicos-alvo.

Ao longo do trabalho, fui construindo e ajustando modelos, aprendendo a interpretar os resultados obtidos e a tomar decisões com base neles. A parte prática foi feita com recurso ao Python e à biblioteca PuLP, o que também me permitiu consolidar competências na área da programação aplicada à otimização.

Mais do que chegar a uma única solução ideal, o desafio passou por explorar diferentes abordagens, perceber os seus efeitos e procurar soluções de compromisso entre os objetivos, aprendendo com o processo.

a) É possível determinar um plano de publicidade que respeite as condições impostas pela administração da Cars? Justifique a sua resposta.

Nesta questão o objetivo não é encontrar a melhor solução possível (isto é, otimizar alguma função), mas apenas verificar se existe pelo menos uma combinação de minutos de publicidade dos três tipos de anúncios (futebol, telenovela e horário nobre) que satisfaça todas as restrições impostas pela administração da empresa *Cars*.
Portanto, vamos averiguar a viabilidade do problema e descobrir se existe pelo menos uma solução.

Formulação matemática:

Sejam as variáveis de decisão definidas por:

x_1: número de minutos de anúncios do Tipo I (jogos de futebol).

x_2: número de minutos de anúncios do Tipo II (telenovelas).

x_3: número de minutos de anúncios do Tipo III (horário nobre).

As condições impostas (sujeito a) traduzem-se nas seguintes restrições:

- **Audiências mínimas (expressas em milhões de espectadores):**
    - **Audiência mínima para homens com rendimentos elevados (HRE):**
    $$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 20$$
    - **Audiência mínima para pessoas com rendimentos baixos (PRB):**
    $$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 30$$
    - **Audiência mínima para mulheres com rendimentos elevados (MRE):**
    $$2.5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 18$$

- **Custo máximo de publicidade (expresso em euros):**

$$100000x_1 + 60000x_2 + 75000x_3 \leq 565000$$

- **Tempo mínimo total de publicidade (expresso em minutos):**

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

- **Não negatividade:**

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

Resolução computacional:

O modelo foi implementado em Python utilizando a biblioteca PuLP, onde se definiu o problema linear referido acima com uma função objetivo constante (minimizar 112255), de modo a apenas testar se existe uma solução que satisfaça todas as restrições.

Após a execução do modelo, o solver devolveu o estado: ***Status: Infeasible [-1]***

Portanto, concluímos que não é possível encontrar um plano de publicidade viável. Por outras palavras, este resultado indica que **para o conjunto de restrições definido não existe qualquer combinação de valores não-negativos para** x_1, x_2 **e** x_3 que cumpra simultaneamente todas as exigências da empresa.

```
Questao_a):
MINIMIZE
112255
SUBJECT TO
HRE: 3 x1 + x2 + 2 x3 >= 20

PRB: 5 x1 + 3 x2 + 4 x3 >= 30

MRE: 2.5 x1 + 2 x2 + 3 x3 >= 18

Custo_Total: 100000 x1 + 60000 x2 + 75000 x3 <= 565000

Tempo_Min_Total: x1 + x2 + x3 >= 5

VARIABLES
x1 Continuous
x2 Continuous
x3 Continuous
```

```
status: Infeasible [-1]

Não é possível encontrar um plano de publicidade viável.
```

Figura 1 - Outputs do Programa da questão a)

b) Suponha que a administração da Cars está disposta a aceitar planos que não respeitem as condições (HRE), (PRB) e (MRE).

Nesta questão já é permitido relaxar as condições de audiência impostas pela administração da *Cars*, de forma a conseguirmos determinar um plano de publicidade que seja viável mesmo que viole o mínimo possível essas condições.

Ou seja:

- O plano **pode não cumprir totalmente** as metas de audiência para HRE, PRB e MRE (estas são agora ***restrições soft***).
- Mas queremos **minimizar o total de violação por defeito** dessas metas (ou seja, iremos ***precisar de criar variáveis de desvio negativo***).
- As restrições de **custo máximo** e **tempo mínimo** continuam obrigatórias (isto é, continuam como ***restrições hard***).

Reformulação do modelo anterior:

Foram adicionadas as variáveis de desvio negativo:

- d_1^- : Violação ou desvio por defeito da meta HRE (pelo menos 20 milhões)
- d_2^- : Violação ou desvio por defeito da meta PRB (pelo menos 30 milhões)
- d_3^- : Violação ou desvio por defeito da meta MRE (pelo menos 18 milhões)

  Sendo estas definidas por $d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^- \geq 0$ (medem o quanto falta para atingir os níveis de aspiração, isto é, cumprir a meta. Se for zero, a meta foi atingida ou superada).

E <u>as restrições de audiências foram reformuladas como metas</u> com desvios:

- $3x_1 + x_2 + 2x_3 + d_1^- \geq 20$ (Meta HRE)
- $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + d_2^- \geq 30$ (Meta PRB)
- $2.5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + d_3^- \geq 18$ (Meta MRE)

Recorrendo à Programação Linear por Metas, determine:

b1) dois planos de publicidade para a Cars através da minimização da soma dos desvios percentuais ponderados.
Explique detalhadamente a metodologia aplicada.
Comente os planos de publicidade apresentados.

Como o objetivo nesta questão é apresentar dois planos de publicidade através da *minimização da soma ponderada dos desvios percentuais*, e tendo em conta o modelo reformulado e referido anteriormente, a função objetivo será então dada por:

$$MIN\ Z = p_1 \cdot \frac{d_1^-}{20} + p_2 \cdot \frac{d_2^-}{30} + p_3 \cdot \frac{d_3^-}{18}$$

De seguida apresenta-se duas versões de diferentes pesos para refletir diferentes prioridades e por conseguinte diferentes planos de publicidade:

Plano 1:

Neste primeiro plano irei partir do pressuposto que todas as metas têm igual importância.

Assim os pesos assumirão todos o mesmo valor: $p_1 = p_2 = p_3 = 1$

Resultados alcançados:

```
Questão_b1_plano1:
MINIMIZE
0.05*dm1 + 0.03333333333333333*dm2 + 0.05555555555555555*dm3 + 0.0
SUBJECT TO
HRE: dm1 + 3 x1 + x2 + 2 x3 >= 20

PRB: dm2 + 5 x1 + 3 x2 + 4 x3 >= 30

MRE: dm3 + 2.5 x1 + 2 x2 + 3 x3 >= 18

Custo_Total: 100000 x1 + 60000 x2 + 75000 x3 <= 565000

Tempo_Min_Total: x1 + x2 + x3 >= 5

VARIABLES
dm1 Continuous
dm2 Continuous
dm3 Continuous
x1 Continuous
x2 Continuous
x3 Continuous
```

```
Valor ótimo:
   Z* = 0.22518513333333334

Solução Ótima:
   x1* = 3.06667
   x2* = 0.0
   x3* = 3.44444

Valores das variáveis de desvio:
   dm1* = 3.91111
   dm2* = 0.888889
   dm3* = 0.0

Valores das restrições:
   HRE: -8.881784197001252e-16
   PRB: -9.999999991773340e-07
   MRE: -4.999999999810711e-06
   Custo_Total: 0.0
   Tempo_Min_Total: 1.51111
```

Figura 2 - Outputs do Plano 1 da questão b) alínea b1

A solução obtida sugere distribuir o tempo de publicidade da seguinte forma:

- $x_1^* = 3,07$ **minutos de anúncios do tipo I (exibidos durante os jogos de futebol);**
- $x_2^* = 0$ **minutos de anúncios do tipo II (exibidos durante as telenovelas);**
- $x_3^* = 3,44$ **minutos de anúncios do tipo III (exibidos durante o horário nobre);**

Ou seja, o plano recomenda focar os recursos apenas nos tipos I e III, ignorando completamente o tipo II.

Analisando os desvios percentuais (a gravidade relativa da violação) de cada meta:

Restrição	Desvio Absoluto	Valor Alvo da Meta ou Nível de Aspiração	Desvio em %	Valores Alcançados
HRE	≅ 3,91 milhões	20 milhões	≅ 19,56%	$20 - 3,91 = 16,09$ milhões
PRB	≅ 0,89 milhões	30 milhões	≅ 2,96%	$30 - 0,89 = 29,11$ milhões
MRE	0 milhões	18 milhões	0%	18 milhões (meta totalmente cumprida)

Como podemos verificar, a meta HRE teve uma violação ou desvio por defeito muito significativo (quase 20%). Enquanto que a meta PRB ficou apenas ligeiramente abaixo, com um desvio percentual baixo (2,96%). Já a meta MRE foi totalmente atingida, daí o seu desvio ter sido nulo. E tendo em mente as dicas facultadas pela Docente – sei que não interessa aumentar o seu peso pois nada irá mudar.

Assim, estes resultados indicam que, num cenário de pesos equilibrados, o modelo sacrifica parcialmente a meta HRE para poder satisfazer por completo a meta MRE e quase cumprir a meta PRB.

Quanto às restrições hard:

- O orçamento de 565000€ é completamente utilizado, indicando uma alocação eficiente dos recursos disponíveis.
- A restrição de tempo mínimo ($x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$) é respeitada, com um total de 6,51 minutos (margem adicional de 1,51 minutos).

Plano 2:

Uma vez que no plano 1 o desvio da primeira meta (HRE) foi o mais elevado irei dar um peso maior a esta meta a fim de tentar reduzir a sua violação e observar como isso afetará o plano.

Agora com esta missão em foco, durante o processo de exploração e ajuste dos pesos da função objetivo para o plano 2, adotei uma abordagem iterativa baseada em "tentativa-erro".
Foi mantido o peso das metas PRB e MRE igual ao do plano 1 (ou seja, $p_2 = p_3 = 1$), enquanto que o peso da meta HRE (p_1) foi progressivamente aumentado.

Isto, pois verificou-se que, para valores de $p_1 = 2,\ 3,\ 4,\ e\ 5$, a solução ótima permaneceu inalterada em relação ao plano 1 — tanto nos valores das variáveis de decisão como nos desvios em relação às metas. Apenas quando o peso de HRE foi elevado para $p_1 = 6$, é que se observou uma alteração na solução, indicando que só a partir desse ponto o modelo passou a considerar compensações para tentar reduzir a violação associada a essa meta.

Resultados alcançados:

```
Questão_b1_plano2:
MINIMIZE
0.15*dm1 + 0.03333333333333333*dm2 + 0.05555555555555555*dm3 + 0.0
SUBJECT TO
HRE: dm1 + 3 x1 + x2 + 2 x3 ⩾ 20

PRB: dm2 + 5 x1 + 3 x2 + 4 x3 ⩾ 30

MRE: dm3 + 2.5 x1 + 2 x2 + 3 x3 ⩾ 18

Custo_Total: 100000 x1 + 60000 x2 + 75000 x3 ⩽ 565000

Tempo_Min_Total: x1 + x2 + x3 ⩾ 5

VARIABLES
dm1 Continuous
dm2 Continuous
dm3 Continuous
x1 Continuous
x2 Continuous
x3 Continuous
```

```
Valor ótimo:
   Z* = 1.1886111111111111

Solução Ótima:
   x1* = 5.65
   x2* = 0.0
   x3* = 0.0

Valores das variáveis de desvio:
   dm1* = 3.05
   dm2* = 1.75
   dm3* = 3.875

Valores das restrições:
   HRE: 2.6645352591003757e-15
   PRB: 0.0
   MRE: 0.0
   Custo_Total: 0.0
   Tempo_Min_Total: 0.6500000000000004
```

Figura 3 - Outputs do Plano 2 da questão b) alínea b1

A nova solução obtida sugere agora distribuir o tempo de publicidade da seguinte forma:

- $x_1^* = 5,65$ **minutos de anúncios do tipo I;**
- $x_2^* = 0$ **minutos de anúncios do tipo II;**
- $x_3^* = 0$ **minutos de anúncios do tipo III;**

Ou seja, neste plano, todos os recursos são alocados exclusivamente ao tipo de publicidade I, que é o que mais contribui para atingir a meta HRE, em detrimento dos demais públicos.

Desvios em relação às metas:

Restrição	Desvio Absoluto	Valor Alvo da Meta ou Nível de Aspiração	Desvio em %	Valores Alcançados
HRE	≅ 3,05 milhões	20 milhões	≅15,25%	$20 - 3,05 = 16,95$ milhões
PRB	≅ 1,75 milhões	30 milhões	≅ 5,83%	$30 - 1,75 = 28,25$ milhões
MRE	≅ 3,88 milhões	18 milhões	≅ 21,56%	$18 - 3,88 = 14,12$ milhões

Verifica-se que o plano 2 apresenta uma pequena melhoria no cumprimento da meta HRE, com o desvio percentual a diminuir de 19,56% no plano 1 para 15,25% (uma queda de 4,31 pontos percentuais). No entanto, esta melhoria foi conseguida à custa de pior desempenho nas restantes metas. Em particular, a meta MRE, que era totalmente cumprida no plano 1 (0% de desvio), passou a registar um desvio de 21,56% no plano 2. Também a meta PRB sofreu um ligeiro agravamento, com o desvio a aumentar de 2,96% para 5,83% (um aumento de 2,87 pontos percentuais).

Quanto às restrições hard:

- O orçamento de 565000€ é completamente utilizado.

- O tempo total alocado é 5,65 minutos (margem adicional de 0,65 minutos), superior ao mínimo exigido (≥ 5).

b2) dois planos de publicidade para a Cars através do objetivo MiniMax.
Explique detalhadamente a metodologia aplicada.
Comente os planos de publicidade apresentados.

Nesta questão a ideia será aplicar o método de resolução - **objetivo MiniMax** - que procura **minimizar o maior desvio percentual entre todas as metas** e encontrar dois planos de publicidade que (consoante os pesos definidos) reduzem ao mínimo possível o pior desempenho relativo, tornando a solução mais equilibrada entre os grupos-alvo.

Esta abordagem visa obter **soluções mais equilibradas**, evitando que uma única meta seja excessivamente penalizada em detrimento das outras, tal como acontece com os outros métodos.

A função objetivo, então, passa agora a ser dada por:

$$Min\ Max\ Z \ = \ \{ p_1 \frac{d_1^-}{20} \, , \, p_2 \frac{d_2^-}{30} \, , \, p_3 \frac{d_3^-}{18} \}$$

Porém, conforme transmitido em aula, sabemos que a expressão que define esta função não é linear e os *Solvers* não lidam bem com esta definição. Portanto, precisamos de transformar esta expressão num conjunto de condições lineares. E para isso, matematicamente, introduzimos uma nova variável auxiliar Q, que representará o maior desvio percentual (multiplicado pelo respectivo peso) entre as metas. O objetivo passa então a ser:

$$Min\ Z \ = \ Q$$

E depois, é necessário definir um conjunto de restrições adicionais ao modelo do problema (para além das já definidas em *a)* e *b)*):

$$p_1 \frac{d_1^-}{20} \leq Q \quad ; \quad p_2 \frac{d_2^-}{30} \leq Q \quad ; \quad p_3 \frac{d_3^-}{18} \leq Q \quad ; \quad Q \geq 0$$

Portanto, agora o foco deixa de ser a soma ponderada dos desvios percentuais (como em *b1)*) e passa a ser minimizar o pior caso entre os desvios relativos e estas restrições de dominância adicionais permitem manter o problema dentro do domínio da Programação Linear.

Desta forma, e conforme o que é pedido nesta questão, de seguida apresenta-se duas versões de diferentes pesos para alcançar dois planos de publicidade:

Plano 3:

À semelhança do que foi feito no plano 1 da questão *b1)*, optou-se inicialmente por atribuir pesos iguais a todas as metas, ou seja, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$.

Esta escolha reflete uma postura de neutralidade perante este novo método de resolução - objetivo MiniMax - tratando todas as audiências como igualmente importantes no processo de tomada de decisão.

Resultados alcançados:

```
Questão_b2_plano3:
MINIMIZE
1*Q + 0
SUBJECT TO
HRE: dm1 + 3 x1 + x2 + 2 x3 >= 20

PRB: dm2 + 5 x1 + 3 x2 + 4 x3 >= 30

MRE: dm3 + 2.5 x1 + 2 x2 + 3 x3 >= 18

Custo_Total: 100000 x1 + 60000 x2 + 75000 x3 <= 565000

Tempo_Min_Total: x1 + x2 + x3 >= 5

desvio_inf_meta1: - Q + 0.05 dm1 <= 0

desvio_inf_meta2: - Q + 0.0333333333333 dm2 <= 0

desvio_inf_meta3: - Q + 0.0555555555556 dm3 <= 0

VARIABLES
Q Continuous
dm1 Continuous
dm2 Continuous
dm3 Continuous
x1 Continuous
x2 Continuous
x3 Continuous
```

```
Valor ótimo:
   Z* = 0.162963

Solução Ótima:
   x1* = 5.02222
   x2* = 0.0
   x3* = 0.837037

Valores das variáveis de desvio:
   dm1* = 3.25926
   dm2* = 1.54074
   dm3* = 2.93333

Valores das restrições:
   HRE: -6.000000001282757e-06
   PRB: -1.199999999945689e-05
   MRE: -8.999999999481645e-06
   Custo_Total: -0.2249999999985448
   Tempo_Min_Total: 0.8592569999999999
   desvio_inf_meta1: 0.0
   desvio_inf_meta2: -0.111605
   desvio_inf_meta3: -2.222222222070247e-07
```

Figura 4 - Outputs do Plano 3 da questão b) alínea b2

O modelo devolveu um valor ótimo de: $Z^* = 0,16296$

Este valor representa o maior desvio percentual (ponderado) observado entre todas as metas.

A solução obtida foi a seguinte:

- $x_1^* = 5,02$ **minutos de anúncios do tipo I;**
- $x_2^* = 0$ **minutos de anúncios do tipo II;**
- $x_3^* = 0,84$ **minutos de anúncios do tipo III;**

Desvios observados:

Restrição	Desvio Absoluto	Valor Alvo da Meta ou Nível de Aspiração	Desvio em %	Valores Alcançados
HRE	≅ 3,26 milhões	20 milhões	≅ 16,30%	$20 - 3,26 = 16,74$ milhões
PRB	≅ 1,54 milhões	30 milhões	≅ 5,13%	$30 - 1,75 = 28,46$ milhões
MRE	≅ 2,93 milhões	18 milhões	≅ 16,30%	$18 - 2,93 = 15,07$ milhões

Como podemos constatar os desvios percentuais de HRE e MRE coincidem com o valor de Z^*.

Quanto às restrições hard:

- A restrição de custo foi praticamente cumprida, uma vez que o excedente é ridiculamente pequeno ($\cong - 0,225$) em termos monetários praticáveis.

- O tempo total alocado é ≅ 5,86 minutos (margem adicional de ≅ 0,86 minutos)

Plano 4:

Neste próximo plano, desenvolvido com recurso ao método MiniMax, e seguindo a mesma abordagem iterativa de exploração e "tentativa-erro", decidi atribuir maior prioridade à meta correspondente ao grupo MRE (Mulheres com Rendimentos Elevados), através da definição de um peso mais elevado ($p_3 = 4$), e mantendo os restantes pesos (p_1 e p_2) iguais a 1.
Inicialmente optei por dar prioridade à meta MRE mas depois mudei de ideias e essa escolha justifica-se, por razões de equilíbrio global na análise do projeto, uma vez que já tinha dado um peso maior a esse público anteriormente.

Assim, procurei dar uma distribuição justa nos critérios de prioridade ao longo dos diferentes grupos-alvo, não privilegiando qualquer um em detrimento de outro.

Além disso, na ausência de diretrizes explícitas por parte de um Agente de Decisão (AD), esta escolha é legítima e fundamentada. Recordando, dos conhecimentos transmitidos em aula, que os *Métodos Geradores*, produzem soluções ótimas de Pareto sem considerar preferências de um AD — o que reforça a necessidade de explorar diferentes critérios de prioridade ao longo da descoberta destes planos da questão *b)*.

Resultados alcançados:

```
Questão_b2_plano4:
MINIMIZE
1*Q + 0
SUBJECT TO
HRE: dm1 + 3 x1 + x2 + 2 x3 >= 20

PRB: dm2 + 5 x1 + 3 x2 + 4 x3 >= 30

MRE: dm3 + 2.5 x1 + 2 x2 + 3 x3 >= 18

Custo_Total: 100000 x1 + 60000 x2 + 75000 x3 <= 565000

Tempo_Min_Total: x1 + x2 + x3 >= 5

desvio_inf_meta1: - Q + 0.05 dm1 <= 0

desvio_inf_meta2: - Q + 0.0333333333333 dm2 <= 0

desvio_inf_meta3: - Q + 0.222222222222 dm3 <= 0

VARIABLES
Q Continuous
dm1 Continuous
dm2 Continuous
dm3 Continuous
x1 Continuous
x2 Continuous
x3 Continuous
```

```
Valor ótimo:
   Z* = 0.186243

Solução Ótima:
   x1* = 3.6254
   x2* = 0.0
   x3* = 2.69947

Valores das variáveis de desvio:
   dm1* = 3.72487
   dm2* = 1.07513
   dm3* = 0.838095

Valores das restrições:
   HRE: 1.0000000000509601e-05
   PRB: 9.99999999806711e-06
   MRE: 4.999999998922533e-06
   Custo_Total: 0.25
   Tempo_Min_Total: 1.3248699999999998
   desvio_inf_meta1: 5.000000000143778e-07
   desvio_inf_meta2: -0.15040533333333334
   desvio_inf_meta3: 3.333333333521704e-07
```

Figura 5 - Outputs do Plano 4 da questão b) alínea b2

Agora o modelo devolveu um valor ótimo de: $Z^* = 0,1862$

Este valor representa o maior desvio percentual ponderado (entre as metas) e é mais elevado do que no plano MiniMax anterior (16,3%), evidenciando um ligeiro sacrifício no equilíbrio geral em prol da prioridade dada ao grupo MRE.

A solução obtida foi a seguinte:

- $x_1^* = 3,63$ **minutos de anúncios do tipo I;**
- $x_2^* = 0$ **minutos de anúncios do tipo II;**
- $x_3^* = 2,70$ **minutos de anúncios do tipo III;**

O que indica que o segundo tipo de anúncio continua a não ser atrativo face aos critérios de peso definidos.

Desvios observados:

Restrição	Desvio Absoluto	Valor Alvo da Meta ou Nível de Aspiração	Desvio em %	Valores Alcançados
HRE	≅ 3,72 milhões	20 milhões	≅ 18,62%	$20 - 3,72 = 16,28$ milhões
PRB	≅ 1,08 milhões	30 milhões	≅ 3,6%	$30 - 1,08 = 28,92$ milhões
MRE	≅ 0,84 milhões	18 milhões	≅ 4,67%	$18 - 0,84 = 17,16$ milhões

Como podemos constatar o desvio de HRE aumentou para 18,62%, sendo agora o valor máximo da função MiniMax, isto é, coincide com o valor de Z^*.
Já o desvio da meta MRE desceu significativamente. Esta redução substancial confirma o impacto direto da prioridade atribuída.

Quanto às restrições hard:

- A restrição de custo foi novamente, em termos práticos, cumprida.
- O tempo total alocado é ≅ 6,32 minutos (margem adicional de ≅ 1,32 minutos)

Esta solução revela-se mais justa para o grupo-alvo priorizado e demonstrou a utilidade do ajustamento de pesos como forma de incorporar preferências mesmo na ausência de orientações explícitas por parte de um Agente de Decisão.

c) Atendendo aos planos de publicidade determinados em b), investigue a existência de planos dominados. Justifique a sua resposta.

Atendendo à definição formal de dominância, um plano é **dominado** se e só se **existe outro plano melhor em todas as metas ou igual em algumas e estritamente melhor em pelo menos uma**.

Então, para avaliar isso, vamos comparar os **valores alcançados, isto é, os valores absolutos que compõem a diferença entre os níveis de aspiração e os desvios negativos encontrados para cada meta**.

Plano	$20 - d_1^-$ (HRE)	$30 - d_2^-$ (PRB)	$18 - d_3^-$ (MRE)
1	$20 - 3,91 = 16,09$	$30 - 0,89 = 29,11$	$18 - 0 = 18$
2	$20 - 3,05 = 16,95$	$30 - 1,75 = 28,25$	$18 - 3,88 = 14,12$
3	$20 - 3,26 = 16,74$	$30 - 1,54 = 28,46$	$18 - 2,93 = 15,07$
4	$20 - 3,72 = 16,28$	$30 - 1,08 = 28,92$	$18 - 0,84 = 17,16$

Analisando a tabela anterior, concluímos que **nenhum dos quatro planos domina totalmente os restantes**:

Comparando o plano 1 com os restantes, observa-se que apresenta pior desempenho em relação à meta HRE (d_1^-), mas melhor desempenho relativamente às metas PRB (d_2^-) e MRE (d_3^-), pelo que não domina nem é dominado por nenhum dos outros planos.

Da mesma forma, quando se compara o plano 2 com os planos 3 e 4, verifica-se que este apresenta melhor valor para d_1^-, mas piores para d_2^- e d_3^-, o que impede também qualquer relação de dominância.

Por fim, entre os planos 3 e 4, o plano 3 apresenta vantagem na meta HRE, mas um desempenho inferior nas metas PRB e MRE, implicando igualmente a ausência de dominância.

Ou seja, nenhum dos planos domina nem é dominado por outro.

Esta conclusão era esperada pois, pelos conhecimentos transmitidos, sabemos que todas as soluções obtidas através de Métodos Geradores de Programação por Metas são não-dominadas.

d) Suponha que a administração da Cars decidiu atribuir prioridades às condições (HRE), (PRB) e (MRE).
Concretamente, o primeiro nível de prioridade foi atribuído a (PRB), enquanto o segundo e terceiro níveis de prioridade foram atribuídos às condições (MRE) e (HRE), respetivamente.
Sob esta definição de prioridades, quantos minutos de cada tipo de anúncios devem ser adquiridos?
Explique detalhadamente a metodologia aplicada.
Comente o plano de publicidade obtido.

Nesta questão, a administração da Cars atribuiu níveis de prioridade distintos às metas de audiência: 1º PRB, 2º MRE, 3º HRE — o que exige que cada meta seja tratada sequencialmente e com uma prioridade rígida bem definida. Ou seja, agora para abordar este problema vamos aplicar a programação por metas preemptiva. Esta metodologia vai permitir assegurar que as metas de maior prioridade não sejam sacrificadas para melhorar as metas de prioridade inferior.

O problema passa então a ser formulado pelo conjunto das *restrições hard*, mais o conjunto de todas as *restrições soft* e a *função objetivo* passa a ser uma regra de prioridades, em que no 1º nível de prioridade temos o desvio relativo às audiências de PRB (Pessoas com Rendimentos Baixos), no 2º nível o desvio relativo às audiências de MRE (Mulheres com Rendimentos Elevados) e, por fim, no 3º nível de prioridade, o desvio relativo às audiências de HRE (Homens com Rendimentos Elevados).

Seguindo as indicações transmitidas em aula, tendo em conta que apenas temos um único desvio em cada um dos níveis de prioridade, termos ou não os pesos é exatamente a mesma coisa. Assim como ter os pesos multiplicando pelos desvios percentuais. Portanto, a função objetivo, assim como o resto do modelo, serão definidos por:

$$Lex\ Min\ Z = \{ d_2^-,\ d_3^-,\ d_1^- \}$$

Sujeito a:

$$\left.\begin{array}{ll} 100000x_1 + 60000x_2 + 75000x_3 \leq 565000 & \textbf{(Custo Total)} \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 & \textbf{(Tempo Mínimo)} \end{array}\right\} \text{restrições hard}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + d_2^- \geq 30 & \textbf{(PRB)} \\ 2.5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + d_3^- \geq 18 & \textbf{(MRE)} \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + d_1^- \geq 20 & \textbf{(HRE)} \end{array}\right\} \text{restrições soft}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ d_1^-,\ d_2^-,\ d_3^- \geq 0 \qquad \textbf{(não-negatividade)}$$

Logo, este problema tem de ser resolvido em várias fases. Sendo que cada fase irá corresponder a cada nível de prioridade definido no modelo acima. Portanto, vamos precisar de resolver 3 modelos.

Primeiro vou resolver o modelo correspondente ao primeiro nível. E esse modelo terá a função objetivo do 1º nível, todas as restrições hard do problema e as restrições soft que tenham desvios que estejam na função objetivo.

Sendo assim, temos que o modelo para o 1º nível é dado por:

$$Min\ Z_1 = \{ d_2^- \}$$

Sujeito a:

$100000x_1 + 60000x_2 + 75000x_3 \leq 565000$ ***(Custo Total)***

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$ ***(Tempo Mínimo)***

$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + d_2^- \geq 30$ ***(PRB)***

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ d_2^- \geq 0$ ***(não-negatividade)***

Resultados alcançados no Solver:

```
Valor ótimo:
   Z* = 0.0

Solução Ótima:
   x1* = 0.0
   x2* = 0.0
   x3* = 7.5

Valores das variáveis de desvio:
   dm2* = 0.0

Valores das restrições:
   PRB: 0.0
   Custo_Total: -2500.0
   Tempo_Min_Total: 2.5
```

Figura 6 - Output do 1º nível da questão d)

Como ainda estamos no 1º nível, e portanto numa fase inicial do problema, ainda não poderia apresentar estes resultados a um Agente de Decisão.
A única conclusão ou análise que posso retirar deste primeiro modelo é que tenho uma função objetivo com valor ótimo de zero, e portanto isso significa que é possível ter pelo menos uma solução em que as audiências de PRB (Pessoas com Rendimentos Baixos) sejam de pelo menos 30 milhões de pessoas – pois $\boxed{d_2^- = 0}$.

Avançando para o próximo nível do problema, irei usar esta informação que encontrei no 1º nível para criar o modelo seguinte – ressaltando que a meta PRB irá agora passar a ser uma *restrição hard*. Portanto, sem mais demoras, temos que o modelo para o 2º nível é dado por:

$$Min\, Z_2 = \{ d_3^- \}$$

Sujeito a:

$$100000x_1 + 60000x_2 + 75000x_3 \leq 565000 \qquad \textbf{(Custo Total)}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \qquad \textbf{(Tempo Mínimo)}$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + d_2^- \geq 30 \qquad \textbf{(PRB)}$$

$$\boxed{d_2^- = 0}$$

$$2.5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + d_3^- \geq 18 \qquad \textbf{(MRE)}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ d_2^-,\ d_3^- \geq 0 \qquad \textbf{(não-negatividade)}$$

Resultados alcançados no Solver:

```
Valor ótimo:
   Z* = 0.0

Solução Ótima:
   x1* = 0.0
   x2* = 0.666667
   x3* = 7.0

Valores das variáveis de desvio:
   dm2* = 0.0
   dm3* = 0.0

Valores das restrições:
   PRB: 1.0000000010279564e-06
   MRE: 4.333334000000001
   desvio_2: 0.0
   Custo_Total: 0.02000000001862645
   Tempo_Min_Total: 2.6666670000000003
```

Figura 7 - Output do 2º nível da questão d)

Analisando estes resultados, e em semelhança ao nível anterior, como ainda estamos numa fase intermédia do problema, ainda não poderia apresentar estes resultados a um Agente de Decisão. A única conclusão ou análise que posso retirar deste segundo modelo é que tenho novamente uma função objetivo com valor ótimo de zero, e portanto isso significa que é possível ter pelo menos uma solução em que as audiências de PRB e MRE (Pessoas com Rendimentos Baixos e Mulheres com Rendimentos Elevados) sejam ambas de pelo menos 30 e 18 milhões de pessoas respectivamente – pois $d_2^- = 0$ e $d_3^- = 0$.

Avançando para o próximo e último nível do problema, irei usar as informações que encontrei nos níveis anteriores para criar a sua formulação – MRE também será agora uma *restrição hard*. Temos então que o modelo para o 3º nível é dado por:

$$Min\ Z_3 = \{d_1^-\}$$

Sujeito a:

$100000x_1 + 60000x_2 + 75000x_3 \leq 565000$ ***(Custo Total)***

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$ ***(Tempo Mínimo)***

$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + d_2^- \geq 30$ ***(PRB)***

$d_2^- = 0$

$2.5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + d_3^- \geq 18$ ***(MRE)***

$d_3^- = 0$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 + d_1^- \geq 20$ ***(HRE)***

$x_1, x_2, x_3, d_1^-, d_2^-, d_3^- \geq 0$ ***(não-negatividade)***

Resultados alcançados no Solver:

```
Valor ótimo:
   Z* = 4.8

Solução Ótima:
   x1* = 0.4
   x2* = 0.0
   x3* = 7.0

Valores das variáveis de desvio:
   dm1* = 4.8
   dm2* = 0.0
   dm3* = 0.0

Valores das restrições:
   PRB: 0.0
   MRE: 4.0
   HRE: -8.881784197001252e-16
   desvio_2: 0.0
   desvio_3: 0.0
   Custo_Total: 0.0
   Tempo_Min_Total: 2.4000000000000004
```

Figura 8 - Output do 3º nível da questão d)

Desta vez o modelo devolveu um valor ótimo de: $Z^* = 4,8$

Isto significa que não é possível satisfazer completamente a meta HRE em simultâneo com as metas anteriores. Mas esta é a melhor solução possível dentro das limitações impostas e fixadas sequencialmente, e agora sim poderia mostrar esta solução a um Agente de Decisão.

A solução obtida foi:

- $x_1^* = 0,4$ **minutos de anúncios do tipo I;**
- $x_2^* = 0$ **minutos de anúncios do tipo II;**
- $x_3^* = 7$ **minutos de anúncios do tipo III;**
- **Custo total:** foi usado exatamente 565000 €
- **Tempo total de anúncios:** 7,4 minutos (supera em 2,4 minutos face ao mínimo de 5 minutos)

Ou seja, este plano cumpre integralmente as metas de maior e média prioridade (PRB e MRE) e apenas aceita desvio na meta menos prioritária (HRE). Para atingir os objetivos, o modelo canaliza praticamente todo o investimento no tipo III de publicidade (7 minutos), que tem elevada eficácia sobre os públicos PRB e MRE, mas menos sobre HRE.

A estratégia ignora os tipos I e II, com exceção de uma pequena alocação de tempo ao tipo I, resultando numa violação da meta HRE em 4,8 milhões (obtém-se $20 - 4,8 = 15,2$). Esta violação é aceitável dentro do modelo, dado que todas as metas superiores foram satisfeitas.

Conclusão:

A realização deste trabalho permitiu-me aplicar pela primeira vez os conceitos de otimização multiobjetivo num problema realista.

Inicialmente, verifiquei a viabilidade das *restrições hard* propostas pela administração da Cars, tendo concluído que não existia uma solução que as satisfizesse todas em simultâneo.

A partir daí, relaxando as três restrições de audiência para os diferentes públicos-alvo – transformando-as em *restrições soft* – explorei vários resultados com recurso à Programação Linear por metas não preemptiva, criando variáveis de desvio e ajustando pesos para encontrar soluções de compromisso adequadas aos diferentes critérios.
Foram aplicadas duas metodologias principais na abordagem não preemptiva: a minimização da soma ponderada dos desvios percentuais e o objetivo MiniMax. Enquanto que a primeira procura uma média ponderada entre as violações das metas, podendo aceitar desvios grandes em algumas desde que compensados por desvios pequenos noutras, o MiniMax foca-se em tornar o plano mais equilibrado, minimizando o pior desvio relativo — o que evita sacrificar demasiado uma meta em prol das outras. Esta diferença ajudou-me a perceber como a escolha da metodologia pode influenciar diretamente o tipo de compromisso alcançado.

Posteriormente a isso, realizei uma análise de dominância entre os quatro diferentes planos obtidos, com o objetivo de perceber se algum deles era claramente superior aos restantes. Essa análise permitiu concluir que, embora cada plano apresentasse vantagens em certas metas, nenhum dominava os outros em todas. Este resultado era esperado, pois os métodos utilizados têm precisamente como objetivo gerar soluções ótimas de Pareto, ou seja, soluções de compromisso onde não é possível melhorar uma meta sem piorar outra. Caso alguma solução tivesse dominado outra, isso indicaria um erro no processo de modelação e/ou na programação em Python.

Na última parte, com a programação por metas preemptiva, aprendi a lidar com prioridades rígidas, resolvendo o problema por níveis e garantindo que as metas mais importantes são respeitadas antes de considerar as restantes.

Assim, posso concluir que este trabalho ajudou-me a consolidar os conhecimentos transmitidos em aula, sobre modelação matemática, ao aplicar a formulação de problemas de otimização linear e a utilização de ferramentas computacionais para a sua resolução[2].

---

[2] O notebook em Python bem como este relatório podem ser acedidos no seguinte repositório Github online: https://github.com/rvzzz/iscte-otimizacao-heuristica-projetos