1 Задача 1

Построить аисптотический доверительный интервал параметров равномерного распределения $\mathbb{R}[\theta_1, \theta_2]$

1.1 Решение

Пусть дана выборка $\mathbb{X} = (X_1, ..., X_n) \sim \mathbb{R}[\theta_1; \theta_2]$

- Считаю 1-ый и 2-ой начальные моменты равномерного распределения:

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{D}[X_i] + (\mathbb{E}X_i)^2 = \frac{(\theta_2 - \theta_2)^2}{12} + \frac{(\theta_2 + \theta_1)^2}{4} = \frac{\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 + \theta_1^2}{12} +$$

$$+ \frac{3(\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 + \theta_1^2)}{12} =$$

$$= \frac{4\theta_2^2 + 4\theta_1\theta_2 + 4\theta_1^2}{12} = \frac{\theta_2^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_1^2}{3}$$

$$\begin{cases} \overline{X} = \mathbb{E}[X] \\ S_{n,2} = \mathbb{E}[X^2] \end{cases}$$

- Доказываю их асимптотическую нормальность и нахожу математическое ожидание и ковариационную матрицу:

Для доказательства воспользуюсь центральной предельной теоремой:

$$\overline{X} \to \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} < \infty$$

$$\mathbb{D}\left[\overline{X}\right] = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12} < \infty$$

Тогда

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \theta}{\sqrt{\mathbb{D}\left[\overline{X}\right]}} \to \mathbb{N}[0, 1]$$

Теперь рассмотрим выборочный начальный момент второго порядка $S_{n,2}$:

$$\mathbb{E}[S_{n,2}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2] = \frac{1}{n} n\mathbb{E}[X_i^2] =$$

$$= \mathbb{E}[X_i^2];$$

То есть $S_{n,2} \to \mathbb{E}[X_i^2]$, тогда по теореме непрерывности $\mathbb{D}(S_{n,2}) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{D}\left[\mathbb{E}(X_i^2)\right]$ (в том же смысле, что и $S_{n,2} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}[X_i^2]$). Получаем конечность двух первых начальных моментов, тогда применима ЦПТ и асимптотическая нормальность доказана.

Теперь подсчитаем математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора выборочных моментов:

$$\begin{pmatrix} \overline{X} \\ S_{n,2} \end{pmatrix}$$

Вектор матемтических ожиданий получается из несмещенности рассмотренных выше статистик:

$$m = \begin{pmatrix} \frac{\theta_2+\theta_1}{2} \\ \frac{\theta_2^2+\theta_1\theta_2+\theta_1^2}{3} \end{pmatrix}$$

Для подсчета ковариационной матрицы воспользуемся тем фактом, что начальный момент n-го порядка Равномерного распределения на отрезке $[\theta_1,\, \theta_2]$ считается так:

$$\mathbb{E}[X_i^n] = \frac{\theta_2^{n+1} - \theta_1^{n+1}}{(n+1)(\theta_2 - \theta_1)}$$

и что элементы выборки независимы.

Тогда

$$\mathbb{D}[\overline{X}] = \frac{1}{n}\mathbb{D}[X_i] = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12n}$$

$$\mathbb{D}[S_{n,2}] = \mathbb{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] = \frac{1}{n}\mathbb{D}[X_i^2] = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}[X_i^4] - \left(\mathbb{E}[X_i^2]\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\theta_2^5 - \theta_1^5}{5(\theta_2 - \theta_1)} - \left(\frac{\theta_2^3 - \theta_1^3}{3(\theta_2 - \theta_1)}\right)^2\right)$$

$$cov(\overline{X}, S_{n,2}) = \mathbb{E}\left[\overset{o}{\overline{X}}\overset{o}{S}_{n,2}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{o}{X}_i\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overset{o}{X}{}_j^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1, j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\overset{o}{X}_i\overset{o}{X}{}_j^2\right] = \frac{n}{n^2}\mathbb{E}\left[\overset{o}{X}{}_i^3\right] = |\mu = \mathbb{E}[X_i]| =$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[(X_i - \mu)^3\right] = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}[X_i^3] - 3\mu\mathbb{E}[X_i^2] + 3\mu^2\mathbb{E}[X_i] - \mu^3\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\theta_2^4 - \theta_1^4}{4(\theta_2 - \theta_1)} - 3\mu\frac{\theta_2^3 - \theta_1^3}{3(\theta_2 - \theta_1)} + 3\mu^3 - \mu^3\right)$$

Введем обозначения для элементов матрицы:

$$\begin{cases} \sigma_{\overline{X}}^2 & = \mathbb{D}[\overline{X}] \\ c & = cov\left(\overline{X}, S_{n,2}\right) \\ \sigma_{S_{n,2}}^2 & = \mathbb{D}[S_{n,2}] \end{cases}$$

Тогда используя полученные выше выражения справедливо, что

$$K(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\overline{X}} & c \\ c & \sigma^2_{S_{n,2}} \end{pmatrix}$$

Теперь получим представления для элементов этой матрицы через выбранные статистики.

$$\mathbb{D}\left[\overline{X}\right] = \frac{1}{n}\left(\mathbb{D}[X]\right) = \frac{1}{n}(\mathbb{E}\left[X_i^2\right] - (\mathbb{E}[X_i])^2) = \frac{1}{n}\left(S_{n,2} - \left(\overline{X}\right)^2\right);$$

Выразим $\mathbb{E}\left[X_i^4\right]$ через статистики:

$$\mathbb{E}\left[X_i^4\right] = \frac{\theta_2^4 + \theta_2^3\theta_1 + \theta_2^2\theta_1^2 + \theta_2\theta_1^3 + \theta_1^4}{5};$$

$$9(S_{n,2})^2 = (\theta_2^2 + \theta_2\theta_1 + \theta_1^2)^2 = \theta_2^4 + \theta_2^2\theta_1^2 + \theta_1^4 + 2\theta_2^3\theta_1 + 2\theta_2^2\theta_1^2 + 2\theta_2\theta_1^3 = 5\mathbb{E}\left[X_i^4\right] +$$

$$+\theta_1\theta_2(\theta_2^2 + 2\theta_2\theta_1 + \theta_1^2) = 5\mathbb{E}\left[X_i^4\right] + 4\theta_2\theta_1\left(\overline{X}^2\right);$$

$$\theta_2\theta_1 = 4\overline{X}^2 - 3S_{n,2};$$

$$5\mathbb{E}\left[X_i^4\right] = 9(S_{n,2})^2 - 4(4\overline{X}^2 - 3S_{n,2})\overline{X}^2;$$

Тогда

$$\mathbb{D}[S_{n,2}] = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}\left[X_i^4\right] - \left(\mathbb{E}[X_i^2]\right)^2\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{9(S_{n,2})^2 - 4(4\overline{X}^2 - 3S_{n,2})\overline{X}^2}{5} - S_{n,2}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{5n}\left(4(S_{n,2})^2 - 4(4\overline{X}^2 - 3S_{n,2})\overline{X}^2\right);$$

Наконец, для нахождения $cov\left(\overline{X}, S_{n,2}\right)$ запишем выражение $\mathbb{E}\left[X_i^3\right]$ через статистики:

$$\mathbb{E}\left[X_i^3\right] = \frac{\theta_2^4 - \theta_1^4}{4(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{(\theta_2^2 - \theta_1^2)(\theta_2^2 + \theta_1^2)}{4(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{(\theta_2 + \theta_1)(\theta_2^2 + \theta_1^2)}{4} = \frac{\theta_2^2 + \theta_1^2}{2}\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} =$$

$$= \frac{\theta_2^2 + \theta_1^2}{2}\overline{X};$$

$$\theta_2^2 + \theta_1^2 = 6S_{n,2} - 4\overline{X}^2;$$

$$\mathbb{E}\left[X_i^3\right] = \left(3S_{n,2} - 2\overline{X}^2\right)\overline{X};$$

$$cov\left(\overline{X}, S_{n,2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\theta_2^4 - \theta_1^4}{4(\theta_2 - \theta_1)} - 3\mu\frac{\theta_2^3 - \theta_1^3}{3(\theta_2 - \theta_1)} + 3\mu^3 - \mu^3\right) = \left|\overline{X} = \mu\right| =$$

$$= \frac{1}{n}\left(3S_{n,2}\overline{X} - 2\overline{X}^3 - 3\overline{X}S_{n,2} + 3\overline{X}^3 - \overline{X}^3\right) = 0$$

Таким образом, получена ковариационная матрица, зависящая от статистик:

$$K(T) = K\left(\overline{X}, S_{n,2}\right) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} S_{n,2} - \left(\overline{X}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\left(4(S_{n,2})^2 - 4(4\overline{X}^2 - 3S_{n,2})\overline{X}^2\right)\end{pmatrix}$$

- На занятиях были посчиталны функции, которые выражают концы отрезка через моменты.

Полученные на семинаре нелинейные функции $h_i(x), i = \{0,1\}$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} h_1\left(\overline{X}, S_{n,2}\right) = \overline{X} - \sqrt{3\left(S_{n,2} - (\overline{X})^2\right)} \\ h_2\left(\overline{X}, S_{n,2}\right) = \overline{X} + \sqrt{3\left(S_{n,2} - (\overline{X})^2\right)} \end{cases}$$

Далее будем предполагать, что

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}\left[X^2\right] \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \overline{X} \\ S_{n,2} \end{pmatrix}$$

В данном случае результат нелинейного преобразования асимптотически гауссовского вектора будет асимптотически гауссовским.

Так как $\mathbb{L}_\theta\left(\sqrt{n}\,(T - M)\right) \to \mathbb{N}\left(0, K(\theta)\right)$, тогда, положив, что

$$\phi(T) = \begin{pmatrix} h_1(T) \\ h_2(T) \end{pmatrix}$$

получаем $\mathbb{L}_\theta\left(\sqrt{n}\,(\phi(T) - \phi(M))\right) \to \mathbb{N}\left(0, v^2(\theta)\right)$, где

$$v^2(\theta) = b^T(\theta)K(\theta)b(\theta), b(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi(\theta)}{\partial\theta_1} \\ \frac{\partial\phi(\theta)}{\partial\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\theta)}{\partial\theta_1} & \frac{\partial h_2(\theta)}{\partial\theta_1} \\ \frac{\partial h_1(\theta)}{\partial\theta_2} & \frac{\partial h_2(\theta)}{\partial\theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Также заметим, что

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \phi(M)$$

Отсюда и из установленного ранее тождества $c = cov(\overline{X}, S_{n,2}) = 0$ получаем, что

$$b^T(\theta)K(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\sigma^2_{\overline{X}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\sigma^2_{S_{n,2}} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\sigma^2_{\overline{X}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\sigma^2_{S_{n,2}} \end{pmatrix}$$

$$v^2(\theta) = b^T(\theta)K(\theta)b(\theta), b(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4*3}\sigma^2_{\overline{X}} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4*3}\sigma^2_{S_{n,2}} & \frac{2}{12}\sigma^2_{\overline{X}} + \frac{2}{12}\sigma^2_{S_{n,2}} \\ \frac{2}{12}\sigma^2_{\overline{X}} + \frac{2}{12}\sigma^2_{S_{n,2}} & \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4*3}\sigma^2_{\overline{X}} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4*3}\sigma^2_{S_{n,2}} \end{pmatrix}$$

Тогда $\mathbb{L}_\theta \left(\sqrt{n}\frac{(\phi(T)-\phi(M))}{v(T)}\right) \to \mathbb{N}(0, I)$

Используя равенство $\theta = \phi(M)$, получаем ответ:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \in \left(h(T) - \frac{v(T)c_\gamma}{\sqrt{n}}; h(T) + \frac{v(T)c_\gamma}{\sqrt{n}}\right),$$

где $c_\gamma = \begin{pmatrix} (c_\gamma)_1 \\ (c_\gamma)_2 \end{pmatrix}$ −многомерный квантильγ стандартного нормального распределения