1 Домашняя работа №1

1.1 Задание 1

С помощью $R[0,1]$ реализовать датчик распределения $Bi(5, \frac{1}{2})$. По смоделированным выборкам длины 100 и 100 000 построить на одном рисунке графики ряда частот и теоретический график. По выборкам вычислить выборочные среднее и дисперсию, сравнить их с теоретическими значениями.

1.1.1 Решение

Для того, чтобы получить распределение $Bi(5, \frac{1}{2})$ из генератора $R[0,1]$, возьмем 5 генераторов и полим выборку размерности 5, то есть $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, где X_i - случайная величина, причем $X_i \sim R[0,1]$.

Чтобы выполнялось второе условие, то есть "вероятность успеха $\frac{1}{2}$ выберем на отрезке $[0,1]$ точку $\frac{1}{2}$, тогда отрезок будет разделен на две равные части. Теперь будем предпологать, что все значения на полуинтервале $[0, \frac{1}{2})$ соответствуют нулю, а $[\frac{1}{2}, 1]$ единице. Вернем сумму полученных генераторов, что будет той самой случайной величиной $Y \sim Bi(5, \frac{1}{2})$

Рассмотрим графики полученного распределения.

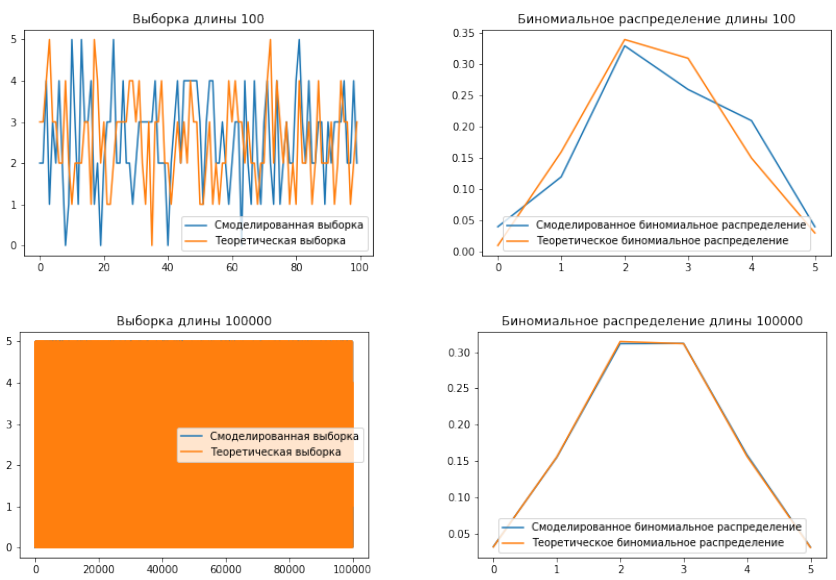


Рис. 1: Распределение Бернулли

Вычислим выборочное среднее:

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n); n = \{100, 100000\}; \mathbb{E}_X = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} * X_i$$

И дисперсию:

$$X = (X_1, ..., X_n); n = \{100, 100000\}; \mathbb{D}_X = \mathbb{E}_{X^2} - (\mathbb{E}_X)^2$$

Для выборки длины 100:

- Выборочное среднее: 2.6, теоретическое: 2.52
- Дисперсия смоделированной выборки: 1.38, теоретическое: 1.1095999999999995

Для выборки длины 100000:

- Выборочное среднее: 2.50395, теоретическое: 2.498
- Дисперсия смоделированной выборки: 1.2560643974999994, теоретическое: 1.2472359999999991

1.2 Задание 2

С помощью $R[0, 1]$ реализовать датчик стандартного распределения Коши. По смоделированным выборкам длины 100 и 100 000 построить на одном рисунке теоретических и эмпирических функций распределения. На одном рисунке построить гистограммы смоделированных выборок (число и положение разрядов выбрать самостоятельно, но осмысленно!) и теоретическую плотность распределения. Вычислить выборочные медианы и сравнить их с теоретическим значением.

1.2.1 Решение

Для моделлирования случайных величин некоторого распределения через генератор равномерного распределение рассмотрим функцию, обратную функции распределения Коши:

$$F^{-1}(X) = \operatorname{tg}\left(\pi * (X - \frac{1}{2})\right), X \sim R[0, 1]$$

По решению задачи №7 полученная случайная величина $Y = F^{-1}(X)$ распределена по закону Коши, то есть $Y \sim C(0, 1)$. Для вычисления эмперической функции распределения используем формулу:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} I(x - X_k)$$

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Для построения теоретического распределения воспользуемся распределением $C(0, 1)$:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} * \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}$$

Рассмотрим полученные графики для выборки длины 100 и 100000:

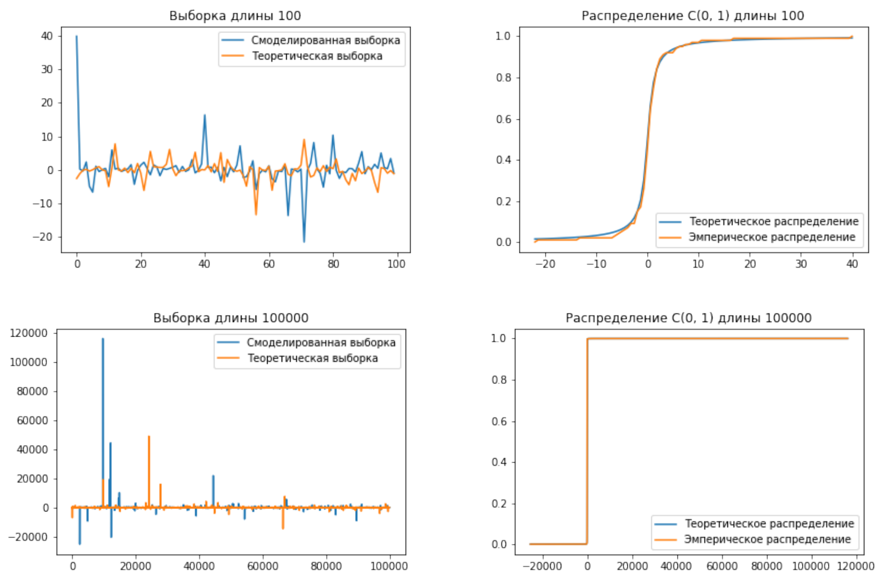


Рис. 2: Распределение Коши

Построим гистограмму и плотность распределения Коши. Для плотности справедлива формула:

$$f(x) = \frac{1}{\pi * (1 + x^2)}$$

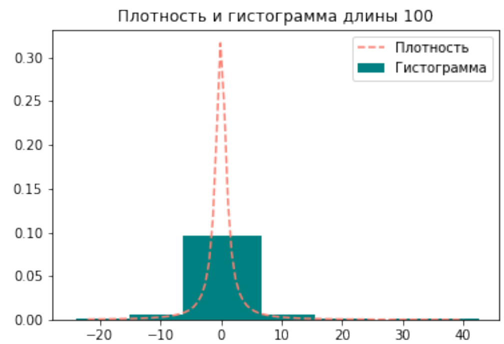
Чтобы построить гистограмму, определим число разрядов и выберем отрезок так, чтобы выполнялось условие нормировки. Данный вопрос рассмотрен в задаче №3, поэтому выберем отрезок так, что левая границы соответствует минимуму из полученной выборки, а правая - максимуму:

$$X = (X_1, ..., X_n)\,, [a, b] = \left[\min_{i \in \overline{1, n}} X_i, \max_{i \in \overline{1, n}} X_i\right]$$

Для определения числа разрядов гистограммы воспользуемся правилом Стёрджеса. Число разрядов n определяется через размер выборки N:

$$n(N) = 1 + \lfloor \log_2 N \rfloor$$

Используя полученные значения, построим плотность и гистограмму распределения Коши:



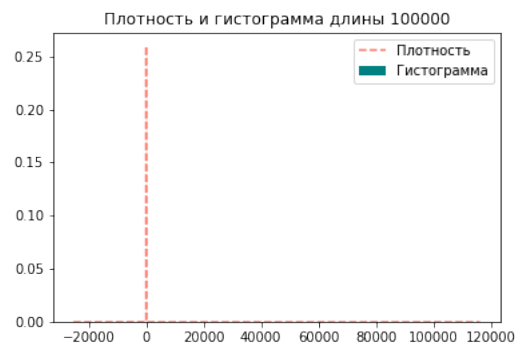


Рис. 3: Плотность и гистограмма распределения Коши

Вычислим выборочную медиану и сравним значение с теоретическим аналогом. Теоретическое значение получается при подстановке в обратную функцию распределения число $\frac{1}{2}$:

$$M = F^{-1}(\frac{1}{2})$$

- Для выборки длины 100 выборочная медиана: 0.21787135837578478; Теоретическое значение: 0

- Для выборки длины 100000 выборочная медиана: -0.0005758960784728971; Теоретическое значение: 0

1.3 Задание 3

В условиях задачи 8 выбрать произвольную кусочно-постоянную плотность с 5 разрядами. помощью $R[0,1]$ реализовать соответствующий генератор. По смоделированным выборкам длины 1000 и 100 000 построить на одном рисунке теоретических и эмпирических функций распределения. По выборкам вычислить выборочные среднее и дисперсию, сравнить их с теоретическими значениями. На одном рисунке построить гистограммы смоделированных выборок и теоретическую плотность распределения. Разряды гистограмм выбирать двумя способами: 1) совпадающими с теоретическими разрядами распределения, 2) разбивающими теоретические разряды пополам. По выборкам вычислить выборочные среднее и дисперсию, сравнить их с теоретическими значениями.

1.3.1 Решение

Чтобы смоделировать кусочно-постоянную плотность распределения, рассмотрим отрезок $[0,1]$. На данном отрезке возьмем 5 точек, не равных нулю, и ноль. Например:

$$[0,1] \to \left[0, \frac{5}{16}\right) \cup \left[\frac{5}{16}, \frac{7}{16}\right) \cup \left[\frac{7}{16}, \frac{10}{16}\right) \cup \left[\frac{10}{16}, \frac{11}{16}\right) \cup \left[\frac{11}{16}, 1\right)$$

Теперь мы получили разбиение отрезка на 5 частей. Выберем на каждом плотность так, чтобы выполнялось условие нормировки. Положим, что:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x < \frac{5}{16}, \\ \frac{1}{2} & \text{при } \frac{5}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ \frac{2}{3} & \text{при } \frac{7}{16} \leq x < \frac{10}{16}, \\ 2 & \text{при } \frac{10}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ \frac{6}{5} & \text{при } \frac{11}{16} \leq x < 1, \\ 0 & \text{при } 1 \leq x. \end{cases}$$

Проверим условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{5}{16} \times 1 + \frac{2}{16} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{16} \times 2 + \frac{5}{16} \times \frac{6}{5} = 1$$

Поэтому выбранное разбиение верное и у полученной случайной величины кусочно-постоянная плотность. Чтобы смоделировать генератор полученной случайной величины используем два генератора

- Первый генератор выдаст точку на отрезке $[0,1]$. Используем наше разбиение отрезка на 5 частей и определим, какому множеству принадлежит полученная точка

- Второй генератор покажет на какую позицию разбиения попадет точка. Уже определено, какому отрезку принадлежит данная точка, известна длина отрезка и значение левой границы. Найденные значения подставим в формулу случайной величины:

$$X() = \sum_{i=1}^{5} |X_i - X_{i-1}| * I_{\Delta[X_{i-1}, X_i]}, X_0 = 0$$

Например, если после работы первого генератора точка находится на множестве $\left[0, \frac{5}{16}\right)$, то позиция точки принадлежит этому же интервалу, тогда второй генератор дает число от 0 до 1, которое умножается на длину замыкания данного множества, то есть на $\frac{5}{16}$, затем прибавляется начало множества - точка 0.

По определению распределения получим, что

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Так как плотность кусочно-постоянная, то функция распределения будет линейной функцией с множителями перед x, соответствующими значению плотности на данном множестве, сложенная с константой, равной $\int_{-\infty}^{a_l} f(x)dx$, где a_l - левая граница данного множества.

Так как в точке $\frac{7}{16}$ плотность меняется с $\frac{1}{2}$ на $\frac{2}{3}$, для большей наглядности добавленая вспомогательная функция $y(x) = \frac{2}{3} * x + \frac{1}{12}$, показывающая, что перелом в точке $\frac{7}{16}$, хоть и незначительный, есть.

Для эмперической функции распределения используем уже упомянутую в предыдущих заданиях этого документа формулу. Получим:

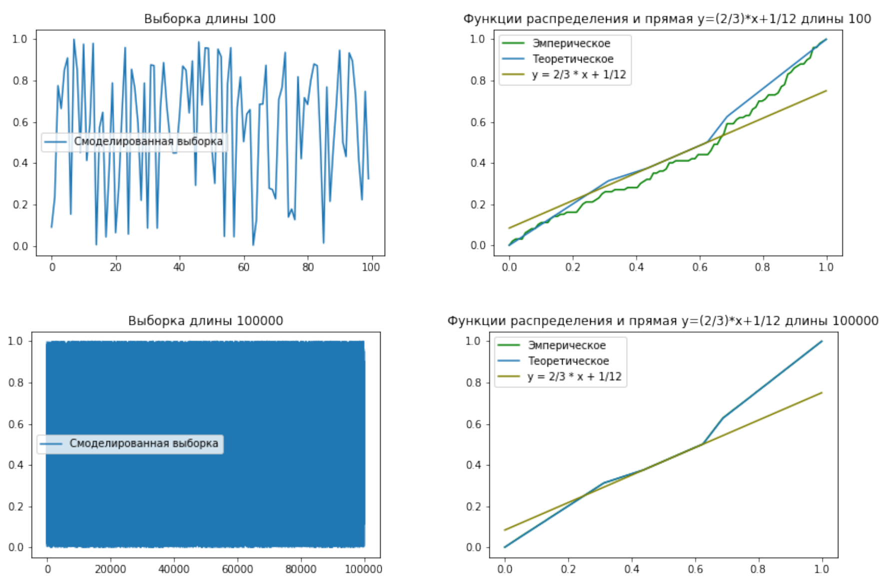


Рис. 4: Распределение с кусочно-постоянной плотностью

Сравним полученные выборочные среднее и дисперсию, сравним их с еоретическими значениями:

- Для выборки длины 100 выборочное среднее составило: 0.4252; теоретическое - 0.4632670454545454

- Для выборки длины 100000 выборочное среднее составило: 0.4633432522; теоретическое - 0.462890996097461
- Для выборки длины 100 выборочная дисперсия составила: 0.07501495999999996; теоретическая - 0.07843229629324083
- Для выборки длины 100000 выборочная дисперсия составила: 0.0766235435949392; теоретическая - 0.07666826120296805

При построении гистограммы использовалось два способа, как описано в условии задачи. Плотность данной случайной величины, как следует из требования задачи, кусочно-постоянная функция с значениями указанными ранее на множествах описанных выше. Число разрядов фиксированно и в 1-ом случае равно 5(по условию задачи), во втором случае равно 10.

Для построения гистограммы использовалась описанная ранее в заданиях этого документа формула. Для выбора отрезка, на котором строится гистограмма, использовалась ранее описанная идея с максимумом и минимумом выборки. Получим:

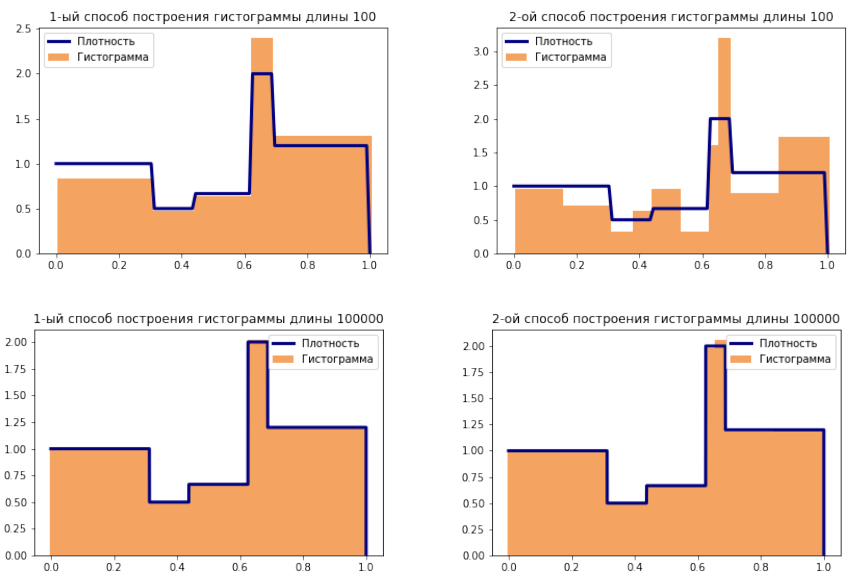


Рис. 5: Плотность и гистограмма распределения с кусочно-постоянной плотностью

1.4 Задание 4

В условиях задач 9 и 10 построить соответствующие генераторы $N(0,1)$. По смоделированным выборкам длины 100 и 100 000 построить на одном рисунке теоретических и эмпирических функций распределения. Сравнить время генерации большой выборки 1-м и 2-м способом. На одном рисунке построить гистограммы смоделированных выборок и теоретическую плотность распределения (число и положение разрядов выбрать самостоятельно, но осмысленно!). Вычислить выборочные среднее, медиану, дисперсию, коэффициент асимметрии и куртозис. Сравнить полученные оценки с теоретическими.

1.4.1 Решение

Чтобы смоделировать случайную величину воспользуемся формулами задач 9 и 10. В задаче 9 говорится, что $Y \sim N(0,1)$, если

$$Y = \sum_{k=1}^{12} X_k - 6, X_i \sim R[0,1]$$

В задаче 10 говорится, что Y_1, Y_2 – НОРСВ, причем $Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$, если

$$Y_1 = \sqrt{-2\ln X_1} * \sin 2\pi X_2$$
$$Y_2 = \sqrt{-2\ln X_1} * \cos 2\pi X_2; X_1, X_2 \sim R[0,1]$$

Для построения эмперической функции распределения воспользуемся ранее описанной формулой. Чтобы построить теоретическую функцию распределения $N(0,1)$ воспользуемся формулой:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Рассмотрим функцию ошибок:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$$

Тогда, так как

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left| \text{ в силу четности } e^{-\frac{t^2}{2}} \right| =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left| u = \frac{t}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} * \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{2} * \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Получаем, что

$$F(x) = \Phi(\frac{x-0}{1}) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) =$$

$$= \left| u = \frac{t}{\sqrt{2}}; t = x => u = \frac{x}{\sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2\pi}}{2 * \sqrt{2\pi}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-u^2} du =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Получим график теоретических и эмперических функций распределения:

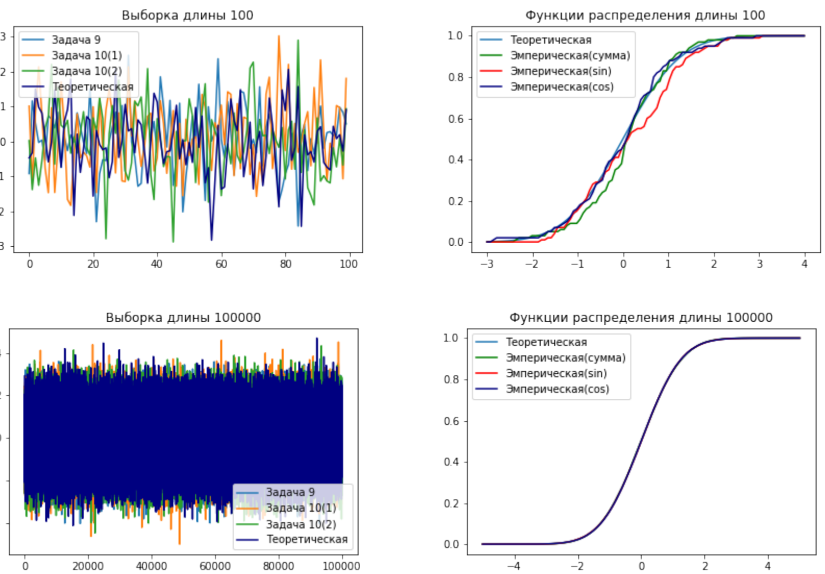


Рис. 6: Эмперическое и теоретическое распределение $N(0,1)$

Для построения гистограмм будем использовать описанное выше правило Стёрджеса, но ограничим максимальное число разрядов 13-ью для большего сходства с функцией плотности распределения $N(0,1)$. Получим:

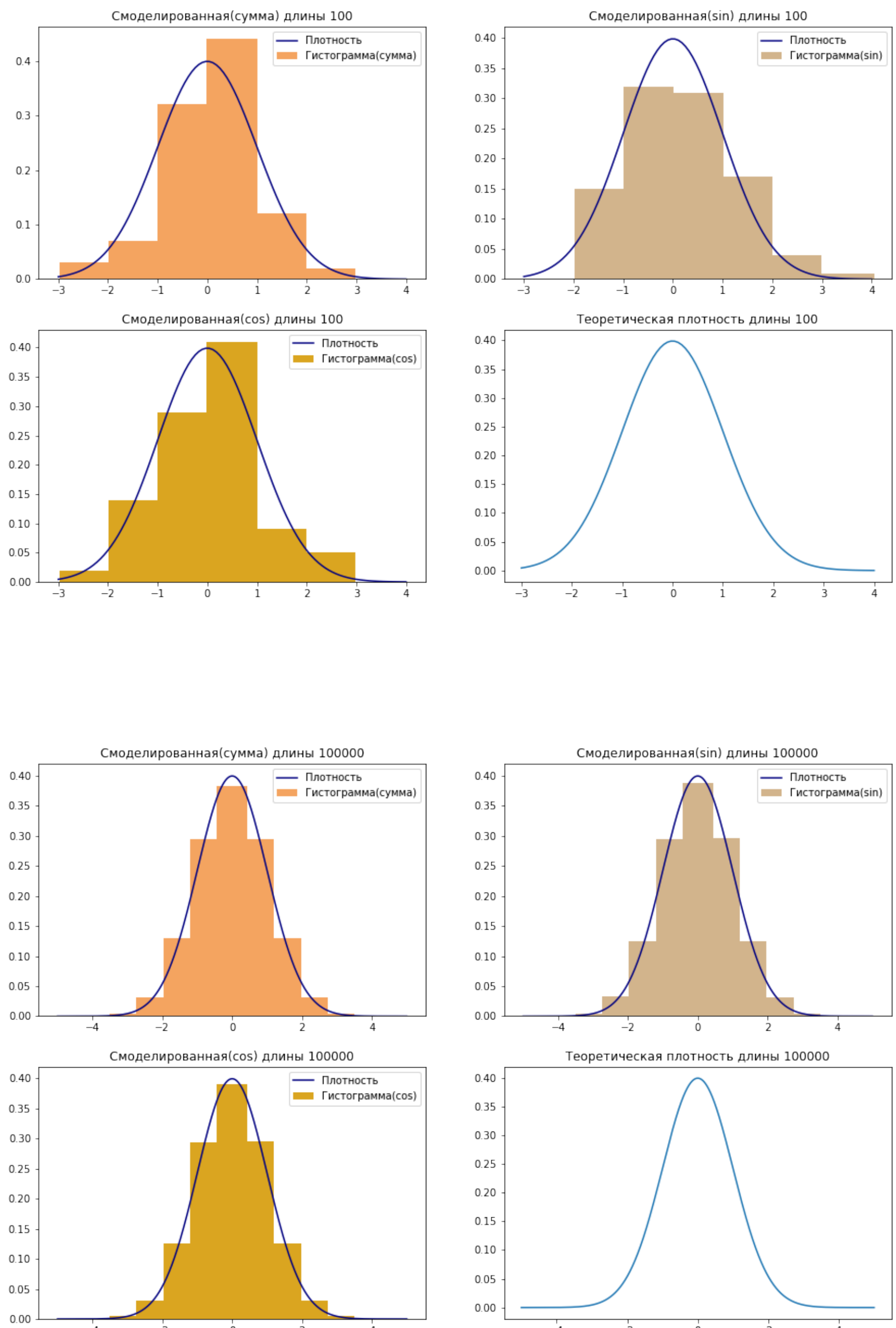


Рис. 7: Гистограмма и плотность распределения $N(0,1)$

Вычислим выборочные среднее, медиану, димперсию, коэффициент асимметрии и куртозис выборок и сравним значения с теоретическими. Чтобы получить значение коэффициента асимметрии и куртозиса(точки эксцесса) воспользуемся 3-им и 4-ым центральными моментами, соответственно:

$$\mu_3 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^3\right]; \mu_4 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^4\right]$$

Тогда коэфициент асимметрии вычисляется по формуле:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \text{ где } \sigma = \sqrt{\mathbb{D}X}$$

Куртозис(коэффициент эксцесса) вычисляется по формуле:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \text{ где } \sigma = \sqrt{\mathbb{D}X}$$

- Для выборки длины 100:
  - Выборочное среднее:
    - Смоделированной способом из задачи 9: 0.0910158168777063
    - Смоделированной способом из задачи 10(sin): 0.1654934183883899
    - Смоделированной способом из задачи 10(cos): -0.0026908354182544948
    - Теоретическое значение: -0.012619596910858977
  - Медиана:
    - Смоделированной способом из задачи 9: 0.07708387887182333
    - Смоделированной способом из задачи 10(sin): 0.06745237856342444
    - Смоделированной способом из задачи 10(cos): 0.057021514761033974
    - Теоретическое значение: -0.02203385002181522
  - Дисперсия:
    - Смоделированной способом из задачи 9: 0.8226822193356137
    - Смоделированной способом из задачи 10(sin): 1.1060584102999171
    - Смоделированной способом из задачи 10(cos): 1.0443862099776926
    - Теоретическое значение: 0.8772570659152759
  - Коэффициент асимметрии:
    - Смоделированной способом из задачи 9: -0.191480781474908
    - Смоделированной способом из задачи 10(sin): 0.19513689131670858
    - Смоделированной способом из задачи 10(cos): 0.03550436729861416
    - Теоретическое значение: -0.21989510241995067
  - Коэффициент эксцесса:
    - Смоделированной способом из задачи 9: 0.5336327294441223
    - Смоделированной способом из задачи 10(sin): -0.6135627930553267
    - Смоделированной способом из задачи 10(cos): 0.6119197109455063

        * Теоретическое значение: 0.295581227041471

- Для выборки длины 100000:
    - Выборочное среднее:
        * Смоделированной способом из задачи 9: -0.0023363939452022016
        * Смоделированной способом из задачи 10(sin): -0.0006843351339917403
        * Смоделированной способом из задачи 10(cos): -0.0005595550966315507
        * Теоретическое значение: 0.0013744061430496612
    - Медиана:
        * Смоделированной способом из задачи 9: -0.0025890223220645936
        * Смоделированной способом из задачи 10(sin): 0.004607519065085341
        * Смоделированной способом из задачи 10(cos): -0.0019349844763608373
        * Теоретическое значение: 0.0013596938938788272
    - Дисперсия:
        * Смоделированной способом из задачи 9: 0.9977870401191214
        * Смоделированной способом из задачи 10(sin): 1.0011963348072879
        * Смоделированной способом из задачи 10(cos): 0.9979599854898414
        * Теоретическое значение: 0.9963919481329188
    - Коэффициент асимметрии:
        * Смоделированной способом из задачи 9: -0.00645681214278904
        * Смоделированной способом из задачи 10(sin): -0.006933815628778138
        * Смоделированной способом из задачи 10(cos): -0.005617642448843749
        * Теоретическое значение: -0.003866270917544823
    - Коэффициент эксцесса:
        * Смоделированной способом из задачи 9: -0.114526076724503
        * Смоделированной способом из задачи 10(sin): 0.0014470163841445
        * Смоделированной способом из задачи 10(cos): 0.001145745622073
        * Теоретическое значение: 0.012138581085752

Сравним время генерации выборок способами из задачи 9 и задачи 10:

- Для выборки длины 100
    - Смоделированной способом из задачи 9: 0.0008115768432617188 с
    - Смоделированной способом из задачи 10(sin): 0.0004260540008544922 с
    - Смоделированной способом из задачи 10(cos): 0.00045609474182128906 с
- Для выборки длины 10000000

- Смоделированной способом из задачи 9:
  1.077580213546753 с
- Смоделированной способом из задачи 10(sin):
  0.4227886199951172 с
- Смоделированной способом из задачи 10(cos):
  0.41922783851623535 с