1 Теория

1.1 Треугольная норма(t-норма)

Треугольная норма(t-норма) $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая условиям:

- $T(0,0) = 0, T(\mu_a, 1) = \mu_a$ (ограниченность);
- $T(\mu_a, \mu_b) = T(\mu_b, \mu_a)$ (коммутативность);
- $T(\mu_a, T(\mu_b, \mu_c)) = T(T(\mu_a, \mu_b), \mu_c)$ (ассоциативность);
- $T(\mu_a, \mu_b) \leq T(\mu_c, \mu_d)$, если $\mu_a \leq \mu_c$ и $\mu_b \leq \mu_d$ (монотонность).

1.1.1 Пример

- $T_m(\mu_a, \mu_b) = min(\mu_a, \mu_b)$;
- $T_p(\mu_a, \mu_b) = \mu_a * \mu_b$;
- $T_p(\mu_a, \mu_b) = \mu_a * \mu_b$;
- $T_d(\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} \mu_a & \text{, если } \mu_b = 1 \\ \mu_b & \text{, если } \mu_a = 1 \\ 0 & \text{, в других случаях} \end{cases}$

1.2 Треугольная конорма(t-конорма)

Треугольная конорма(t-конорма) $\perp$: $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая условиям:

- $\perp(1,1) = 1, \perp(\mu_a, 0) = \mu_a$ (ограниченность);
- $\perp(\mu_a, \mu_b) = \perp(\mu_b, \mu_a)$ (коммутативность);
- $\perp(\mu_a, \perp(\mu_b, \mu_c)) = \perp(\perp(\mu_a, \mu_b), \mu_c)$ (ассоциативность);
- $\perp(\mu_a, \mu_b) \leq \perp(\mu_c, \mu_d)$, если $\mu_a \leq \mu_c$ и $\mu_b \leq \mu_d$ (монотонность).

1.2.1 Пример

- $\perp_m (\mu_a, \mu_b) = max(\mu_a, \mu_b)$;

- $\perp_p (\mu_a, \mu_b) = \mu_a + \mu_b - \mu_a * \mu_b$;

- $\perp_l (\mu_a, \mu_b) = min(\mu_a + \mu_b, 1)$;

- $\perp_d (\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} \mu_a & \text{, если } \mu_b = 0 \\ \mu_b & \text{, если } \mu_a = 0 \\ 1 & \text{, в других случаях} \end{cases}$

1.3 Специальные t-нормы и t-конормы

1.3.1 Майор-Торренс

$$T(\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} max(\mu_a + \mu_b - \lambda, 0) & \text{, если } \lambda \in [0, 1] \text{ и } (\mu_a, \mu_b) \in [0, \lambda]^2 \\ min(\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = 0 \text{ или } \mu_a > \lambda \text{ или } \mu_b > \lambda \end{cases}$$

$$\perp (\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} min(\mu_a + \mu_b + \lambda - 1, 1) & \text{, если } \lambda \in [0, 1] \text{ и } (\mu_a, \mu_b) \in [1 - \lambda, 1]^2 \\ max(\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = 0 \text{ или } \mu_a < 1 - \lambda \text{ или } \mu_b < 1 - \lambda \end{cases}$$

1.3.2 Ягер

$$T(\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} max\left(1 - \left((1 - \mu_a)^\lambda + (1 - \mu_b)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 0\right) & \text{, если } \lambda \in (0, +\infty) \\ T_d(\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = 0 \\ T_m(\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = \infty \end{cases}$$

$$\perp (\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} min\left((\mu_a^\lambda + \mu_b^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}, 1\right) & \text{, если } \lambda \in (0, +\infty) \\ \perp_d (\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = 0 \\ \perp_m (\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = \infty \end{cases}$$

2 Домашнее задание

1. Доказать: $T_d \leq T_l \leq T_p \leq T_m$;
2. Доказать: $\forall t$-нормы $T : T_d \leq T \leq T_m$;
3. Доказать: $\perp_d \geq \perp_l \geq \perp_p \geq \perp_m$;
4. Доказать: $\forall t$-конормы $\perp : \perp_d \leq \perp \leq \perp_m$;
5. Проверить выполнение свойств t-норм и t-конорм для t-нормы и t-конормы Майора-Торренса;
6. Проверить выполнение свойств t-норм и t-конорм для t-нормы и t-конормы Ягера.

2.1 Доказать: $\forall t$-нормы $T : T_d \leq T \leq T_m$

Доказательство.

1. Из свойств $T(\mu_a, \mu_b) \leq T(\mu_c, \mu_d)$, если $\mu_a \leq \mu_c, \mu_b \leq \mu_d, T(0,0) = 0, T(\mu_a, 1) = \mu_a \Rightarrow \forall T \forall (\mu_a, \mu_b) \in [0,1]^2$:
   - $T(\mu_a, \mu_b) \leq T(\mu_a, 1) = \mu_a$;
   - $T(\mu_a, \mu_b) \leq T(1, \mu_b) = \mu_b$.
2. На границе $[0,1]^2$ $T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0, T(1,1) = 1$;
3. $\forall (\mu_a, \mu_b) \in [0,1]^2$ и $\forall T$ $T(\mu_a, \mu_b) \geq 0 = T_d(\mu_a, \mu_b)$ и $T(\mu_a, \mu_b) \leq min(\mu_a, \mu_b)$(п.1).

□

2.2 Доказать: $T_d \leq T_l \leq T_p \leq T_m$

Доказательство.

1. Докажем, что $max(0, \mu_a + \mu_b - 1) \leq \mu_a * \mu_b$:
   (a) 1-ый случай, когда $\mu_a + \mu_b - 1 \leq 0 \leq \mu_a * \mu_b$;
   (b) 2-ой случай, когда $\mu_a + \mu_b - 1 > 0 \Rightarrow \mu_a + \mu_b - 1 - \mu_a * \mu_b = -(1 - \mu_a) * (1 - \mu_b) \leq 0$
2. Получили, что $T_l \leq T_p$;
3. Тогда используем утверждение из 2-ой задачи и получаем, что $T_d \leq T_l \leq T_p \leq T_m$

□

2.3 Доказать: $\forall t$-конормы $\perp : \perp_d \leq \perp \leq \perp_m$

Доказательство. 1. Из свойств конормы $\perp(\mu_a, \mu_b) \leq \perp(\mu_c, \mu_d) <= \mu_a \leq \mu_c, \mu_b \leq \mu_d$ и $\perp(1,1) = 1, \perp(\mu_a, 0) = \mu_a$ получаем $\forall \perp \forall (\mu_a, \mu_b) \in [0,1]^2$:

- $\perp(\mu_a, \mu_b) \geq \perp(\mu_a, 0) = \mu_a$;
- $\perp(\mu_a, \mu_b) \geq \perp(0, \mu_b) = \mu_b$.

2. На границе $[0,1]^2$ $\perp(0,0) = 0, \perp(0,1) = \perp(1,0) = \perp(1,1) = 1$;

3. $\forall (\mu_a, \mu_b) \in [0,1]^2$ и $\forall \perp : \perp(\mu_a, \mu_b) \leq 1 = \perp_d(\mu_a, \mu_b)$ и $\perp(\mu_a, \mu_b) \geq max(\mu_a, \mu_b) = \perp_m(\mu_a, \mu_b)$.

□

2.4 Доказать: $\perp_d \geq \perp_l \geq \perp_p \geq \perp_m$

Доказательство. 1. Докажем, что $min(\mu_a + \mu_b, 1) \geq \mu_a + \mu_b - \mu_a * \mu_b$:

   (a) 1-ый случай, когда $\mu_a + \mu_b \geq 1 => |1 - \mu_a - \mu_b + \mu_a * \mu_b \geq 0| => 1 \geq \mu_a + \mu_b - \mu_a * \mu_b$;

   (b) 2-ой случай, когда $\mu_a + \mu_b < 1 => \mu_a + \mu_b - \mu_a - \mu_b + \mu_a * \mu_b \geq 0$;

2. Тогда используя решение п.4 $\perp_d \geq \perp_l \geq \perp_p \geq \perp_m$.

□

2.5 Проверить выполнение свойств t-норм и t-конорм для t-нормы и t-конормы Майора-Торренса

2.5.1 t-норма

$$T(\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} max(\mu_a + \mu_b - \lambda, 0) & \text{, если } \lambda \in [0,1] \text{ и } (\mu_a, \mu_b) \in [0, \lambda]^2 \\ min(\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = 0 \text{ или } \mu_a > \lambda \text{ или } \mu_b > \lambda \end{cases}$$

Проверка свойств:

1.

$$T(0,0) = \begin{cases} max(-\lambda, 0) & \text{, если } \lambda \in [0,1] \text{ и } (\mu_a, \mu_b) \in [0,\lambda]^2 \\ min(0,0) & \text{, если } \lambda = 0 \text{ или } \mu_a > \lambda \text{ или } \mu_b > \lambda \end{cases} = 0;$$

$$T(\mu_a, 1) = min(\mu_a, 1) = \mu_a;$$

2. Комутативность очевидна;

3.

$$T(\mu_a, T(\mu_b, \mu_c)) = \begin{cases} max(\mu_a + max(\mu_b + \mu_c - \lambda, 0) - \lambda, 0) \\ min(\mu_a, min(\mu_b, \mu_c)) \end{cases} =$$

$$\begin{cases} max(max(\mu_a + \mu_b - \lambda, 0) + \mu_c - \lambda, 0) \\ min(min(\mu_a, \mu_b), \mu_c) \end{cases}$$

4. Монотонность следует из монотонности максимума и минимума.

2.5.2 t-конорма

$$\perp(\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} min(\mu_a + \mu_b + \lambda - 1, 1) & \text{, если } \lambda \in [0,1] \text{ и } (\mu_a, \mu_b) \in [1-\lambda, 1]^2 \\ max(\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = 0 \text{ или } \mu_a < 1 - \lambda \text{ или } \mu_b < 1 - \lambda \end{cases}$$

Проверка свойств:

1.

$$\perp(1,1) = \begin{cases} min(1 + \lambda, 1) \\ max(1,1) \end{cases} = 1;$$

$$\perp(\mu_a, 0) = \begin{cases} min(\mu_a + \lambda - 1, 1) \\ max(\mu_a, 0) \end{cases} = \mu_a$$

2. Коммутативность и монотонность следует из монотонности максимума и минимума;

3. Ассоциативность, как и в случае t-нормы.

2.6 Проверить выполнение свойств t-норм и t-конорм для t-нормы и t-конормы Ягера

2.6.1 t-норма

$$T(\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} max\left(1 - \left((1-\mu_a)^\lambda + (1-\mu_b)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 0\right) & \text{, если } \lambda \in (0, +\infty) \\ T_d(\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = 0 \\ T_m(\mu_a, \mu_b) & \text{, если } \lambda = \infty \end{cases}$$

Проверка свойств:

1. $$T(0,0) = \begin{cases} max\left(1 - 2^{\frac{1}{\lambda}}, 0\right) & \text{, если } \lambda \in (0, +\infty) \\ T_d(0,0) & \text{, если } \lambda = 0 \\ T_m(0,0) & \text{, если } \lambda = \infty \end{cases} = 0;$$

   $$T(\mu_a,1) = \begin{cases} max\left(\mu_a, 0\right) & \text{, если } \lambda \in (0, +\infty) \\ T_d(\mu_a,1) & \text{, если } \lambda = 0 \\ T_m(\mu_a,1) & \text{, если } \lambda = \infty \end{cases} = \mu_a;$$

2. Коммутативность и монотонность(из свойств нормы и максимума) очевидна;

3. Для ассоциативности проверим только 1-ый случай, остальные верны из определения t-нормы. Более того, для проверки ассоциативности **достаточно проверить следующее равенство:**

   $$max(1-y,0) = 1 - min(y,1)$$

   1. $1 - y < 0 => y > 1 => max(1-y,0) = 0 = 1 - min(y,1)$ 2. $1 - y > 0 => 1 > y => max(1-y,0) = 1 - y = 1 - min(y,1)$

   Тогда

   $$max\left(1 - \left((1-\mu_a)^\lambda + (1-\mu_b)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 0\right) =$$

   $$1 - min\left(\left((1-\mu_a)^\lambda + (1-\mu_b)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 1\right)$$

Отсюда следует ассоциативность:

$$(1-\mu_a)^\lambda + (1-1+min\left(((1-\mu_b)^\lambda + (1-\mu_c)^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}, 1\right)^\lambda =$$

$$(1-\mu_a)^\lambda + min\left((1-\mu_b)^\lambda + (1-\mu_c)^\lambda, 1\right)^\lambda$$

(ассоциативность внешнего максимума показывается аналогично)

4. Монтонность следует из п.3 и монотонности минимума

2.6.2 t-конорма

$$\perp(\mu_a,\mu_b) = \begin{cases} min\left((\mu_a^\lambda + \mu_b^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}, 1\right) & \text{, если } \lambda \in (0,+\infty) \\ \perp_d(\mu_a,\mu_b) & \text{, если } \lambda = 0 \\ \perp_m(\mu_a,\mu_b) & \text{, если } \lambda = \infty \end{cases}$$

Проверка свойств(только для первого случая, для конорм эти проверки уже выполнены):

1. $$\perp(1,1) = min(2^{\frac{1}{\lambda}}, 1) = 1 \perp(\mu_a, 0) = min(\mu_a, 1) = \mu_a$$

2. Коммутативность, ассоциативность и монотонность следуют из аналогичных рассуждений для t-нормы.