Лекция №1

Иновенков
Игорь Николаевич

Классификация УЧП 2-го порядка

$F(x, y, u_x, u_y, u, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0$ – общий вид

Линейное ур-ие отн-но старших производных:

(1) $a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F_1(x,y,u,u_x,u_y)=0$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} – ф-ции от x, y.

Если a_{ij} зависят и от u, u_x, u_y, то ур-ие квазилинейное

Линейное, если линейно отн-но u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} и от u, u_x, u_y:

(2) $a_{11}(x,y)u_{xx}+2a_{12}(x,y)u_{xy}+\dots+c(x,y)u+f(x,y)=0$

Если $a_{ij}, \dots, f$ не зависят от x, y, то ур-ие с постоянными коэффициентами

Однородное, если $f(x,y)=0$

С помощью преобр-ия $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ получаем новое ур-ие.

Рассматриваем ур-ия, линейные относительно старшей производной с 2 нез-ми переменными x и y.

Замена:

$$(3)\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + \\ \quad + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}[\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y] + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \\ \quad + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + \\ \quad + u_\eta \eta_{yy} \end{cases}$$

$$u_{\xi\xi}[a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2] + 2u_{\xi\eta}[a_{11}\xi_x\eta_x + $$
$$+ a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y] +$$
$$+ u_{\eta\eta}[a_{11}\xi_y^2 + a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2] +$$
$$+ \overline{F}(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

Или $\overline{a_{11}}\, u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}}\, u_{\xi\eta} + \overline{a_{22}}\, u_{\eta\eta} + \overline{F} = 0$ (4)

Если ур-ие линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f,$$

тогда

$$\overline{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta$$

Выберем переменные так, чтобы $\overline{a_{11}} = 0$

Рассм-м:

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0 \qquad (5)$$

$\exists$ $z = \varphi(x, y)$ - частное реш-ие ур-ия.

Если $\xi := \varphi(x, y)$, то $\overline{a_{11}} = 0$

<u>Характеристическое уравнение:</u>

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dy\, dx + a_{22} dx^2 = 0 \qquad (6)$$

<u>Лемма 1</u>

Если $z = \varphi(x, y)$ - частное реш-ие (5), то соотношение $\varphi(x, y) = c$ - общий интеграл ОДУ (6)

<u>Лемма 2</u>

Если $\varphi(x, y) = c$ - общий интеграл (6), то $z = \varphi(x, y)$ удовл-т ур-ию (5).

Док-во Леммы 1:

(5): $a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0$

$\varphi(x,y)=c$ – общий интеграл (6), если

$y=f(x,C)$ удовл-т (6).

Из равенства $\varphi(x,y)=c$ следует $\varphi_x dx+\varphi_y dy=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right]_{y=f(x,C)} \qquad (8)$$

$\Rightarrow$ $y=f(x,C)$ удовл-т (6), т.к.

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=0$$

чтд

Док-во Леммы 2:

Пусть $\varphi(x,y)=c$ – общий интеграл (6)

Док-м $a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0$ $\forall (x,y)$ (7*)

Пусть (x_0,y_0) – заданная точка. Проведем через нее интегральную кривую (6), полагая, что $\varphi(x_0,y_0)=C_0$ и расс-ая кривую $y=f(x,C)$

$\forall$ точки этой кривой:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,c)} = 0$$

$x := x_0$

$\Longrightarrow$ $$a_{11}\,\varphi_x^2(x_0,y_0) + 2a_{12}\,\varphi_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0) + a_{22}\,\varphi_y^2(x_0,y_0) = 0$$ чтд

(6) – Хар-ое уравнение (1), а его интегралы – характеристики.

$\exists\ \xi = \varphi(x,y)$, где $\varphi = C_1$ – общий интеграл (6) обращаем в 0 коэффициент при $u_{\xi\xi}$.

Если $\psi(x,y) = C_2$ – другой общий интеграл (6), то $\eta = \psi(x,y)$ обратит в 0 коэф-т при $u_{\eta\eta}$.

Ур-ие (6) распадается на 2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (10)$$

Знак $\frac{D}{4}$ определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0$$

это ур-ие в т. M:

гиперболич-го типа, если $\frac{D}{4} > 0$

эллиптического типа, если $\frac{D}{4} < 0$

параболического типа, если $\frac{D}{4} = 0$

$\overline{a_{12}}^2 - \overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2$, где

$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$ => инвариантность типов ур-ий при замене:

$$\overline{a_{12}}^2 - \overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} = (a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y)^2 - (a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2)\cdot$$
$$\cdot(a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2) =$$
$$= a_{12}^2(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)^2 - 4a_{12}^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y + a_{11}a_{22}(2\xi_x\eta_x\xi_y\eta_y - \xi_x^2\eta_y^2 - \xi_y^2\eta_x^2) +$$
$$+ 2a_{11}a_{12}(\xi_x\eta_x\cdot(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) - \xi_x^2\eta_x\eta_y - \eta_x^2\xi_x\xi_y) + 2a_{12}a_{22}\cdot$$
$$\cdot(\xi_y\eta_y(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) - \xi_y^2\eta_x\eta_y - \eta_y^2\xi_x\xi_y) = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2.$$

Рассмотрим область G, где уравнение сохраняет тип.

- гиперболический тип: $\frac{D}{4} > 0$ и ПЧ действительны и различны

  $\exists\ \xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y)$

  приводим (4) к виду

  $$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$ где

$$\Phi = -\frac{F}{2\bar{a}_{12}}$$ — 1-я каноническая форма уравнения гиперболического типа.

$\exists$ $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ $\left(\alpha = \frac{\xi+\eta}{2},\ \beta = \frac{\xi-\eta}{2} \right)$

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta),\quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha\alpha}\frac{1}{2} - u_{\alpha\beta}\frac{1}{2} + u_{\beta\alpha}\frac{1}{2} - u_{\beta\beta}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

$$\Rightarrow u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 = 4\Phi$$

- параболический тип: (9) и (10) совпадают $\Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi(x, y) = C$

$\exists$ $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ — ЛНЗ с $\varphi(x, y)$

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)^2 = 0$$

т. к. $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} \Rightarrow \bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x + \sqrt{a_{22}}\,\eta_y\right) = 0$

(4) $:\bar{a}_{22}$

$\Rightarrow$ каноническая форма: $u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$

• Эллиптический тип

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и ПЧ (9), (10) $\in \mathbb{C}$

$\exists$ $\varphi(x, y) = C$ – комплексный интеграл (9)

$\varphi^*(x, y) = C$ – общий интеграл сопряж-го уравнения (10)

$\xi = \varphi(x, y)$

$\eta = \varphi^*(x, y)$ как и гиперболическое, но с i

$\begin{cases} \xi = \alpha + i\beta \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases}$ $\alpha = Re\,\varphi$, $\beta = Im\,\varphi$

$$\Rightarrow \quad a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$

$$= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) -$$

$$- (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$

$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) +$$

$$+ a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0, \text{ т.е. } \overline{a_{11}} = \overline{a_{22}}, \quad \overline{a_{12}} = 0$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

$\Rightarrow$ • $\frac{D}{4} > 0$ $\quad u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ или $u_{xy} = \tilde{\Phi}$

• $\frac{D}{4} < 0$ $\quad u_{xx} + u_{yy} = \Phi$

• $\frac{D}{4} = 0$ $\quad u_{xx} = \Phi$

Ур-ия с пост. коэф-ми

2 незав-х переменных $\Rightarrow$

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f(x,y) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$, а характеристики

$$\begin{cases} y = \dfrac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} + C_1 \\ y = \dfrac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} + C_2 \end{cases}$$

После замены $\Rightarrow$

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0$ — эллипт. тип

(13) $\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \end{array}\right\}$ — гиперб-ий тип

$u_{\xi\xi} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0$ — параболич-ий тип

Введем новую ф-цию v:

$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v$, где λ, μ — пока произв-ые пост-е

Тогда

$$u_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_\xi + \lambda v)$$

$$u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v)$$
$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v)$$
$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v)$$
$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v)$$

подстановка в (13), $: e^{\lambda\xi+\mu\eta}$

$\Longrightarrow$

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda) v_\xi + (b_2 + 2\mu) v_\eta +$$
$$+ (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c) v + f = 0$$

$$f_1 = f e^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$$

λ и η выберем так, чтобы $\begin{matrix} b_1 + 2\lambda = 0 \\ b_2 + 2\mu = 0 \end{matrix}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0$

$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0$ — эллипт. тип

$v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 = 0$ или $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0$

гиперб. тип

$v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1 = 0$ — параб-ий тип

Лекция №2

Задачи, приводящие к уравнениям параболического типа.

Универсальное уравнение непрерывности.

] величина характеризуется плотность, плотностью потока $\vec{j}$ и интенсивностью источников F.

Тогда универсальное уравнение непрерывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = F \qquad (1)$$

Рассмотрим обл-ть D, в кот-й локализована сохраняющаяся величина ρ.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{D} \rho \, dv = -\iint\limits_{\partial D} \vec{j} \, d\vec{\sigma} + \iiint\limits_{D} F \, dv$$

=> [ф-ла Остроградского] =>

$$(2) \qquad \iiint\limits_{D} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j - F \right) dv = 0$$

=> в силу произвольности

$\mathcal{D} \Rightarrow (1)$

Течение жидкости: $\vec{j} = \rho \vec{v}$

Закон сохранения массы в случае отсутствия источников:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Если жидкость несжимаемая, то

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

В случае диффузии имеет место закон сохранения массы, и

$\vec{j} = -D \operatorname{grad} u$, u - плотность вещества, D - коэффициент диффузии.

Тогда ур-ие непрерывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(-D \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) + F \qquad (3)$$

В случае теплопроводности сохраняется энергия и $\underline{P = c\rho u}$, где

c – удельная теплоемкость

ρ – плотность вещества

u – температура

$\vec{j} = -k \operatorname{grad} u$, где k – коэффициент теплопроводности

Тогда уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F \quad (4)$$

Рассмотрим простейший случай постоянных характеристик среды:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + F \quad (3^*)$$

Уравнение теплопроводности:

$$(4^*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{F}{c\rho},$$ где

a^2 – коэффициент температуропроводности, а $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ – оператор Лапласа (последнее в декартовых координатах)

$\exists$ $u = u(x,t)$ (теплопродкость в стержке) с теплоизолированными границами

Тогда $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (5)$$

∞ решений, для ! нужны граничные условия.

Теорема (принцип максимума)

Если функция $u(x,t) \in C[0,l]\times[0,T]$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности в точках $0<x<l$, $0<t\le T$, т.е. $u_t = a^2 u_{xx}$ в этой облсти, то max и min $u(x,t)$ достигается при $x=0$ или $x=l$

Док-во:

$\rbrack$ $\max u(x,t) = M$ при $t=0$, $x=0$ или $x=l$

$\rbrack$ $\exists (x_0,t_0) \in (0,l)\times(0,T]$: $u(x_0,t_0) = M+\varepsilon$ - достигает максимума $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,t_0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \le 0$ и

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) \ge 0$. Для противоречия найдем т. (x_1,t_1), в которой $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \le 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} > 0$

Рассмотрим ф-цию $\mathcal{V}(x,t) = u(x,t) + k(t_0 - t)$, $k>0$.

...

Смешанная задача.

Смешанная, т.к. задаются и граничные, и начальные условия.

$$(6)\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0<x<\ell,\ t>0 \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(\ell,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) \in C^{2,1}\big((0;\ell)\times(0;T]\big) \cap C\big([0;\ell]\times[0;T]\big)$$

Краевые условия 1-го рода – заданы значения ф-ции на концах

Краевые условия 2-го рода – заданы значения произв-ой ф-ции на концах

Краевые условия 3-го рода –

$$\vec{j}\,\big|_\Gamma = h(u-\theta(t))\vec{n}\,\big|_\Gamma :$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_1(u-\theta_1(t))\Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + h_2(u-\theta_2(t))\Big|_{x=\ell} = 0$$

Задача корректна, если:

1) $\exists$ решение
2) $!$ решение
3) $\in C$ от входных данных

Док-м $\exists$ решения смешенной задачи с помощью метода разделения переменных или метода Фурье:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases} \qquad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{cases} \qquad (8)$$

Ищем решение в виде:

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$. Подставляем в (8):

$$\begin{cases} \dfrac{T'(t)}{a^2 T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda, \quad \lambda = const \\ X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases} \qquad (9)$$

$X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$

1. $\lambda < 0$, т.е. $\lambda = -k^2$ и $X'' - k^2 X = 0$, то

$X(x) = C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx$.

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \operatorname{sh}(k\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, \text{ т.е.}$$

$X(x) \equiv 0$

$\lambda \geqslant 0$, т.к. $X''(x) = -\lambda X$,

$$\int_0^\ell X'' X dx = X' X \Big|_0^\ell - \int_0^\ell (X')^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda \int_0^\ell X^2 dx = -\int_0^\ell (X')^2 dx \Rightarrow \lambda \geqslant 0$$

2. Если $\lambda = 0$, то

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \ell = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

Если краевые условия 2-го рода

$$\begin{cases} X'' = 0 \\ X'(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases}$$, то $\lambda = 0$ – СЗ и $X_0(x) = 1$

собств-я ф-ция.

3. Если $\lambda > 0$, то

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$$
$$X(0) = C_2 = 0$$
$$X(\ell) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, \ell) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\, \ell = \pi n, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \quad X_n = \sin\frac{\pi n x}{\ell}$$

$$(10) \quad T_n' = -\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 T_n \Rightarrow \left| \xi = -\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 \right|$$
$$T_n = c_n e^{\xi t}$$

Т.о. получен набор частных решений

$u_n(x,t) = e^{\xi t} \sin\frac{\pi n x}{\ell}$ с помощью которых ищем решение (7) с $\forall\, \varphi(x)$.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\xi t} \sin\frac{\pi n x}{\ell} \qquad (11)$$

(11) удовл-т граничным условиям.

Подберем C_n, чтобы $u(x,0) = \varphi(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{\ell} = \varphi(x) \qquad (12)$$

$$C_n = \varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^{\ell} \varphi(\eta) \sin\frac{\pi n \eta}{\ell}\, d\eta$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l}\, dx = \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{\xi t} \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (13)$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\eta) \sin \frac{\pi n \eta}{l}\, d\eta$$

Ряды, полученные формальным дифференцированием (u_{xx}, u_t) сх-ся равном-но по признаку Вейерштрасса при $t > t_0 > 0$.

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x)$, если $\varphi(x)$ – кусочно-гладкая на $[0; l]$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

$\Rightarrow$ (13) решение (7).

(13) – устойчивое решение:

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \Rightarrow |u(x,t)| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ Существование доказано

Единственность:

$\exists$ $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – решения.

Рассм-м $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \end{cases}$$

$\left\lfloor v(0,t) = v(l,t) = v(x,0) = 0 \right.$

Тогда $\min v(x,t) \le v(x,t) \le \max v(x,t)$

$\Rightarrow$ по принципу максимума $\min = \max = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad v(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ чтд

Другой способ док-ва:

$$E(t) = \int_0^l \frac{1}{2} v^2 dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l v v_t \, dx = a^2 \int_0^l v v_{xx} \, dx =$$

$$= a^2 v v_x \Big|_0^l - a^2 \int_0^l v_x^2 dx = -a^2 \int_0^l v_x^2 dx$$

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} \le 0 \\ E(0) = 0 \\ E(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow E(t) \equiv 0 \Rightarrow v(x,t) \equiv 0$$

чтд