Лекция №1

Иновеиков

Игорь Николаевич

Классификация УЧП 2-го порядка

$F(x, y, u_x, u_y, u, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0$ – общий вид

Линейное ур-ие отн-но старших производных:

(1) $a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y)=0$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} – ф-ции от x, y.

Если a_{ij} зависят и от u, u_x, u_y, то ур-ие квазилинейное

Линейное, если линейно отн-но u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} и от u, u_x, u_y:

(2) $a_{11}(x,y) u_{xx} + 2a_{12}(x,y) u_{xy} + \dots + c(x,y) u + f(x,y)=0$

Если $a_{ij}, \dots, f$ не зависят от x, y, то ур-ие с постоянными коэффициентами

Однородное, если $f(x,y)=0$

С помощью преобр-ия $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$ получаем новое ур-ие.

Рассматриваем ур-ия, линейные относительно старшей производной с 2 нез-ми переменными x и y.

Замена:

$$(3)\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + \\ \quad + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}[\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y] + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \\ \quad + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + \\ \quad + u_\eta \eta_{yy} \end{cases}$$

$$u_{\xi\xi}[a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2] + 2u_{\xi\eta}[a_{11}\xi_x\eta_x +$$
$$+ a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y] +$$
$$+ u_{\eta\eta}[a_{11}\xi_y^2 + a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2] +$$
$$+ \overline{F}(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

Или $$\overline{a_{11}}u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}}u_{\xi\eta} + \overline{a_{22}}u_{\eta\eta} + \overline{F} = 0 \qquad (4)$$

Если ур-ие линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f,$$

тогда

$$\overline{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \partial$$

Выберем переменные так, чтобы $\overline{a_{11}} = 0$

Рассм-м:

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0 \qquad (5)$$

$\exists$ $z = \varphi(x, y)$ – частное реш-ие ур-ия.

Если $\xi := \varphi(x, y)$, то $\overline{a_{11}} = 0$

<u>Характеристическое уравнение:</u>

$$a_{11}\, dy^2 - 2a_{12}\, dy\, dx + a_{22}\, dx^2 = 0 \qquad (6)$$

<u>Лемма 1</u>

Если $z = \varphi(x, y)$ – частное реш-ие (5), то соотношение $\varphi(x, y) = c$ – общий интеграл ОДУ (6)

<u>Лемма 2</u>

Если $\varphi(x, y) = c$ – общий интеграл (6), то $z = \varphi(x, y)$ удовл-т ур-ию (5).

Док-во Леммы 1:

(5): $a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0$

$\varphi(x,y)=c$ – общий интеграл (6), если

$y=f(x,C)$ удовл-т (6).

Из равенства $\varphi(x,y)=c$ следует $\varphi_x dx+\varphi_y dy=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right]_{y=f(x,C)} \qquad (8)$$

$\Rightarrow$ $y=f(x,C)$ удовл-т (6), т.к.

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-\right.$$
$$\left.-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=0$$

чтд

Док-во Леммы 2:

$\rceil$ $\varphi(x,y)=c$ – общий интеграл (6)

Док-м $a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0$ (7*)

$\forall (x,y)$

$\rceil$ (x_0,y_0) – заданная точка. Проведем через нее интегральную кривую (6), полагая, что

$\varphi(x_0,y_0)=C_0$ и расс-ая кривую $y=f(x,C)$

$\forall$ точки этой кривой:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,c)} = 0$$

$x := x_0$

$\Longrightarrow$ $$a_{11}\,\varphi_x^2(x_0,y_0) + 2a_{12}\,\varphi_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0) + a_{22}\,\varphi_y^2(x_0,y_0) = 0$$ чтд

(6) – Хар-ое уравнение (1), а его интегралы – характеристики.

$\exists\, \xi = \varphi(x,y)$, где $\varphi = C_1$ – общий интеграл (6) обращаем в 0 коэффициент при $u_{\xi\xi}$.

Если $\psi(x,y) = C_2$ – другой общий интеграл (6), то $\eta = \psi(x,y)$ обратит в 0 коэф-т при $u_{\eta\eta}$.

Ур-ие (6) распадается на 2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (10)$$

Знак $\frac{D}{4}$ определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0$$

это ур-ие в т. M:

гиперболич-го типа, если $\frac{D}{4} > 0$

эллиптического типа, если $\frac{D}{4}<0$

параболического типа, если $\frac{D}{4}=0$

$\overline{a_{12}}^2 - \overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2$, где

$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \Rightarrow$ инвариантность типов

ур-ий при замене:

$$\overline{a_{12}}^2 - \overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} = (a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) +$$
$$+ a_{22}\xi_y\eta_y)^2 - (a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2)\cdot$$
$$\cdot(a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2) =$$
$$= a_{12}^2(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)^2 - 4a_{12}^2\xi_x\xi_y\eta_x\eta_y +$$
$$+ a_{11}a_{22}(2\xi_x\eta_x\xi_y\eta_y - \xi_x^2\eta_y^2 - \xi_y^2\eta_x^2) +$$
$$+ 2a_{11}a_{12}(\xi_x\eta_x\cdot(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) -$$
$$- \xi_x^2\eta_x\eta_y - \eta_x^2\xi_x\xi_y) + 2a_{12}a_{22}\cdot$$
$$\cdot(\xi_y\eta_y(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) - \xi_y^2\eta_x\eta_y -$$
$$- \eta_y^2\xi_x\xi_y) = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y -$$
$$- \xi_y\eta_x)^2 = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2.$$

Рассмотрим область G, где уравнение сохраняет тип.

- гиперболический тип: $\frac{D}{4}>0$ и ПЧ действительны и различны

$\exists\ \xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y)$

приводим (4) к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta),$$ где

$\Phi = -\dfrac{F}{2\overline{a_{12}}}$ – 1-я каноническая форма уравнения гиперболического типа.

$\exists\ \xi = \alpha + \beta \quad \left(\alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2} \right)$

$\eta = \alpha - \beta \quad \left(\beta = \dfrac{\xi-\eta}{2} \right)$

$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$, $u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$

$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha\alpha}\frac{1}{2} - u_{\alpha\beta}\frac{1}{2} + u_{\beta\alpha}\frac{1}{2} - u_{\beta\beta}\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$

$\Rightarrow u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 = 4\Phi$

- параболический тип: (9) и (10) совпадают $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x, y) = C$

$\exists\ \xi = \varphi(x,y),\ \eta = \eta(x,y)$ – ЛНЗ с $\varphi(x,y)$

$\overline{a_{11}} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\,\xi_x +$

$+ \sqrt{a_{22}}\,\xi_y)^2 = 0$

т. к. $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} \Rightarrow \overline{a_{12}} = a_{11}\xi_x\eta_x +$

$+ a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$

$= (\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x + \sqrt{a_{22}}\,\eta_y) = 0$

(4) $:\overline{a_{22}}$

$\Rightarrow$ каноническая форма: $u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$

• Эллиптический тип

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и ПЧ (9), (10) $\in \mathbb{C}$

$\exists$ $\varphi(x,y) = C$ – комплексный интеграл (9)

$\varphi^*(x,y) = C$ – общий интеграл сопряж-го уравнения (10)

$$\xi = \varphi(x,y)$$
$$\eta = \varphi^*(x,y)$$

как и гиперболическое, ко C_i

$$\begin{cases} \xi = \alpha + i\beta \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases} \qquad \alpha = \operatorname{Re}\varphi, \quad \beta = \operatorname{Im}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$

$$= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) -$$
$$- (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) +$$
$$+ a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0, \text{ т.е. } \quad \overline{a_{11}} = \overline{a_{22}}, \quad \overline{a_{12}} = 0$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

$\Rightarrow$

- $\frac{D}{4} > 0$ $\quad u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ или $u_{xy} = \tilde{\Phi}$
- $\frac{D}{4} < 0$ $\quad u_{xx} + u_{yy} = \Phi$
- $\frac{D}{4} = 0$ $\quad u_{xx} = \Phi$

Ур-ия с пост. коэф-ми

2 нез-х переменных $\Rightarrow$

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f(x,y) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}{a_{11}}$$, а характеристики

$$\begin{cases} y = \dfrac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}{a_{11}} + C_1 \\ y = \dfrac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}{a_{11}} + C_2 \end{cases}$$

После замены $\Rightarrow$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0$$ — эллипт. тип

(13)

$$\left.\begin{matrix} u_{\xi\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \end{matrix}\right\}$$ — гиперб-ий тип

$$u_{\xi\xi} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0$$ — параболич-ий тип

Введем новую ф-цию v:

$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v$, где λ, μ — пока произв-ые пост-е

Тогда

$$u_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_\xi + \lambda v)$$

$$u_\eta = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta+\mu v)$$
$$u_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi}+2\lambda v_\xi+\lambda^2 v)$$
$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta}+2\mu v_\eta+\mu^2 v)$$
$$u_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta}+\lambda v_\eta+\mu v_\xi+\lambda\mu v)$$

подстановка в (13), $: e^{\lambda\xi+\mu\eta}$

$\Longrightarrow$

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+(b_1+2\lambda)v_\xi+(b_2+2\mu)v_\eta+$$
$$+(\lambda^2+\mu^2+b_1\lambda+b_2\mu+c)v+f=0$$
$$f_1=fe^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$$

λ и η выберем так, чтобы $\begin{matrix} b_1+2\lambda=0 \\ b_2+2\mu=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1=0$

$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1=0$ — эллипт. тип

$v_{\xi\eta}+\gamma v+f_1=0$ или $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1=0$

гиперб. тип

$v_{\xi\xi}+b_2 v_\eta+f_1=0$ — параб-ий тип

Лекция №2

Задачи, приводящие к уравнениям параболического типа.

Универсальное уравнение непрерывности.

∃ величина характеризуется плотность, плотностью потока $\vec{j}$ и интенсивностью источников F.

Тогда универсальное уравнение непрерывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = F \qquad (1)$$

Рассмотрим обл-ть $\mathcal{D}$, в кот-й локализована сохраняющаяся величина ρ.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\mathcal{D}} \rho \, dv = - \iint\limits_{\partial \mathcal{D}} \vec{j} \, d\vec{\sigma} + \iiint\limits_{\mathcal{D}} F \, dv$$

=> [ф-ла Остроградского] =>

$$(2) \qquad \iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j - F \right) dv = 0$$

=> в силу произвольности

$D \Rightarrow (1)$

Течение жидкости: $\vec{j} = \rho \vec{v}$

Закон сохранения массы в случае отсутствия источников:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Если жидкость несжимаемая, то

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

В случае диффузии имеет место закон сохранения массы, и

$\vec{j} = -D \operatorname{grad} u$, u - плотность вещества, D - коэффициент диффузии.

Тогда ур-ие непрерывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(-D \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) + F \qquad (3)$$

В случае теплопроводности сохраняется энергия и $\underline{P = c \rho u}$, где

c – удельная теплоемкость
ρ – плотность вещества
u – температура

$\vec{j} = -k \operatorname{grad} u$, где k – коэффициент теплопроводности

Тогда уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F \quad (4)$$

Рассмотрим простейший случай постоянных характеристик среды:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F \quad (3^*)$$

Уравнение теплопроводности:

$$(4^*) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{F}{c\rho}, \text{ где}$$

a^2 – коэффициент температуропроводности, а $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ – оператор Лапласа (последнее в декартовых координатах)

$\exists\ u = u(x, t)$ (теплопродкость в стержке) с теплоизолированными границами

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (5)$

∞ решений, для ! нужны граничные условия.

Теорема (принцип максимума)

Если функция $u(x,t) \in C[0,\ell]\times[0,T]$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности в точках $0<x<\ell$, $0<t\le T$, т.е. $u_t = a^2 u_{xx}$ в этой обл-ти, то max и min $u(x,t)$ достигается при $x=0$ или $x=\ell$

Док-во:

$]$ $\max u(x,t) = M$ при $t=0$, $x=0$ или $x=\ell$

$]$ $\exists\, (x_0,t_0) \in (0,\ell)\times(0,T]$: $u(x_0,t_0) = M+\varepsilon$ - достигает максимума $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,t_0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \le 0$ и

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) \ge 0$. Для противоречия найдем т. (x_1,t_1), в которой $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \le 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} > 0$

Рассмотрим ф-цию $\mathcal{V}(x,t) = u(x,t) + k(t_0 - t)$, $k>0$.

...

Смешанная задача.

Смешанная, т.к. задаются и граничные, и начальные условия.

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) \in C^{2,1}\big((0;l)\times(0;T]\big) \cap C\big([0;l]\times[0;T]\big)$$

Краевые условия 1-го рода – заданы значения ф-ции на концах

Краевые условия 2-го рода – заданы значения произв-ой ф-ции на концах

Краевые условия 3-го рода –

$$\vec{j}\,\big|_\Gamma = h(u-\theta(t))\vec{n}\,\big|_\Gamma :$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_1(u-\theta_1(t))\Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + h_2(u-\theta_2(t))\Big|_{x=l} = 0$$

Задача корректна, если:

1) $\exists$ решение
2) $!$ решение
3) $\in C$ от входных данных

Док-м $\exists$ решения смешенной задачи с помощью метода разделения переменных или метода Фурье:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<\ell, \quad t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(\ell,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases} \qquad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<\ell, \quad t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(\ell,t)=0 \end{cases} \qquad (8)$$

Ищем решение в виде:

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$. Подставляем в (8):

$$\begin{cases} \dfrac{T'(t)}{a^2 T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda, \quad \lambda = const \\ X(0)=0 \\ X(\ell)=0 \end{cases} \qquad (9)$$

$X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$

1. $\lambda < 0$, т.е. $\lambda = -k^2$ и $X'' - k^2 X = 0$, то

$X(x) = C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx$.

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \operatorname{sh}(k\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, \text{ т.е.}$$

$X(x) \equiv 0$

$\lambda \geqslant 0$, т.к. $X''(x) = -\lambda X$,

$$\int_0^\ell X'' X dx = X' X \Big|_0^\ell - \int_0^\ell (X')^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda \int_0^\ell X^2 dx = -\int_0^\ell (X')^2 dx \Rightarrow \lambda \geqslant 0$$

2. Если $\lambda = 0$, то

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \ell = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

Если краевые условия 2-го рода

$$\begin{cases} X'' = 0 \\ X'(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases}$$, то $\lambda = 0$ – СЗ и $X_0(x) = 1$

собств-я ф-ция.

3. Если $\lambda > 0$, то

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$
$$X(0) = C_2 = 0$$
$$X(l) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi n, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{\pi n x}{l}$

$$T_n' = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n \Rightarrow \left| \xi = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \right| \qquad (10)$$
$$T_n = C_n e^{\xi t}$$

Т.о. получен набор частных решений
$u_n(x, t) = e^{\xi t} \sin \frac{\pi n x}{l}$ с помощью которых ищем решение (7) с $\forall\, \varphi(x)$.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\xi t} \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (11)$$

(11) удовл-т граничным условиям.

Подберем C_n, чтобы $u(x, 0) = \varphi(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x) \qquad (12)$$

$$C_n = \varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \varphi(\eta) \sin \frac{\pi n \eta}{l} \, d\eta$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{\xi t} \sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (13)$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\eta) \sin\frac{\pi n \eta}{l}\,d\eta$$

Ряды, полученные формальным дифференцированием (u_{xx}, u_t) сх-ся равном-но по признаку Вейерштрасса при $t > t_0 > 0$.

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n x}{l} = \varphi(x)$, если $\varphi(x)$ – кусочно-гладкая на $[0; l]$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

$\Rightarrow$ (13) решение (7).

(13) – устойчивое решение:

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \Rightarrow |u(x,t)| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ Существование доказано

Единственность:

$\exists$ $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – решения.

Рассм-м $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \end{cases}$$

$$\left\lfloor\, v(0,t) = v(l,t) = v(x,0) = 0 \right.$$

Тогда $\quad \min v(x,t) \le v(x,t) \le \max v(x,t)$

$\Rightarrow$ по принципу максимума $\quad \min = \max = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad v(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ чтд

Другой способ док-ва:

$$E(t) = \int_0^l \frac{1}{2} v^2 dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l v v_t \, dx = a^2 \int_0^l v v_{xx} \, dx =$$

$$= a^2 v v_x \Big|_0^l - a^2 \int_0^l v_x^2 dx = -a^2 \int_0^l v_x^2 dx$$

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} \le 0 \\ E(0) = 0 \\ E(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow E(t) \equiv 0 \Rightarrow v(x,t) \equiv 0$$

чтд

Лекция №3

Общая схема метода Фурье:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad 0<x<l, \; t>0 \\ \hat{l}_1 u\big|_{x=0} = \nu_1(t) \\ \hat{l}_2 u\big|_{x=l} = \nu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

L – оператор дифференцирования

$\hat{l}_1, \hat{l}_2$ – операторы граничных условий, содержащие u и u_x.

① Проверяем самосопряженность оператора L с соответствующими граничными условиями. Если $L^* \neq L$, то делаем ее таковой

Пример 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \neq L^*. \quad \exists\, u(x,t) = v e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x}\frac{\partial v}{\partial t} = e^{\lambda x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\lambda\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda^2 v\right) + e^{\lambda x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda v\right)$$

$$\exists\ 2\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{1}{4} v \\ v(0,t) = 0 = v(l,t) \\ v(x,0) = \varphi(x)\, e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$ — самосопряж-я задача.

кр. усл-ие 2-го рода $v_x(0,t) = 0 \longrightarrow$ кр. условие 3-го рода $v_x - \frac{1}{2} v\big|_{x=0} = 0$

Но $\exists$ задачи, неприводимые к самосопряженным

Пример 2

Задача Самарского-Ионкина

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l \\ u(0, t) = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$X_n(x) = \sin \dfrac{2\pi n x}{l}$ – не образует набор полной сис-мы ф-ций

② Граничные условия → однородные.

$\exists\ u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$

$l_1 w|_{x=0} = v_1(t)$

$l_2 w|_{x=l} = v_2(t)$

1) $\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$

$\exists\ w(x, t) = ax + b \Rightarrow$ $w(0, t) = b = \mu_1(t)$
$w(l, t) = al + b = \mu_2(t)$

$$a = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l} \Rightarrow w(x, t) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l} x + \mu_1$$

2) $\begin{cases} u_x(0, t) = \nu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$

$$\begin{cases} w_x(0, t) = \nu_1 \\ w(l, t) = \mu_2 \end{cases}$$

$\exists$ $w = ax + b \Rightarrow w_x(0, t) = a = \nu_1$

$$w(l, t) = al + b = \mu_2$$

$$b = -\nu_1 l + \mu_2$$

T. o. $w = \nu_1 x + (\mu_2 - l\nu_1)$

3) $\begin{cases} u_x(0, t) = \nu_1(t) \\ u_x(l, t) = \nu_2(t) \end{cases} \Rightarrow \deg w > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow w(x, t) = cx^2 + dx$

$$w_x(0, t) = 2cx + d\Big|_{x=0} = d = \nu_1$$

$$w_x(l, t) = 2cl + d = \nu_2 \Rightarrow c = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2l}$$

$$w(x, t) = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2l} x^2 + \nu_1 x$$

③ Ищем собств. значения и собств-ые функции.

$$\begin{cases} LX = -\lambda X \\ \hat{l}_1 X|_{x=0} = 0 = \hat{l}_2 X|_{x=l} \end{cases}$$

$|\{\lambda\}| = \aleph_0$ и каждому соответств-ет $|\{X_n\}| \leq n_0$

$\{\lambda_1, X_1\}$ и $\{\lambda_2, X_2\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow X_1 \perp X_2$

Примеры

1) $$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$n \in \mathbb{N}$

2) $$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2$$

$$X_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}\,x$$

$n \in \mathbb{Z}_+$

3)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 2\pi \\ X(0) = X(2\pi) \\ X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$

$\lambda_0 = 0, \quad X_0 = 1$

$\lambda_n = n^2, \quad X_n^{(1)} = \cos nx$

$X_n^{(2)} = \sin nx$

4) Раскладываем ф-ции в ряды:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = Lv + kv + \bar{f}(x,t) \\ \hat{l}_1 v|_{x=0} = 0 \\ \hat{l}_2 v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = \bar{\varphi}(x) \end{cases}$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(t)$$

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \bar{f}(\xi, t) X_n(\xi) d\xi, \quad \bar{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \overline{\varphi}(\xi) X_n(\xi)\, d\xi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \lambda_n v_n - k v_n - f_n(t) \right) X_n(x) = 0 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(v_n(0) - \varphi_n \right) X_n(x) = 0 \end{cases}$$

Т.к. $\{X_i(t)\}$ — полная ортогональная система, то $\sum c_j X_j(t) = 0 \Leftrightarrow c_j = 0$

5 бесконечная система задач Коши для ОДУ

$$\begin{cases} \frac{d v_n}{dt} + (\lambda_n - k) v_n = f_n(t) \\ v_n(0) = \varphi_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x) + w(x,t)$$

Примеры:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ u(0,t) = 0 = u(l,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u = u_1 + u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0,t) = 0 = u_1(l,t) \\ u_1(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n x}{l};$$

$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{l}\,d\xi$. Тогда $\begin{cases} \dfrac{dv_n}{dt} + \left(\dfrac{\pi n a}{l}\right)^2 v_n = 0 \\ v_n(0) = \varphi_n \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_n(t) = \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

Т.о. $$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t) \\ u_2(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u_2(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi$$

Для ф-ции $z_n(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_n}{dt} + \left(\dfrac{\pi n a}{l}\right)^2 z_n = f_n(t) \\ z_n(0) = 0 \end{cases}$$

$z_n(t) = \int_0^t U_n(t-\tau) f_n(\tau) d\tau$, где U_n — решение задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dU_n}{dt} + \left(\dfrac{\pi n a}{l}\right)^2 U_n = 0 \\ U_n(0) = 1 \\ U_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \end{cases}$$

Т.о. $z_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau \right) \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$\exists\ u_1(x,t) = u(x,t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 = u(l,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

Они мажорируются $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n}\, n^k e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$, $k = 0, 2, \ldots$

он сх-ся $\forall\, t = t_0 \Rightarrow$ сх-ся ряды равномерно

в $[0,l] \times [0;T] \Rightarrow u(x,t) \in C[0;l] \times (0;+\infty)$

а внутри $\exists\ \frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, т.к. t_0 - произвольный

$C(t \geq 0)$, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$ сх-ся, если

$\varphi(x)$ — кус-но-гладкая

Ф-ция источника для смешанной задачи:

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} d\xi \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l} \sin\frac{\pi n \xi}{l} \right) \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l} \sin\frac{\pi n \xi}{l}$$

ф-ция источника

$\exists$ на $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ выделяется Q тепла

(имеем нач-ую ф-цию $\varphi_\xi(x)$)

$$c\rho \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi_\xi(\xi) d\xi = Q$$

Соотвующее распред-ие температуры в момент времени t:

$$u_\xi(x,t) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} G(x,\xi,t)\,\varphi_\xi(\xi)\,d\xi \overset{\text{1-я т. о среднем}}{=}$$

$$= G(x,\xi^*,t)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\varphi_\xi(\xi)\,d\xi = G(x,\xi^*,t)\frac{Q}{c\rho} \Rightarrow$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \lim_{\varepsilon\to 0} u_\xi(x,t) = \frac{Q}{c\rho}G(x,x_0,t) =$$

$$= \frac{Q}{c\rho}\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n x_0}{l}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right)\sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= \int_0^t\int_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l}\right) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

Лекция №4

Задача Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой

Р-м з. Коши:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty,\ 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T]) \end{cases}$$

Потребуем, чтобы $|u(x,t)| < M$ (можно ослабить: $|u(x,t)| < ce^{p|x|}$)

Корректная постановка: найти гладкую при $t>0$ и $\in C[t \geq 0]$ огр-ую $u(x,t)$:

(1) $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) & -\infty < x < +\infty,\ 0 < t < +\infty \\ |u| < M \end{cases}$$

Теорема единственности

р-м $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} \\ v(x,0) = 0 & -\infty < x < +\infty \\ |v(x,t)| < 2M & 0 < t < +\infty \end{cases}$$

$\exists$ $|x| \le L$

$V(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$, то

$$\begin{cases} V_t = a^2 V_{xx} & |x| \le L,\ t > 0 \\ V(x,0) = \frac{2M}{L^2} x^2 \\ V(\pm L, t) = 2M + \frac{4M}{L^2} a^2 t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ в обл-ти $|x| \le L$

$$v(x,0) < V(x,0)$$

$$v(\pm L, t) < 2M < V(\pm L, t)$$

Т.о. $v(x,t) < V(x,t)$ $\forall (x,t)$

$L \to \infty \Rightarrow V(x,t) \to 0 \Rightarrow v(x,t) \equiv 0$ чтд

Построение решения задачи Коши.

Ф-ла Пуассона.

Способ I. метод Фурье.

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$X = e^{\pm i\lambda x}$$

$$u_\lambda(x,t) = A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t + i\lambda x}, \quad -\infty < \lambda < +\infty$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t + i\lambda x}\, d\lambda$$

Потребуем: $u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$

$$\Rightarrow A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi$$

Пока $\varphi(x)$ такие что интегралы сходятся.

Т.о.

(3) $$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda\, \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

(4) $$G(x,\xi,t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda$$

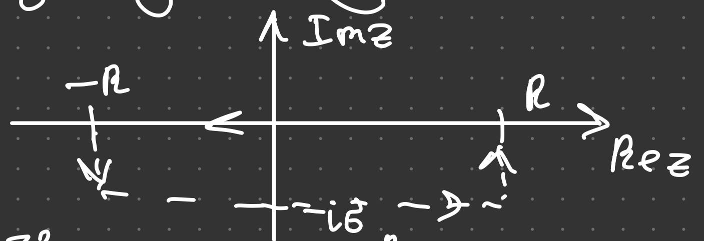
Вычислим (*):

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t\left(\lambda^2-2\lambda\frac{i(x-\xi)}{2a^2t}\pm\left(\frac{i(x-\xi)}{2a^2t}\right)^2\right)}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{a^2t(x-\xi)^2}{4(a^2t)^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2t\left(\lambda-\frac{i(x-\xi)}{2a^2t}\right)^2}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\underbrace{\int_{-\infty-i\sigma}^{+\infty-i\sigma}e^{-z^2}dz}_{=\sqrt{\pi}},\quad z=a\sqrt{t}\left(\lambda-\frac{i(x-\xi)}{2a^2t}\right),\quad \sigma=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$$

Р-м замкнутый контур:



$$\int_\Gamma e^{-z^2}dz=0 \Rightarrow \int_{-R-i\sigma}^{R-i\sigma}e^{-z^2}dz+\int_{R-i\sigma}^{R}e^{-z^2}dz+$$

$$+\int_{R}^{-R}e^{-z^2}dz+\int_{-R}^{-R-i\sigma}e^{-z^2}dz=I_1+I_2-I_3+I_4=0$$

$$R\to\infty,\ I_2, I_4\to 0 \Rightarrow R\to\infty \quad \int_{-\infty-i\sigma}^{+\infty-i\sigma}e^{-z^2}dz=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

Итак,

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \quad (5)$$

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi \quad (6)$$

Способ II. метод подобия.

$$u_t=a^2u_{xx}$$

$x'=kx$

$t'=k^2t$ это для $u(x',t')$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=k^2\frac{\partial u}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x'}k^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t'}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$$

Расс-м задачу:

$$u_t=a^2u_{xx} \qquad -\infty<x<+\infty$$
$$0<t<+\infty$$
$$u(x,0)=\begin{cases}u_0, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

По т. единств-ти $u(x,t)=u(kx,k^2t)$ $\forall x,t,k$

$\exists$ $k=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, тогда $u(x,t)=u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}},\frac{1}{4}\right)=$

$$= u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = u_0 f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$$

Найдем ур-ие для f: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = u_0 \dfrac{df}{dz}\left(-\dfrac{x}{4t^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2}\frac{1}{4t}; \quad -\frac{1}{4}\frac{df}{dz} u_0 \frac{x}{t^{\frac{3}{2}}} = a^2 u_0 \frac{d^2 f}{dz^2}\frac{1}{4t}$$

Т.о.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dz^2} = -\dfrac{2z}{a^2}\dfrac{df}{dz} \\ f(-\infty) = 0 \\ f(\infty) = 1 \end{cases} \qquad -\infty < z < +\infty$$

$$\frac{df}{dz} = g \Rightarrow \frac{dg}{dz} = -\frac{2z}{a^2} g; \quad \frac{dg}{g} = -\frac{2z\,dz}{a^2}$$

$$\ln|g| = -\frac{z^2}{a^2} + c_1 \Leftrightarrow g(z) = c\, e^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dz} = c e^{-\frac{z^2}{a^2}} \\ f(-\infty) = 0 \\ f(+\infty) = 1 \end{cases} \qquad f(z) = c\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{p^2}{a^2}} dp = c\int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-q^2} dq$$

$$f(+\infty) = c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq = c\sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-q^2}\, dq$$

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-q^2}\, dq = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-q^2}\, dq + \int_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-q^2}\, dq \right) =$$

$$= \frac{u_0}{2} \left(1 + \underbrace{\Phi}_{\text{erf - ф-ция ошибок.}}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right)$$

$\Rightarrow$

1) $u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty$

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right)$$

2) $u_t = a^2 u_{xx}$

$$-\infty < x < +\infty, \quad t > 0$$

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & x > \bar{x} \\ 0, & x < \bar{x} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{2a\sqrt{t}} \right) \right)$$

3) $u_t = a^2 u_{xx}$

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x > x_2 \\ u_0, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & x < x_1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left(\Phi\left(\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2a\sqrt{t}} \right) \right)$$

4) $\varphi(x)$ заменяется на кусочно-постоянную:

$u_t = a^2 u_{xx}$, —"—"—

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i, & x \in (x_i, x_{i+1}),\ i \in \overline{0,n} \\ \varphi_{-n}, & x_{-n-1} < x < x_{-n} \end{cases}$$

Тогда получим:

(8) $$u(x,t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_i}{2}\left(\Phi\left(\frac{x-x_i}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_{i+1}}{2a\sqrt{t}}\right)\right)$$

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \to 0$, тогда (8):

(9) $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\Phi\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right)\right) d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi$$

Рассм-м $$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$ (10)

1) $$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{4a\sqrt{\pi t}\, t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2} =$$

$$= e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{1}{2} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \left(-\frac{2(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{4(x-\xi)^2}{(4a^2t^2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \left(-\frac{2}{4a^2t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)$$

т.о.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \qquad (11)$$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi =$$

$$= \left[p = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = 1$$

т.о. G описывает эволюцию t на беск-ой прямой, если в нач-ный момент времени $t=0$, в т. $x_0=\xi$ выделилось $Q = c\rho$ тепла

(9*) $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

Покажем возмож-ть дифф-ия под знаком интеграла:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial t}\,\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}\,t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\varphi(\xi)\,d\xi = [\text{замена } p] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2}\left(-\frac{1}{2t} + \frac{p^2}{t}\right)\varphi(x+2a\sqrt{t}\,p)\,dp$$

> Сх-ся равномерно при $t \geq t_0 > 0$ по признаку Вейерштрасса, поэтому $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ можно находить через дифф-ие под знаком интеграла.

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\varphi(\xi)\,d\xi = 0$$

Для $u(x,t)$ из (9): $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = \lim\limits_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi =$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} \varphi(x+2a\sqrt{t}p)\, dp$$ вслу равном. сх-ти

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} \lim \varphi(x+2a\sqrt{t}p)\, dp = \varphi(x)$$

Устойчивость: $|\varphi(\xi)| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x,t) < \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varepsilon\, d\xi = \varepsilon$$

3. Коши для неоднородного ур-ия теплопров-ти

$$(12) \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t < +\infty$$

$\Rightarrow$ по аналогичным рассуждениям

$$(13) \qquad u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,t)\, d\xi\, d\tau.$$