1 Теория

1.1 $\cap, \cup$

- $\cap \sim \min(\mu_A(u), \mu_B(u))$;
- $\cup \sim \max(\mu_A(u), \mu_B(u))$;

1.2 Свойства алгебры

1. $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$(коммутативность);
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$(ассоциативность);
3. $A \cap A = A, A \cup A = A$(идемпотентность);
4. $\overline{(\overline{A})} = A$(инволюция);
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$(дистрибутивность относительно пересечения);
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$(дистрибутивность относительно объединения);
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$(правила де Моргана);
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
9. $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$(операции с пустым множеством);
10. $A \cap U = A, A \cup U = U$(операции с универсальным множеством);
11. $A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cup \overline{A} = U$(операции с дополнением).

1.3 T_l, T_d

- $T_l(\mu_a, \mu_b) = \max\{0, \mu_a + \mu_b - 1\}$;
- $T_d(\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} \mu_a & \text{, если } \mu_b = 1 \\ \mu_b & \text{, если } \mu_a = 1 \\ 0 & \text{, в других случаях} \end{cases}$

1.4 $\perp_l, \perp_d$

- $\perp_l(\mu_a, \mu_b) = min(\mu_a + \mu_b, 1)$;
- $\perp_d(\mu_a, \mu_b) = \begin{cases} \mu_a & \text{, если } \mu_b = 0 \\ \mu_b & \text{, если } \mu_a = 0 \\ 1 & \text{, в других случаях} \end{cases}$

2 Домашнее задание

1. Проверить свойства алгебры $\mathcal{A}_l = \langle \mathcal{F}(U); c, T_l, \perp_l \rangle$;
2. Проверить свойства алгебры $\mathcal{A}_d = \langle \mathcal{F}(U); c, T_d, \perp_d \rangle$;
3. Проверить выполнение свойства: $A * (B \cap C) = A * B \cap A * C$;
4. Проверить выполнение свойства: $A * (B \cup C) = A * B \cup A * C$;
5. Проверить выполнение свойства: $A \hat{+} (B \cap C) = A \hat{+} B \cap A \hat{+} C$;
6. Проверить выполнение свойства: $A \hat{+} (B \cup C) = A \hat{+} B \cup A \hat{+} C$;

2.1 Проверить свойства алгебры $\mathcal{A}_l = \langle \mathcal{F}(U); c, T_l, \perp_l \rangle$

1. Коммутативность очевидна;
2. Ассоциативность(для $\perp_l$ так же): $\max\{0, \mu_a + \max\{0, \mu_b + \mu_c - 1\} - 1\} =$

   $= \max\{0, \max\{0, \mu_a + \mu_b - 1\} + \mu_c - 1\}$:

   Доказательство. (a) $a = \mu_a, b = \mu_b, c = \mu_c => \max\{0, \mu_a + \max\{0, \mu_b + \mu_c - 1\} - 1\} = \max\{0, a + \max\{0, b + c - 1\} - 1\}$;

   (b) $\max\{0, a + b - 1\} = \max\{1, a + b\} - 1$

   (c) $b + c - 1 \geq 0$:

   - $a + b - 1 \geq 0 => \max\{1, a + \max\{0, b + c - 1\}\} - 1 = \max\{2, a + b + c\} - 2 = \max\{1, \max\{0, a + b - 1\} + c\} - 1$;

- $a+b-1<0 => \max\{0, a+\max\{0, b+c-1\}-1\} = \max\{0, a+b+c-2\} = |a+b-1<0; c \le 1| = 0 = \max\{0, c-1\} = \max\{0, \max\{0, a+b-1\}+c-1\}$;

(d) $b+c-1<0$ аналогично.

$\square$

3. Идемпотентность: $\mu_a = \max\{0, \mu_a+\mu_a-1\} \Leftrightarrow \mu_a = 0$ или $\mu_a = 1$(**не выполняется**);

4. Инволюция: $1-(1-\max\{0, \mu_a-1\}) = \max\{0, \mu_a-1\}$;

5. Дистрибутивность: $\min\{a+\max\{0, b+c-1\}, 1\} = \max\{0, \min\{a+b, 1\}+\min\{a+c, 1\}-1\}$:

   - $a+b, a+c, b+c > 1 \Rightarrow \min\{a+b+c-1, 1\} = 1$, но если $a = 0.5, b = 0.6, c = 0.6, a+b+c-1 = 0.7 \neq 1$.

   (**не выполняется**).

6. де Морган: $1-\min\{a+b, 1\} = \max\{1-a-b, 0\} =$

   $= \max\{0, 1-a+1-b-1\}$;(**выполняется**);

7. Пустое множество: $\min\{a+1, 1\} = 1$;