



Лекция №1

Ильинков

Игорь Николаевич

Классификация ур-ий 2-го порядка

$F(x, y, u_x, u_y, u, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ — общий вид

Линейное ур-ие отк-ко старших производных:

$$(1) \quad a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} — ф-ции от x, y .

Если a_{ij} зависят и от u, u_x, u_y , то ур-ие

линейное, если линейно отк-ко ^{квадратичное} производным

u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} и от u, u_x, u_y :

$$(2) \quad a_{11}(x, y) u_{xx} + 2a_{12}(x, y) u_{xy} + \dots + c(x, y) u + f(x, y) = 0$$

Если a_{ij}, \dots, f не зависят от x, y , то ур-ие с
постоянными коэффициентами

Однородное, если $f(x, y) = 0$

С помощью преобр-ия $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$ получаем

новое ур-ие.

Рассматриваем ур-ие, никакие относительно старшего произв. ведущей с 2-коз-ми переменными x и y .

Замечка:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = u_g g_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_g g_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} = u_g g_x^2 + 2u_g \eta g_x \eta_x + u_\eta \eta_x^2 + u_g g_{xx} + \\ \quad + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} = u_g g_x g_y + u_g \eta [g_x \eta_y + \eta_x g_y] + u_\eta \eta \eta_x \eta_y + \\ \quad + u_g g_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} = u_g g_y^2 + 2u_g \eta g_y \eta_y + u_\eta \eta_y^2 + u_g g_{yy} + \\ \quad + u_\eta \eta_{yy} \\ u_{gg} [a_{11} g_x^2 + 2a_{12} g_x g_y + a_{22} g_y^2] + 2u_g \eta [a_{11} g_x \eta_x + \\ \quad + a_{12} (g_x \eta_y + \eta_x g_y) + a_{22} g_y \eta_y] + \\ \quad + u_{\eta\eta} [a_{11} g_y^2 + a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2] + \\ \quad + \bar{F}(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \end{array} \right.$$

$$u_{uu} \quad \bar{a}_{11} u_{gg} + 2\bar{a}_{12} u_{g\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0 \quad (4)$$

Если ур-ие линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + c u + f,$$

то

$$\bar{F}(g, \eta, u, u_g, u_\eta) = \beta_1 u_g + \beta_2 u_\eta + f u + \bar{f}$$

Выберем переменные так, чтобы $\bar{a}_{11} = 0$

Рассмотрим:

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0 \quad (5)$$

Здесь $z = \varphi(x, y)$ — частное реш-ие ур-ия.

Если $\varphi := \psi(x, y)$, то $\bar{a}_{11} = 0$

Характеристическое уравнение:

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dy dx + a_{22} dx^2 = 0 \quad (6)$$

Лемма 1

Если $z = \varphi(x, y)$ — частное реш-ие (5), то
согласно (6) $\varphi(x, y) = C$ — однородный интеграл
уравнения (6)

Лемма 2

Если $\varphi(x, y) = C$ — однородный интеграл (6), то
 $z = \varphi(x, y)$ удовл-т ур-ию (5).

Док-во Леммы 1:

$$(5): a_{11} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0$$

$\varphi(x, y) = c$ — однородный интеграл (6), если

$$y = f(x, c) \text{ удовл-т } (6).$$

Уз равенства $\varphi(x, y) = c$ следует $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right]_{y=f(x,c)} \quad (8)$$

$\Rightarrow y = f(x, c)$ удовл-т (6), т.к.

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} \right]_{y=f(x,c)} = 0$$

Док-во Леммы 2:

$\exists \varphi(x, y) = c$ — однородный интеграл (6)

$$\text{Док-ш} \quad a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2 = 0 \quad (7^*)$$

$\forall (x, y)$

$\exists (x_0, y_0)$ — заданная точка. Приведем через нее интегральную кривую (6), полагая, что

$$\varphi(x_0, y_0) = c_0 \text{ и рассмотрим кривую } y = f(x, c)$$

\forall точки этой кривой:

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = \\ = \left[a_{11} \left(- \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(- \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} \right] \Big|_{y=f(x_0)} = 0$$

$x=x_0$

$$\Rightarrow a_{11} \varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12} \varphi_x(x_0, y_0) \varphi_y(x_0, y_0) + \\ + a_{22} \varphi_y^2(x_0, y_0) = 0 \text{ и т.д.}$$

(6) – характеристическое (1), а его интегралы – характеристики.

$\exists g = \varphi(x, y)$, где $\varphi = C_1$ – общий интеграл (6)
однушаешь в о коэффициент при y_{xx} .

Если $\psi(x, y) = C_2$ – группой общий интеграл (6),
то $\eta = \psi(x, y)$ обратит в о коэф-т при y_{yy} .

Ур-ие (6) распадается на 2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{11}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{11}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (10)$$

Знак $\frac{D}{4}$ определяет тип уравнения

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F = 0$$

то ур-ие в т. м.:

целодолик-го типа, если $\frac{D}{4} > 0$

эллиптического типа, если $\frac{\partial^2}{\eta^2} < 0$
нара́боли́ческого типа, если $\frac{\partial^2}{\eta^2} = 0$

$$\widehat{a_{12}}^2 - \widehat{a_{21}} \widehat{a_{22}} = (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) \mathcal{D}^2, \text{ где}$$

$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \Rightarrow$ иквариатность типов
уравнения при замене:

$$\begin{aligned} \widehat{a_{12}}^2 - \widehat{a_{21}} \widehat{a_{22}} &= (a_{12} \xi_x \eta_y + a_{22} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x)) + \\ &+ a_{22} \xi_y \eta_y)^2 - (a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2) \cdot \\ &\cdot (a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2) = \\ &= a_{12}^2 (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x)^2 - 4a_{12}^2 \xi_x \xi_y \eta_x \eta_y + \\ &+ a_{11} a_{22} (2\xi_x \eta_x \xi_y \eta_y - \xi_x^2 \eta_y^2 - \xi_y^2 \eta_x^2) + \\ &+ 2a_{11} a_{22} (\xi_x \eta_x (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) - \\ &- \xi_x^2 \eta_x \eta_y - \eta_x^2 \xi_x \xi_y) + 2a_{12} a_{22} \cdot \\ &\cdot (\xi_y \eta_y (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) - \xi_y^2 \eta_x \eta_y - \\ &- \eta_y^2 \xi_x \xi_y) = (a_{12}^2 - a_{11} a_{22})(\xi_x \eta_y - \\ &- \xi_y \eta_x)^2 = (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) \mathcal{D}^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим область \mathcal{D} , где уравнение сохраняет тип.

- гиперболический тип: $\frac{\partial^2}{\eta^2} > 0$ и $\Pi \neq$

действительны и различны

$$\left\{ \xi = \Psi(x, y), \eta = \Psi(x, y) \right.$$

при $\cos \psi (4) \neq \sin \psi$

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \text{ где}$$

$\Phi = -\frac{F}{2a_{11}}$ — 1-я каноническая форма
Уравнения гиперболического
типа.

$$\begin{cases} \xi = \lambda + \beta \\ \eta = \lambda - \beta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \lambda = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2} \end{array} \right)$$

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\lambda + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\lambda - u_\beta)$$

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} (u_{\lambda\lambda} \frac{1}{2} - u_{\lambda\beta} \frac{1}{2} + u_{\beta\lambda} \frac{1}{2} - u_{\beta\beta} \frac{1}{2}) = \\ &= \frac{1}{4} (u_{\lambda\lambda} - u_{\beta\beta}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{\lambda\lambda} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 = 4\Phi$$

- народолитический тип: (3) и (4) совпадают \Rightarrow
- $$\Rightarrow \varphi(x, y) = C$$

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) - J\partial_x \varphi \in \varphi(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}} \xi_x + \\ &\quad + \sqrt{a_{22}} \xi_y)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{т. к. } a_{12} &= \sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{22}} \Rightarrow \bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + \\ &\quad + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}} \xi_x + \sqrt{a_{22}} \xi_y) (\sqrt{a_{11}} \eta_x + \sqrt{a_{22}} \eta_y) = 0 \end{aligned}$$

- (4) : \bar{a}_{12}
 \Rightarrow каноническая форма: $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$

- эллиптический тип

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0 \text{ и } \Pi^2(g)(10) \in \mathbb{C}$$

] $\varphi(x, y) = C$ — комплексный интеграл (g)

$\varphi^*(x, y) = C$ — симметрический комплексный интеграл сопряженного уравнения (10)

$$g = \varphi(x, y)$$

$\eta = \varphi^*(x, y)$ как и в первоначальном, коси

$$\begin{cases} g = \lambda + i\beta \\ \eta = \lambda - i\beta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \lambda = \operatorname{Re} \varphi \\ \beta = \operatorname{Im} \varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 &= \\ = (a_{11} \lambda_x^2 + 2a_{12} \lambda_x \lambda_y + a_{22} \lambda_y^2) - & \\ - (a_{11} \beta_x^2 + 2a_{12} \beta_x \beta_y + a_{22} \beta_y^2) + & \\ + 2i(a_{11} \lambda_x \beta_x + a_{12} (\lambda_x \beta_y + \lambda_y \beta_x) + & \\ + a_{22} \lambda_y \beta_y) &= 0, \text{ т.е. } \frac{\overline{a_{11}}}{a_{12}} = \overline{a_{22}} \\ \frac{\overline{a_{11}}}{a_{12}} = 0 & \end{aligned}$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\lambda, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

- ⇒
- $\frac{\partial}{\partial} > 0 \quad u_{xx} - u_{yy} = \Phi \text{ или } u_{xy} = \widetilde{\Phi}$
 - $\frac{\partial}{\partial} < 0 \quad u_{xx} + u_{yy} = \Phi$
 - $\frac{\partial}{\partial} = 0 \quad u_{xx} = \Phi$

Ур-ия с пост. коэф-ми

2 неодн-х переменных \Rightarrow

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + \\ + b_2u_y + cu + f(x,y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \text{а характеристи-}$$

тика

$$\begin{cases} y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} + C_1 \\ y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} + C_2 \end{cases}$$

После заменки \Rightarrow

$$u_{gg} + u_{g\eta} + b_1u_g + b_2u_\eta + cu + f = 0 - \text{Эллипс}$$

(13)

$$\begin{cases} u_{g\eta} + b_1u_g + b_2u_\eta + cu + f = 0 \\ u_{gg} - u_{g\eta} + b_1u_g + b_2u_\eta + cu + f = 0 \end{cases} - \text{гиперболы}$$

$$u_{gg} + b_1u_g + b_2u_\eta + cu + f = 0 - \text{параболы}$$

Введен квадратичное вр:

$u = e^{\lambda g + \mu \eta}, \lambda, \mu$ - пока произвольные пост-e

Тогда

$$u_g = e^{\lambda g + \mu \eta}(\nu_g + \lambda \nu)$$

$$u_1 = e^{\lambda g + \mu \eta} (\varphi_{\eta} + \mu \varphi)$$

$$u_{gg} = e^{\lambda g + \mu \eta} (\varphi_{gg} + 2\lambda \varphi_g + \lambda^2 \varphi)$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\lambda g + \mu \eta} (\varphi_{\eta\eta} + 2\mu \varphi_{\eta} + \mu^2 \varphi)$$

$$u_{g\eta} = e^{\lambda g + \mu \eta} (\varphi_{g\eta} + \lambda \varphi_g + \mu \varphi_g + \lambda \mu \varphi)$$

ногстаковка $B(13)$, $\therefore e^{\lambda g + \mu \eta}$

$$\begin{aligned} & \varphi_{gg} + \varphi_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda) \varphi_g + (b_2 + 2\mu) \varphi_{\eta} + \\ & + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1 \lambda + b_2 \mu + c) \varphi + f = 0 \end{aligned}$$

$$f_1 = f e^{-(\lambda g + \mu \eta)}$$

Дүрүп бөбіндеген тақ, нәсілді $b_1 + 2\lambda = 0$ \Rightarrow
 $b_2 + 2\mu = 0$

$$\varphi_{gg} + \varphi_{\eta\eta} + f \varphi + f_1 = 0$$

$$\varphi_{gg} + \varphi_{\eta\eta} + f \varphi + f_1 = 0 - \text{әмбұлт. түр}$$

$$\varphi_{gg} + f \varphi + f_1 = 0 \text{ иел } \varphi_{gg} - \varphi_{\eta\eta} + f \varphi + f_1 = 0$$

жекерл. түр \rightarrow

$$\varphi_{gg} + b_2 \varphi_{\eta} + f_1 = 0 - \text{напарал. күй түр}$$

Лекция №2

Задачи, приводящие к уравнениям параболического типа.

Универсальное уравнение кинематики.

-] величина характеризуется плотностью, плотностью потока \vec{j} и интенсивностью источников F .

Тогда универсальное уравнение кинематики имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = F \quad (1)$$

Рассмотрим обл-ть D , в кот-й локализована созеркающаяся величина P .

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_D P d\vartheta = - \iint_{\partial D} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iiint_D F d\vartheta$$

\Rightarrow [ф-ла Остроградского] \Rightarrow

$$(2) \quad \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} - F \right) d\vartheta = 0 \Rightarrow \text{в силу производности}$$

$\mathcal{D} \Rightarrow (1)$

Течение жидкости: $\vec{j} = \rho \vec{v}$

закон сохранения массы в случае
отсутствия источников:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Если жидкость ненесжимаемая, то

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

В случае диффузии имеет место

закон сохранения массы, и

$$\vec{j} = -D \operatorname{grad} u, \text{ и - плотность}$$

вещества, D - коэффициент
диффузии.

Тогда уравнение кинематики:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} (-D \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} u) + F \quad (3)$$

В случае теплопроводности
сохраняется закон $P = C \rho u$, где

C - удельная теплоемкость

ρ - плотность вещества

u - температура

$\vec{j} = -k \operatorname{grad} u$, где k - коэффициент теплопроводности

Тогда уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t} (C \rho u) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F \quad (4)$$

Рассмотрим простейший случай
постоянных характеристик среды:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + F \quad (5^*)$$

Уравнение теплопроводности:

$$(5^*) \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u + \frac{F}{C\rho}, \text{ где}$$

α^2 - коэффициент теплопроводности
 $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ - оператор Лапласа (последнее в
декартовых координатах)

$u = u(x, t)$ (теплопроводность в стержне)
стенки обозначены
закрашены

Тогда $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (5)$

∞ решений, для ! краевых граничные
условия.

Теорема (принцип максимума)

Если функция $u(x,t) \in C[0, l] \times [0, T]$
и удовлетворяет управляемым
теплопроводности в точках $0 < x < l$,
 $0 < t \leq T$, т.е. $u_t = a^2 u_{xx}$ в этой области,
то $\max u \min u(x,t)$ достигается
при $x=0$ или $x=l$

Доказательство:

- 1) $\max u(x,t) = M$ при $t=0$, $x=0$ или $x=l$
- 2) $\exists (x_0, t_0) \in (0, l) \times (0, T) : u(x_0, t_0) = M + \epsilon$
- достигает максимума \Rightarrow
 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0$ и
- 3) $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0$. Для противоречия найдем
т. (x_1, t_1) , в которой $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$

Рассмотрим ф-цию $v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t)$,
 $k > 0$.

...

Смешанная задача.

Смешанная, т.к. задаются и граничные, и начальные условия.

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) \in C^{2,1}([0, l] \times [0, T]) \cap C([0, l] \times [0, T])$$

Краевые условия 1-го рода - задачи задания ф-ции на концах

Краевые условия 2-го рода - задачи задания производной ф-ции на концах

Краевые условия 3-го рода -

$$\left. j|_r = h(u - \Theta_r(t)) \vec{n} \right|_r :$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - h_1(u - \Theta_1(t)) \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} + h_2(u - \Theta_2(t)) \right|_{x=l} = 0$$

Задача корректна, если:

- 1) Зрешение
- 2) !решение
- 3) $\in C$ от входных данных

Док-и З решение смешанной задачи с помощью метода разделения переменных или метода Фурье:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Ищем решение в виде:

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad \text{Поставляем}$$

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \lambda = \text{const} \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \quad \text{B (8):} \quad (9)$$

$X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$

1. $\lambda < 0$, т.е. $\lambda = -k^2$ и $X'' - k^2 X = 0$, т.о.

$$X(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \sin(k\ell) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \text{т.е.} \end{cases}$$

$$X(x) \equiv 0$$

$\lambda \geq 0$, т.к. $X''(x) = -\lambda X$,

$$\int_0^\ell X''(x) dx = X'(x)|_0^\ell - \int_0^\ell (X')^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda \int_0^\ell X^2 dx = - \int_0^\ell (X')^2 dx \Rightarrow \lambda \geq 0$$

2. Если $\lambda = 0$, т.о.

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(\ell) = C_1 \ell = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

Если краевые условия 2-го рода

$$\begin{cases} X'' = 0 \\ X'(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 - C_3 \text{ и } X_0(x) = 1$$

составляется гр-условия.

3. Если $\lambda > 0$, то

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X(0) = C_2 = 0$$

$$X(\ell) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell = \pi n, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

$$(10) \quad T_n' = -\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 T_n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = -\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 \\ T_n = C_n e^{ft} \end{array} \right.$$

Т.о. получены набор частных решений

$u_n(x, t) = e^{ft} \sin \frac{\pi n x}{\ell}$ с постоянным
коэффициентом решения $(*)$ в $\psi(x)$.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{ft} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \quad (11)$$

(11) удовл-т граничным условиям.

Погрешем C_n , что бы $u(x, 0) = \psi(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} = \psi(x) \quad (12)$$

$$C_n = \varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^\ell \psi(y) \sin \frac{\pi n y}{\ell} dy$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^\ell \sin^2 \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{\ell}{2}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{\frac{\pi n}{\ell} t} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \quad (13)$$

$$\psi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(\eta) \sin \frac{\pi n \eta}{\ell} d\eta$$

Ряды, полученные формальными дифференцированиями
 (u_{xx}, u_t) сх-ся разном-ко по признаку
 Вейерштрасса при $t > t_0 > 0$.

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} = \varphi(x)$, если $\varphi(x)$ —
 кусочно-гладкая на $[0; \ell]$ и $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$.
 $\Rightarrow (13)$ решение (7).

(13) —устойчивое решение:

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \Rightarrow |u(x,t)| < \varepsilon.$$

\Rightarrow Существование доказано

Единственность:

] $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — решения.

Рассмотрим $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(l, t) \in \varphi(x, 0) = 0$$

Тогда $\min \varphi(x, t) \leq \varphi(x, t) \leq \max \varphi(x, t)$

\Rightarrow no нуля в уравнении максимума $\min = \max = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x, t) \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ erg

Решение симметрии

$$E(t) = \int_0^l \frac{1}{2} \varphi^2 dx$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^l \varphi \varphi_t dx = a^2 \int_0^l \varphi \varphi_{xx} dx = \\ &= a^2 \varphi \varphi_{xx} \Big|_0^l - a^2 \int_0^l \varphi_x^2 dx = -a^2 \int_0^l \varphi_x^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} \leq 0 \\ E(0) = 0 \\ E(t) = 0 \end{cases}$$

erg

Лекция №3

Общая схема метода Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0 \\ \hat{P}_1 u|_{x=0} = \varphi_1(t) \\ \hat{P}_2 u|_{x=l} = \varphi_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right.$$

L - оператор дифференцирования

\hat{P}_1, \hat{P}_2 - операторы граничных условий, содержащие u и u_x .

- ① Проверяем самосопряженность оператора L с соответствующими граничными условиями.
Если $L^* \neq L$, то делаем ее таковой

Пример 1

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\angle = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \neq \angle^*. \quad] u(x, t) = \varphi e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = e^{\lambda x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda^2 \varphi \right) + e^{\lambda x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda \varphi \right)$$

$$] 2\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \varphi \\ \varphi(0, t) = 0 = \varphi(l, t) \quad - \text{самосопряженка} \\ \varphi(x, 0) = \varphi(x) e^{\frac{-x}{2}} \quad \text{задача.} \end{cases}$$

Кр. условие 2-го рода $\varphi_x(0, t) = 0 \rightarrow \varphi_x - \frac{1}{2} \varphi|_{x=0} = 0$ Кр. условие 3-го рода

Но \exists задачи, к которым применимы к самосопряженным

Пример 2

Задача Самарского-Чонкина

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \ell \\ u(0, t) = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\ell, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$X_n(x) = \sin \frac{2\pi n x}{\ell}$ — не обраляет набор полной системи фр-ций

(2) Границные условия \rightarrow однородные.

$$] u(x, t) = \varphi(x, t) + w(x, t)$$

$$\stackrel{\nearrow}{1} w|_{x=0} = \varphi_1(t)$$

$$\stackrel{\nearrow}{2} w|_{x=\ell} = \varphi_2(t)$$

$$1) \begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(\ell, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$] w(x, t) = ax + b \Rightarrow \begin{aligned} w(0, t) &= b = \mu_1(t) \\ w(\ell, t) &= a\ell + b = \mu_2(t) \end{aligned}$$

$$a = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\ell} \Rightarrow w(x, t) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\ell} x + \mu_1$$

2) $\begin{cases} u_x(0, t) = v_1(t) \\ u(\ell, t) = \mu_2(t) \end{cases}$

$$\begin{cases} w_x(0, t) = v_1 \\ w(\ell, t) = \mu_2 \end{cases}$$

$w = ax + b \Rightarrow w_x(0, t) = a = v_1$

$$\begin{aligned} w(\ell, t) &= a\ell + b = \mu_2 \\ b &= -v_1\ell + \mu_2 \end{aligned}$$

T.O. $w = v_1 x + (\mu_2 - \ell v_1)$

3) $\begin{cases} u_x(0, t) = v_1(t) \\ u_x(\ell, t) = v_2(t) \end{cases} \Rightarrow \deg w > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow w(x, t) = cx^2 + dx$$

$$w_x(0, t) = 2cx + d \Big|_{x=0} = d = v_1$$

$$w_x(\ell, t) = 2c\ell + d = v_2 \Rightarrow c = \frac{v_2 - v_1}{2\ell}$$

$$w(x, t) = \frac{v_2 - v_1}{2\ell} x^2 + v_1 x$$

③ Ищем собств. значения и собств-не
функции.

$$\begin{cases} L X = -\lambda X \\ \widehat{L_1} X|_{x=0} = 0 = \widehat{L_2} X|_{x=\ell} \end{cases}$$

$|\{\lambda\}| = \lambda_0$ и каждому соответствует

$$|\{X_n\}| \leq n_0$$

$\{\lambda_1, X_1\} \cup \{\lambda_2, X_2\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow X_1 \perp X_2$

Примеры

1)

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{\ell}, n \in \mathbb{N}$$

2)

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2 \\ X_n(x) &= \cos \sqrt{\lambda_n} x \end{aligned}$$

$$n \in \mathbb{Z}_+$$

3)

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 2\pi \\ X(0) = X(2\pi) \\ X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0 = 1$$

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n^{(1)} = \cos nx$$

$$X_n^{(2)} = \sin nx$$

4)

Раскладується функція в ряди:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \angle \varphi + k \varphi + f(x, t) \\ \varphi|_{x=0} = 0 \\ \varphi|_{x=\ell} = 0 \\ \varphi|_{t=0} = \bar{\varphi}(x) \end{cases}$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n(x)$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^\ell f(g, t) X_n(g) dg, \quad \bar{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^t \bar{\varphi}(g) X_n(g) dg$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \lambda_n \varphi_n - k \varphi_n - f_n(t) \right) X_n(x) = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(0) - \varphi_n) X_n(x) = 0 \end{cases}$$

Т.к. $\{X_i(t)\}$ — полная ортогональная система,

$$\text{то } \sum_j c_j X_j(t) = 0 \Leftrightarrow c_j = 0$$

5

Бесконечная система задает known для ODE

$$\begin{cases} \frac{d \varphi_n}{dt} + (\lambda_n - k) \varphi_n = f_n(t) \\ \varphi_n(0) = \varphi_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n(x) + w(x, t)$$

Примеры:

$$1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\ u(0, t) = 0 = u(l, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u = u_1 + u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0, t) = 0 = u_1(l, t) \\ u_1(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{l};$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad \text{To find } \begin{cases} \frac{d\varphi_n}{dt} + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \varphi_n = 0 \\ \varphi_n(0) = \varphi_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_n(t) = \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

T. O. $u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x, t) \\ u_2(0, t) = u(\ell, t) = 0 \\ u_2(x, 0) = 0 \end{cases} \quad u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(\xi, t) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi$$

Для определения $z_n(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dz_n}{dt} + \left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 z_n = f_n(t) \\ z_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$z_n(t) = \int_0^t U_n(t-\tau) f_n(\tau) d\tau, \text{ где } U_n -$$

решение задачи:

$$\begin{cases} \frac{dU_n}{dt} + \left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 U_n = 0 \\ U_n(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t} \end{cases}$$

$$T.O. \quad z_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{c}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{c}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n x}{c}$$

$$] \quad u_1(x, t) = u(x, t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(g, t) = 0 = u(l, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{c}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n a}{c}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{c}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{c}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n a}{c}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{c}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{c}$$

Он же выражается $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n n^k e^{-\left(\frac{\pi n a}{c}\right)^2 t}, k=0, \dots$

он $c x - c a \forall t = t_0 \Rightarrow c x - c a$ не является равномерно

b $[0, l] \times [0; T] \Rightarrow u(x, t) \in C[0, l] \times (0; +\infty)$

a В күтүн $\exists \frac{\partial u}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с т.к. t_0 - произвольный

$C(t \geq 0)$, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)| < \infty$, если

$\psi(x)$ — кус-ко-издражка

Ф-чуж истотника для смешанной задачи:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \psi(g) \sin \frac{\pi n g}{l} dg \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} = \\ &= \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n g}{l} \right) \psi(g) dg = \\ &= \int_0^l G(x, g, t) \psi(g) dg \end{aligned}$$

$$G(x, g, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n g}{l}$$

Ф-чуж истотника

] на $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ выделяется Q тепла
(имеем как-ую ф-чужу $\psi_g(x)$)

$$C \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \psi_g(g) dg = Q$$

Соответствующее распределение температурь в момент времени t :

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} G(x, \xi, t) \psi_\varepsilon(\xi) d\xi =$$

$$= G(x, \xi^*, t) \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \psi_\varepsilon(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{c\rho} \Rightarrow$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, x_0, t) =$$

$$= \frac{Q}{c\rho} \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n x_0}{\ell}$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin \frac{\pi n x}{\ell} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n x}{\ell} =$$

$$= \int_0^t \int_0^\ell \left(\frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} \right) f_n(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_0^\ell G(x, \xi, t-\tau) f_n(\xi, \tau) d\xi d\tau$$