A VIDA E A OBRA DE DIOFANTO

Professora Rosvita Fuelber Franke[1]

Pouco se sabe a respeito da vida de Diofanto. Seu ano de nascimento e sua nacionalidade são desconhecidos.

Em seus escritos Diofanto cita Hipsicles (240-170 a.c.[2]), logo deve ter vivido depois de 170 a.C. Por outro lado, seu trabalho é citado por Teon de Alexandria (335 - 395 d.c.), portanto deve ter vivido antes do ano 350 de nossa era. A maioria dos historiadores concorda em situá-lo por volta do ano 250 d.C.

Podemos descobrir alguns detalhes da vida de Diofanto resolvendo um enigma, que dizem ter sido gravado na lápide de seu túmulo:

> "Deus lhe concedeu a graça de ser um menino pela sexta parte de sua vida. Depois, por um doze avos, ele cobriu seu rosto com a barba. A luz do casamento iluminou-o após a sétima parte e cinco anos depois do casamento Ele concede-lhe um filho. Ah! Criança tardia e má, depois de viver metade da vida de seu pai o destino frio a levou. Após consolar sua mágoa em sua ciência dos números, por quatro anos, Diofanto terminou sua vida." (Singh, 1999 p. 71)

Através deste enigma podemos concluir que Diofanto casou-se aos 33 anos, foi pai de seu primeiro e único filho aos 38 e faleceu aos 84 anos.

---

[1] Professora do curso de Licenciatura em Matemática da Unisinos, mestre em Álgebra pela UFRGS.

[2] Atualmente usa-se a notação a.E.C. para indicar "antes da Era Comum" no lugar de "antes de Cristo" e E.C. para indicar "Era Comum" no lugar de "depois de Cristo".

Diofanto de Alexandria, como ficou conhecido, teve uma grande importância para o desenvolvimento da álgebra, chegando a ser chamado de pai da álgebra, e influenciou fortemente os europeus que posteriormente se dedicaram à teoria dos números. Na História da Aritmética desempenha um papel semelhante ao que Euclides (360-295 a.c.) ocupa na Geometria e Ptolomeu (85-165 d.c.) na Astronomia.

Diofanto deu grande ênfase à solução de problemas indeterminados, devido a esse fato, o assunto às vezes chamado de análise indeterminada, tornou-se conhecido como análise diofantina. De acordo com Boyer (1996), como esse tipo de trabalho é em geral parte de cursos de teoria dos números e não de álgebra elementar, esta não é uma base adequada para considerar Diofanto como pai da álgebra.

Seu trabalho não se consistiu em uma exposição sistemática sobre operações algébricas ou a resolução de equações algébricas. Os problemas eram estudados em termos de exemplos numéricos específicos e suas soluções eram dadas em números racionais positivos, excluindo das possíveis soluções os números negativos e irracionais. Além disso, não eram encontradas todas as soluções possíveis, pois Diofanto, normalmente se satisfazia encontrando apenas uma resposta para o problema.

Não vemos em sua obra um desenvolvimento postulacional, baseado em teoremas e proposições rigorosamente demonstrados, o que vemos é a solução de problemas específicos, nos quais é possível verificar seu alto grau de habilidade e engenho. Também é possível observar que ele não recorre a construções geométrica para resolver problemas, como era característica da tradição grega.

Neste caso, por que Diofanto teria recebido o título de pai da álgebra? Segundo Boyer(1996), há outro aspecto em que tal paternidade se justifica. A álgebra hoje se baseia quase exclusivamente em formas simbólicas de enunciados, em lugar da linguagem escrita usual da comunicação, em que a matemática grega anterior, se expressava.

Acredita-se que Diofanto tenha sido o primeiro a fazer uso de notações algébricas. A notação usada por Diofanto é a notação helenística, formada pelas letras do alfabeto grego e mais três letras antigas, que combinadas formavam 27 símbolos diferentes. Ele usava abreviações para a incógnita, a subtração, a igualdade e para potências da incógnita até a de expoente seis.

De acordo com Pitombeira e Roque, uma das principais contribuições de Diofanto está no fato de ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema. Segundo os autores, ele designava esse valor desconhecido por *arithmos*, de onde vem o termo “aritmética”.

Ainda, conforme Pitombeira e Roque, Diofanto introduz símbolos, que ele chama “designaçõe abreviadas”, para representar diversos tipos de número:

ς (última letra da palavra arithmos, a quantidade desconhecida)

Δ^{Y} (primeira letra de dynamis, o quadrado da quantidade desconhecida)

K^{Y} (primeira letra de kybos, o cubo)

$\Delta^{Y}\Delta$ (o quadrado-quadrado) [quarta potência]

ΔK^{Y} (o quadrado-cubo) [quinta potência]

$K^{Y}K$ (o cubo-cubo) [sexta potência]

A introdução destes símbolos, não pode ser considerado como um feito pequeno, tendo em vista que antes dele a álgebra se encontrava em um período classificado como primitivo, onde tudo era escrito em palavras. Através do uso das abreviações a álgebra passou por um período intermediário(sincopado), a partir do qual evoluiu até o período simbólico em que hoje se encontra.

Os três trabalhos escritos por Diofanto foram: Sobre Números Poligonais, do qual restou um pequeno fragmento, Porismas, que se perdeu e Aritmética, que foi seu maior e mais importante trabalho.

A Aritmética era formada por treze volumes, dos quais apenas seis chegaram até os nossos dias. Neste tratado, o autor reuni problemas conhecidos da época e alguns de sua própria autoria, totalizando cerca de 150 problemas que são resolvidos através de operações numéricas.

Os seis volumes remanescentes são assim resumidos:

Livro I – consiste de sistemas indeterminados de equações lineares ou quadráticas;

Livro II, III, IV e V – sistemas de equações quadráticas indeterminadas e equações cúbicas;

Livro VI – equações envolvendo triângulos retângulos.

No Livro I, consta um problema bastante interessante que vamos transcrever aqui, em notação atual, de acordo com Pitombeira e Roque:

"Encontrar dois números com soma e produto dados." (Problema 27).

Segundo os autores, Diofanto considera que a soma é 20 e o produto é 96. E afirmam que este tipo de procedimento é comum até que o simbolismo algébrico se desenvolva.

Para Pitombeira e Roque, fazendo uma apresentação do resultado, misturando as abreviações de Diofanto com os símbolos atuais, a resolução do problema seria mais ou menos assim:

"Queremos encontrar dois números com soma 20 e produto 96. Se estes números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ς, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ς de um destes 10 e adicionando ς ao outro. Como a soma não muda após estas operações, temos 10 − ς + 10 + ς = 20. Mas sabemos também que o produto destes números é 96, logo podemos escrever (10 − ς)(10 + ς) = 96. Assim, temos que $10^2 - \Delta^Y = 96$, donde concluímos que $\Delta^Y = 4$ e, portanto ς = 2. Logo, os números procurados
10 – ς e 10 + ς são, respectivamente 8 e 12".

Mesmo não formando a equação do segundo, grau Diofanto desenvolve o problema e fornece soluções para esta equação, que correspondem à fórmula atual para resolver tais equações.

A seguir, relacionamos outros problemas interessantes que constam nesta obra de Diofanto. De acordo com Eves:

- Problema 6, Livro III: Encontre três números tais que a soma de todos é um quadrado e a soma de dois quaisquer é também um quadrado. (Resposta de Diofanto: 80, 320, 41)
- Problema 1, Livro VI: Encontre um triângulo pitagórico em que a hipotenusa subtraída de cada um dos catetos é um cubo.(Resposta de Diofanto: 40, 96, 104)

- Problema 10, Livro VI: Encontre dois números tais que a sua soma é igual à soma de seus cubos. $\left(\text{Re}\,\textit{sposta de Diofante}: \frac{5}{7}\, e\, \frac{8}{7}\right)$

Para que esses problemas chegassem às nossas mãos, um longo e turbulento caminho foi percorrido. Alexandria era uma cidade de grande importância comercial, e devido a isso estava sob a constante ameaça dos exércitos estrangeiros. Um dos ataques mais intensos que a cidade sofreu foi no ano de 389 d.c., quando o Imperador Romano Teodósio ordenou ao Bispo de Alexandria, que destruísse todos os monumentos pagãos e também a biblioteca de Alexandria.

No ano de 642 d.c. o ataque dos muçulmanos liderados pelo Califa Omar, terminou com o acervo que restava. Quando perguntaram ao Califa o que deveria ser feito com a biblioteca, este respondeu que os livros que fossem contrários ao Corão deveriam ser destruídos, e os livros apoiassem o Corão seriam supérfluos, e portanto, também deveriam ser destruídos.

Assim, grande parte da matemática grega foi simplesmente destruída pelo fogo, e isso explica o fato de terem sido perdidos sete dos treze volumes de Aritmética.

O que sobrou da obra de Diofanto e alguns manuscritos que não foram destruídos pelo ataque dos muçulmanos foram reunidos em Constantinopla. A retomada de matemática ocidental ocorreu somente após o ano de 1453, quando os turcos saquearam Constantinopla.

Com a invasão dos turcos os manuscritos estavam novamente sob a ameaça de destruição, foi então que alguns estudiosos resolveram fugir para a Europa levando consigo todos os textos que podiam carregar. Assim a Aritmética chegou a Europa. Não levou muito tempo para que recebesse sua primeira tradução do grego, em 1463.

Porém a tradução que se tornou mais importante historicamente, foi feita por Claude Gaspar Bachet de Méziriac, em 1621, esta tradução de margens largas chegou às mãos de Pierre de Fermat e nela que constam suas famosas anotações.

Uma dessas notas se tornou conhecida como o Último Teorema de Fermat.

Enquanto Fermat lia o Livro ll da Aritmética encontrou uma exposição detalhada sobre os trios pitagóricos e pensou que pudesse acrescentar algo àquele assunto. Foi então que Fermat criou uma equação muito semelhante à de Pitágoras, mas que não possuía solução. No lugar da equação: $x^2 + y^2 = z^2$, Fermat escreveu $x^n + y^n = z^n$, onde n > 2, e afirmou que para tal equação não havia solução. O mais intrigante foi à declaração de Fermat: "Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é muito estreita para contê-la."

Esta demonstração nunca foi encontrada e, após a morte de Fermat, sua correspondência e suas anotações foram amplamente inspecionadas, sem que se achasse nada sobre a tal demonstração.

O Último Teorema de Fermat ocupou as mais importantes mentes da matemática, e permaneceu insolúvel por aproximadamente 300 anos. Em 1994, o inglês Andrew Wiles, finalmente desvendou o enigma, sua demonstração ocupa 120 páginas e foi necessário integrar vários ramos da matemática para que se pudesse concluir que a afirmação de Fermat era verdadeira. Possivelmente, nunca saberemos se Fermat realmente possuía uma "demonstração maravilhosa" para este teorema, nem se essa demonstração era correta ou não, mas certamente Fermat tornou a obra de Diofanto ainda mais célebre do que o era a princípio.

Equações Diofantinas Lineares

Uma Equação Diofantina Linear é a equação linear com duas incógnitas x e y:

$$ax + by = c$$

onde a, b e c são inteiros dados, sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Todo par de inteiros x_0, y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$ é uma solução inteira ou apenas uma solução da equação $ax + by = c$.

Consideremos, como exemplo, a equação diofantina linear com duas incógnitas *8x + 2y = 22*.

Observe que:

$$8.2 + 2.3 = 22$$

$$8.3 + 2(-1) = 22$$

$$8.(-1) + 2.15 = 22$$

Logo, os pares de inteiros: 2 e 3, 3 e -1, -1 e 15 são soluções da equação $8x + 2y = 22$.

Existem equações diofantinas lineares com duas incógnitas que não têm solução.

Tomemos como exemplo a equação diofantina:

$$6x + 2y = 3$$

esta equação não tem solução, porque *6x+2y* é um inteiro par para quaisquer que sejam os valores de x e y, enquanto que 3 é um inteiro ímpar.

De modo geral, a equação diofantina linear $ax + by = c$ não tem solução sempre que o $mdc(a,b)$ não divide c, como veremos no seguinte teorema, que nos dá uma condição para a existência de solução deste tipo de equação.

Teorema: A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, o $mdc(a,b)$ divide c.

Demostração: $\Rightarrow)$ Suponhamos que a equação $ax + by = c$ tem uma solução, isto é, existe um par de inteiros x_0, y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$.

Seja o $mdc(a,b) = d$. Daí, existem inteiros r e s tais que a = dr e b = ds, e temos:

$$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0)$$

E como $rx_0 + sy_0$ é um inteiro, concluímos que d divide c (d|c).

$\Leftarrow)$ Reciprocamente, suponhamos que d divide c (d|c), isto é, que $c = dt$, onde t é um inteiro.

Por propriedade de mdc, temos se o $mdc(a,b) = d$, então existem inteiros x_0 e y_0 tais que:

$$d = ax_0 + by_0$$

o que implica:

$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0)$, isto é, o par de inteiros:

$$x = tx_0 = \left(\frac{c}{d}\right) x_0, \quad y = ty_0 = \left(\frac{c}{d}\right) y_0$$

é uma solução da equação $ax + by = c$.

O teorema seguinte apresenta uma forma de obter outras soluções para a equação $ax + by = c$ a partir de uma solução já determinada.

Teorema: Se d divide c (d|c), sendo $d = mdc(a,b)$, e se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina $ax + by = c$, então todas as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas:

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t \quad \text{e} \quad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$$

Demostração:

Suponhamos que o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação $ax + by = c$, e sejam, x_1, y_1 uma outra solução qualquer desta equação. Então, temos:

$$ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1$$

e, portanto:

$$by_0 - by_1 = ax_1 - ax_0 \Rightarrow a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$$

Como o $mdc(a,b) = d$, então existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, com r e s primos entre si. Logo:

$$dr(x_1 - x_0) = ds(y_0 - y_1)$$

e, portanto:

$$r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_{1)}$$

assim sendo, $r|s(y_0 - y_1)$, sabemos que o $mdc(r,s) = 1$ = 1, logo r não divide s, então temos que $r|(y_0 - y_1)$, isto é:

$y_0 - y_1 = rt$ e, temos também que $x_1 - x_0 = st$

onde t é um inteiro. Portanto, temos as fórmulas:

$$x_1 = x_0 + st = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t \qquad y_1 = y_0 - rt = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$$

Estes valores de x_1 e y_1 realmente satisfazem a equação ax + by = c, qualquer que seja o inteiro t, pois, temos:

$$ax_1 + by_1 = a\left[x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t\right] + b\left[y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t\right] =$$

$$= (ax_0 + by_0) + \left(\frac{ab}{d} - \frac{ba}{d}\right)t =$$

$$= c + 0.t = c$$

Como se vê, se d = mdc(a,b) divide c , então a equação diofantina linear $ax + by = c$ admite um número infinito de soluções, uma para cada valor do inteiro arbitrário t.

Mais exemplos:

1. O número de soluções da equação 4x + 7y = 83, onde x e y são inteiros positivos, é:

(A) 0

(B) 1

(C)2

(D) 3

(E)infinito.

Extraído do Provão do Ano de 1999, questão n.º 22.

Resolução (apenas uma sugestão de como podemos resolver):

Temos: $4x + 7y = 83 \Rightarrow 4x = 83 - 7y$

$$x = \frac{83 - 7y}{4}$$

Y	X
11	1,50
10	3,25
9	5
8	6,75
7	8,5
6	10,25
5	12
4	13,75
3	15,5
2	17,25
1	19

Encontramos 3 soluções para a equação proposta, são elas:

$x = 5$ e $y = 9$
$x = 12$ e $y = 5$
$x = 19$ e $y = 1$
Logo a resposta correta é a letra "d".

2. Um circo cobra R$ 6,00 a entrada de crianças e R$ 11,00 a de adultos. Qual é o menor número de pessoas que pode assistir a um espetáculo de maneira que a bilheteria seja R$ 350,00? (Em tempo: a capacidade desse circo é suficiente para esse número de pessoas.)

Resolução (uma sugestão):

A equação diofantina que devemos resolver é: $6x + 11y = 350$

Observe que $mdc(6, 11) = 1$, que obviamente divide 350, logo a equação tem soluções.

Devemos exprimir 1 como combinação linear de 6 e 11, para isto basta eliminar o resto 5 do seguinte modo:

$$1 = 6 - 5.1 = 6 - (11 - 6.1) = 6.2 - 11 = 6.2 + 11(-1)$$

e então:

$$6.700 + 11.(-350) = 350$$

Logo o par de inteiros $x_0 = 700$, $y_0 = -350$ é uma solução particular da equação proposta, e todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$x = 700 + 11t, \qquad y = -350 - 6t$$

Como o problema pede o número de pessoas, x e y devem ser números positivos, para isso devemos escolher um t que satisfaça as desigualdades:

$$700 + 11t > 0 \qquad -350 - 6t > 0$$

$$11t > -700 \qquad -6t > 350$$

$$t > -63{,}63 \qquad t < -58{,}33$$

o que implica

$$-63{,}63 < t < -58{,}33$$

como o problema pede o menor número de pessoas, devemos encontrar o menor valor para x que satisfaça a equação, o que nos leva a t = -63.

$$x = 700 + 11(-63) = 7 \quad \text{e} \quad y = -350 - 6(-63) = 28$$

Substituindo na equação: 6.7 + 11.28 = 350, temos que 7 + 28 = 35, logo 35 será o número mínimo de pessoas para que a bilheteria seja de

R$ 350,00.

Outra sugestão de resolução:

A equação diofantina que devemos resolver é: $6x + 11y = 350$

Temos: $6x + 11y = 350$

$$6x = 350 - 11y$$

$$x = \frac{350 - 11y}{6}$$

y	x
31	1,50
30	3,333...
29	5,166...
28	7
27	8,833...

Encontramos somente 1 solução para a equação proposta:

$x = 7$ e $y = 28$

Temos que 7 + 28 = 35, logo 35 será o número mínimo de pessoas para que a bilheteria seja R$ 350,00.

3. Quantas quadras de basquete e quantas de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente? E se forem 77 alunos?

Resolução:

A resolução do problema consiste em resolver a equação: 10x + 12y = 80

Temos: $10x + 12y = 80$

$$10x = 80 - 12y$$

$$x = \frac{80 - 12y}{10}$$

y	x
6	0,8
5	2
4	3,2
3	4,4
2	5,6
1	6,8

Encontramos somente 1 solução para a equação proposta:

$x = 2$ e $y = 5$

Logo, serão necessárias 5 quadras de vôlei e 2 de basquete, para que 80 alunos joguem simultaneamente.

E se forem 77 alunos?

Neste caso teremos a equação 10x + 12y = 77, esta equação é um exemplo de Equação Diofantina Linear que não possui solução, pois o $mdc(10,12) = 2$ e 2 não divide 77.

4. Para agrupar 18 ônibus em filas de 4 e de 12, quantas filas serão formadas de cada tipo?

Resolução:

A equação diofantina $4x + 12y = 18$ não possui solução, pois o $mdc(4,12) = 4$ e 4 não divide 18.

5. Pede-se a uma pessoa que multiplique o dia do seu nascimento por 12 e o mês por 31. Será que com a soma dos produtos desses dados pode determinar-se a data do aniversário da pessoa.

Por exemplo, se a pessoa nasceu no dia 4 de dezembro, efetuamos as seguintes operações:

4 x 12 = 48 12 x 31 = 372, 48 + 372 = 420

Assim, como deduziremos a data do aniversário de uma pessoa, sabendo que a soma é 356?

Resolução:

O problema consiste em resolver a equação diofantina.

12x + 31y = 356

Primeiramente, verificamos se existe solução para esta equação pois mdc(12,31)=1, 1 divide 356, logo a equação possui solução.

Em seguida, encontramos uma solução qualquer para esta equação, por exemplo $x_0 = -22$ e $y_0 = 20$ e temos: $12(-22) + 31.20 = 356$

Logo o par de inteiros $x_0 = -22$, $y_0 = 20$ é uma solução particular da equação proposta, e todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$x = -22 + 31t \text{ e } y = 20 - 12t$$

Mas, neste caso, temos que $0 < x \leq 31$ e $0 < y \leq 12$, ou seja,

$$-22 + 31t > 0 \quad \text{e} \quad 20 - 12t > 0$$

$$31t > 22 \quad \text{e} \quad -12t > -20$$

$$t > 0{,}7096\ldots \quad \text{e} \quad t < 1{,}66\ldots$$

o que nos leva a $t = 1$.

$$x = -22 + 31.1 = 9$$

$$y = 20 - 12.\,1 = 8$$

Assim, podemos concluir que a pessoa nasceu no dia 9 de agosto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B, **História da Matemática**. São Paulo, Edgard Blücher/Edusp, 1974.

DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna: Volume Único.** São Paulo: Atual, 2003.

EVES, Howard, tradução: DOMINGUES, Hygino H., **Introdução à História da Matemática**. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2002.

PITOMBEIRA, João B.; ROQUE, Tatiana M. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SINGH, Simon, tradução: CALIFE, Jorge Luiz. **O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos**. Rio de Janeiro: Record, 1999.