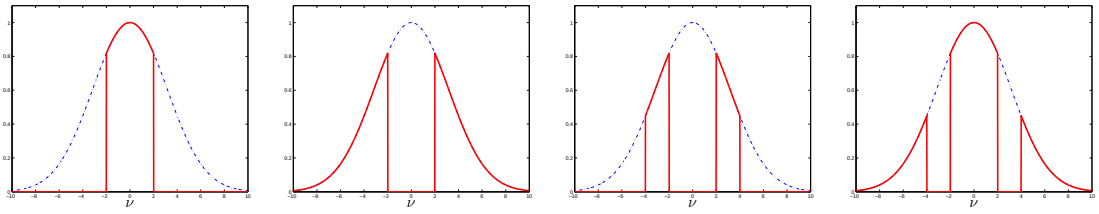
TP10 – Décomposition *cartoon+texture* d'une image

Une des multiples applications de la transformation de Fourier (TF) est le *filtrage spectral*. Soit un signal unidimensionnel $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On appelle *filtre spectral* toute application qui, au *spectre d'entrée* $F_e(\nu) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de $f(t)$, obtenu par TF, associe un *spectre de sortie* $F_s(\nu) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tel que $\forall \nu \in \mathbb{R}$, $|F_s(\nu)| \leqslant |F_e(\nu)|$. Les filtres les plus connus sont les *passe-bas* et les *passe-haut*. Les filtres des figures 1-a et 1-b, qui sont caractérisés par la même *fréquence de coupure*, sont complémentaires : la somme des deux spectres de sortie est égale au spectre d'entrée. On peut construire des filtres plus sophistiqués en combinant judicieusement un filtre passe-bas et un filtre passe-haut de fréquences de coupure différentes : un filtre *passe-bande* s'obtient en faisant subir au spectre d'entrée un filtrage passe-bas puis un filtrage passe-haut (cf. figure 1-c) ; un filtre *coupe-bande* s'obtient en sommant les spectres de sortie résultant d'un filtrage passe-bas et d'un filtrage passe-haut (cf. figure 1-d).



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 1 – Exemples de filtres : (a) passe-bas, (b) passe-haut, (c) passe-bande et (d) coupe-bande.

Exercice 1 : filtrage spectral

Le script `exercice_0.m` lit une image, calcule son spectre, c'est-à-dire sa transformée de Fourier discrète bidimensionnelle (fonction `fft2` de Matlab), puis décompose ce spectre en deux parties, grâce à un filtre passe-bas Φ_b et à un filtre passe-haut Φ_h complémentaires :

$$\begin{cases} \Phi_b(\nu_x, \nu_y) = \chi\left(\sqrt{{\nu_x}^2 + {\nu_y}^2} \leqslant \nu_c\right) \\ \Phi_h(\nu_x, \nu_y) = \chi\left(\sqrt{{\nu_x}^2 + {\nu_y}^2} > \nu_c\right) \end{cases}$$

où $\chi(s)$ vaut 1 si s est vrai et 0 sinon (fonction caractéristique), et où ν_c désigne la fréquence de coupure. Les images correspondant aux basses fréquences et aux hautes fréquences sont obtenues par transformation de Fourier discrète inverse bidimensionnelle (fonction `ifft2` de Matlab), dont seule la partie réelle est conservée.

Ce script permet d'effectuer une séparation grossière de l'image en une partie « plutôt photométrique » et une partie « plutôt géométrique », connue sous le nom de *décomposition cartoon+texture*. Testez différentes valeurs de ν_c afin d'obtenir une décomposition « optimale », le critère d'optimalité étant très subjectif.

Même en choisissant la valeur « optimale » de ν_c, le résultat du script `exercice_0.m` reste visuellement médiocre. Cela vient de la coupure franche entre basses fréquences et hautes fréquences. Pour améliorer l'extraction des basses fréquences, une solution consiste à pondérer le spectre non pas par une fonction caractéristique, mais par une fonction lisse qui soit décroissante lorsque la distance à l'origine (dans le plan de Fourier) croît.

Faites une copie de `exercice_0.m`, de nom `exercice_1.m`, afin d'utiliser le filtre passe-bas suivant :

$$\Phi_b(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{1 + \frac{{\nu_x}^2 + {\nu_y}^2}{\eta}} \tag{1}$$

et le filtre passe-haut complémentaire $\Phi_h(\nu_x, \nu_y) = 1 - \Phi_b(\nu_x, \nu_y)$, et donnez au paramètre η la valeur 0,05.

Exercice 2 : modèle ROF

Le problème de la décomposition *cartoon+texture* peut être résolu sans passer explicitement dans le domaine de Fourier. La décomposition d'une image u en deux parties c (*cartoon*, qui correspond aux basses fréquences) et t (*texture*, qui correspond aux hautes fréquences) est telle que $c + t = u$, si les filtres passe-bas et passe-haut utilisés sont complémentaires, car la transformation de Fourier est linéaire. L'image t se déduit donc très simplement de l'image c. Par ailleurs, nous attendons de c qu'elle soit « proche » de l'image originale u et que les variations de niveau de gris soient moins brutales dans c que dans u. Nous pouvons donc utiliser le *modèle ROF* (proposé par Rudin, Osher et Fatemi en 1992), qui fait apparaître la variation totale :

$$E_{\mathrm{ROF}}(c) = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[c(x,y) - u(x,y) \right]^2 + \lambda \left| \nabla c(x,y) \right|_{\epsilon} \right\} dx\, dy \tag{2}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre du modèle et $|\nabla c(x,y)|_{\epsilon} = \sqrt{|\nabla c(x,y)|^2 + \epsilon}$. Ce modèle a déjà été rencontré dans l'exercice 1 du TP7 (modèle de débruitage par variation totale). L'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle $E_{\mathrm{ROF}}(c)$ est non linéaire. Elle peut être résolue par un schéma itératif de type « point fixe », qui consiste à calculer la solution à l'itération $(k+1)$ en « figeant » la partie non linéaire à l'itération (k) :

$$\left[I - \lambda \nabla\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{|\nabla c^{(k)}(x,y)|^2 + \epsilon}} \nabla \right) \right] c^{(k+1)}(x,y) = u(x,y), \qquad \forall\, (x,y) \in \Omega \tag{3}$$

où l'opérateur $\nabla\cdot$ désigne la *divergence*. Après discrétisation, l'itération (3) s'écrit :

$$\left[\mathbf{I}_N - \lambda \left(-\mathbf{D}_x^{\top} \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{D}_x - \mathbf{D}_y^{\top} \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{D}_y \right) \right] \mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{u} \tag{4}$$

Dans (4), N désigne le nombre de pixels de Ω, $\mathbf{I}_N$ est la matrice identité, et $\mathbf{W}^{(k)}$ la matrice diagonale des coefficients $\frac{1}{\sqrt{|\nabla c^{(k)}(x,y)|^2+\epsilon}}$ calculés en tous les pixels de Ω. Ces deux matrices de taille $N \times N$ peuvent être calculées à l'aide des fonctions `speye` et `spdiags`, respectivement. Les vecteurs $\mathbf{c}^{(k+1)}$ et $\mathbf{u}$ concatènent les valeurs de $c^{(k+1)}(x,y)$ et $u(x,y)$ calculées en tous les pixels de Ω. Quant aux matrices $\mathbf{D}_x$ et $\mathbf{D}_y$, elles permettent de calculer par *différences finies* les dérivées partielles d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, pour peu que Ω soit rectangulaire. Ces deux matrices bi-diagonales de taille $N \times N$ se calculent aussi à l'aide de la fonction `spdiags` (cf. TP7).

La résolution de l'équation (4), que l'on réécrit $\mathbf{A}^{(k)}\, \mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{u}$, peut être effectuée très simplement à l'aide de l'opérateur \ de Matlab. Enfin, il est naturel de choisir comme initialisation de cette itération $\mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{u}$.

Faites une copie du script `exercice_1.m` du TP7, de nom `exercice_2.m`, que vous modifierez de manière à effectuer 20 itérations du schéma numérique (4), avec $\lambda = 50$ et $\epsilon = 0,01$. Un fois mis au point, faites une copie de ce script, sous le nom `exercice_2_bis.m`, que vous modifierez de manière à lire l'image `empreinte.png`, et à utiliser $\lambda = 5$. En seuillant à 2 la texture t obtenue au fil des itérations, vous obtiendrez une image binaire de l'empreinte digitale, débarrassée des variations « douces » du niveau de gris. Pour valider l'intérêt de cette méthode d'extraction de la texture, seuillez l'image originale u et comparez les résultats.

Exercice 3 : modèle TV-Hilbert

Il est également possible de résoudre le problème de la décomposition *cartoon+texture* d'une image en utilisant le *modèle TV-Hilbert*, qui est un modèle mixte, dans lequel un des deux termes dépend des spectres $\widehat{c}$ et $\widehat{u}$ de l'inconnue c et de la donnée u, tandis que l'autre terme dépend de l'inconnue c :

$$E_{\text{TV-H}}(c) = \frac{1}{2} \iint_{\widehat{\Omega}} \left\{ \Phi_b(\nu_x,\nu_y) \left| \widehat{c}(\nu_x,\nu_y) - \widehat{u}(\nu_x,\nu_y) \right| \right\}^2 d\nu_x\, d\nu_y + \lambda \iint_{\Omega} \left| \nabla c(x,y) \right|_{\epsilon} dx\, dy \tag{5}$$

Le filtre passe-bas $\Phi_b(\nu_x,\nu_y)$ du modèle (5) a déjà été défini en (1). Le terme d'*attache aux données* semble effectivement mieux adapté au problème que celui de $E_{\mathrm{ROF}}(c)$, car seules les basses fréquences des images u et c sont contraintes à être égales. Un calcul un peu plus compliqué que celui de l'exercice 2 fournit l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\mathrm{TF}^{-1} \left\{ \Phi_b(\nu_x,\nu_y) \left| \widehat{c}(\nu_x,\nu_y) - \widehat{u}(\nu_x,\nu_y) \right| \right\} (x,y) - \lambda \nabla\cdot \left(\frac{\nabla c(x,y)}{|\nabla c(x,y)|_{\epsilon}} \right) = 0 \tag{6}$$

Pour résoudre l'équation (6), nous utilisons un schéma de *descente de gradient* qui consiste à appliquer l'itération suivante (le *pas de descente* $\gamma > 0$ doit être fixé par l'utilisateur) :

$$c^{(k+1)}(x,y) = c^{(k)}(x,y) - \gamma \left[\mathrm{TF}^{-1} \left\{ \Phi_b(\nu_x,\nu_y) \, |\widehat{c}^{(k)}(\nu_x,\nu_y) - \widehat{u}(\nu_x,\nu_y)| \right\} (x,y) - \lambda \, \nabla\cdot \left(\frac{\nabla c^{(k)}(x,y)}{|\nabla c^{(k)}(x,y)|_\epsilon} \right) \right] \quad (7)$$

Un calcul fastidieux mais sans difficulté majeure permet d'expliciter le dernier terme de cette expression :

$$\nabla\cdot \left(\frac{\nabla c}{|\nabla c|_\epsilon} \right) = \frac{c_{xx} \left(c_y^2 + \epsilon\right) + c_{yy} \left(c_x^2 + \epsilon\right) - 2\, c_x \, c_y \, c_{xy}}{(c_x^2 + c_y^2 + \epsilon)^{3/2}} \quad (8)$$

où c_x, c_y, c_{xx}, c_{xy} et c_{yy} désignent les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction c. Étant donné que le domaine Ω est rectangulaire, puisqu'il contient la totalité de l'image, ces dérivées partielles peuvent être calculées comme dans l'exercice 2, en utilisant les matrices $\mathbf{D}_x$ et $\mathbf{D}_y$:

$$\mathbf{c}_x = \mathbf{D}_x \, \mathbf{c} \quad ; \quad \mathbf{c}_y = \mathbf{D}_y \, \mathbf{c} \quad ; \quad \mathbf{c}_{xx} = -\mathbf{D}_x^\top \, \mathbf{D}_x \, \mathbf{c} \quad ; \quad \mathbf{c}_{xy} = -\mathbf{D}_x^\top \, \mathbf{D}_y \, \mathbf{c} \quad ; \quad \mathbf{c}_{yy} = -\mathbf{D}_y^\top \, \mathbf{D}_y \, \mathbf{c}$$

Il est rappelé que, dans ces expressions, $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_x$, $\mathbf{c}_y$, $\mathbf{c}_{xx}$, $\mathbf{c}_{xy}$ et $\mathbf{c}_{yy}$ désignent des matrices vectorisées.

Écrivez un script `exercice_3.m` permettant d'effectuer 1000 itérations du schéma numérique découlant de la discrétisation de (7), avec $\lambda = 1000$, $\epsilon = 0,5$ et $\gamma = 0,0001$. Pour ne pas trop ralentir l'exécution de ce script, il est conseillé de n'effectuer la mise à jour des affichages que toutes les 20 itérations.