

# **Proyecto I – Cálculo de frecuencias naturales para vigas elásticas con efecto de cortante e inercia rotacional**

De La Rosa, Daniel; Tapia, Ricardo; Hidalgo, Alvin; Abreu, Ángel

**Escuela de ingeniería Mecánica y eléctrica  
Facultad de ciencias e ingeniería  
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra**

## **Síntesis/Resumen.**

---

El objetivo principal del proyecto consiste en realizar un análisis de un modelo para el cálculo de frecuencias naturales de vigas elásticas. En este modelo además del efecto de flexión, se considera también el efecto cortante y de inercia tanto rotacional como traslacional.

---

### **1.Introducción**

Los objetivos específicos de este proyecto son determinar la frecuencia natural a la que vibran ciertos objetos de manera que mediante un movimiento rotacional podamos conseguir la frecuencia de resonancia de estas edificaciones.

La importancia de estudiar los fenómenos de frecuencia resonante está en poder captar la máxima transferencia de energía de cualquier sistema, por ejemplo, los eléctricos, obteniendo la máxima función de transferencia o los mecánicos absorbiendo la mayor cantidad de energía posible. En los sistemas mecánicos esto da lugar a la inestabilidad y la ruptura en algún punto del mismo.

La estructura de este informe está distribuida de forma tal que podamos interpretar de

manera sencilla los resultados de esta práctica. Para llevar esto a cabo se explicará al inicio cual es el propósito general de este proyecto mediante un resumen que presente la metodología empleada y que dé a conocer los resultados claves. Luego, mediante una introducción al tema, el lector recibe los propósitos específicos y como estos pueden ser aplicados en el mundo que vivimos. En el desarrollo, se plantean las ecuaciones que definen cada proceso teórico analizado, esto nos da como resultado el comportamiento físico de los compoene. De manera sincrónica se plantean las ecuaciones que describen estas propiedades físicas y se describe cómo estás. Finalmente, se discuten los resultados obtenidos en los experimentos para así comprobar los conocimientos adquiridos en el marco teórico.

## 2. Metodología

Para determinar los resultados establecidos en el marco teórico fue necesaria la realización de un mecanismo encargado de hacer vibrar tres objetos que poseen diferentes longitudes: el de mayor tamaño 23.5cm, el de tamaño medio 17.25cm y el de menor tamaño 11.5cm agregando una masa constante. Esto fue posible gracias al mecanismo diseñado de biela-manivela que convierte el movimiento rotacional del motor en un movimiento lineal, al unir la biela a un piñón y este a una cremallera **[Anexo 1]**. Este mecanismo es unido a una base que sostiene cada uno de los objetos que estarán sometidos a entrar en resonancia, de modo que el en el proyecto se observa como estos objetos con longitudes diferentes y una masa constante, aumentan su amplitud de oscilación cuando entran en resonancia con el mecanismo que las hace vibrar. En primer lugar, se muestra el objeto de mayor longitud entrar en resonancia con la menor frecuencia, luego, el objeto mediano de menor longitud que el anterior entra en resonancia con una frecuencia mayor y el objeto de menor longitud entra en resonancia con la frecuencia más alta.

## 3. Descripción de problema

### Ecuación

$$f = 1/T \quad (1)$$

$$\sum F = ma \quad (2)$$

$$F_0 \sin \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

$$x = A \cos (\omega t + \phi) \quad (4)$$

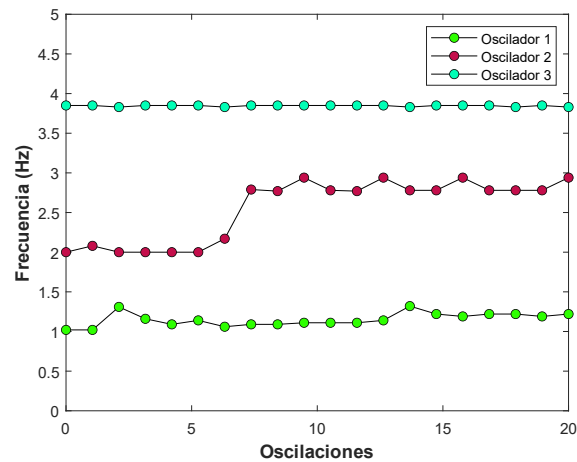
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad (5)$$

La energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye en el tiempo como resultado de la fuerza resistiva. Para compensar esta pérdida se deberá aplicar una fuerza externa que haga trabajo positivo en el sistema. Por lo que, en cualquier momento se puede aplicar una fuerza que actúe en dirección del movimiento del oscilador. En un ejemplo común de un oscilador forzado es un oscilador amortiguado impulsado por una fuerza externa que varía periódicamente, como  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ , donde  $F_0$  es una constante y  $\omega$  es la frecuencia angular de la fuerza impulsora. En este ejemplo, la frecuencia  $\omega$  de la fuerza impulsora es variable, mientras que la frecuencia natural  $\omega_0$  del oscilador es fija por los valores de  $k$  y  $m$ . En esta situación mediante la **Ec.2** de la segunda ley de Newton se produce la **Ec.3**.

Después de que comienza a actuar la fuerza impulsora de un objeto que es inicialmente estable, la amplitud de la oscilación aumentará. Pasado un periodo de tiempo suficientemente largo, cuando la entrada de energía por cada ciclo de la fuerza impulsora iguale la cantidad de energía mecánica transformada a energía interna por cada ciclo se alcanza una amplitud constante de

las oscilaciones. En esta situación se presenta la **Ec.4** y la **Ec.5** mostrando que el oscilador forzado vibra a la frecuencia de la fuerza impulsora. Para un amortiguamiento pequeño, la amplitud es grande cuando la frecuencia de la fuerza impulsora está cerca de la frecuencia natural de oscilación. Este aumento en la amplitud se reconoce como resonancia y esta frecuencia natural se llama frecuencia de resonancia. Si una fuerza periódica se aplica a tal sistema, la amplitud del movimiento resultante es mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a una de las frecuencias naturales del sistema. Ya que un sistema en oscilación muestra una gran amplitud cuando se activa a cualquiera de sus frecuencias naturales, a estas frecuencias por lo general se les refiere como frecuencias de resonancia, siendo estas las que se quieren identificar en este proyecto.

#### 4.Análisis



**Fig 1.** Frecuencia de resonancia de oscilaciones

Como se define en la **Ec.1** la frecuencia es la inversa del periodo, por lo que para medir la frecuencia natural de cada objeto fue necesario diseñar y programar un circuito que se encargue de medir el número de oscilaciones que realiza el motor en un tiempo dado. El circuito realizado funciona mediante un Arduino, botones y una fuente variable la cual regula las revoluciones por minuto del motor, mientras que las oscilaciones que realiza el motor son medidas mediante un botón con límite (limit switch) que a través de una programación detectan el tiempo y número de oscilaciones realizadas, esto nos da el periodo y por la **Ec.1** se obtiene el resultado de la frecuencia.

#### 4. Conclusiones

Se concluye mediante la experimentación que en una disminución de la frecuencia de oscilación del motor se obtiene la frecuencia de resonancia de los osciladores que se encuentran a mayor altura, y mientras se va aumentando la frecuencia de oscilación del motor se observa que entran en resonancia los osciladores a menor altura. Es decir que, mientras más baja es la frecuencia de oscilación se obtiene la frecuencia natural de mayor longitud y viceversa; a mayor frecuencia entran en resonancia los de menor longitud. Para futuras investigaciones, se propone el uso de una señal PWM para variar la velocidad del motor, ya que la disminución de torque producida por la reducción de voltaje se vuelve una de las dificultades más importantes a la hora de realizar el análisis de la frecuencia sobre los diferentes osciladores.

#### 5. Bibliografía

Repetto, C. E. (2014, 1 marzo). *Medición de frecuencias de resonancia, factor de pérdida y módulo de Young dinámico de varillas empotradas*.

<https://www.scielo.br/j/rbef/a/KxbbFKLXg8hsVKSwwRXXM4d/?lang=es>

Serway, R. (2018). *Física Para Ciencias e Ingeniería. Vol. 1* (10.<sup>a</sup> ed.). Cengage Learning.

Vulnerabilidad de edificios ante resonancia sísmica en Huancayo por el sismo del 7 de agosto de 2020 Mw=4.9 con la aplicación de la metodología de Bazán y Meli. (2021). En *Morillo Chamorro, Diana Rosa*. Universidad Continental.

<https://repositorio.continental.edu.pe/handle/20.500.12394/10659>

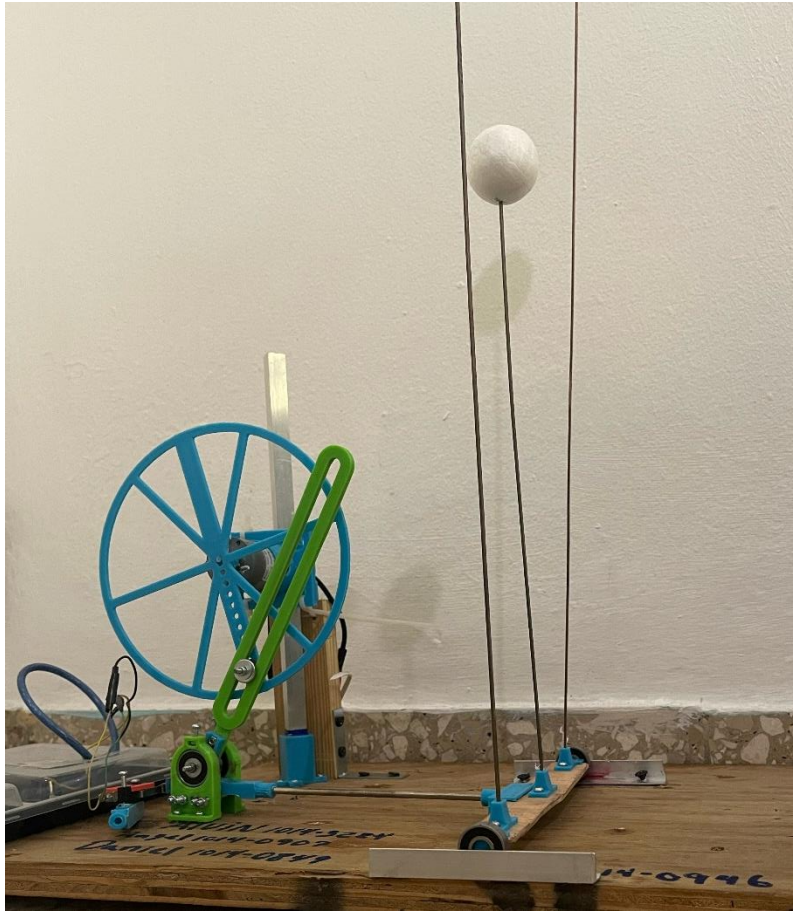
## 6. Anexos



**[Anexo 1]** Sistema biela-manivela

Material	Cantidad
Motor DC 12V	1
Tornillos (3mm)	15
Tuercas (3mm)	15
Rodamientos 30mm	4
Varilla de metal (20cm)	1
Varillas de plata (40cm)	3
Perfil de aluminio (cm)	20
Tabla de 20x30	1
Playboo de 5x15	1
Bolas de foam (3cm)	3
Tachuelas para soporte	4
Tornillos diablito de 1/2	8
Tie wrap 4.8x200mm	4
Filamento plástico PLA (kg)	0.405

**[Anexo 2]** Tabla de materiales utilizados en la elaboración del proyecto



**[Anexo 3]** Sistema de frecuencia de resonancia