COLT: Exercise 13

Ramon Xuriguera

Code available at:
`https://github.com/rxuriguera/colt/tree/master/exercises/013/`

Notation: `1 <- 0 2 4` is the same as $x_1x_3x_5 \to x_2$

Step 1

```
EQ: 01011
S:
  01011

h:
  F <- 1,3,4
  0 <- 1,3,4
  2 <- 1,3,4
```

Step 2

```
EQ: 11100
S:
  01011
  11100

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  F <- 1,3,4
  0 <- 1,3,4
  2 <- 1,3,4
```

Step 3

```
EQ: 00001
S:
  00001
  11100

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  F <- 4
  0 <- 4
  1 <- 4
  2 <- 4
  3 <- 4
```

Step 4

```
EQ: 00011
S:
  00001
  11100

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  3 <- 4
```

Step 5

```
EQ: 01011
S:
  00001
  11100
  01011

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  F <- 1,3,4
  0 <- 1,3,4
  2 <- 1,3,4
  F <- 4
  0 <- 4
  1 <- 4
  2 <- 4
  3 <- 4
```

Step 6

```
EQ: 00011
S:
  00001
  11100
  01011

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  F <- 1,3,4
  0 <- 1,3,4
  2 <- 1,3,4
  3 <- 4
```

Step 7

```
EQ: 00110
S:
  00001
  11100
  01011
  00110

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  F <- 1,3,4
  0 <- 1,3,4
  2 <- 1,3,4
  F <- 2,3
  0 <- 2,3
  1 <- 2,3
  4 <- 2,3
  F <- 4
  0 <- 4
  1 <- 4
  2 <- 4
  3 <- 4
```

Step 8

```
EQ: 00011
S:
  00001
  11100
  01011
  00110

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  F <- 1,3,4
  0 <- 1,3,4
  2 <- 1,3,4
  F <- 2,3
  0 <- 2,3
  1 <- 2,3
  4 <- 2,3
  3 <- 4
```

Step 9

```
EQ: 01110
S:
  00001
  11100
  01011
  00110

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  F <- 1,3,4
  0 <- 1,3,4
  2 <- 1,3,4
  1 <- 2,3
  3 <- 4
```

Step 10

```
EQ: 10010
S:
  00001
  11100
  01011
  00110
  10010

h:
  F <- 0,1,2
  3 <- 0,1,2
  4 <- 0,1,2
  F <- 0,3
  1 <- 0,3
  2 <- 0,3
  4 <- 0,3
  F <- 1,3,4
  0 <- 1,3,4
  2 <- 1,3,4
  F <- 2,3
  0 <- 2,3
  1 <- 2,3
  4 <- 2,3
  F <- 4
  0 <- 4
  1 <- 4
  2 <- 4
  3 <- 4
```

Step 11

```
EQ: 00011
S:
    00001
    11100
    01011
    00110
    10010
h:
    F <- 0,1,2
    3 <- 0,1,2
    4 <- 0,1,2
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,3,4
    0 <- 1,3,4
    2 <- 1,3,4
    F <- 2,3
    0 <- 2,3
    1 <- 2,3
    4 <- 2,3
    3 <- 4
```

Step 12

```
EQ: 01110
S:
    00001
    11100
    01011
    00110
    10010
h:
    F <- 0,1,2
    3 <- 0,1,2
    4 <- 0,1,2
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,3,4
    0 <- 1,3,4
    2 <- 1,3,4
    1 <- 2,3
    3 <- 4
```

Step 13

```
EQ: 01010
S:
    00001
    11100
    01010
    00110
    10010
h:
    F <- 0,1,2
    3 <- 0,1,2
    4 <- 0,1,2
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,3
    0 <- 1,3
    2 <- 1,3
    4 <- 1,3
    F <- 2,3
    0 <- 2,3
    1 <- 2,3
    4 <- 2,3
    F <- 4
    0 <- 4
    1 <- 4
    2 <- 4
    3 <- 4
```

Step 14

```
EQ: 00011
S:
    00001
    11100
    01010
    00110
    10010
h:
    F <- 0,1,2
    3 <- 0,1,2
    4 <- 0,1,2
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,3
    0 <- 1,3
    2 <- 1,3
    4 <- 1,3
    F <- 2,3
    0 <- 2,3
    1 <- 2,3
    4 <- 2,3
    3 <- 4
```

Step 15

```
EQ: 01110
S:
    00001
    11100
    01010
    00110
    10010
h:
    F <- 0,1,2
    3 <- 0,1,2
    4 <- 0,1,2
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    2 <- 1,3
    1 <- 2,3
    3 <- 4
```

Step 16

```
EQ: 01111
S:
    00001
    01100
    01010
    00110
    10010

h:
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,2
    0 <- 1,2
    3 <- 1,2
    4 <- 1,2
    F <- 1,3
    0 <- 1,3
    2 <- 1,3
    4 <- 1,3
    F <- 2,3
    0 <- 2,3
    1 <- 2,3
    4 <- 2,3
    F <- 4
    0 <- 4
    1 <- 4
    2 <- 4
    3 <- 4
```

Step 17

```
EQ: 00011
S:
    00001
    01100
    01010
    00110
    10010

h:
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,2
    0 <- 1,2
    3 <- 1,2
    4 <- 1,2
    F <- 1,3
    0 <- 1,3
    2 <- 1,3
    4 <- 1,3
    F <- 2,3
    0 <- 2,3
    1 <- 2,3
    4 <- 2,3
    3 <- 4
```

Step 18

```
EQ: 01110
S:
    00001
    01100
    01010
    00110
    10010

h:
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    3 <- 1,2
    2 <- 1,3
    1 <- 2,3
    3 <- 4
```

Step 19

```
EQ: 01111
S:
    00001
    01100
    01010
    00110
    10010
    01111
h:
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,2,3,4
    0 <- 1,2,3,4
    F <- 1,2
    0 <- 1,2
    3 <- 1,2
    4 <- 1,2
    F <- 1,3
    0 <- 1,3
    2 <- 1,3
    4 <- 1,3
    F <- 2,3
    0 <- 2,3
    1 <- 2,3
    4 <- 2,3
    F <- 4
    0 <- 4
    1 <- 4
    2 <- 4
    3 <- 4
```

Step 20

```
EQ: 00011
S:
    00001
    01100
    01010
    00110
    10010
    01111
h:
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,2,3,4
    0 <- 1,2,3,4
    F <- 1,2
    0 <- 1,2
    3 <- 1,2
    4 <- 1,2
    F <- 1,3
    0 <- 1,3
    2 <- 1,3
    4 <- 1,3
    F <- 2,3
    0 <- 2,3
    1 <- 2,3
    4 <- 2,3
    3 <- 4
```

Step 21

```
EQ: 01110
S:
    00001
    01100
    01010
    00110
    10010
    01111
h:
    F <- 0,3
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    F <- 1,2,3,4
    0 <- 1,2,3,4
    3 <- 1,2
    2 <- 1,3
    1 <- 2,3
    3 <- 4
```

Step 22

```
EQ: 11111
S:
    00001
    01100
    01010
    00110
    10010
    01111
h:
    1 <- 0,3
    2 <- 0,3
    4 <- 0,3
    0 <- 1,2,3,4
    3 <- 1,2
    2 <- 1,3
    1 <- 2,3
    3 <- 4
```

After the 22$^{\text{nd}}$ iteration, the EQ oracle returns a `Yes` and we are done.

Final hypothesis returned:

$$
\begin{aligned}
x_1x_4 &\rightarrow x_2 \quad \wedge \\
x_1x_4 &\rightarrow x_3 \quad \wedge \\
x_1x_4 &\rightarrow x_4 \quad \wedge \\
x_2x_3x_4x_5 &\rightarrow x_1 \quad \wedge \\
x_2x_3 &\rightarrow x_4 \quad \wedge \\
x_2x_4 &\rightarrow x_3 \quad \wedge \\
x_3x_4 &\rightarrow x_2 \quad \wedge \\
x_5 &\rightarrow x_4
\end{aligned}
$$