ハイエンド単発講座

補足資料: 状態空間モデルの基礎

株式会社データミックス

講義中のルール

- 不明な点がありましたら、その場で質問してください。
- 話を遮っていただいて構いません。

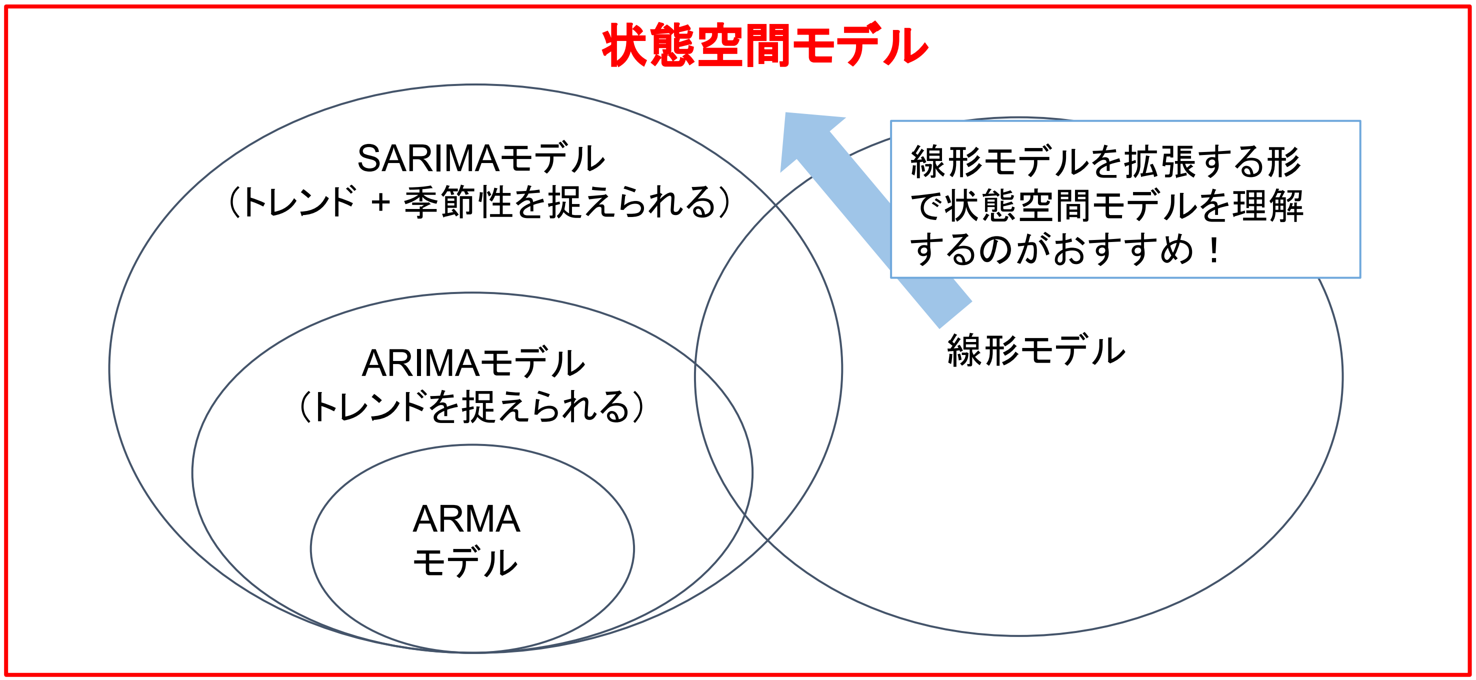
目次

1. 状態空間モデルことはじめ
2. 状態空間モデルが役立つケース
3. カルマンフィルタ
4. 小テスト

状態空間モデルことはじめ

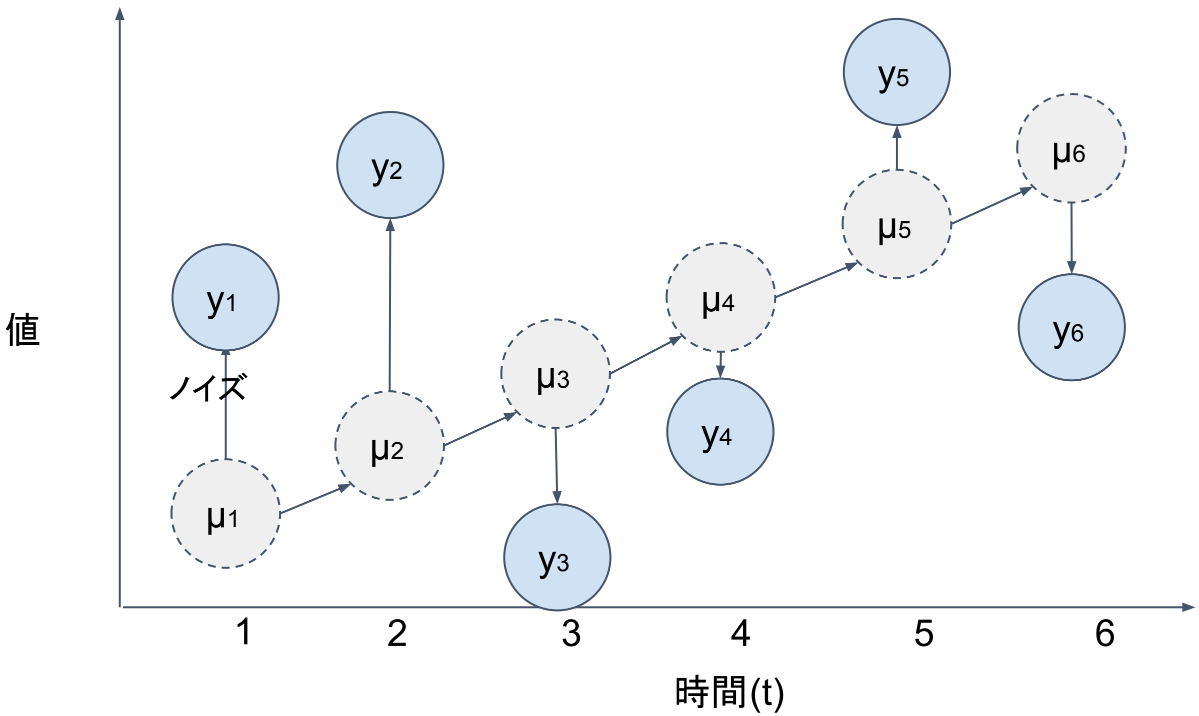
状態空間モデルとは？

状態空間モデルは、時系列モデルと線形モデルを拡張した（もしくは一般化した）考え方をするモデルです。状態空間モデルを使うとモデルの記述が柔軟であるというのがポイントです。勉強する際は、時系列モデルとして勉強するより、線形モデルの拡張として学習したほうがわかりやすいと思います（私見）。



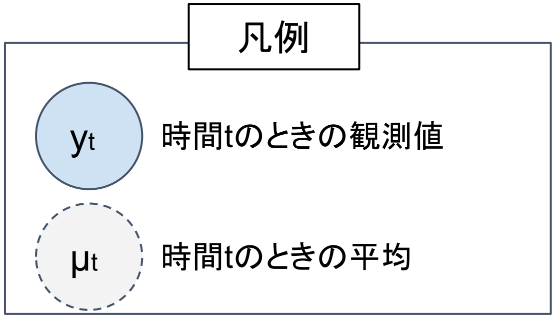
回帰分析の復習

回帰分析はトレンドが一定の傾きであることを仮定し、そのトレンドにノイズ(誤差)を加えたものが観測できていると考えます。



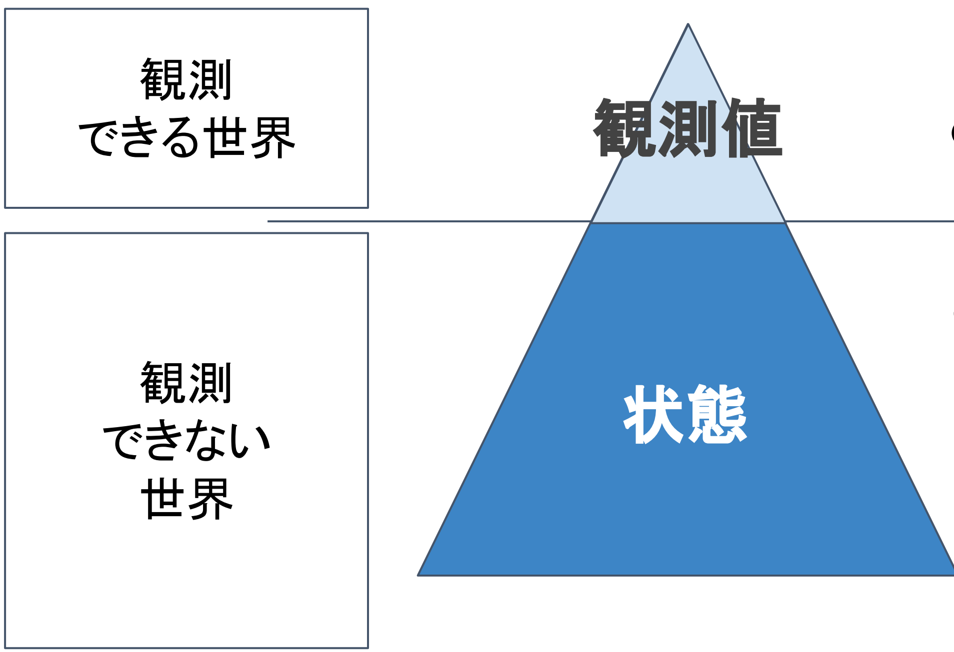
$$y_t = \beta t + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$



ここで見方を変えます -「状態」と「観測」という概念

観測できる値というのは、観測できない「状態」から生成されていると考えます。例えば、おでこで熱を測ったときには38.5度であれば、観測できないが深部体温は39度ある、というようなケースです。

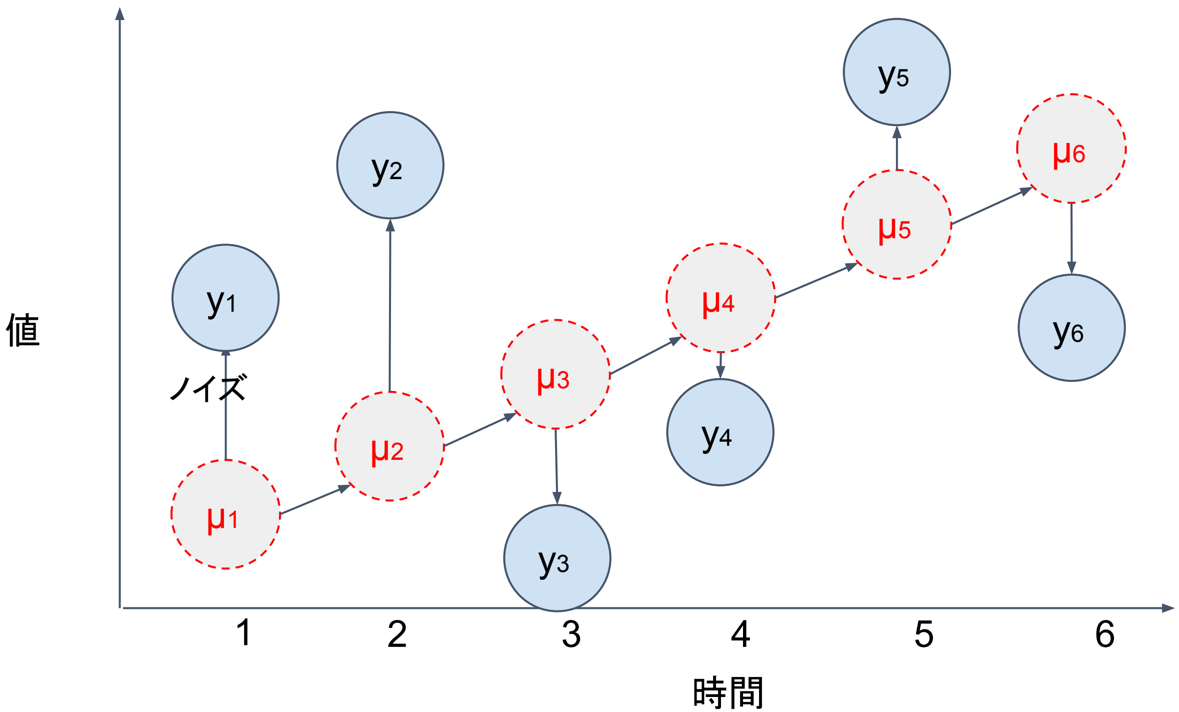


- 皮膚温が38.5度
- 深部体温は39度

回帰分析を「状態」と「観測」という概念で説明し直す

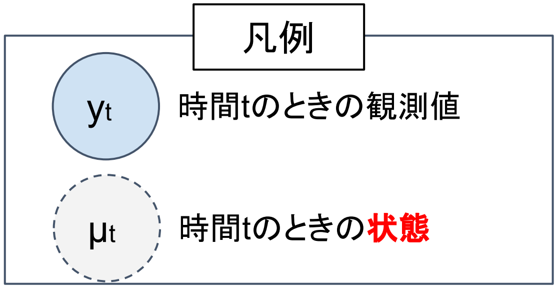
回帰分析は**「状態」**が前の状態から一定の値を加えたもので、各時間の**「状態」**にノイズ（誤差）を加えたものが観測できていると考えます。

！ ここまでは「トレンド」を「状態」という言葉に言い換えただけです。



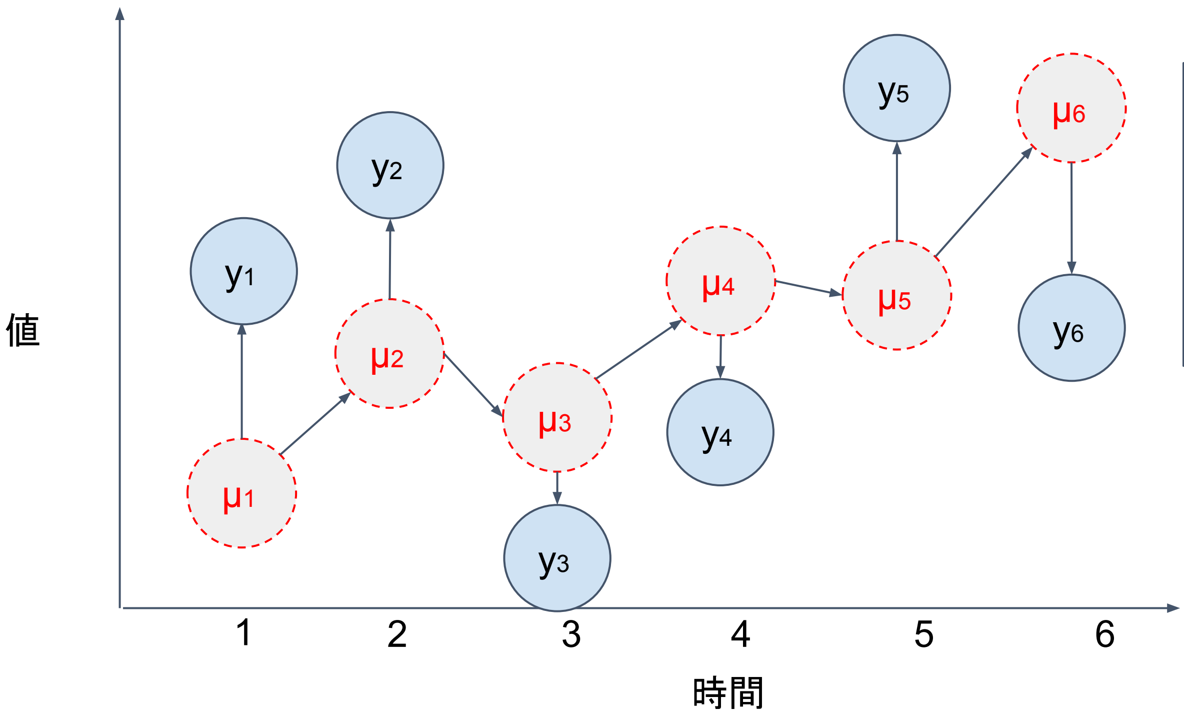
式

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta$$
$$y_t = \mu_t + \epsilon_t$$
$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$



もし状態が一定ではなく、
毎回少しずつ変化するとしたらどうなるでしょう？

回帰分析は、「状態」が一定の値で加算されていくことを想定していました。もし、「状態」が一定の値ではなく不規則に動くとしたら、どのように式を変形すれば良いでしょうか？



$$\mu_t = \boxed{\quad ? \quad}$$

式

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

凡例

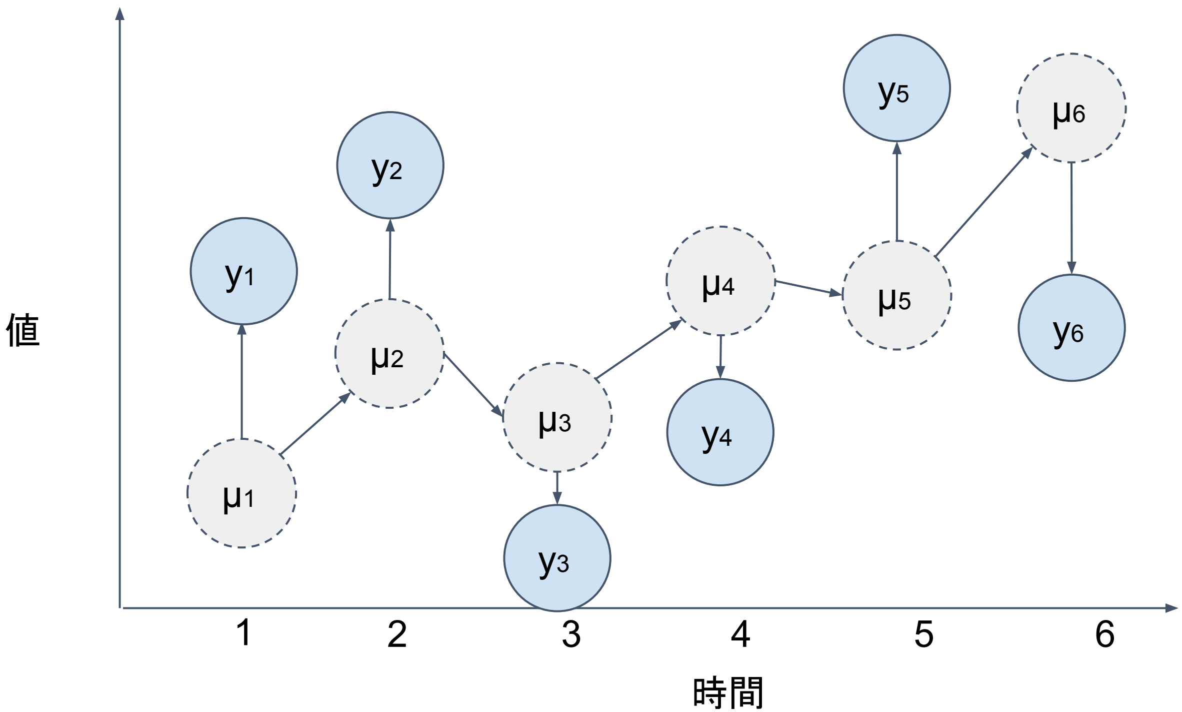
y_t 時間tのときの観測値

μ_t 時間tのときの**状態**

これこそ状態空間モデルの基本形です！

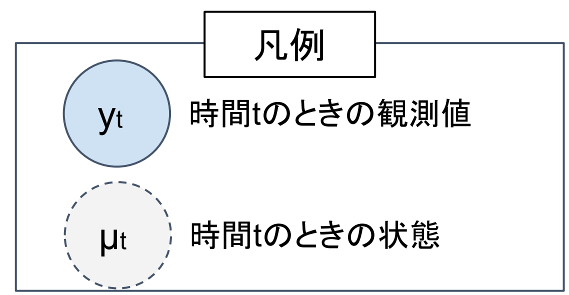
回帰分析は、「状態」が一定の値で加算されていくことを想定していました。もし、「状態」が一定の値ではなく不規則に動くとしたら、どのように式を変形すれば良いでしょうか？

！ この式について次ページで詳しくみてみましょう！



$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t$$
$$\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

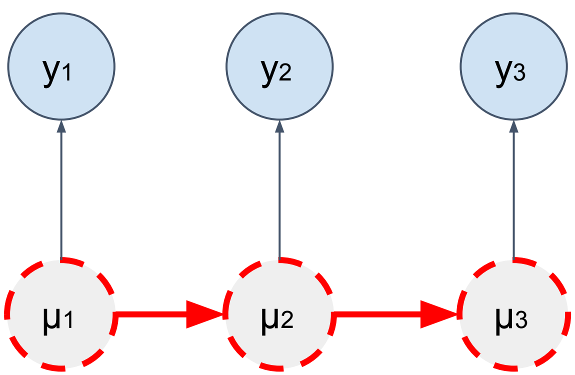
$$y_t = \mu_t + \epsilon_t$$
$$\epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$



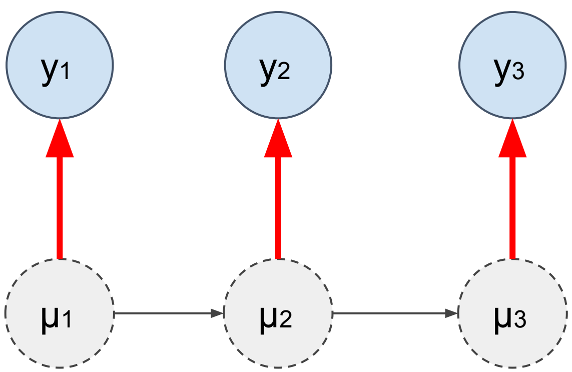
状態空間モデルに登場する2つの式

状態空間モデルには必ず2つの式が登場します。
1つが、状態方程式、もう1つが観測方程式です。
この2つの式が合わさって、状態空間モデルと呼ばれます。

状態方程式	観測方程式
状態方程式とは 1つ前の状態から次の状態を計算する式	観測方程式とは 「状態」から観測値を計算する式



$$\mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

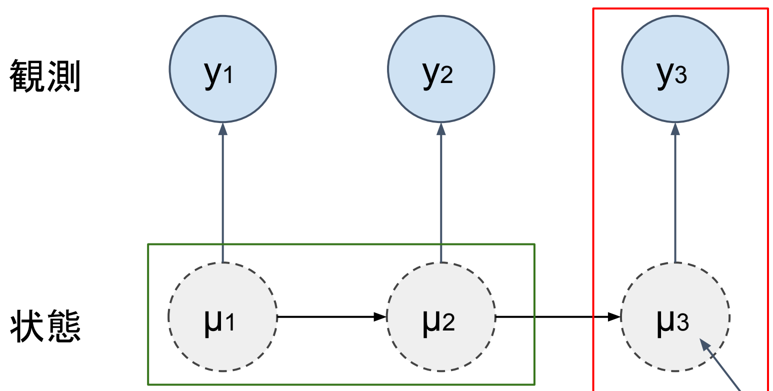


$$y_t = \mu_t + \epsilon_t \quad \epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

カルマンフィルタ

状態空間モデルの推定にあたって最低限押さえておきたい数式

状態空間モデルでポイントになる式は**観測方程式**と**状態方程式**の2本です。
それらの関係を押さえておきましょう。



観測方程式

$$y_t = \mu_t + \eta_t$$

$$\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

状態方程式

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \epsilon_t$$

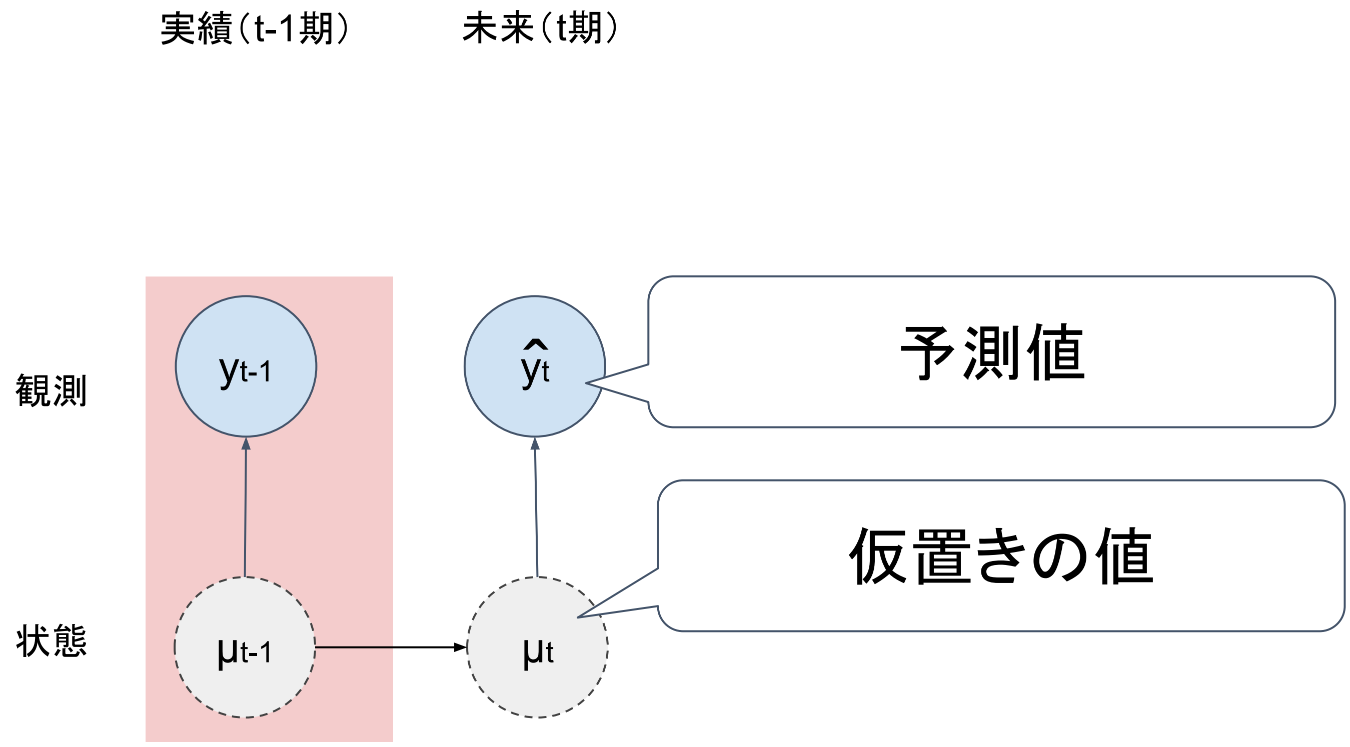
$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

状態の分布

$$\mu_t \sim N(a_t, P_t)$$

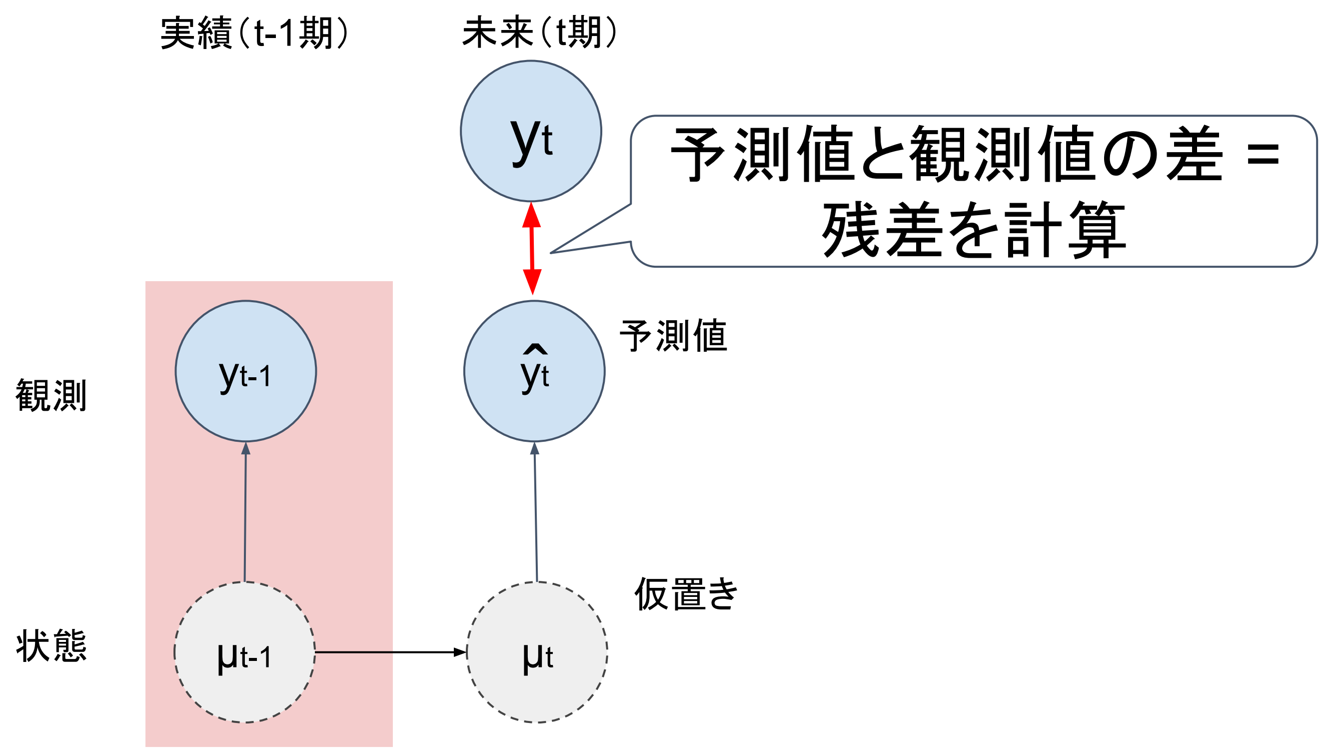
状態空間モデルの推定ステップ

STEP1: 1期前の観測値を使って1期先の予測



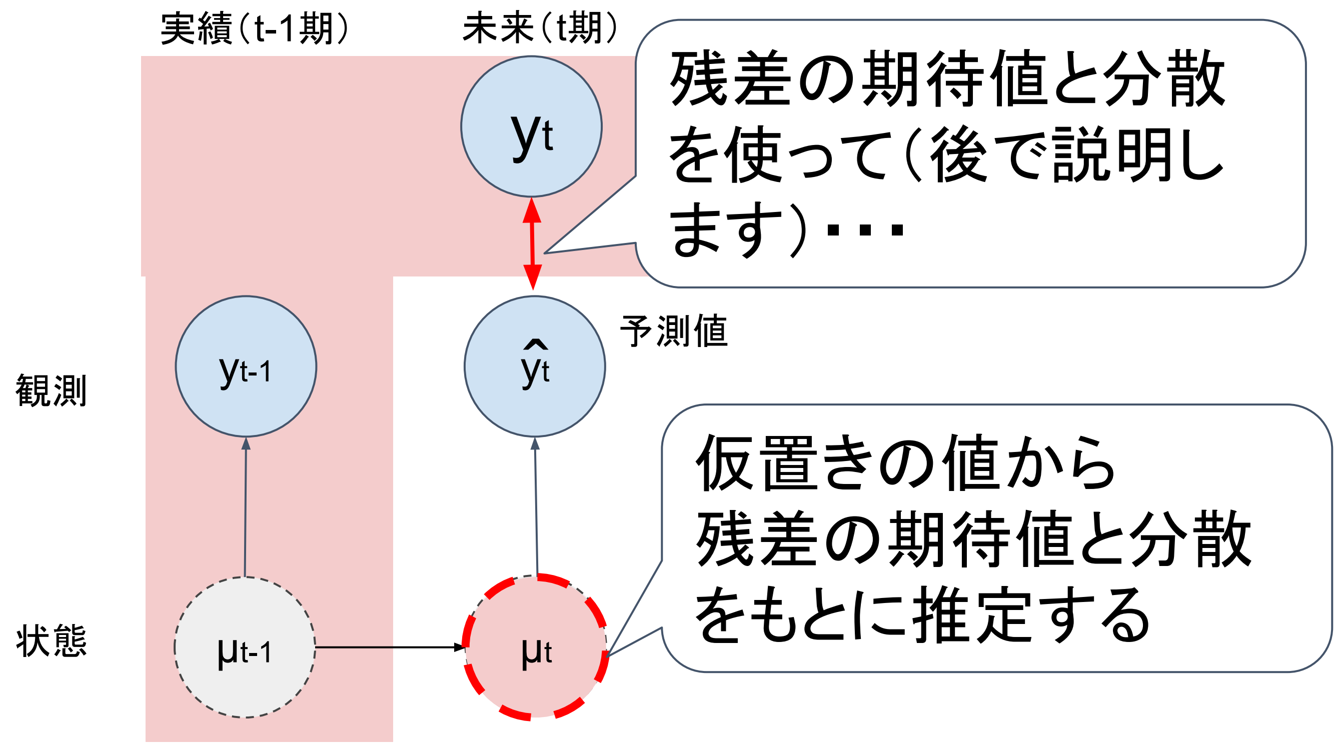
状態空間モデルの推定ステップ

STEP1: 1期前の観測値を使って1期先の予測
STEP2: 1期前の観測値を使って残差とその分散を計算



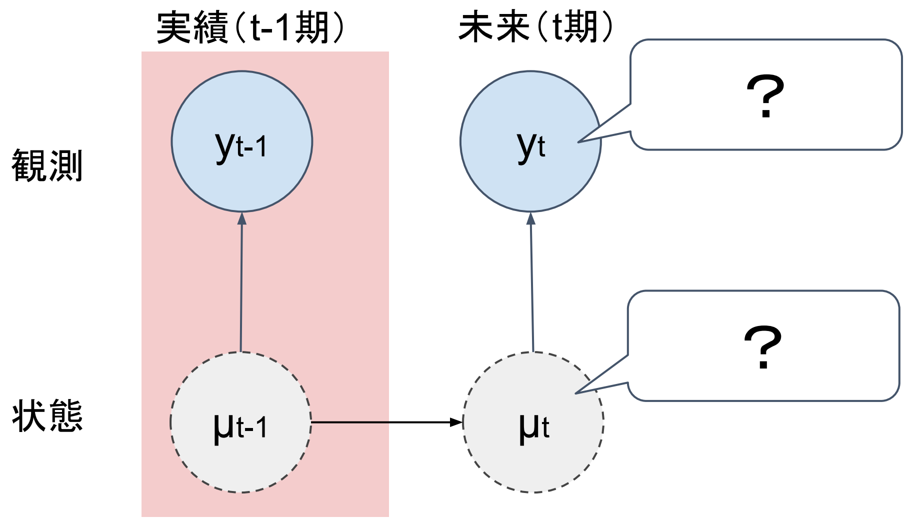
状態空間モデルの推定ステップ

STEP1: 1期前の観測値を使って1期先の予測
STEP2: 1期前の観測値を使って残差とその分散を計算
STEP3: t期のデータも使ってt期の状態を更新



STEP1: 1期前の観測値を使って1期先の予測

最初のステップとして、実績(t-1期)の観測値y_{t-1}と状態μ_{t-1}を使って、未来(t期) のy_tとμ_tを予測します。



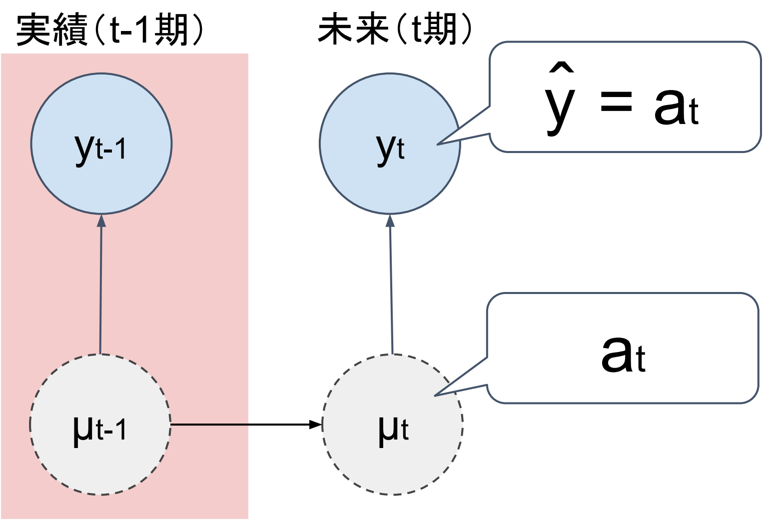
クイズ

μ_tとy_tの値は以下のうち、どれになるでしょう？

①ε_t
②P_t
③a_t
④上記のいずれでもない

STEP1: 1期前の観測値を使って1期先の予測

最初のステップとして、実績(t-1期)の観測値y_{t-1}と状態μ_{t-1}を使って、未来(t期) のy_tとμ_tを予測します。



クイズの答え

μtとytの値は以下のうち、どれになるでしょう?

①ε_t

②P_t

③a_t

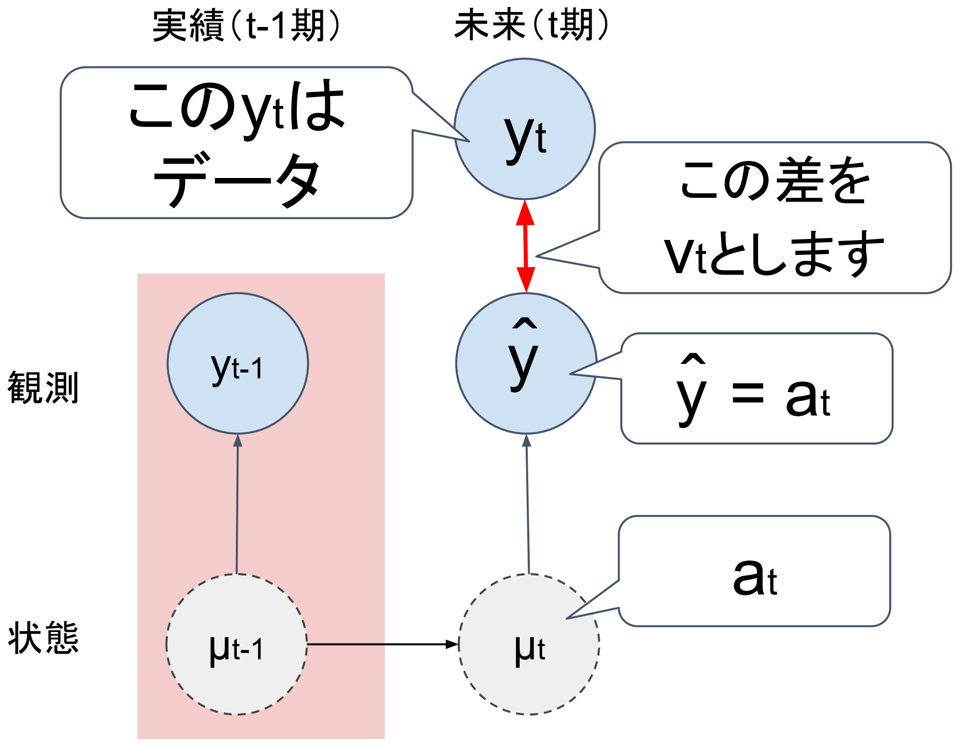
④上記のいずれでもない

$$E(\mu_t \mid y_{t-1}) = E(\mu_{t-1} + \epsilon_t \mid y_{t-1}) = E(\mu_{t-1}) = a_t$$

$$E(y_t \mid y_{t-1}) = E(\mu_t + \eta_t \mid y_{t-1}) = E(\mu_t) = a_t = \hat{y}$$

STEP2: 1期前の観測値を使って残差とその分散を計算

次に、データと予測値の「残差」（イノベーションと呼びます）の期待値と分散を求めてみましょう！

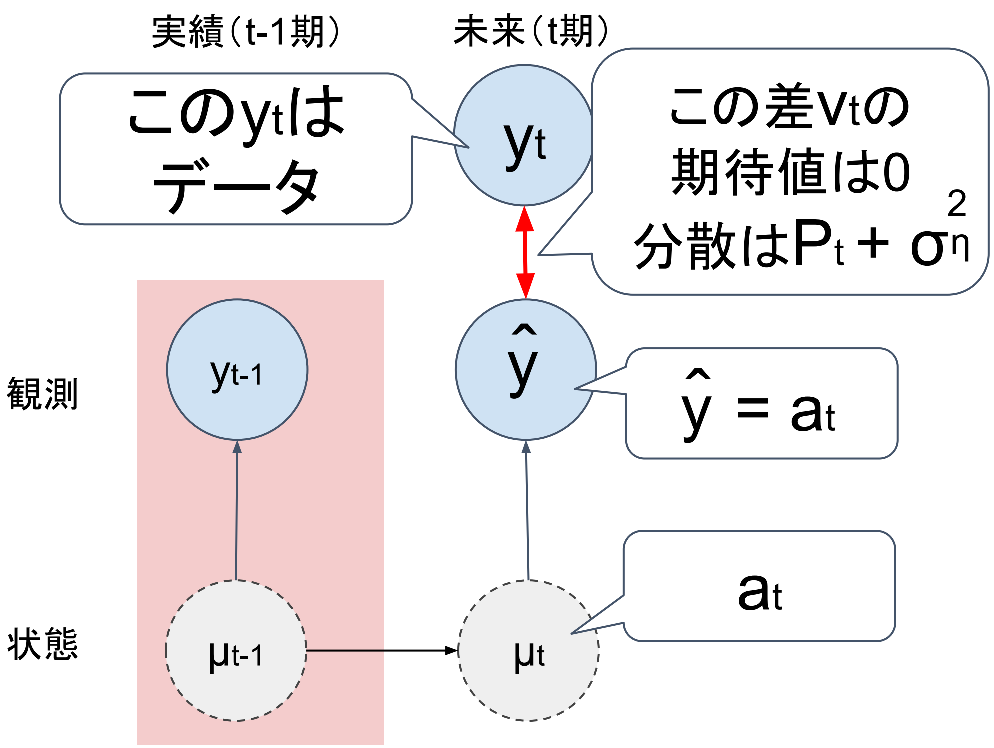


クイズ

v_tの期待値と分散はいくつになるでしょう？

①a_t
②0
③$P_t + \sigma_\eta^2$
④上記のいずれでもない

STEP2: 1期前の観測値を使って残差とその分散を計算



クイズの答え

v_tの期待値と分散はいくつになるでしょう？

①a_t

②0（期待値）

③$P_t+\sigma_\eta^2$（分散）

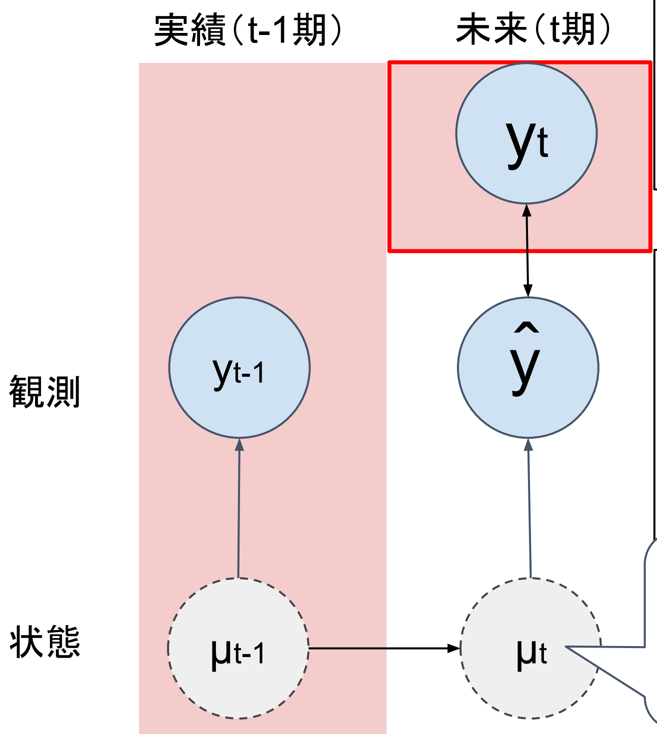
④上記のいずれでもない

$$
\begin{aligned}
E(v_t \mid y_{t-1}) &= E(y_t - \widehat{y}_t \mid y_{t-1}) \\
&= E(\mu_t + \eta_t - a_t \mid y_{t-1}) \\
&= E(\mu_t \mid y_{t-1}) + E(\eta_t \mid y_{t-1}) - a_t \\
&= a_t + 0 - a_t = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(v_t \mid y_{t-1}) &= Var(\mu_t + \eta_t - a_t \mid y_{t-1}) \\
&= Var(\mu_t \mid y_{t-1}) + Var(\eta_t \mid y_{t-1}) \\
&= P_t + \sigma_\eta^2
\end{aligned}
$$

STEP3: t期のデータも使ってt期の状態を更新

t期までのデータを使って、t期の状態の期待値と分散を計算します。



t期までのデータを使って、t期の状態μ_tの期待値を計算

$$E(\mu_t \mid v_t, y_{t-1}) =$$
$$E(\mu_t \mid y_{t-1}) + Cov(\mu_t, v_t \mid y_{t-1}) \cdot Var(v_t \mid y_{t-1})^{-1} \cdot v_t$$
$$= a_t + P_t F_t^{-1} \cdot v_t$$

t期までのデータを使って、t期の状態μ_tの分散を計算

$$Var(\mu_t \mid v_t, y_{t-1}) = Var(\mu_t \mid y_{t-1}) -$$
$$Cov(\mu_t, v_t \mid y_{t-1})^2 Var(v_t \mid y_{t-1})^{-1}$$
$$= P_t - P_t^2 F_t^{-1}$$

t期のデータ**も**
使って計算すると？

ここで登場「カルマンゲイン」

前のページで登場した式を「カルマンゲイン K_t」で書き直します。

これがカルマンゲイン

$$E(\mu_t \mid v_t, y_{t-1}) = a_t + P_t F_t^{-1} v_t = a_t + \boxed{\frac{P_t}{F_t}} v_t = a_t + \boxed{K_t} v_t$$

これがカルマンゲイン

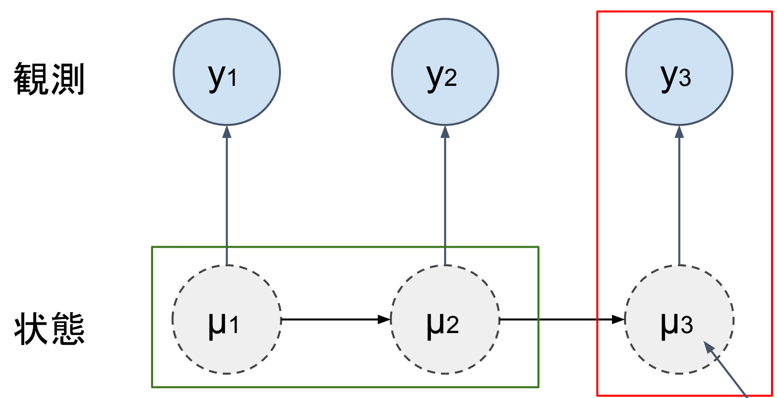
$$\begin{aligned} Var(\mu_t \mid v_t, y_{t-1}) &= P_t - P_t^2 F_t^{-1} = P_t(1 - P_t F_t^{-1}) = P_t(1 - \boxed{\frac{P_t}{F_t}}) \\ &= P_t(1 - \boxed{K_t}) \end{aligned}$$

【演習】Excelで式を組んでみよう！

状態空間モデルの中身.xlsxの「ワーク」というシートを開けてください。

推定すべきパラメーターは何か？
そして、どのように推定するのか？

式を組んでみたところで、状態空間モデルの中で、推定すべきパラメーターは状態方程式にあるε_tと観測方程式のη_tの分散です。**<u>そして、推定はおなじみに最尤推定で求めます。</u>**



観測方程式

$$y_t = \mu_t + \eta_t$$

$$\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

状態方程式

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

状態の分布

$$\mu_t \sim N(a_t, P_t)$$

【演習】Excelでパラメーターを推定してみよう

ソルバーを使って、
パラメーターを推定しましょう。

※ソルバーはExcelのアドインです。