Calculus4 Partial differentiation

ryamada

2017年1月22日

正規分布のパラメタ推定 Estimation of parameters of normal distribution

k個の実数 $X=(x_1,...,x_k)$が観察されたとする。

Assume k real values $X=(x_1,...,x_k)$, are observed.

これらが平均m、SD sの正規分布からの独立標本であるとすると、その尤度関数は

The likelihood function under the hypothesis where they are from normal dist with mean m and SD s is;

$$L(m,s|x) = \prod_{i=1}^k (\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-m)^2}{s^2}})$$

である。

対数をとって、定数部分を省略すれば

Taking logaithm,

$$\log L = -k \log s - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^k (x_i - m)^2 + C$$

これを、m,sの関数らしく変形すると

Transform the function so that it appears a function of m and s,

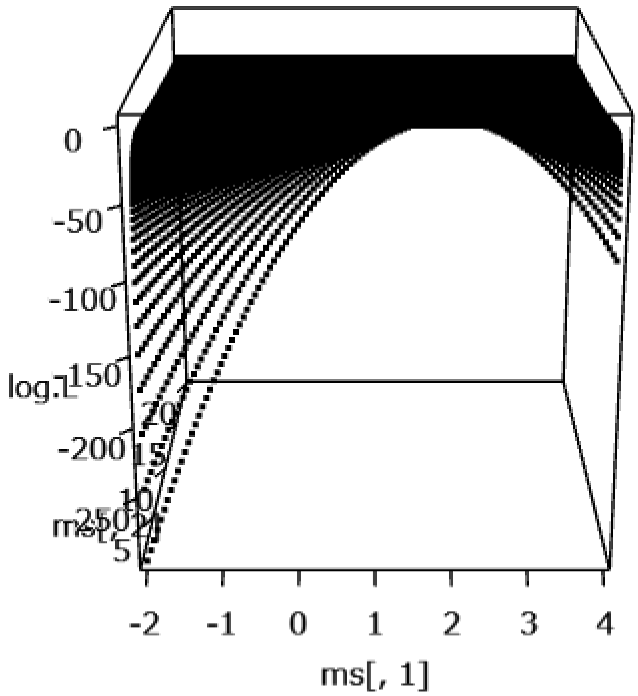
$$\log L = -k \log s - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}(km^2 - 2(\sum_{i=1}^k x_i)m + \sum_{i=1}^k x_i^2) + C$$

この対数尤度に準じた関数を、横軸にm、縦軸にsをとって描いてみる。

Draw the function with m horizontal and s vertical axes;

```
k <- 10
m0 <- 2
s0 <- 1
x <- rnorm(k,m0,s0)

m <- seq(from=-2,to=4,by=0.05)
s <- seq(from=0.5,to=20,by=0.05)
ms <- as.matrix(expand.grid(m,s))
log.L <- -k*log(ms[,2])-1/2 * (1/ms[,2]^2) * (k*ms[,1]^2-2*sum(x)*ms[,1]+sum(x^2))
plot3d(ms[,1],ms[,2],log.L)
```



m = 0

平均が0の正規分布からのサンプルであることがわかっているなら

Under the assumption where mean is 0,

```
id <- which(ms[,1]==0)
plot3d(ms[,1],ms[,2],log.L)
spheres3d(ms[id,1],ms[id,2],log.L[id],radius=3,color=2)
```

$m=0$の下での、sの最尤推定値は、対数尤度(に準じた)関数のmに0を代入した尤度関数を微分すればよい

The function with $m=0$ should be differentiate to tell the MLE of s.

$$\log L = -k\log s - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}(km^2 - 2(\sum_{i=1}^k x_i)m + \sum_{i=1}^k x_i^2) + C$$
$$= -k\log s - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^k x_i^2 + C$$

$$\frac{d}{ds}(\log L) = -\frac{k}{s} + \frac{1}{s^3}\sum_{i=1}^k x_i^2$$
$$= -\frac{1}{s^3}(ks^2 - \sum_{i=1}^k x_i^2)$$

結局 then,

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2}{k}}$$

```
id <- which(ms[,1]==0)
plot3d(ms[,1],ms[,2],log.L)
spheres3d(ms[id,1],ms[id,2],log.L[id],radius=3,color=2)
s. <- sqrt(sum(x^2)/k)
log.L. <- -k*log(s.)-1/2 * (1/s.^2) * (sum(x^2))
spheres3d(0,s.,log.L.,radius=5,color=3)
```

m=1

$m=1$で同じことをするなら

In the case of $m=1$,

$$\log L = -k \log s - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}(km^2 - 2(\sum_{i=1}^k x_i)m + \sum_{i=1}^k x_i^2) + C$$

$$= -k \log s - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}(k - 2\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=1}^k x_i^2) + C$$

$$\frac{d}{ds}(\log L) = -\frac{k}{s} + \frac{1}{s^3}(k - 2\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=1}^k x_i^2)$$

$$= -\frac{1}{s^3}(ks^2 - \sum_{i=1}^k (k - 2\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=1}^k x_i^2))$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (k - 2\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=1}^k x_i^2)}{k}}$$

```
id <- which(ms[,1]==0)
plot3d(ms[,1],ms[,2],log.L)
spheres3d(ms[id,1],ms[id,2],log.L[id],radius=3,color=2)
s. <- sqrt(sum(x^2)/k)
log.L. <- -k*log(s.)-1/2 * (1/s.^2) * (sum(x^2))
spheres3d(0,s.,log.L.,radius=5,color=3)

id <- which(ms[,1]==1)
spheres3d(ms[id,1],ms[id,2],log.L[id],radius=3,color=4)
s.. <- sqrt((k-2*sum(x)+sum(x^2))/k)
log.L.. <- -k*log(s..)-1/2 * (1/s..^2) * (k-2*sum(x)+sum(x^2))
spheres3d(1,s..,log.L..,radius=5,color=5)
```

\$m= ? \$

$m=0, m=1$の場合では、mを固定して$\log L$をsで微分した。

For the cases of $m=0$ and $m=1$, $\log L$ was differentiated with s with m as constant.

このように変数を固定して残りの変数で微分するのが偏微分。 This is partial differentiation.

$$\frac{\partial}{\partial s}\log L = -\frac{k}{s} + \frac{1}{s^3}(km^2 - 2(\sum_{i=1}^k x_i)m + \sum_{i=1}^k x_i^2)$$

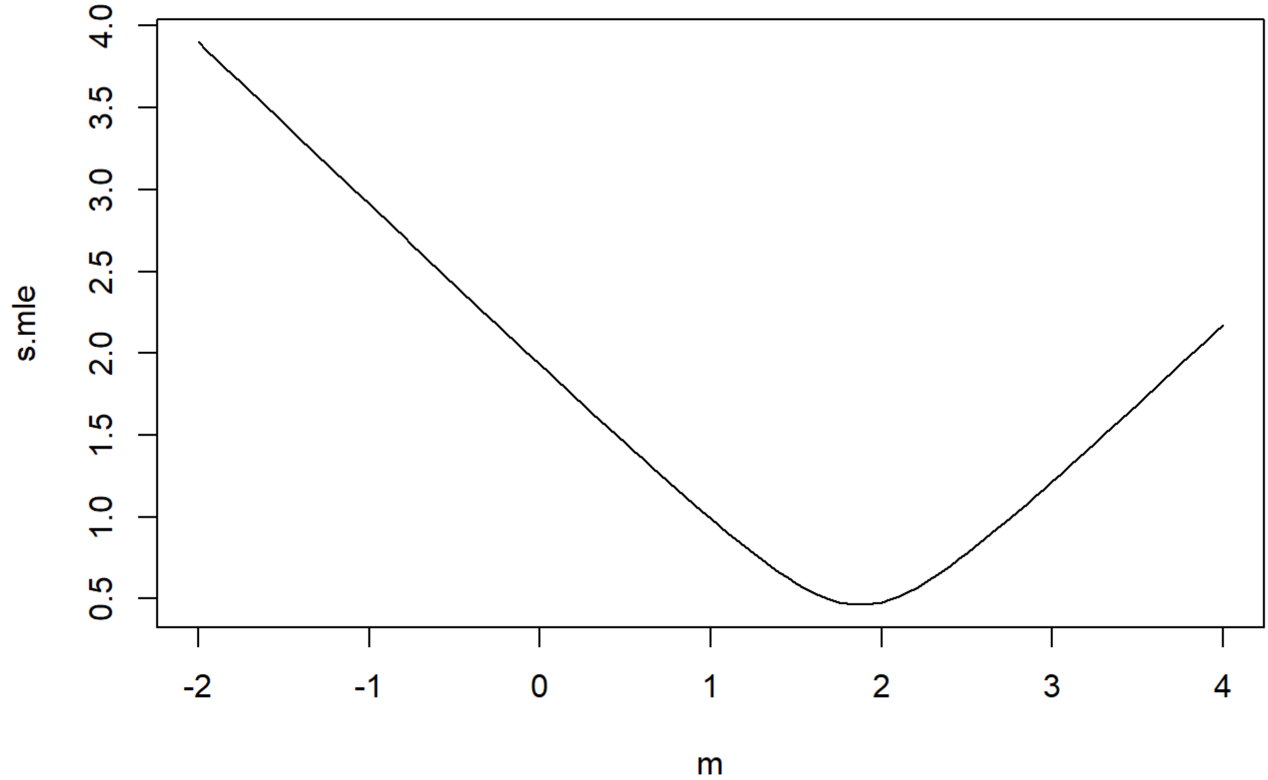
mの値に応じて、sの最尤推定値は次のような値をとることがわかる

Partial differentiation tells MLE for arbitrary m.

$$\sqrt{\frac{(km^2 - 2(\sum_{i=1}^k x_i)m + \sum_{i=1}^k x_i^2)}{k}}$$

```
s.mle <- sqrt((k*m^2-2*sum(x)*m+sum(x^2))/k)

plot(m,s.mle,type="l")
```



Exercise 1

Exercise 1- 1

mに関する偏微分をして、sとそれに対応するmの最尤推定値の関係をプロットせよ１

Partially differentiate $\log L$ with m and draw the relation between s and MLE of m.

Exercise 1-3

常染色体上のSNPは3種類のディプロタイプを作る。 そのディプロタイプ頻度を(p_{MM}, p_{Mm}, p_{mm})とする。

SNP in autosomal chromosome makes 3 diplitypes, whose frequency is (p_{MM}, p_{Mm}, p_{mm}).

今、3ディプロタイプ人数が(n_{MM}, n_{Mm}, n_{mm})と観察されたとする。

Assume (n_{MM}, n_{Mm}, n_{mm}) are the observed number of individuals of three diplotypes.

この観察の下での、集団のディプロタイプ頻度 (p_{MM},p_{Mm},p_{mm})の尤度関数は

The likelihood fucntion of diplotype frequency for the observarion follows.

$$L((p_{MM}, p_{Mm}, p_{mm})|(n_{MM}, n_{Mm}, n_{mm})) = \binom{n_{MM} + n_{Mm} + n_{mm}}{n_{MM}, n_{Mm}, n_{mm}} p_{MM}^{n_{MM}} p_{Mm}^{n_{Mm}} p_{mm}^{n_{mm}}$$

尤度関数の対数を取り、定数部分を省略すると以下のようになる。

Taking logarithm,

$$\log L((p_{MM}, p_{Mm}, p_{mm})|(n_{MM}, n_{Mm}, n_{mm})) = n_{MM}\log p_{MM} + n_{Mm}\log p_{Mm} + n_{mm}\log p_{mm} + C$$

$p_{mm} = 1 - p_{MM} - p_{Mm}$であることを利用して、$\log L$を$(p_{MM}, p_{Mm})$の2変数関数であるとみなし、$p_{MM}$,$p_{Mm}$でそれぞれ偏微分せよ。

Using $p_{mm} = 1 - p_{MM} - p_{Mm}$, handle the function as the funtion with two parameters p_{MM},p_{Mm} and partially differentialte the function with both.

Exercise 1-4

Exercise 1-3 の偏微分を利用して、(p_{MM}, p_{Mm}, p_{mm})の最尤推定値を求めよ

Using the result of Exercise 1-4, answer MLE of (p_{MM}, p_{Mm}, p_{mm}).

Exercise 1-5

アレル頻度を(p,1-p)とすると、Hardy-Weinberg 平衡の下でのディプロタイプ頻度は

Under the condition of Hardy-Weinberg equilibrium, three diplotype freq when allele frequencies are (p,1-p),

$$(p_{MM}, p_{Mm}, p_{mm}) = (p^2, 2p(1-p), (1-p)^2)$$

である。HWEを仮定すると、尤度関数は、1変数関数となる。

Under the assumption of HWE, the likelihood function is a funciton with one parameter.

HWE仮定の下での、尤度関数を示し、それを微分することでアレル頻度pの最尤推定値を求めよ。

Show the likelihood function and differentiate it and answer MLE.

Exercise 1-6

Hardy-Weinberg不平衡を許せば

Under the assumption of HW-disequiriblium,

$$(p_{MM} + \delta, p_{Mm} - 2\delta, p_{mm} + \delta)$$

と表せる。

これにより、尤度関数はp,δの2変数関数となる

2変数で偏微分し、その結果を示せ

Now the likelihood funtion has two parameters. Partially differentiate it and show the results.