Systems of Linear Equations with Matrix 行列で連立方程式

ryamada

2016年12月24日

1 変数の数と等式の数 Number of variables and number of equations

変数の数と等式の数が等しいとき(一次独立なら)解が求まる。

それは、線形回帰において、Xが正方行列である、ということと、 Xに逆行列が存在するということに対応し、 解が求まるとは、$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y_i})2 = 0$になるということ。

$$y = X\mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} = X^{-1}y$$

```
d <- 10
n <- 10
X <- matrix(rnorm(d*n),ncol=d)
a <- rnorm(d)
a
```

```
##  [1] -0.1200410  0.4063756 -0.5122560  0.4500177 -2.0467071  0.1066123
##  [7] -0.3046656  0.3540747  1.7167393  0.8876810
```

```
y <- X %*% a
a.est <- solve(X) %*% y
a.est
```

```
##             [,1]
##  [1,] -0.1200410
##  [2,]  0.4063756
##  [3,] -0.5122560
##  [4,]  0.4500177
##  [5,] -2.0467071
##  [6,]  0.1066123
##  [7,] -0.3046656
##  [8,]  0.3540747
##  [9,]  1.7167393
## [10,]  0.8876810
```

線形回帰では以下の計算をした。

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y$$

やってみる。

```
a.est2 <- solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%y
a.est
```

```
##             [,1]
##  [1,] -0.1200410
##  [2,]  0.4063756
##  [3,] -0.5122560
##  [4,]  0.4500177
##  [5,] -2.0467071
##  [6,]  0.1066123
##  [7,] -0.3046656
##  [8,]  0.3540747
##  [9,]  1.7167393
## [10,]  0.8876810
```

```
a
```

```
##  [1] -0.1200410  0.4063756 -0.5122560  0.4500177 -2.0467071  0.1066123
##  [7] -0.3046656  0.3540747  1.7167393  0.8876810
```

確かに結果は同じ。

残差も0になっている。

```
y.hat <- X %*% a.est
y-y.hat
```

```
##                [,1]
##  [1,]  4.440892e-16
##  [2,] -8.881784e-16
##  [3,]  8.881784e-16
##  [4,]  2.498002e-15
##  [5,]  0.000000e+00
##  [6,]  5.551115e-16
##  [7,] -5.551115e-16
##  [8,]  2.331468e-15
##  [9,]  0.000000e+00
## [10,]  0.000000e+00
```

```
sum((y-y.hat)^2)
```

```
## [1] 1.406699e-29
```

つまり、

$$X^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T$$

なわけである。

計算してみる。

```
X1 <- solve(X)
X2 <- solve(t(X)%*%X) %*% t(X)
round(X1,8)
```

```
##              [,1]        [,2]        [,3]        [,4]        [,5]       [,6]
##  [1,]  0.40243960  1.37233183 -2.12521319  0.51579783 -0.48583419  3.2016641
##  [2,]  0.38249579  0.56698946  0.01702420  0.55003101 -0.13002359 -0.0064698
##  [3,] -0.11418577 -0.28885557 -0.48827228 -0.34965833  0.17695459  0.3364523
##  [4,] -2.11041788 -4.38017880  4.09147234 -1.92247669  1.01626629 -5.5530817
##  [5,] -0.16327264  0.03334238 -2.19290621  0.00925035  0.24692647  2.3101588
##  [6,]  1.10252443  2.08374841 -1.10722475  1.01759545 -0.72315845  1.5184475
##  [7,] -0.12076838 -0.26447213  0.22396423 -0.10587167  0.19358879 -0.3001552
##  [8,]  0.00402116 -0.35759541  0.37295646 -0.19215553  0.01851372 -0.6125120
##  [9,]  0.92688797  0.84478666 -0.28644626  0.47105964 -0.37970847  0.6087179
## [10,] -0.42838180 -1.03340708  0.00627905 -0.41911233  0.30034012 -0.5490590
##              [,7]        [,8]        [,9]       [,10]
##  [1,]  1.19139682  0.76922381 -0.29444638  0.00679715
##  [2,] -0.09764852 -0.09357421 -0.18964371  0.03848541
##  [3,]  0.37472244  0.50025508 -0.07592834  0.12210616
##  [4,] -2.07350756 -0.57027486  1.59040505 -0.83891234
##  [5,]  1.05465086  0.73505422 -0.11984739  0.28132432
##  [6,]  0.22409977 -0.25080836 -0.50884154  0.40218097
##  [7,] -0.16164505 -0.07277336  0.27097133 -0.15091033
##  [8,]  0.08237807 -0.05426675  0.07821467  0.05340619
##  [9,]  0.07098301 -0.12427316 -0.48845647  0.46123054
## [10,] -0.04991263  0.14253538  0.25470636 -0.31379942
```

```
round(X2,8)
```


```
##              [,1]        [,2]        [,3]        [,4]        [,5]       [,6]
##  [1,]  0.40243960  1.37233183 -2.12521319  0.51579783 -0.48583419  3.2016641
##  [2,]  0.38249579  0.56698946  0.01702420  0.55003101 -0.13002359 -0.0064698
##  [3,] -0.11418577 -0.28885557 -0.48827228 -0.34965833  0.17695459  0.3364523
##  [4,] -2.11041788 -4.38017880  4.09147234 -1.92247669  1.01626629 -5.5530817
##  [5,] -0.16327264  0.03334238 -2.19290621  0.00925035  0.24692647  2.3101588
##  [6,]  1.10252443  2.08374841 -1.10722475  1.01759545 -0.72315845  1.5184475
##  [7,] -0.12076838 -0.26447213  0.22396423 -0.10587167  0.19358879 -0.3001552
##  [8,]  0.00402116 -0.35759541  0.37295646 -0.19215553  0.01851372 -0.6125120
##  [9,]  0.92688797  0.84478666 -0.28644626  0.47105964 -0.37970847  0.6087179
## [10,] -0.42838180 -1.03340708  0.00627905 -0.41911233  0.30034012 -0.5490590
##              [,7]        [,8]        [,9]       [,10]
##  [1,]  1.19139682  0.76922381 -0.29444638  0.00679715
##  [2,] -0.09764852 -0.09357421 -0.18964371  0.03848541
##  [3,]  0.37472244  0.50025508 -0.07592834  0.12210616
##  [4,] -2.07350756 -0.57027486  1.59040505 -0.83891234
##  [5,]  1.05465086  0.73505422 -0.11984739  0.28132432
##  [6,]  0.22409977 -0.25080836 -0.50884154  0.40218097
##  [7,] -0.16164505 -0.07277336  0.27097133 -0.15091033
##  [8,]  0.08237807 -0.05426675  0.07821467  0.05340619
##  [9,]  0.07098301 -0.12427316 -0.48845647  0.46123054
## [10,] -0.04991263  0.14253538  0.25470636 -0.31379942
```

```
round(X1-X2,8)
```

```
##       [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
##  [1,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [2,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [3,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [4,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [5,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [6,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [7,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [8,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [9,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
## [10,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
```

確かにそうなっている。

もう一度式を見てみる。

$$X^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T$$

両辺に右から$(X^T)^{-1}$を掛けて

$$X^{-1}(X^T)^{-1} = (X^T X)^{-1}$$

となる。

これは逆行列の一般的な性質

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

について、$A = X^T$,$B = X$と置いたものである。

ちなみに、ABの逆行列$(AB)^{-1}$が$B^{-1}A^{-1}$であることは

$$ABB^{-1}A^{-1}$$

を二通りでかっこで区切ることで解る。

$$ABB^{-1}A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

右辺は、

$$A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

これから中辺が

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

となるから、この式の意味することは ABの逆行列が$B^{-1}A^{-1}$であることである。

2 Exercise 1

2.1 Excercise 1-1

連立方程式

$$3a_1 + 2a_2 - 4a_3 = 4$$
$$2a_1 - 6a_2 + 3a_3 = -1$$
$$5a_1 + a_2 + 4a_3 = 3$$

は

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, 2, -4 \\ 2, -6, 3 \\ 5, 1, 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3, 2, -4 \\ 2, -6, 3 \\ 5, 1, 4 \end{pmatrix}$$

と置けば

$$y = X\mathbf{a}$$

となり、線形回帰の形である。

これを利用して、上の連立方程式を解け。

2.2 Exercise 1-2

変数の数と等式の数が等しい連立方程式を作って、連立方程式として書き、それを行列を使って解け。