生物系の数理科学 第2回

山口 諒

1　離散ダイナミクスと連続ダイナミクスの比較

1.1　離散のダイナミクス（差分方程式）

離散時間モデルでは、時間をステップ（$n = 0, 1, 2, \ldots$）で区切り、各時刻における個体数や濃度などを順番に更新する。例えば、年に複数回同調して発生する昆虫や、一年生草本などは、離散の世代を持つ生物と言える。もっとも単純な**指数増殖モデル**として、次の差分方程式を考えよう。個体数を x_n として、

$$x_{n+1} = \lambda\, x_n, \tag{1.1}$$
$$x_0 = x_{\mathrm{init}} > 0.$$

ここで $\lambda > 0$ は増加率を表すパラメータであり、離散の時間ステップごとに個体数が λ 倍になる。もし $\lambda > 1$ であれば指数的に増加し、$\lambda < 1$ であれば指数的に減少、$\lambda = 1$ ならば一定になる。上式を繰り返し用いて明示的に解を求めると、

$$x_n = \lambda^n\, x_0.$$

これが離散時間版の「指数増殖」である。

1.2　連続のダイナミクス（微分方程式）

一方、時間が連続的に進む場合は、**微分方程式**でモデル化する。世代がオーバーラップしているような生物集団を考え、その平均的な増減をモデルにするイメージを持つとわかりやすい。典型的には

$$\frac{dx}{dt} = r\, x, \quad x(0) = x_{\mathrm{init}} > 0, \tag{1.2}$$

の形となる。ここで r は連続時間における成長率を表す。この式の解は

$$x(t) = x_0\, e^{r\, t},$$

となり、離散のときにみられた「λ^n」に対応して、e^{rt} が現れる。

1.3　離散モデルから連続モデルを導く考え方

差分方程式 (1.1) と微分方程式 (1.2) は互いに対応関係を持つ。以下では、その一例として「時間の刻み幅を微小にしていく」極限を考えよう。

1.3.1 離散モデルにおける時間の刻み幅 Δt の導入

離散モデルで、時間の刻み幅を Δt とし、n 回目の時間を $t_n = n\,\Delta t$ と定義する。すると

$$x_{n+1} = \lambda\, x_n \quad \Longrightarrow \quad x(t_{n+1}) = \lambda\, x(t_n).$$

ここで λ は「Δt 時間での増加倍率」である。

1.3.2 差分方程式を微分方程式へ近似

$x(t)$ が十分スムーズに変化する前提で、Δt を限りなく 0 に近づけてみる。具体的には

$$x(t+\Delta t) \;=\; \lambda\, x(t) \;=\; x(t)\, e^{r\,\Delta t} \quad (\lambda = e^{r\,\Delta t} \text{ と定義}),$$

とすると、両辺の差 $x(t+\Delta t) - x(t)$ は

$$x(t+\Delta t) - x(t) = x(t)\, e^{r\,\Delta t} - x(t).$$

Δt が小さいとき、$e^{r\,\Delta t} \approx 1 + r\,\Delta t$（指数関数のテイラー展開）を用いれば、

$$x(t+\Delta t) - x(t) \;\approx\; x(t)\,[1 + r\,\Delta t] - x(t) \;=\; r\, x(t)\,\Delta t.$$

これを Δt で割って極限 $\Delta t \to 0$ を考えると、

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = r\, x(t).$$

左辺は微分の定義そのものであり、

$$\frac{dx}{dt} = r\, x(t),$$

が得られる。こうして、**差分方程式の連続極限**として微分方程式が導出できることがわかる。差分方程式のパラメータ λ は、1 ステップ分でどの程度倍率が変わるかを示すが、微分方程式のパラメータ r は、無限小の時間で見た成長率を示す。微分方程式は連続的な変化を滑らかに記述する利点があり、差分方程式は実際の世代交代や断続的な時間ステップを捉える場合に有効である。

2 差分方程式によるロジスティックモデルとカオス

2.1 離散ロジスティック方程式

離散時間版のロジスティック方程式は、以下のように与えられる。

$$x_{n+1} \;=\; r\, x_n\,(1 - x_n), \quad 0 \le x_n \le 1.$$

ここで、

- x_n はステップ n における集団密度を表す。
- r は個体群の成長率に相当するパラメータであり、r の値によって系の振る舞いが大きく変化する。

この単純な差分方程式が示す振る舞いは多様で、特に r を大きくしていくと**周期倍化**や**カオス**が出現することで有名である。

2.2 周期倍化とカオスへの移行

- $r < 3$ 程度の領域では、x_n はある平衡点に**収束**する。増加と減少を繰り返すうちに徐々に安定点へ近づき、長期的には一つの定常値に落ち着く。
- r を大きくして $3 < r < 3.44949$ のあたりに達すると、安定点が不安定化して **2 周期解**が生じる。その後さらに r を増やすと、2 周期、4 周期、8 周期と周期倍化が連鎖的に起きる。
- r が 3.56995 あたりを超えると、周期解ではない**カオス**領域に突入する。カオスでは、見かけ上ランダムな振る舞いを示すが、決定論的な式に基づいているのが特徴である。

このように、わずか 1 次元の差分方程式でありながら、シンプルな形の中に非常に複雑なダイナミクスが潜んでいる。

2.3 バタフライエフェクト

カオスの代表的な性質の一つに**バタフライエフェクト**（初期値鋭敏性）がある。例えば、

$$x_0 = 0.50000 \quad \text{と} \quad x_0 = 0.50001$$

のように極めて小さな差の初期条件でも、カオス領域においてはステップを重ねるにつれて互いの軌道が大きく離れ、まったく異なる振る舞いを示す。これは決定論的な系でありながら長期予測が困難になる典型例であり、現実の生態系や金融システムなどで発生する「不確定性の増幅」を示している。

2.4 リアプノフ指数によるカオスの定量的評価

カオスを定量的に評価する指標として、**リアプノフ指数**（Lyapunov exponent）が広く用いられる。一般に、離散写像

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

に対して、ある軌道 $\{x_n\}$ のリアプノフ指数 λ は次のように定義される。

$$\lambda \; = \; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \ln\bigl|f'(x_n)\bigr|.$$

ここで $f'(x)$ は写像 $f(x)$ の導関数である。この λ が

- $\lambda < 0$　のとき、初期値がずれても軌道同士が近づく傾向を示し、長期的に一つの安定点や安定周期に収束しやすい。
- $\lambda > 0$　のとき、初期値のわずかな差が指数的に広がり、カオス的な振る舞いを示す（初期値鋭敏性）。
- $\lambda = 0$　のあたりでは、臨界状態に対応するため、カオスと周期的挙動の境界付近を示唆する。

2.4.1　ロジスティックマップにおける導関数

ロジスティック写像

$$f(x) = r\,x(1-x)$$

では、導関数は

$$f'(x) = r\left(1-2x\right).$$

よって、ステップ n の時点におけるリアプノフ指数の寄与は

$$\ln\left|r\left(1-2\,x_n\right)\right|.$$

この項を軌道に沿って平均を取り、$N \to \infty$ の極限を考えることで λ を評価できる。

2.5　まとめ

差分方程式によるロジスティックモデルは、生態学や人口学のトレーニング例としてもしばしば用いられる。だが、単に個体数の増減を描くだけでなく、**カオス理論**や**初期値鋭敏性**、**リアプノフ指数**など、現代の非線形力学系における様々なトピックにつながる重要な役割を果たしてきた。カオスは「無秩序」を意味するわけではなく、むしろ**厳密な決定論のもとで起こる複雑性**を象徴する現象である。

3　テイラー展開の基礎

3.1　テイラー展開とは何か？

テイラー展開 (Taylor expansion) は、ある関数 $f(x)$ をある点 a の近傍で多項式として近似的に表す方法である。すなわち、$f(x)$ が十分に微分可能な場合、

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}\,(x-a)^3 + \cdots$$

と無限級数で表す。これを **テイラー級数**と呼ぶ。

3.1.1　発想のイメージ

- 関数 $f(x)$ を「ある点 a 付近で、微分係数を使ってどこまででも展開できる」と考える。
- 「x が a に非常に近い」状況では、高次の項 $(x-a)^n$ がとても小さくなるため、低次の項だけで近似できる。

3.2　マクローリン展開

特に、展開の中心を $a = 0$ にとった場合

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \cdots$$

となり、これを**マクローリン展開** (Maclaurin series) と呼ぶ。マクローリン展開は「x が小さいとき」に関数を近似的に表す際によく用いられる。

4　指数関数と対数関数のテイラー展開例

4.1　指数関数 e^x のテイラー (マクローリン) 展開

指数関数 e^x は、微分を何回行っても同じ形になる特性がある。中心を $a = 0$ としたマクローリン展開は、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

と展開できる。x が十分小さい場合には、低次の項だけでも近似が可能で、たとえば、

$$e^x \approx 1 + x$$

とすると、**1 次近似**となる。さらに精度を上げたければ、

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

のように 2 次近似、3 次近似と加えていく。

4.2　対数関数 $\ln(1 + x)$ のテイラー展開

$\ln(1 + x)$ は $|x| < 1$ の範囲で、

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

と展開できます。これは $a = 0$ におけるマクローリン展開の一種だが、厳密には $\ln(1+x)$ の定義域を考慮すると、$-1 < x \leq 1$ (ただし $x \neq -1$) の範囲でこの級数が収束する。x が 0 に近い場合には、

$$\ln(1 + x) \approx x$$

という単純な近似として用いられる。