

决赛与国家集训队选拔

赛前杂谈

郭雨泽

武汉大学物理科学与技术学院

guoyuze@whu.edu.cn

查缺补漏

数学基础

1. 计算下列各题, 见证高(中)数实力

(1) 求反函数: $y = 2\sin 3x$, $\left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$;

(2) 已知 $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$, 求 \mathbf{a} , \mathbf{b} 之间的夹角;

(3) 求导数: $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ 。

2. 计算下列各题, 见证高(等)数实力(高年组)

(1) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

(2) 求不定积分: $\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$

(3) 求定积分: $\int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x}$

(4) 求行列式: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

物理基础

3. 利用你已知的参数估算近地轨道卫星的周期;

4. 已知地球轨道半长轴为 a , 偏心率为 e , 求地球在近日点和远日点的公转速度之比 η ;

5. (高年组) 质量 m 、长 l 的匀质细杆在光滑的水平面上绕其中一端点旋转, 旋转角速度 ω 为常量. 以固定端为原点, 在杆上建立 x 坐标轴, 试求细杆中张力 T 随 x 的分布函数.

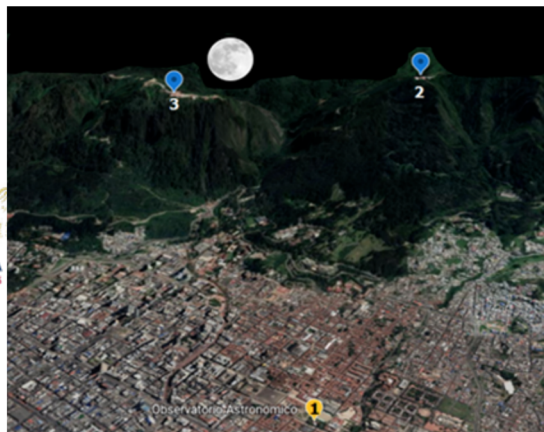
天体测量

6. (2015选拔赛低) Envisat过天顶

对于在2015国际天文奥赛决赛举办地俄罗斯喀山(55.79°N , 49.13°E)的观测者来说, Envisat(欧洲环境卫星)过境时有可能非常接近天顶. 在2015全国天文奥赛决赛开幕式当日, 也就是2015年4月21日, 当地时间20点30分, 如果要观测Envisat正好经过天顶, 喀山的观测者需要移动多远的距离? 已知21日Envisat的轨道倾角 $i = 55.648^\circ$, 每日公转周数 $n = 15.5142$, 该地的精确的地球半径 $R_L = 6365 \text{ km}$.

7. (IOAA2021) IOAA标志

IOAA2021的标志由缩写IOAA构成, 其中第一个字母由哥伦比亚国家天文台(OAN)的建筑剪影表示, 这是美洲最古老的天文台. 这个天文台位于波哥大, 成立于1803年. 哥伦比亚的首都与两座著名的山丘接壤, 即Monserrate和它的邻居Guadalupe, 它们是波哥大城市景观的标志, 装饰着标志的背景.



波哥大市的鸟瞰图。数字表示引用的地点: 1是OAN; 2是Guadalupe; 3是Monserrate.

点	纬度	经度	海拔(高于海平面, 米)
1	$4^{\circ}35'53''\text{N}$	$74^{\circ}04'37''\text{W}$	2607
2	$4^{\circ}35'30''\text{N}$	$74^{\circ}03'15''\text{W}$	3296
3	$4^{\circ}36'18''\text{N}$	$74^{\circ}03'19''\text{W}$	3100

- (1) 估计2号点(Guadalupe)和3号点(Monserrate)之间的距离(km).
- (2) 估计从哥伦比亚国家天文台(1)观测到的Guadalupe(2)和Monserrate(3)之间的角距离(单位: 度).
- (3) 9月21日晚上8点, 从OAN观察到月球在东边的山丘(在Monserrate和Guadalupe之间). 测得的月球的黄道坐标(经度和纬度)见表. 确定观测时月球的赤道坐标.

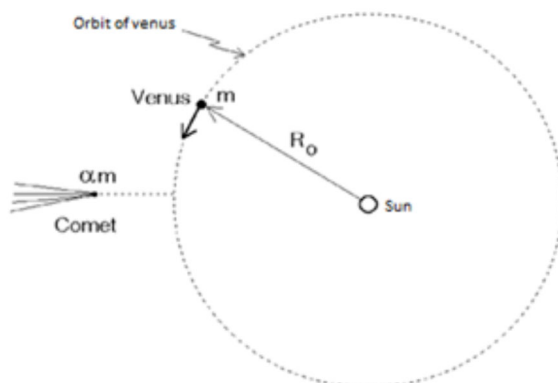
当地时间: 8:00 p.m.
$Az: +90^{\circ}42'59''$ / $Alt: +19^{\circ}01'42''$
$\lambda: +12^{\circ}20'16''$ / $\beta: -04^{\circ}24'14''$

注: 方位角从北向东测量.

天体力学

8. (IOAA2021) 金星-2

一颗质量为 αm 的彗星沿径向向太阳飞去(“坠落”). 已知彗星的总机械能为零. 彗星撞上了质量为 m 的金星. 我们进一步假设, 在碰撞之前, 金星的轨道是半径为 R_0 的圆形. 碰撞后, 彗星和金星形成一个单一的物体, 称为“金星-2”.



- (1) 用 M_{sun} 和 R_0 求出金星碰撞前的轨道速度 v_0 的表达式.
- (2) 求出金星在与彗星碰撞前在其轨道上的总机械能的表达式.

- (3) 求出“金星-2”在碰撞后的径向速度 v_r 和角动量 L 的表达式.
- (4) 求出组合体“金星-2”的机械能的表达式, 并用碰撞前的能量 E_i 和 α 来表示.
- (5) 证明“金星-2”的碰撞后轨道是椭圆的, 并确定该轨道的半长轴.
- (6) 确定“金星-2”上的居民的一年长度是否因为与彗星的碰撞而被缩短或延长了. 写出金星2号和金星的周期之比.
- (7) α 的值应该是多少, 才能使金星-2号的碰撞后坠入太阳? 我们将其称为 α_c .
- (8) 一颗 $\alpha = \alpha_c$ 的彗星与金星发生碰撞. 计算碰撞后金星速度大小的变化百分比(δv)和速度矢量方向的变化($\delta\theta$).

9. (IOAA2021) 冥王星的卫星

冥王星的最大卫星卡戎的质量是冥王星质量的 $1/8$. 这两个天体都围绕一个共同的质心在圆形轨道上运动. 此外, 它们都是潮汐锁定的.

行星中心和卫星中心之间的距离是 $R = 19640$ km, 卫星的半径是 $r = 593$ km.

设 g_0 为卡戎表面的重力加速度, 仅由其质量引起. 设A是卡戎表面直接面对冥王星的那一点, B是相对的一点. 计算A和B的重力加速度相对于 g_0 的百分比差异.

天体物理(和其它)

星等与测光

10. (USAAO2020)

下面的表格给出了四颗恒星的部分物理性质的数值. 受影响的量, 即包括了星际消光的量, 用星号(*)标出. 你可以认为所有恒星都是黑体. 恒星的温度可以直接由它的色指数 $B - V$ 求得; 利用Ballesteros公式:

$$T_{\text{eff}} = f(B - V) = 4600 \left(\frac{1}{0.92(B - V) + 1.7} + \frac{1}{0.92(B - V) + 0.62} \right) \text{ K}$$

计算在给定表格中所呈现的其它物理性质的数值. 为得到满分, 请在你的完整解答中写出所有计算中所用的数学表达式.

提示: 你可能用到以下经验关系:

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3.2$$

恒星	κ Velorum	五车五	天狼星A	太阳
周年视差 $p^*(10^{-3} \text{ arcsec})$	6.05	24.89	379.2	—
到太阳的距离 $\Delta^*(\text{pc})$				—
V波段的星际消光 $A_V(\text{mag})$	0.20	0.08	可忽略	—
$10^{0.2 \times A_V}$				—
到太阳的距离 $\Delta(\text{pc})$				4.85×10^{-6}
周年视差 $p(10^{-3} \text{ arcsec})$				
距离模数				

$\mu = m - M$				
目视星等 $m^*(\text{mag})$	2.86	1.68	-1.47	-26.73
目视星等 $m(\text{mag})$				
目视绝对星等 $M_V(\text{mag})$				
色指数 $(B - V)^*(\text{mag})$	-0.14	-0.06	+0.01	+0.65
色余 $E_{B - V}(\text{mag})$				
色指数 $(B - V)(\text{mag})$				
有效温度 $T_{\text{eff}} = f(B - V)(\text{K})$				
$\lambda_m(\text{nm})$				
半径 (太阳半径, R_S)	9.10	4.60	1.71	1.00
总光度 (太阳光度, L_S)				1.00
绝对热星等 $M_{\text{bol}}(\text{mag})$				4.64
V波段的热改正 BC(mag)				-0.20

(以防万一的)热学

11. (IOAA2019) 宇宙微波背景烤箱

由于人体主要由水构成, 因此可以有效吸收微波光子. 假设宇航员的身体是一个完美的球形吸收器, 质量 $m = 60 \text{ kg}$, 平均密度和比热容与纯水相同, $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

- (1) 如果宇航员在星系空间, 求他吸收宇宙微波背景辐射(CMB)的吸收率的近似值(以瓦特为单位). CMB的光谱能量分布可以通过黑体辐射的温度 $T_{\text{CMB}} = 2.728 \text{ K}$ 来近似.
- (2) 宇航员每秒大约能吸收多少CMB光子?
- (3) 忽略其他能量输入和输出, CMB需要多长时间才能将宇航员的温度提高 $\Delta T = 1 \text{ K}$?

(不好说的)位力定理

12. (2014选拔赛高) 球状星团

球状星团NGC 5272视直径 $\theta = 18'$, 视星等 6.2^m . 假设星团内恒星物理性质均相似, 并均匀分布.

- (1) 对于位于星团中心处一颗行星上的观测者, 计算夜空中恒星的总亮度. (忽略行星大气.)
- (2) 测得该球状星团距离为 10.4 kpc . 假设星团内成员星物理性质均类似太阳, 计算星团内成员星总数.
- (3) 在(2)的假设下, 根据位力定理, 试估算星团中恒星碰撞平均时间间隔(碰撞频率的倒数). 由于恒星之间相对速度很大(即动能远远大于引力势能), 考虑两颗恒星碰撞时可以忽略之间的引力作用.

- ★提示: i. 位力定理: 对一个达到平衡状态的引力束缚系统, 满足 $2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0$, 其中 $\langle K \rangle$ 为这个系统的总动能(或平均动能), $\langle U \rangle$ 为总势能(或平均势能);
- ii. 第一问的结论并不影响第二、三问. 如果无法做出第一问, 你可以直接尝试第二问.

实测部分

13. (2019选拔赛) 盖亚时代

近年来, 盖亚卫星(GAIA)源源不断地向地面传回了高精度的天体测量数据, 相关的研究成果已经深远地影响了我们对银河系的结构和演化历史的认识. 在本题中, 你需要对某一星场的盖亚数据进行分析.

图1展示了某一 $0.8^\circ \times 0.8^\circ$ 天区内所有亮于16等的恒星. 你应该很容易看得出一个疏散星团状的结构, 这就是我们的研究对象NGC 7789 (你甚至可能在秋天观测过它). 显然, 并不是所有恒星都属于这个星团, 所以在正式的分析之前, 你需要选出这里面的所有的成员星, 而一个有效的方法就是利用恒星的自行(见图2).

表3中展示了这一视场中40颗恒星的坐标、自行(单位: 毫角秒/年, mas/yr)、视向速度(单位: km/s)和视差(单位: 毫角秒, mas), 请逐步完成下列分析:

- (1) 根据视场内恒星的自行信息, 在表3中选出属于NGC 7789 的成员星, 用√号标注.
- (2) 分别求出成员星赤经、赤纬的中位数, 并以这个值作为星团的中心.
- (3) 求出成员星到星团中心角距离的中位数(单位: 角分), 并以这个值作为星团的视半径.
- (4) 求出成员星视差的中位数(单位: 毫角秒), 并以这个值作为星团的视差.
- (5) 根据星团视差和视半径, 求出星团的半径(单位: 秒差距, pc).
- (6) 求出成员星视向速度中正数第三和倒数第三之间的差值, 并以这个差值的一半作为星团的速度弥散(单位: km/s).
- (7) 假设星团半径内恒星密度分布均匀, 请通过位力定理(Virial Theorem), 求出星团的动力学质量(单位: 太阳质量 M_\odot).

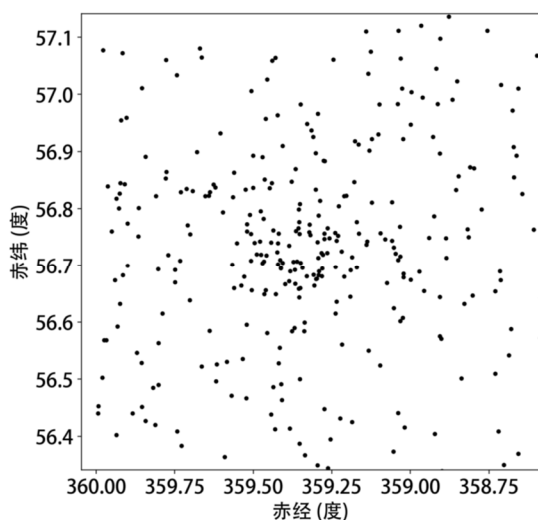


图1

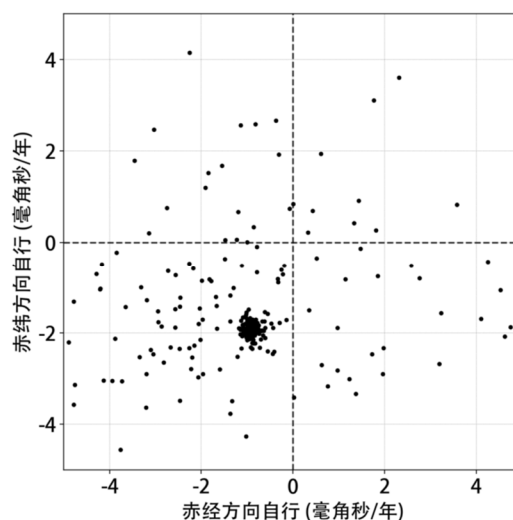


图2

表3 NGC 7789视场内40颗恒星的天体测量数据

赤经			赤纬			赤经自行	赤纬自行	视向速度	视差	成员星
hh	mm	ss.s	dd	mm	ss.s	mas/yr	mas/yr	km/s	mas	
23	56	11.3	56	43	16.5	-0.78	-1.84	-44.53	0.4529	
23	58	04.8	56	45	36.2	-3.65	-1.43	-60.92	0.5486	
23	56	23.1	56	31	25.9	-1.0	0.0	-92.75	0.1388	
23	57	16.9	56	46	19.9	-0.87	-1.93	-54.28	0.3807	
23	58	34.0	56	49	21.9	-3.73	-3.06	-65.37	0.199	
23	57	29.5	56	42	23.5	-0.95	-2.03	-53.29	0.4086	
23	57	24.2	56	39	36.1	-0.89	-2.22	-58.19	0.4158	
23	57	12.1	56	40	31.8	-0.87	-2.05	-55.86	0.4315	
23	59	53.9	56	34	5.2	1.48	-0.14	-7.66	0.3258	
23	55	19.0	56	37	55.0	-3.14	0.2	-37.63	0.3375	
23	59	36.8	56	57	32.1	-3.19	-2.9	-27.44	0.2705	
23	59	52.4	56	34	6.7	-0.44	-2.46	-59.53	1.6158	
23	56	7.7	56	42	58.5	-1.66	-1.91	-53.17	0.438	
23	56	32.4	57	2	10.6	-0.75	-1.83	-54.98	0.4838	
23	57	12.4	56	50	0.7	-1.09	-1.66	-52.87	0.4186	
23	57	24.9	56	23	12.8	-0.37	2.67	-7.84	0.21	
23	55	21.0	56	30	6.0	-2.22	-2.79	-47.34	0.8834	
23	56	6.4	57	0	38.2	-1.08	-1.99	-53.44	0.444	
23	58	58.6	57	2	0.9	-2.47	-1.43	-84.02	0.2589	
23	56	5.5	56	55	19.8	1.81	0.26	7.35	0.3296	
23	57	51.6	56	38	56.6	-0.97	-2.0	-53.83	0.5633	
23	57	52.0	56	42	25.6	1.14	-0.83	-52.02	0.5272	
23	54	44.8	56	32	31.4	-0.89	-2.35	-57.74	0.4585	
23	56	39.3	56	45	24.2	-1.07	-1.97	-53.47	0.4778	
23	57	27.9	56	40	3.8	-0.41	-2.41	-54.6	0.4936	
23	56	17.8	56	40	7.7	-0.65	-2.05	-53.47	0.523	
23	56	12.7	56	43	55.8	-1.14	2.56	-0.54	1.3013	
23	57	41.6	56	57	49.8	-3.94	-3.05	-54.13	0.3573	
23	56	5.4	56	41	7.0	-1.6	-2.79	-76.4	0.4136	
23	55	23.3	56	51	25.9	-0.22	-0.71	-27.64	0.5417	
23	56	33.8	57	6	36.6	-4.13	-3.04	6.69	1.192	
23	57	15.6	56	56	13.2	-0.47	-1.8	-50.22	0.4675	
23	57	50.1	56	43	5.3	-0.94	-1.89	-54.68	0.4265	
23	56	44.5	56	42	53.5	-0.89	-1.86	-53.17	0.4387	
23	58	14.8	56	39	35.5	-0.33	-0.82	-39.42	0.4998	
23	59	41.2	56	57	18.3	-2.02	-2.15	-89.52	0.3774	
23	54	25.8	56	45	47.9	-3.85	-0.22	-17.01	0.4076	
23	58	2.8	56	47	20.9	-0.85	-1.97	-56.26	0.4122	
23	57	44.8	56	45	44.0	-0.6	-1.89	-49.24	0.4057	
23	57	10.1	56	47	16.6	-0.88	-1.77	-52.96	0.4691	