

第一届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

泰国 清迈 2007年12月5日

问题1.

- 1.1 对于一个位于北纬 42.5°N 和西经 71°W 的观测者, 请估算在12月21日的日出时间, 假设观测者的本地时间是格林威治时间-5小时. **大气的折射和日面大小均可忽略.**
- 1.2 从地球上观测, 金星和太阳间最大的角距离是 46° , 请计算金星的圆轨道半径为多少个天文单位.
- 1.3 7月1日正午和12月21日正午的时间间隔是183个太阳日. 这个时间间隔对应着多少恒星日?
- 1.4 在满月的一个夜晚, 月球**对某观测者**的张角是 0.46 度. 请问在这个晚上该观测者到月球的距离是多少?
- 1.5 由于地球围绕太阳的轨道运动, 一个观测者能够通过测量确定一直到100秒差距远的恒星的方向差异. 这个观测者所能测量的最小的角度差异是多少个角秒?
- 1.6 一个围绕着太阳运动的周期彗星的远日距离为31.5天文单位, 它的近日距离为0.5天文单位. 该彗星的轨道周期是多少?
- 1.7 对上题所提到的彗星, 该彗星与太阳的连线扫过的面积是多少? (以“平方天文单位/年”为单位)
- 1.8 对一个表面温度为 4000 K 的恒星, 在什么波长它的辐射最强烈?
- 1.9 对一个表面温度为 7500 K , 半径为2.5倍太阳半径的恒星, 计算该恒星的总光度. 请以太阳光度为单位, 并假设太阳的表面温度为 5800 K .
- 1.10 一个K型的主序星的光度是 $0.4L_{\odot}$. 观测到该恒星的能量流量为 $6.23 \times 10^{-4} \text{ W m}^{-2}$. 到该恒星的距离是多少? 大气的影响可以忽略.
- 1.11 一个超新星的光度是太阳光度的10倍. 如果这样一个超新星出现在我们的天空中时和我们的太阳一样亮, 它距离我们多远?
- 1.12 静止氢原子的(自旋翻转)能级跃迁释放出的电磁波的频率为 $\nu_0 = 1420.406\text{ MHz}$. 在一个星系中心附近的气体云中, 这样的一个辐射的频率被观测到是 $\nu = 1421.65\text{ MHz}$. 计算该气体云的速度. 它在向我们地球靠近(towards)还是在远离(away from)地球?
- 1.13 在月球上的一个陨石坑的直径为80千米. 我们用肉眼能够分辨出这个陨石坑吗? 假设肉眼的瞳孔直径为5 mm.
- 1.14 假如太阳通过引力塌缩形成了一个没有自旋的黑洞, 它的视界(它的史瓦西半径)是多少?

1.15肉眼能看到的最暗的星的星等是 $m = 6$ 等, 而星空中最亮的星的星等为 $m = -1.5$ 等. 最暗的和最亮的星的能流量(energy-flux)之比是多少?

问题2. 行星及其表面温度

一颗快速自转的半径为 R 、表面反照率为 α 的行星围绕一颗光度为 L 的恒星做圆轨道运动, 公转轨道半径为 D . 这里的假设是, 在平衡状态下, 行星吸收的所有能量都作为一个黑体重新辐射出去.

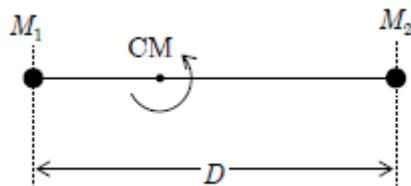
- (a) 在行星表面处来自恒星的辐射流量是多少?
- (b) 行星总的能量吸收率是多少?
- (c) 行星的反射光度是多少?
- (d) 行星表面的平均黑体温度是多少?
- (e) 如果假设行星的一面总是朝着恒星的话, 这一面的平均表面温度是多少?
- (f) 对于问题(d)中的行星:

$$\alpha = 0.25,$$

$$D = 1.523 \text{ AU},$$

对于 $L = 3.826 \times 10^{26} \text{ W}$, 计算它以K为单位的表面温度.

问题3. 双星系统



一个双星系统由 M_1 和 M_2 组成, 它们之间的距离为 D . M_1 和 M_2 均以角速度 ω 围绕着该双星系统的共同质量中心作圆轨道的运动. 质量在连续地从一颗星转移到另一颗星, 这个质量的转移会导致它们的轨道周期和它们之间的距离缓慢地随时间发生变化.

为了简化分析, 我们将假设这两颗星可以被视作两个质点, 它们各自围绕自己自转轴的自转可以被忽略.

- (a) 该双星系统的总角动量和动能分别是多少?
- (b) 请找出角速度 ω 与双星间距 D 的关系.
- (c) 在时间间隔 Δt 里, 两颗星间的质量转移使 M_1 星的质量变化了 Δm , 找出相对应的角速度的变化量 $\Delta\omega$ 与 ω 、 M_1 、 M_2 和 ΔM_1 的关系式.
- (d) 在一个特定的双星系统里, $M_1 = 2.9M_{\odot}$, $M_2 = 1.4M_{\odot}$, 轨道周期 $T = 2.49$ 天. 一百年后, 轨道周期 T 增加了20秒. 请求出 $\frac{\Delta M_1}{M_1 \Delta t}$ 的数值(以每年为时间单位)
- (e) 质量的流向是怎样的? 从 M_1 流向 M_2 , 还是从 M_2 流向 M_1 ?
- (f) 求出 $\frac{\Delta D}{D \Delta t}$ 的数值(以每年为时间单位)

你可以使用以下的近似:

$$(1+x)^n \sim 1+nx, \text{ 当 } x \ll 1;$$

$$(1+x)(1+y) \sim 1+x+y, \text{ 当 } x \ll 1, y \ll 1.$$

问题4. 引力透镜

光在引力场中的偏折是爱因斯坦在1916年出版广义相对论之前几年的1912年首先预言

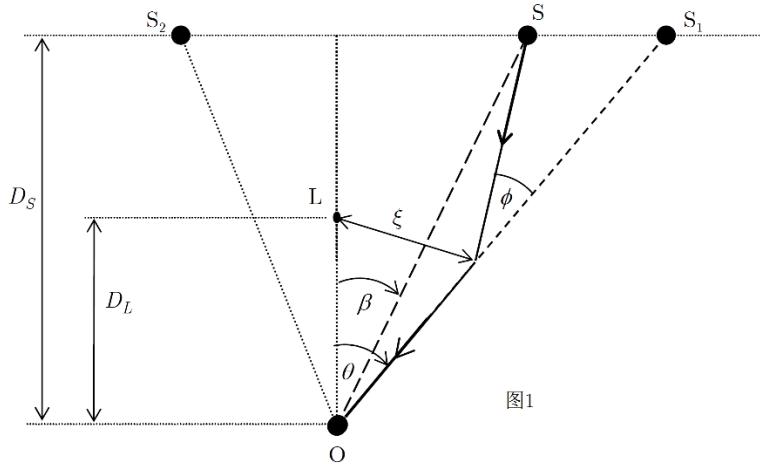
的。一个大质量天体引起的光线偏折看上去象一个经典的透镜。这个预言在1919年被爱丁顿所证实。



考虑一个球对称透镜，具有质量 M , ξ 是到中心的碰撞参数。在这种情形下光线偏折的公式为：

$$\phi = \frac{4GM}{\xi c^2}, \text{ 这是一个非常小的角度.}$$

在给出的图中，起着透镜作用的大质量天体位于L点。源S发出的光线被透镜偏折后被O点的观测者观测成 S_1 和 S_2 两个像。在这里， ϕ 、 β 和 θ 都是非常小的角度。



- (a) 在一个特殊的情形下，当源与引力透镜天体严格在一条直线上时，即 $\beta = 0$ 时，一个呈环形的像将会产生，这个环的角半径被称作爱因斯坦半径 θ_E ，请证明它的公式是：

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_S - D_L}{D_L D_S}}$$

- (b) 源天体到地球的距离大约是50 kpc. 一个太阳质量的透镜与源天体的距离是10 kpc. 请计算当源天体、透镜和观测者严格在一条直线上时的爱因斯坦环的角半径的数值。
 (c) 哈勃空间望远镜主镜的直径为2.4米，它相应的角分辨率是多少？哈勃望远镜能够分辨出问题(b)中的爱因斯坦环吗？
 (d) 在给出的图中，对一个孤立的点源S，会由引力透镜效应形成两个像 S_1 和 S_2 . 请求出这两个像的位置，即 θ_1 和 θ_2 ，请以 β 和 θ_E 为参数来表示。
 (e) 请以 η 为参数，求出比率 $\frac{\theta_{1,2}}{\beta}$ ($\frac{\theta_1}{\beta}$ 及 $\frac{\theta_2}{\beta}$). 在此， $\theta_{1,2}$ 分别代表着(d)中的两个像的位置， η
 $= \frac{\beta}{\theta_E}$.

(f) 当 $\Delta\beta \ll \beta$, $\Delta\theta \ll \theta$, 且对 $\theta = \theta_{1,2}$ ($\theta = \theta_1$ 及 $\theta = \theta_2$) 的情形, 请以 η 为参数, 找出差分放大倍数 $\frac{\Delta\theta}{\Delta\beta}$ 的表达式.

第一届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

泰国 清迈 2007年12月3日

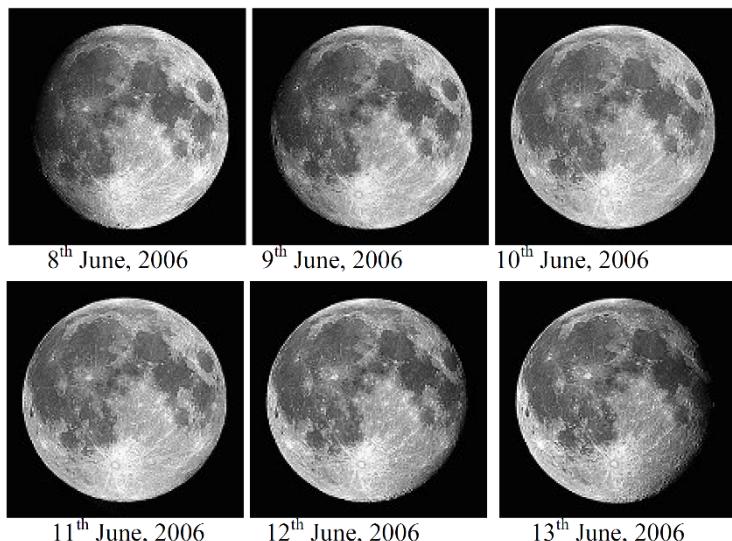
1. 伽利略卫星

在屏幕上显示的是木星和它的4个伽利略卫星的计算机模拟运动，它应该和小望远镜里所看到的现象类似。观察了这些卫星的运动之后，请在答题纸上写下这些数字所对应的卫星的中文名称。(模拟将在考试的最开始的15分钟和考试最后的15分钟在屏幕上播放)



2. 月龄

泰国国王普利蓬的登基60周年纪念活动于2006年6月8日到13日在泰国(格林威治时间+07小时)举行。在这期间每个晚上的同一时间所拍摄的月球照片如下图所示。



假设爱因斯坦出生于1879年3月14日的中午，请用上面提供的数据确定在爱因斯坦在德国(格林威治时间+01小时)出生的那一天的月龄(新月之后的天数)。请详细给出计算使用的方法，并估算你计算中的误差。

3. 太阳系天体

表1给出了一组包括4个太阳系天体在一个日历年期间视位置的数据。详细给出你的数据分析方法，并回答以下的问题。

观测地点 纬度: 北纬 $18^{\circ}47'00.0''$,
经度: 东经 $98^{\circ}59'00.0''$.

- 3.1 把字母A、B、C、D相应地写在答题纸上正确的天体(object)后面。
- 3.2 在整个观测期间，哪个天体在黑夜时可以被观测到最长的时间？
- 3.3 对于3.2的情况，对应的日期是哪天？
- 3.4 假设轨道都是共面的(位于同一平面)圆轨道，在你的答题纸上提供的轨道图上，画出

在3.3说的那天，这四个天体和地球分别所在的位置. 答题(纸上)必须把作为这些天体之一的太阳画在太阳系的中心. 对其他天体并包括地球必须同时明确写下当天它们的距角(elongation)的准确数值.

第二届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

印度尼西亚 万隆 2008年8月23日

第一部分

1. 地球赤道上的两个观测者同时观测有恒星背景的月球的位置，二者的经度差为180度。如果观测时月球的赤纬刚好是0度，请画图说明观测者看到的情形(你的图中应包括月球、背景星空、两个观测者、地球)，并计算两个观测者看到的月球视赤经之差(以时分秒表示)。
2. 2008年4月2日，万隆的Bosscha天文台使用一台口径为10 cm, 焦比为 $f/10$ 的望远镜观测太阳，发现了一块NOAA编号为0987的太阳活动区。在太阳坐标系中，该活动区相对于太阳盘面中心的位置为：南8度，西40度。用SBIG ST-8 CCD相机(1600×1200 pixels; $9 \mu\text{m} \times 9 \mu\text{m}/\text{pixel}$)对该区域拍照，该活动区在CCD上占据的面积为 5×4 pixels。根据天文年历知道太阳的视直径为 $32'$ ，请计算该活动区在太阳表面上占据的球面面积(以百万分之一太阳半球表面积(msh)为单位)。
3. 满月发生的时间是印度尼西亚西部时间(105°E , $\text{UT} + 7^{\text{h}}00^{\text{m}}$)2008年6月19日 $00^{\text{h}}30^{\text{m}}$ 。对于位于Bosscha天文台(经度：东经 $107^\circ 35'00''\text{.}0$ E, 纬度：南纬 $6^\circ 49'00''\text{.}0$ S, 海拔：1300.0 m)的观测者，计算月亮在地平之上可能的最短和最长的时间。
4. 假设一颗恒星的质量为 $20M_\odot$ ，如果现在该恒星质量的20%为氦，计算该恒星氦燃烧能够进行多长时间。假设该恒星的总光度为 $100L_\odot$ ，总光度的30%来自于氦燃烧。碳原子 ^{12}C 的质量为12.000000 amu。氦核聚变为碳的公式： $^{34}\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C} + \gamma$ 。
5. 宇宙微波背景(CMB)目前的平均温度 = 2.73 K，由此可以推断出CMB的光子是在红移 $z_{\text{CMB}} = 1100$ 处发出的。目前宇宙中的暗能量、暗物质、正常物质的密度分别为： $\rho_{\text{DE}} = 7.1 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{DM}} = 2.4 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{NM}} = 0.5 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ 。如果我们假设暗能量是真空能量，其密度不随时间变化。请计算CMB光子发出时($z_{\text{CMB}} = 1100$)的宇宙暗物质密度和暗能量密度的比值。
6. 在银河系中心有一个气体团围绕着一个黑洞旋转，该气体团中的氢原子自旋翻转(相应的静止频率 = 1420.41 MHz)所产生的射电辐射频率被测为1421.23 MHz。如果该气体团和黑洞间的距离是0.2 pc，而且气体团的旋转轨道为圆轨道。请确定气体团的速度、它的移动方向(向我们移动还是远离我们)，并请计算黑洞的质量。
7. 一个空间望远镜的灵敏度程度使得它刚好能够探测到一个距离为20 pc的主序星，假设该望远镜的灵敏度对所有波长都是一样的。该恒星最终会变成一个红巨星，那时它的表面温度降为原来的 $1/3$ ，半径变成了原来的100倍。请计算该恒星被这个空间望远镜刚好能探测到的最远距离。
8. 太阳和月球的引力作用导致了海潮的涨落。考虑在地球赤道上的两点A和B，而且A点在海平面。A点和B点间的经度差为 φ 。如果月球在B点的天顶，请推导在A点的由于月球引力所导致的海水的水平加速度。(请用 φ 、地球的半径 R 和地月距离来表示)

9. 太阳的辐射必须穿过地球的大气层才能抵达地球的表面. 地球也向外部辐射, 而且这些辐射也必须先穿过大气层才能够辐射到外空间环境去. 一般来说, 太阳辐射穿透地球大气层的透射率(t_1)高于地球辐射向外穿透地球大气层的透射率(t_2). 假设 $T_{\text{eff}, \odot}$ 是太阳的有效温度, R_{\odot} 是太阳的半径, r_{\oplus} 是地球的半径, x 为地球和太阳间的距离. 请以这些变量为参数推导出地球表面温度的表达式.

10. 天蝎座 μ (μ Sco)是视双星系统, 两颗子星在2008年8月22日的坐标由下表给出.

	α (RA)	δ (Dec)
μ Sco 1 (主星)	$20^{\text{h}}17^{\text{m}}38^{\text{s}}.90$	$-12^{\circ}30'30''$
μ Sco 2 (次星)	$20^{\text{h}}18^{\text{m}}03^{\text{s}}.30$	$-12^{\circ}32'41''$

观测用的是Bossch天文台的蔡斯折射镜, 口径为600 mm, 焦距为10780 mm. 望远镜接的CCD面积为 765×510 pixels, 单位像素尺寸为 $9 \mu\text{m} \times 9 \mu\text{m}$, 请回答以下两个问题:

- (1) 能够在一次CCD的曝光中同时拍摄两颗子星吗? (请用英文Yes或No回答, 并给出估算步骤, 画出必要的图.)
(2) 求出次星(secondary)相对于北极(North)的方位角.

11. 下图是1998年8月22日在印尼Dumai Riau所拍摄的日环食的35毫米胶卷照片, 所使用的望远镜的有效孔径为10 cm, 焦比为f/15. 在这个照片的底片上, 日面的直径为13.817 mm, 月面的直径为13.235 mm. 请以km为单位分别确定日地和地月的距离, 并确定在这次日环食中月球遮挡日面的百分比.



12. 在一个遥远的星系中有一颗Ia型超新星, 其最大光度为 $5.8 \times 10^9 L_{\odot}$. 假定用你的望远镜观测这颗超新星, 发现它的亮度为织女星(Vega)的 1.6×10^{-7} 倍. 已知超新星的宿主星系的红移为 $z = 0.03$, 请利用题目给出的关于超新星的数据计算星系的距离(以pc为单位)和哈勃时间(宇宙年龄).
13. 一艘旅行中的宇宙飞船与某个物体近距离相遇了, 飞船上的科学家打算利用携带的望远镜对该物体进行更仔细的观测. 简单起见, 假定我们只在二维平面上考虑这个问题, 而且飞船(也就是望远镜)的位置是静止在平面的原点(0, 0)的. 被观测物体的形状是圆盘状的, 其边界可以用公式表示为:

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0.$$

设 φ 为观测物体时望远镜的指向与X轴间的夹角, 当用望远镜观测该物体时, 望远镜的

指向从物体的一端扫到另一端, 请计算 $\tan \varphi$ 所对应的最大值和最小值.

14. 有一个潜在危险天体(PHO)受到地球引力的作用正在距离地球很近的轨道上运行. 假设 u 为该天体与地球间距离的倒数, p 为其线性动量值. 当天体在轨道上运行时, u 作为 p 的函数在A点和B点的值列在下面的表格中. 请计算该天体的质量和总能量, 并给出 u 作为 p 的函数表达式, 画出该函数从A点到B点的 $u \sim p$ 图(以 u 为纵坐标, p 为横坐标)

	$p (\times 10^9 \text{ kg m s}^{-1})$	$u (\times 10^{-8} \text{ m}^{-1})$
A	0.052	5.15
B	1.94	194.17

15. 星系NGC2639被定义为Sa型旋涡星系, 测得其最大的旋转速度为 $v_{\max} = 324 \text{ km/s}$. 经过各种消光改正后, 测得该星系B波段的视星等为 $m_B = 12.22$. 天文学家经常需要测定旋涡星系的一个特征半径 R_{25} (以kpc为单位), 该特征半径 R_{25} 的定义为: 在 R_{25} 处, 星系的表面亮度降为25 mag_B/arcsec². 而旋涡星系存在以下关系:

$$\lg R_{25} = -0.249 M_B - 4.00,$$

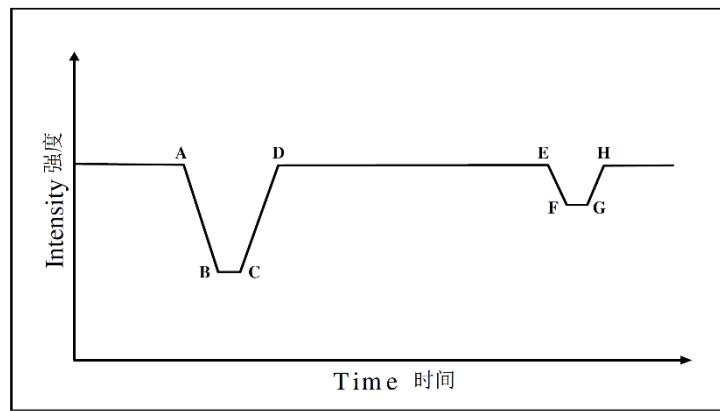
其中 M_B 为B波段星系的绝对星等. 对于Sa型旋涡星系来说, B波段的Tully-Fisher关系为:

$$M_B = -9.95 \lg v_{\max} + 3.15 \quad (v_{\max} \text{ 以km/s为单位}).$$

请利用上述已知关系, 计算NGC2629包含在 R_{25} 以内的质量[以太阳质量为单位, 已知太阳的色指数为($m_{B\odot} - m_{V\odot} = 0.64$)]和该星系 R_{25} 以内B波段的光度(以太阳光度 L_\odot 为单位).

第二部分

1. 一个食双星系统的周期为30天, 下图所示的测光曲线显示其次星掩主星(从点A到点D)的时间为8个小时 [从初亏(第一次相切)到复圆(第四次相切)的时间], 而从B点(第二次相切)到C点(第三次相切)的时间为1小时18分钟. 光谱测量显示该系统主星的最大视向速度为30 km/s, 次星的最大视向速度为40 km/s. 如果我们假设它们的轨道为圆轨道, 且它们的轨道倾角 $i = 90^\circ$ (轨道面与视向连线共面), 请确定这两颗恒星的半径和质量(以太阳的半径和质量为单位).



2. 对一颗恒星进行Johnson UBV系统测光, 测得该恒星在UBV三个波段的视星等分别为 $U = 8.15$, $B = 8.50$, $V = 8.14$. 根据该恒星的光谱型得知其 $U - B$ 的本征(原始)色指数值为 $(U - B)_0 = -0.45$, 如果该恒星的半径为 $2.3R_\odot$, 绝对热星等为 $M_{\text{bol}} = -0.25$, 热改正(BC)值为 $BC = -0.15$, 通过计算确定:
- (1) 该恒星在U、B、V三个波段的本征视星等(考虑星际消光, 消光值与色余 $E(B - V)$ 之间成正比关系, 其比例系数为 $R_V = 3.2$)
 - (2) 该恒星的有效温度
 - (3) 该恒星的距离(以pc为单位)

注释：色余即测得的色指数与其对应波段的本征色指数之差， $U - B$ 波段的色余 $E(U - B)$ 与 $B - V$ 波段的色余 $E(B - V)$ 之间存在关系： $E(U - B) = 0.72E(B - V)$

3. 对宇宙微波背景(CMB)的测量显示，对于整个宇宙来说，微波背景的温度在很高精度上来说都是均匀的。假定从宇宙再复合时期(recombination, $T_r \approx 3000$ K, $t_r \approx 300000$ 年)发出的光子直到今天($T_0 \approx 3$ K, $t_0 \approx 1.5 \times 10^{10}$ 年)才到达地球。宇宙尺度因子 S 是表征宇宙膨胀的值，今天($t = t_0$)的 S 值记为 $S_0 = S(t = t_0) = 1$ ，而对应于宇宙其他时间 t 的 S 值记为 $S_t = S(t < t_0) < 1$ 。宇宙暴胀结束($t = 10^{-32}$ 秒)直到再复合时刻，这期间宇宙都是处于由辐射主导的状态；从再复合时期直到今天，宇宙则变为由物质主导的。

当宇宙处于辐射主导时期，尺度因子 S 随时间 t 的变化关系为 S 正比于 \sqrt{t} ，而在物质主导时期，尺度因子 S 随时间的变化关系为： S 正比于 $t^{2/3}$ 。

- (1) 请估算再复合时刻宇宙的视界距离(horizon distances, 以角度表示)。假设宇宙的温度 T 与尺度因子的倒数 $1/S$ 成正比，画出必要的图示。

注：以角度表示的视界距离是指在宇宙微波背景辐射中，当再复合发生(CMB光子产生)时能够彼此通过光子联系(彼此能够看到)的两点间最大角距离。

- (2) 假设宇宙微波背景遗迹中有两个点，今天我们测得二者间的角距离为 $\alpha = 5^\circ$ ，二者的角距离不随宇宙膨胀而变化，请问它们之间能否以光信号联系(亦即它们是否能够彼此看到)？请用数值说明原因，并用英文Yes或No作答。
- (3) 请估算暴胀结束时宇宙的大小。

第二届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

印度尼西亚 万隆 2008年8月21日

I. 室女座星系团

室女座星系团是离我们最近的大星系团，它在天空中所对应的视角近10度而且有若干个明亮的星系。一件有意思的事情是通过测定室女座星系团的距离来推导有用的宇宙学常数，下表提供了测定室女座星系团距离的不同方法(列在表格的左列)。表格的右列出了该种测量方法所测的的平均距离 $d_i \pm s_i$, s_i 为标准偏差。

i	Distance Indicator 距离测定的方法	Virgo Distance (Mpc) 室女座星系团距离
1	Cepheids 造父变星	
2	Novae 新星	
3	Planetary Nebulae 行星状星云	15.2 ± 1.1
4	Globular Cluster 球状星团	18.8 ± 3.8
5	Surface Brightness Fluctuation 表面亮度起伏	15.9 ± 0.9
6	Tully-Fisher relation	15.8 ± 1.5
7	Faber-Jackson relation	16.8 ± 2.4
8	Type Ia Supernovae Ia型超新星	19.4 ± 5.0

1. 使用加权平均的方法，计算到室女座星系团的平均距离：

$$d_{\text{avg}} = \frac{\sum_i \frac{d_i}{s_i^2}}{\sum_i \frac{1}{s_i^2}}.$$

这里的*i*包含了8种不同测量距离的方法。

2. 在上一问中所得的距离估算值的误差是多少？(以Mpc为单位)

室女座星系团的光谱测量显示它有着1136 km/sec的退行速度。请估算哈勃常数 H_0 及其误差。

3. 请用上一问中获得的哈勃常数计算哈勃时间(宇宙的年龄)及其误差。

II. 双星系统的质量确定

半人马座α(Centauri α)含有3颗星，其中的两个主序星Centauri A和Centauri B构成一个双星系统，它的第三颗星叫做Proxima Centauri，比其他两颗星小而且暗。Centauri A和Centauri B的最大角距为17.59”。这一双星系统的轨道周期为79.24年。Centauri A和Centauri B的视星等分别为-0.01和1.34，色指数分别为0.65和0.85。请用给出的主序星数据表来回答以下问题。其中BC为星等的热改正， $(B - V)_0$ 为恒星的内禀颜色(或称色指数)。

$(B - V)_0$	T_{eff}	BC	$(B - V)_0$	T_{eff}	BC
-0.25	24500	2.30	-0.23	21000	2.15
-0.20	17700	1.80	-0.15	14000	1.20
-0.10	11800	0.61	-0.05	10500	0.33
0.00	9480	0.15	0.10	8530	0.04
0.20	7910	0	0.30	7450	0

0.40	6800	0	0.50	6310	0.03
0.60	5910	0.07	0.70	5540	0.12
0.80	5330	0.19	0.90	5090	0.28
1.00	4840	0.40	1.20	4350	0.75

1. 请画出BC和 $(B - V)_0$ 间的关系曲线.
2. 用以上曲线确定Centauri A和Centauri B的热星等(热改正后的星等).
3. 确定每个恒星的质量.

提示:

1. 星等的热改正(BC)是为了把一颗恒星的视星等转换为热星等所必须做的修正, 即:

$$BC = m_v - m_{bol} \text{ 或 } BC = M_v - M_{bol}$$

2. 质量-光度关系: $M_{bol} = -10.2 \lg\left(\frac{M}{M_\odot}\right) + 4.9$

III.陨石的年龄

放射性衰变的基本公式可以表述为:

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

这里 $N(t)$ 和 N_0 分别是放射性同位素在时间 t 和 $t = 0$ 时的原子存留数, λ 为衰变常数. 衰变所产生的衰变产物被称作radiogenics, 其原子数目定义为:

$$D(t) = N_0 - N(t)$$

基于这些, 天文学家们试图确定一组陨石样品的年龄. 他们有两类陨石样品: allende球粒状陨石(A)和玄武岩无球粒陨石(B). 在这些样品里, 他们测定 ^{87}Rb 和 ^{87}Sr 两种元素的丰度, 这里我们假设全部的 ^{87}Sr 都是由 ^{87}Rb 衰变产生的. 这一同位素衰变的衰变常数 λ 为 1.42×10^{-11} /年. 除此之外, 非衰变元素 ^{86}Sr 的含量也被测定. 这些元素含量的测量数据被列在下表中, 单位为ppm(百万分之一, 浓度单位)

样品号	陨石类型	^{86}Sr	^{87}Rb	^{87}Sr
1	A	29.6	0.3	20.7
2	B	58.7	68.5	44.7
3	B	74.2	14.4	52.9
4	A	40.2	7.0	28.6
5	A	19.7	0.4	13.8
6	B	37.9	31.6	28.4
7	A	33.4	4.0	23.6
8	B	29.8	105.0	26.4
9	A	9.8	0.8	6.9
10	B	18.5	44.0	15.4

1. 推导出以 $\frac{D(t)}{N(t)}$ 为参数的 t 的表达式.
2. 确定这一放射性衰变的半衰期 $t_{1/2}$, 即衰变产物的原子数目达到衰变前母衰变元素原子数一半时的时间.
3. 两种同位素原子数目的比例的信息比单个元素的丰度的信息更为有价值, 因为很可能有初始的Sr元素存在. 请选择 $\left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ 为自变量和 $\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ 为因变量, 推导出能够代表实验数据的线性回归关系.
4. 作出 $\left(\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ - $\left(\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}\right)$ 图, 并请画出每类陨石的回归线. (在中间计算过程中请至少使用

小数点后7位数字)

5. 请接着确定每一类陨石的年龄以及年龄的误差. 哪一类陨石更古老?

6. 确定每一类陨石的初始($^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$)₀值及其误差.

提示:

任意一组实验数据($X_i, Y_i, I = 1, \dots, n$)的线性回归拟合为: $y = a + bx$, 其线性回归的拟合常数为: $b = SS_{xy}/SS_{xx}$, $a = \bar{y} - b\bar{x}$. 其中:

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$
$$SS_{yy} = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2$$
$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i$$

a 与 b 的标准偏差可以通过以下公式计算:

$$S_a = \sqrt{\frac{SS_{YY} - SS_{XY}^2/SS_{XX}}{(n-2) \cdot SS_{XX}} \times \sum_{i=0}^n X_i^2}$$
$$S_b = \sqrt{\frac{SS_{YY} - SS_{XY}^2/SS_{XX}}{(n-2) \cdot SS_{XX}}}$$

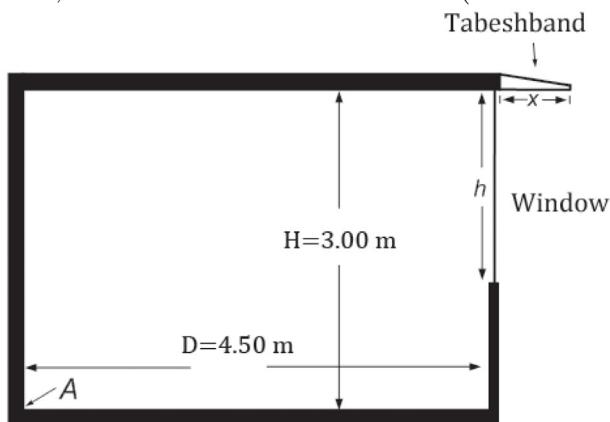
第三届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

伊朗 德黑兰 2009年10月20日

短问题

1. 请估算一个质量为 $1 \times 10^8 M_{\odot}$ 的超大质量黑洞其史瓦西半径内的平均质量密度.
2. 请估算人眼(按一只眼睛算)每秒钟能够接收到的、从一颗视星等为6等($m = 6$, 人眼的极限星等)、光谱型为G2的主序星发出的波长 $\lambda = 550$ nm(V波段)的光子数. 假定人眼的瞳孔直径为6 mm, 这颗恒星的全部辐射都在 $\lambda = 550$ nm波长处.
3. 请估算个普通地球男性垂直向上跳起就能够逃离的行星的半径. 假定该行星的密度与地球的一样.
4. 在典型的波斯建筑中, 在南面窗户的顶部会安装一个特别的结构, 称为Tabeshband(也就是遮阳蓬), 可以控制冬天和夏天射入房间的阳光. 夏季太阳在天空的位置高, 遮阳蓬可以阻止阳光进入房间保持室内凉爽. 在现代建筑中, 已经证明这样的遮阳蓬可以节约大约20%的能源消耗. 下图给出了在北纬36.0°处这样一个遮阳蓬和窗户的侧向设计图. 利用图中给出的参数, 计算要建造的Tabeshband遮阳蓬的最大宽度 x , 以及与此对应的窗户的最大高度 h , x 和 h 需要满足以下两个条件:
 - (1) 在夏至那天的中午, 确保没有太阳光能够直射照进室内.
 - (2) 在冬至那天的中午, 太阳光可以射到屋子的最深处(图中A点表示).



5. Damavand山位于伊朗北部, Caspian海的南岸. 假定有个观测者站在Damavand山顶上(北纬 $35^{\circ}57'$, 东经 $52^{\circ}6'$, 海拔高度为 5.6×10^3 米)观测Caspian海上方的天空. 请计算对于这个观测者来说, 他刚好能够看到的永不落天体的赤纬最小值. 在该纬度处地球的测地半径为6370.8 km. Caspian海的海平面近似等于平均海平面.
6. 请导出从原恒星云中心处发射的物体其逃逸速度与原恒星云质量和半径的关系式. 假设原恒星云的密度均匀, 质量为 M , 半径为 R . 忽略原恒星云粒子与被发射天体间的碰撞. 如果允许该物体从原恒星云的表面自由下落, 它将以 $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ 的速度到达原恒星云的中心.
7. 一个学生想利用地球自转确定他(她)的望远镜目镜的视场(FOV). 为了完成这个任务, 他将

望远镜指向织女星(天琴 α , 赤经 18.5^{h} , 赤纬 $+39^{\circ}$), 同时关闭跟踪, 测量织女星经过整个视场直径的时间 $t = 5.3$ 分钟, 请计算望远镜的视场大小, 以角分为单位.

8. 估算一个球状星团的质量, 假设其半径为 $r = 20$ pc, 恒星的均方根速度为 $v_{\text{rms}} = 3$ km/s.
9. 某恒星的银经为 $l = 15^{\circ}$, 它相对于太阳的视向速度为 $v_r = 100$ km/s. 假设它们与其他也同样在银盘上的恒星都以恒定的速度 $v_0 = 250$ km/s绕银心作圆周运动. 请计算该恒星离银心的距离.
10. 一颗主序星的半径为 $R = 4R_{\odot}$, 质量为 $M = 6M_{\odot}$, 平均磁场强度为 1×10^{-4} T(特斯拉). 请计算当这颗主序星演化为半径为20 km的中子星时, 其磁场的平均强度.
11. 假设中微子的质量为 $m_{\nu} = 10^{-5}m_e$. 请计算用来弥补宇宙中暗物质质量所需要的中微子数密度. 假定宇宙是平直的, 暗物质占整个宇宙质量的25%. 提示: 经典宇宙的总能量为零.
12. 太阳的热核反应会引起太阳质量减少, 请计算在100年内太阳的这种质量减少能够引起地球公转轨道半径的增加量. 假定在此过程中地球一直保持正圆轨道.
13. 假定你生活在哥白尼时代, 对开普勒定律一无所知. 你可以按照哥白尼的方法计算火星和太阳之间的距离. 在接受了所有的行星是围绕太阳而不是地球运行的革命性观点后, 你测得火星的公转周期为687天, 然后观测到在火星冲日的106天后, 火星刚好处于方照的位置. 请计算火星与太阳之间的距离, 以天文单位(AU)为单位.
14. 某人造卫星在地球赤道面上以正圆轨道绕地运行. 德黑兰的观测者在纬度为 $\psi = 35.0^{\circ}$ 处看到该卫星过当地子午线(中天)时的天顶距为 $z = 46.0^{\circ}$. 请计算该卫星的地心距离(以地球半径为单位).
15. 一对密近食双星系统的两颗子星是同样大小的巨星. 在互相的引力作用下, 两颗子星都发生了形变, 偏离了正球型, 变成了 $a = 2b$ 的旋转椭球体, 其中 a 和 b 分别是旋转椭球体的半长轴和半短轴(两颗子星的长轴总保持共面). 双星系统轨道面的倾角为90度. 请计算两颗子星相互掩食能够引起的以星等表示的亮度变化幅度. 忽略由于潮汐变形引起的温度变化以及恒星表面的临边昏暗.

提示: 旋转椭球体是椭圆绕其主轴自转而成的几何形状, 类似橄榄球或者甜瓜.

长问题

16. 高抛射物

某抛射物从地球的海平面发射, 初始速度 $v_0 = \sqrt{GM/R}$, 发射角(相对于当地地平)为 $\theta = \frac{\pi}{6}$. M 和 R 分别为地球的质量和半径. 忽略空气阻力和地球自转.

- (a) 证明抛射物的运动轨迹是半长轴为 $a = R$ 的椭圆.
- (b) 请计算该抛射物能够达到的相对于地球表面的最高高度(以地球半径为单位).
- (c) 该抛射物飞过的范围是多少(在地球表面上抛射点与落地点之间的距离)? (以地球半径为单位)
- (d) 该抛射物的椭圆轨迹的偏心率(e)是多少?
- (e) 求出该抛射物的飞行时间.

17. 银河系恒星的视数密度

假定我们可以用一个简单的指数函数: $n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{r - R_0}{R_d}\right)$ 来描述银河系银盘的恒

星数密度, 其中 r 表示距银河系中心的距离, R_0 是太阳距银河系中心的距离, R_d 是银盘的典型半径, n_0 为太阳所在位置的银盘的恒星数密度. 某个天文学家以很小的视场观测银心, 利用绝对星等大致为常数($M = -0.2$)的某特定类型的红团簇巨星(red clump)作为标准烛光.

- (a) 如果使用的望远镜的极限视星等为 $m = 18$, 请计算该望远镜能够观测到的红团簇巨星的最远距离. 简单起见, 我们忽略星际介质, 因此不必考虑星际消光.
- (b) 假定星际介质的消光为 0.7 等/kpc, 重复(a)的计算步骤, 估算此时该望远镜能够观测到的红团簇巨星的最远距离.
- (c) 在视星等从 m 到 $m + \Delta m$ 范围内, 给出立体角 Ω 内我们能够观测到的每单位星等的该类型红团簇巨星的数目的表达式(即 $\frac{\Delta N}{\Delta m}$). 在所有恒星中该类型红巨星的比例为 f . 此处与问题(1)一样不考虑星际消光. 假设银盘的大小为无限大.

提示: $y = \log_{10}x$ 可以在 (x_0, y_0) 点展开成近似式:

$$y = y_0 + \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{x - x_0}{x}$$

第三届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

伊朗 德黑兰 2009年10月22日

1. CCD图像处理

作为图像处理的练习，本题涉及使用一个简单的计算器和包括一幅图像在给出的曝光时间里得到的所有像素值的表格数据(见表1.1). 这幅图像是用安装在一个业余望远镜上的使用了V波段滤光片的一个小CCD相机所拍到的一幅更大些的CCD图像的一部分. 图1.1给出了这幅包含5颗恒星的像素的图像.

表1.1的第一行和第一列标明了像素的x和y坐标. 表1.2给出了望远镜和图像的参数.

图1.1

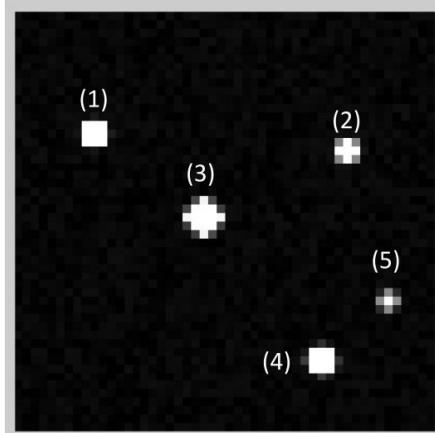


表1.2

望远镜焦距	1.2 m
CCD像素大小	$25 \times 25 \mu\text{m}$
曝光时间	450 s
望远镜指向天顶距	25°
V波段平均消光系数	0.3 mag/airmass

恒星标号	m_t
1	9.03
3	6.22
4	8.02

表1.3

观测者通过这幅图像与标准星表的比较证认出1、3、4号星. 表1.3列出了星表所给出的它们的实际星等(m_t).

- (a) 使用给出的数据，求出图像里恒星的仪器星等. 假设暗流可以忽略，图像已经经过平场改正. 为简化起见可以使用方形的测光孔径.

提示：仪器星等的计算要用到在孔径中测得的恒星流量与在等效区域内背景天空(dark sky)的流量的差异.

- (b) 在一幅CCD图像中一颗恒星的仪器星等与实际星等的关系是:

$$m_I = m_t + KX - Z_{\text{mag}},$$

其中 K 是消光系数, X 是大气质量, m_I 和 m_t 分别是恒星的仪器星等和实际星等, Z_{mag} 是常数零点. 对已证认的恒星分别计算常数零点，并计算平均的常数零点. **提示：**常数零点是不受消光影响的计算得到的星等相对于实际星等的常数差.

- (c) 计算恒星2和5的实际星等.
(d) 对于使用的CCD相机计算以角秒(arcsec)为单位的CCD像素大小.
(e) 计算以每平方角秒星等(magnitude per square arcsec)为单位的背景天空(dark sky)的平均亮度(m_{sky}).
(f) 用适当的图示估计天文视宁度(astronomical seeing), 以角秒(arcsec)为单位.

Pixels	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50							
1	2	4	4	5	6	6	6	6	0	9	0	5	3	1	1	4	5	2	5	5	6	3	1	0	9	6	7	3	1	7	8	3	2	6	6	6	2	10	4	10	2	9	3	2	9	2	2	5	1								
2	10	1	6	8	10	0	6	4	7	1	9	2	3	8	3	4	8	8	2	9	5	9	7	0	9	6	1	3	10	2	6	8	8	5	3	0	4	1	3	1	1	1	3	4	0	6	0										
3	7	6	6	4	6	5	2	10	4	3	2	2	7	1	6	4	9	3	6	3	7	3	1	6	4	3	4	3	9	1	0	3	5	9	10	7	3	9	3	2	3	9	8	0	6	0											
4	5	8	2	8	1	3	4	4	4	4	3	5	6	8	2	8	9	2	6	1	9	3	8	6	1	0	0	6	8	5	1	8	4	8	9	7	0	9	1	4	9	3	8	5	7	9	8										
5	7	1	0	9	2	5	8	5	2	5	8	3	1	6	2	9	4	3	8	4	0	6	7	6	8	7	2	4	9	3	5	8	9	5	0	5	1	7	1	0	9	9	1	3	3	1	4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
6	2	8	7	5	1	2	8	7	4	10	4	4	8	8	9	1	2	7	2	8	4	3	2	4	8	5	5	9	1	2	4	8	5	1	2	5	8	6	7	1	4	7	5	4	1	10	6	2	2	3							
7	10	2	6	4	5	2	5	8	1	7	6	9	0	9	1	1	0	7	3	2	4	9	7	6	8	4	3	1	4	8	7	6	3	9	2	9	2	4	6	3	8	5	5	8	1	5	7										
8	3	7	1	4	5	2	5	8	1	7	6	8	8	10	5	2	5	7	8	1	2	4	8	1	3	0	10	2	8	9	1	0	8	6	3	1	4	5	2	2	9	4	1	1													
9	10	6	10	4	9	7	3	1	9	7	5	7	3	1	3	6	8	1	3	6	4	9	4	9	1	9	1	4	4	8	3	2	7	7	0	1	2	9	3	5	0	5	2	7	6												
10	8	2	8	7	8	2	0	9	4	2	7	7	4	8	0	9	2	6	7	0	3	7	7	0	0	2	3	6	1	2	9	1	2	9	3	5	0	5	2	3	1	3	4	8	7	6											
11	6	5	1	10	4	7	5	8	0	9	3	4	7	2	9	9	8	5	1	1	2	1	9	8	1	0	0	2	2	7	4	3	0	5	6	5	1	3	4	6	4	4	4	6	10												
12	8	5	10	8	1	3	2	6	4	1	10	5	0	10	1	8	4	0	5	6	4	9	7	3	6	0	2	5	6	1	0	10	4	7	3	6	4																				
13	3	6	7	6	7	4	1	12	13	7	4	9	3	6	6	6	3	7	4	9	3	6	6	3	9	7	8	5	10	8	4	8	6	10	1	6	7	4	5	7	6																
14	2	2	2	10	4	10	0	9	202	798	206	5	1	7	5	1	7	2	1	1	5	6	3	3	4	0	3	1	0	2	5	1	9	5	8	3	5	0	6	8	7	1	3														
15	1	8	5	6	6	1	6	14	803	3239	804	18	5	9	4	6	3	6	1	3	3	2	7	10	8	5	1	2	3	4	3	1	5	5	4	12	6	1	5	6	5	3															
16	6	3	10	8	6	8	3	5	204	798	206	6	4	9	9	5	8	8	0	4	5	7	2	8	2	1	4	8	4	9	4	2	4	6	3	7	6	5	9	9	3	4	1														
17	7	1	10	3	2	10	9	4	7	13	8	3	10	5	6	5	3	0	3	8	5	0	3	0	2	5	6	2	5	6	2	7	8	9	6	3	1	8	3	9																	
18	3	6	8	9	6	1	9	2	3	4	1	6	7	0	10	7	2	3	2	6	3	2	8	4	6	8	7	3	8	0	9	6	7	6	9	8	8	9	3	9																	
19	4	3	0	6	3	7	4	8	10	8	6	1	6	0	10	4	10	6	2	2	7	5	2	0	6	6	2	9	0	7	4	3	2	1	6	12	8	2	9	7	3	2	8	7	7	8											
20	6	7	5	9	6	2	8	9	1	10	6	5	8	9	1	2	7	5	6	3	1	7	7	10	8	4	8	7	4	1	3	6	9	9	2	8	9	3	5	5																	
21	1	9	6	4	8	3	5	5	1	8	7	1	8	5	4	0	1	6	5	2	8	5	2	1	4	10	4	6	1	10	7	8	9	5	3	6	1	6	10	9	2	4															
22	4	7	7	2	8	6	7	9	1	8	6	9	9	2	8	5	4	9	1	9	8	10	5	10	3	7	0	4	5	7	6	5	1	9	1	8	5	3	7	8	7	4															
23	4	5	8	9	5	6	7	8	6	6	8	5	3	1	1	6	1	4	3	1	3	43	166	40	11	10	7	3	8	1	2	4	7	4	5	2	8	10	1	8	0	5	1	9	1	3	5	7	9	1							
24	4	9	7	1	5	2	4	5	9	2	2	10	2	3	8	4	4	7	4	10	40	2655	10786	2667	42	4	6	8	10	1	9	7	10	3	1	0	6	6	2	2	9	10	2	3	10	9	6	5	6								
25	5	7	4	8	1	7	7	2	4	6	3	9	9	1	9	6	1	4	10	165	10785	43705	10780	170	10	6	5	3	9	8	10	4	9	10	10	3	3	10	0	9	2	4	4	1	5	10	3	6									
26	1	5	4	0	3	2	6	4	9	1	2	3	0	1	0	9	6	3	9	45	2663	10783	2658	47	10	2	0	4	5	4	6	8	5	2	5	10	4	5	9	8	1	1	1	5	0												
27	4	6	1	1	7	9	3	1	9	7	5	1	9	6	1	9	6	9	8	5	3	44	164	42	3	3	9	3	6	4	7	3	1	7	8	3	4	3	10	6	5	6	0	8	6												
28	1	9	4	1	3	7	6	10	9	9	3	0	4	5	5	4	6	7	5	6	7	2	1	0	10	1	7	5	1	9	2	9	4	9	5	0	6	7	1	3	4																
29	4	0	2	9	1	5	7	8	2	1	9	2	7	10	5	1	3	4	9	6	0	8	3	6	0	3	5	7	6	6	0	9	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3												
30	2	1	8	6	4	5	4	3	1	9	2	0	6	3	7	10	5	2	8	2	10	2	5	7	7	9	5	0	6	5	1	5	3	7	7	6	4	6	1	3	8	2	8	6													
31	3	1	2	5	8	4	5	3	1	10	4	0	7	4	3	2	3	9	5	8	3	1	9	5	7	5	0	8	6	0	1	5	5	6	0	5	9	1	3	4																	
32	3	5	4	8	1	3	9	3	5	9	1	9	6	9	8	5	3	6	8	4	4	1	2	2	6	5	1	2	0	9	6	8	5	0	6	7	1	3	4																		
33	3	8	3	6	7	9	3	0	1	3	8	2	3	8	5	1	1	7	9	7	5	7	5	2	0	3	5	4	1	8	1	2	2	0	10	3	2	1	3																		
34	5	7	0	9	3	5	1	8	0	8	7	6	5	6	5	3	7	5	7	5	10	9	10	8	10	4	1	3	3	6	1	4	5	8	9	4	24	2	2																		
35	7	6	6	8	9	7	2	8	9	5	6	6	8	3	9	6	2	1	9	2	4	8	3	7	4	10	4	8	3	12	17	8	7	8	0	8	8																				
36	1	10	2	8	8	3	0	7	1	5	3	4	2	7	1	0	5	1	5	0	6	1	9	6	0	3	5	0	5	0	6	1	0	1	1	1	1																				
37	7	9	7	2	5	4	8	0	2	5	3	1	3	3	4	9	0	7	2	5	9	3	6	2	5	3	8	5	1	8	6	2	0	10	23	94	25	8	7																		
3																																																									

2. 金星

位于Deh-Namak(今晚你将被带到那里进行观测考试)的一位观测者从2008年9月到2009年3月，连续七个月观测金星。观测过程中，使用专业的CCD照相机和图像处理软件，从高分辨率图像中提取了高精度的观测数据。给你的表中给出了观测期间得到的数据。

表2.1 说明：

- 第一列(Column1): 观测日期。
- 第二列(Column2): 与观测日期和时刻相应的日地距离，以天文单位(AU)为单位。本列数值是从高精度的数据表获得的。
- 第三列(Column3): 金星的相位，亦即从地球上看，金星盘面被太阳照亮部分的百分比。
- 第四列(Column4): 金星的距角，亦即从地球上看，太阳中心与金星中心之间的角距离，以度为单位。

表2.1

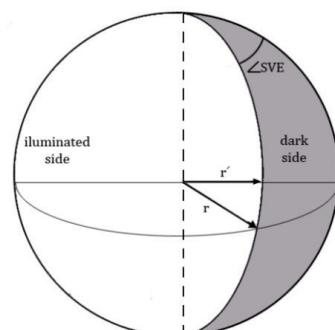
Column 1	Column 2	Column 3	Column 4
日期	日地距离 (AU)	相位 (%)	距角 (SEV, °)
20/9/2008	1.0043	88.4	27.56
10/10/2008	0.9986	84.0	32.29
20/10/2008	0.9957	81.6	34.53
30/10/2008	0.9931	79.0	36.69
9/11/2008	0.9905	76.3	38.71
19/11/2008	0.9883	73.4	40.62
29/11/2008	0.9864	70.2	42.38
19/12/2008	0.9839	63.1	45.29
29/12/2008	0.9834	59.0	46.32
18/1/2009	0.9838	49.5	47.09
7/2/2009	0.9863	37.2	44.79
17/2/2009	0.9881	29.6	41.59
27/2/2009	0.9904	20.9	36.16
19/3/2008	0.9956	3.8	16.08

- (a) 根据表中的数据，计算“太阳-金星-地球”的张角($\angle SVE$)。

这个角就是从金星上看，太阳和地球之间的角距。对于所有的观测日期，在你的答题纸上的表2.2中写下你算得的 $\angle SVE$ 。

提示：计算金星的相位时，金星盘面上被太阳照亮的部分与未被照亮的部分的分界线是椭圆弧。

- (b) 计算太阳-金星间的距离，以天文单位(AU)为单位，把对每次观测算得的数值填写在答题纸上的表2.2中。
- (c) 以观测日期为横轴，太阳-金星间的距离为纵轴画图。
- (d) 求出金星的近日距($r_{V,\min}$)和远日距($r_{V,\max}$)。
- (e) 计算金星公转轨道的半长径(a)。
- (f) 计算金星公转轨道的偏心率(e)。



第四届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

中国 北京 2010年9月15日

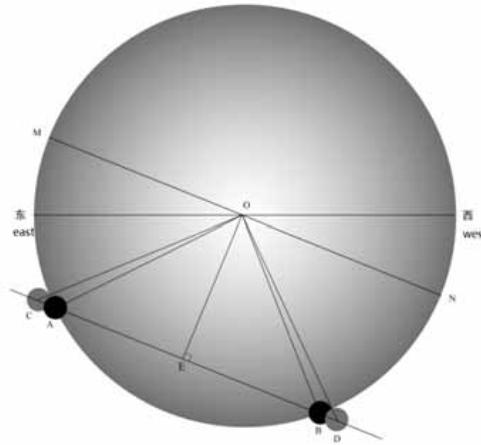
短问题

- 在双星系统中，主星的星等为1.0，次星的为2.0。计算这个系统的最大合星等。
- 如果一个具有太阳质量的天体表面的逃逸速度超过光速，它的半径是多少？
- 观测到一个类星体的红移是 $z = 0.20$ ，估算它的距离。哈勃常数是 $72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ 。
- 一个双星系统距离为10 pc，两个成员星之间最大的角距离是 $7.0''$ ，最小是 $1.0''$ 。假设轨道周期为100年，且轨道平面与视线方向垂直。如果一个成员星的轨道的半长轴对应于 $3.0''$ ，也就是 $a_1 = 3.0''$ ，那么用太阳质量来表示双星系统每个成员星的质量。
- 如果0.8%的太阳总质量能够在太阳的一生内转化为能量，估计太阳可能的最大寿命。假设太阳光度保持不变。
- 一艘飞船降落在一颗直径为 2.2 km 、平均密度为 2.2 g/cm^3 、自转可忽略不计的球形小行星表面。宇航员能在 2.2 小时内徒步沿着小行星的赤道走完一个圆周吗？在答题纸上写上“是”或“否”，并用公式和数字解释原因。
- 我们对寻找宜居系外行星感兴趣。实现这一点的一种方法是通过恒星变暗，这发生在系外行星穿过恒星盘并阻挡一部分光线时。估算一个类似地球的行星围绕着一个类似太阳的恒星运行时，最大的光度变化比率。
- 银河系中心被认为存在一个质量为 $M = 4 \times 10^6 M_\odot$ 的超大质量黑洞。天文学界正在努力分辨它的事件视界，这是一项具有挑战性的任务。对于一个不旋转的黑洞，事件视界就是史瓦西半径， $R_S = 3(M/M_\odot) \text{ km}$ 。假设我们有一个地球大小的望远镜（使用甚长基线干涉测量）。为了分辨黑洞的事件视界，我们应该采用多长的波长？已知太阳距离银河系中心 8.5 kpc 。
- 一颗恒星的I波段星等为22.0。双子望远镜（直径8米）每秒能探测到多少个来自此恒星的光子？假设总量子效率为40%，滤光片通带平坦。

滤光片	$\lambda_0 \text{ (nm)}$	$\Delta\lambda \text{ (nm)}$	$F_{\text{VEGA}} \text{ (W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}\text{)}$
I	8.00×10^2	24.0	8.30×10^{-12}

- 假设银河系圆盘中的G型主序星（例如太阳）遵循标高为300 pc的垂直指数密度分布，那么这些星从距离银面0.5到1.5 kpc的位置相对于银面处的密度变化的因子为多少？
- 2003年8月28日，火星在UT $17^{\text{h}} 56^{\text{m}}$ 处于大冲。下一次火星大冲将会是在2018年，估算那次大冲的日期。火星轨道的半长轴是1.524 AU。
- 疏散星团中两颗主序星的亮度相差2个星等。有效温度分别为6000 K和5000 K。估算它们的半径比。

13. 利用太阳的肉眼颜色估计太阳光球层的有效温度.
14. 一名观测者在地球北极附近观测到一次金星凌日. 金星凌日路径如下图所示. A、B、C、D都在金星凌日的路径上, 标记着金星圆盘的中心. 在A和B处, 金星的中心叠加在太阳圆盘的边缘上; C对应第一次接触, D对应第四次接触, $\angle AOB = 90^\circ$, MN与AB平行. 第一次接触发生在UT 9:00. 计算第四次接触的时间.



15. 平均而言, 月球的视直径略小于太阳, 因此日环食的频率略高于日全食. 对于地球上的观测者来说, 最长的日全食持续时间约为7.5分钟, 最长的日环食持续时间约为12.5分钟. 在这里, 最长的持续时间是从第二次接触到第三次接触的时间间隔. 假设我们在很长一段时间内计算这两种类型的日食的发生率, 估算出日环食和日全食发生的比率. 假设地球的轨道是圆形的, 月球轨道的偏心率为0.0549. 把所有的混合日食都算作日环食.

长问题

16. 从地球发射的飞船, 沿着地球日心轨道方向快速加速到最大速度, 使其轨道呈抛物线形, 太阳在其焦点处, 与地球轨道相切. 假设地球和火星的轨道为同一平面上的圆, 半径分别为 $r_E = 1 \text{ AU}$ 和 $r_M = 1.5 \text{ AU}$. 作出如下近似: 在飞行的大部分时间里, 只需要考虑来自太阳的引力.

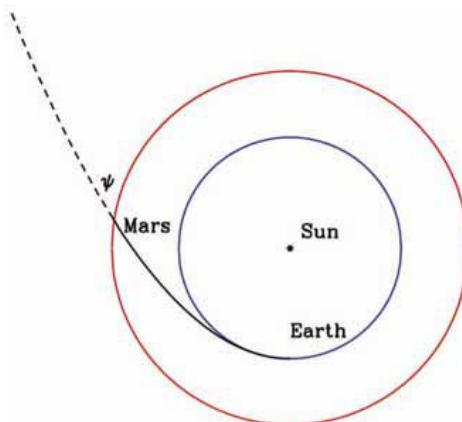


图1: 飞船的轨道(未按比例). 内圈是地球的轨道, 外圈是火星的轨道.

问题:

- (a) 在不考虑火星引力效应的情况下, 飞船的路径与火星轨道(见图1)之间的 ϕ 角是多少?
- (b) 假设火星在穿越时碰巧非常接近穿越点, 在火星观测者看来, 在飞船受到火星引力的明显影响之前, 飞船接近的速度和方向(相对于太阳)是多少?

17. 塔里斯(Taris)星球是科里比亚(Korribian)文明的发源地. 科里比亚物种是一种高度智慧的外星生命形式. 他们说的是科里比亚语. 科里比亚语词典见表1, 请仔细阅读! 科里比亚的天文学家研究天空已经有几千年的历史了. 他们的知识可归纳如下:

- ★塔里斯星围绕宿主星索拉(Sola)运行的轨道是一个圆形轨道, 距离为1塔里斯长度.
- ★塔里斯星在1塔里斯年内绕索拉运行一周.
- ★塔里斯星赤道与其轨道平面的倾角为 3° .
- ★1塔里斯年恰好有10塔里斯日.
- ★塔里斯星有两颗卫星, 分别命名为恩多(Endor)星和埃克斯托(Extor)星, 它们都有圆形轨道。
- ★恩多(围绕塔里斯)的恒星周期正好是0.2个塔里斯日.
- ★埃克斯托(围绕塔里斯)的恒星周期正好是1.6个塔里斯日.
- ★塔里斯和恩多之间的距离是1恩多长度.
- ★另一颗行星科鲁斯(Corulus), 也以圆形轨道围绕索拉运行. 科鲁斯有一颗卫星.
- ★索拉和科鲁斯之间的距离是9塔里斯长度.
- ★塔里斯年从索拉系中索拉的经度为零时开始.

科里比亚语	翻译
科鲁斯	环绕索拉的一颗行星
恩多	(i) 夜晚之神; (ii)塔里斯的一颗卫星
恩多长度	塔里斯和恩多之间的距离
埃克斯托	(i) 和平之神; (ii)塔里斯的一颗卫星
索拉	(i) 生命之神; (ii)塔里斯和科鲁斯围绕的恒星
索拉系	从塔里斯看到的索拉和科鲁斯的视轨迹
塔里斯	环绕索拉的一颗行星, 科里比亚人的家
塔里斯日	塔里斯上连续两个子夜间的时间间隔
塔里斯长度	索拉和塔里斯之间的距离
塔里斯年	塔里斯围绕索拉运动一周所用时间

表1: 科尔里比亚语词典

问题:

- (a) 绘制索拉系, 并指出所有的行星和卫星.
- (b) 塔里斯在一个塔里斯年期间绕其轴旋转多久一次?
- (c) 塔里斯和埃克斯托之间的距离用恩多长度表示是多少?
- (d) 科鲁斯的轨道周期用塔里斯年来表示是多少?
- (e) 当科鲁斯处于冲时, 塔里斯与科鲁斯之间的距离是多少?
- (f) 如果在某一特定的塔里斯年开始时, 科鲁斯和塔里斯处于冲, 那么从该年开始时起, n 个塔里斯日后科鲁斯的索拉系经度(在塔里斯上观测)将是多少?
- (g) 索拉、塔里斯和科鲁斯在冲后一天形成的三角形的面积是多少?

第四届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

中国 北京 2010年9月16日

问题I CCD图像

信息:

图1显示了一个望远镜上的CCD摄像机拍摄的天空的负片，其参数显示在附带的表格中(这是FITS数据文件标题的一部分).

图2由两张图片组成：一张是图1部分的放大图，另一张是前一段时间拍摄的同一部分天空的放大图.

图3展示了一幅星图，其中包括CCD图像中显示的区域.

图像中的恒星距离我们很远，理想情况下应该被视为点源. 然而，望远镜口径上的衍射和大气湍流的影响(被称为“视宁度”)模糊了来自恒星的光线.

恒星越亮，在背景天空的水平面上就能看到越多的分散光.

问题:

1. 从图像中识别任意5颗明亮的恒星(用罗马数字标记)，并在图像和星图上标记它们.
2. 在星图上标出照相机的视野.
3. 利用这一信息获得以毫米为单位的CCD芯片的物理尺寸.
4. 通过观察图2中恒星的图像，估算模糊效果的大小，以弧秒为单位. (请注意，由于打印所需的对比度变化，图像的直径似乎是恒星轮廓半峰全宽(FWHM)的3.5倍.)
5. 将计算结果与望远镜衍射圆的理论尺寸进行比较.
6. 视宁度为1弧秒通常被认为表示条件良好. 如果大气视宁度为1弧秒，则以像素为单位，计算恒星图像的大小，并将其与问题4的结果进行比较.
7. 在图1中标出了两个相对于背景恒星运动的物体. 其中一个物体(“物体1”)的运动速度很快，在图像上留下了清晰的轨迹. 另一个物体(“物体2”)的运动在放大图像(图2A)和稍后拍摄的另一个图像(图2B)上更容易看到.

利用第一部分的结果，确定两个物体在天空中的角速度. 假设物体沿着圆形轨道运动，请选择下面列表中的哪些陈述是正确的. (每答对一个问题就会得分，每答错一个问题就会被扣分.) 角速度不同的可能原因是：

- (a) 物体质量不同，
- (b) 物体与地球的距离不同，
- (c) 物体的轨道速度不同，
- (d) 物体速度的投影不同，
- (e) 物体1围绕地球旋转而物体2围绕太阳旋转.

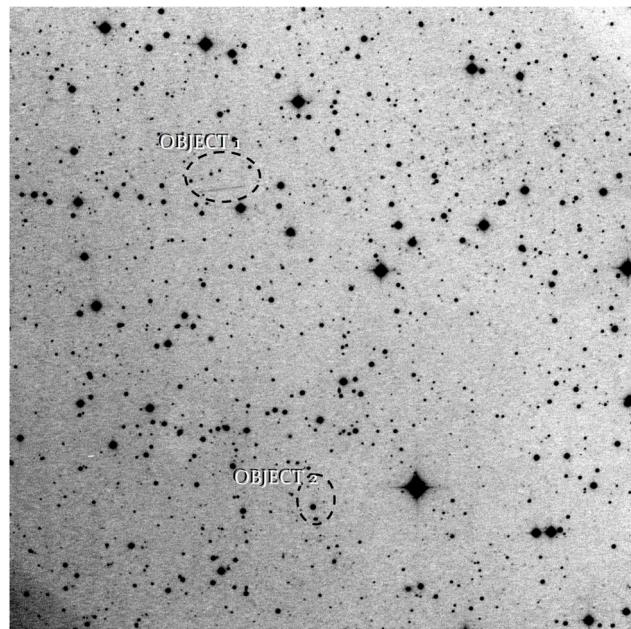
数据:

对图1，数据为，

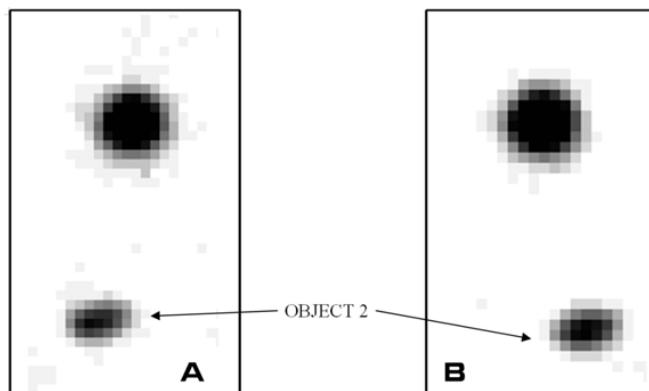
BITPIX =	16	/每像素字节数
NAXIS =	2	/轴数
NAXIS1 =	1024	/图像宽度(像素数)
NAXIS2 =	1024	/图像高度(像素数)
DATE-OBS =	‘2010-09-07 05:00:40.4’	/曝光中间时
TIMESYS =	‘UT’	/时间
EXPTIME =	300.00	/曝光时间(秒)
OBJCTRA =	‘22 29 20.031’	/图像中心赤经

OBJCTDEC = '+07 20 00.793' /图像中心赤纬
FOCALLEN = '3.180 m' /望远镜焦距
TELESCOP = '0.61 m' 望远镜口径

问题I 图1



问题I 图2

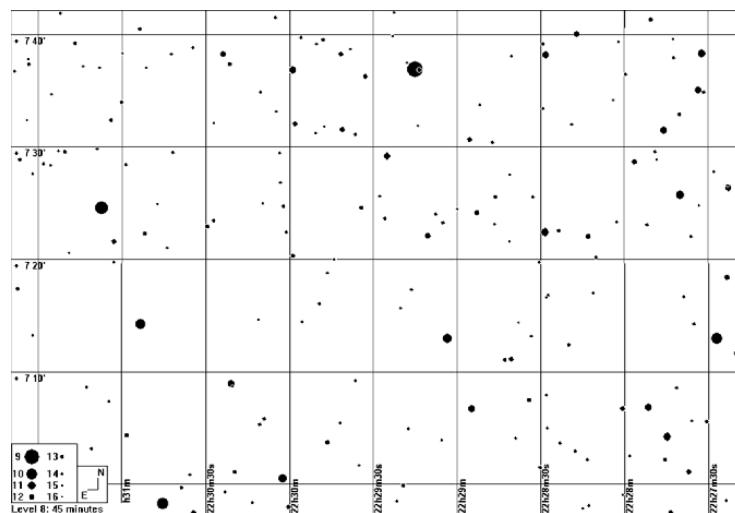


A: 前一段时间观测到的同一区域. 这幅图像的数据是:

DATE-OBS = '2010-09-07 04:42:33.3' /曝光中间时

B: 物体2周围图片1的放大,

问题I 图3



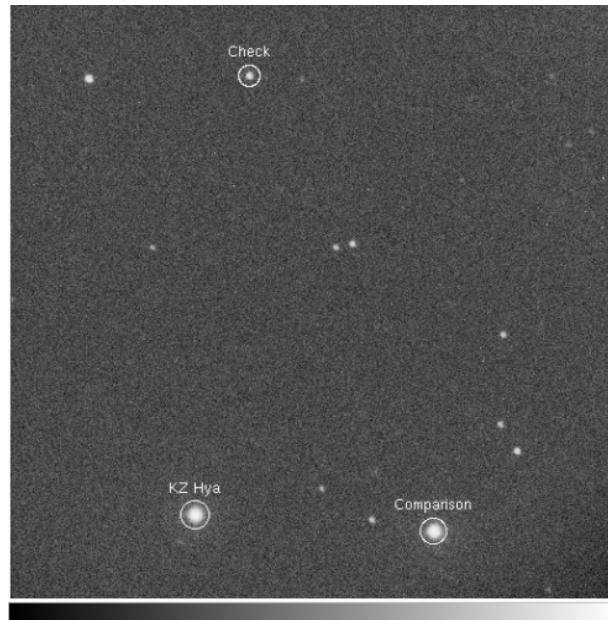
问题II 恒星的光变曲线

利用装有CCD摄像机的望远镜观测到一颗脉动的变星KZ Hydrael. 图1显示了KZ Hya的CCD图像, 与比较星和校对星一起标记. 表1列出了日心儒略日的观测时间, KZ Hya和校对星在V波段和R波段比较星的星等差.

问题:

- (1) 分别画出KZ Hya在V波段和R波段比较星的光变曲线.
- (2) KZ Hya在V波段和R波段的平均星等差分别是多少?
- (3) V波段和R波段的光度学精度分别是多少?
- (4) 估算KZ Hya在V波段和R波段的脉动周期.
- (5) 给出KZ Hya在V波段和R波段的脉动幅度的估计值.
- (6) V波段和R波段之间的相位延迟是多少, 就脉动周期而言?

问题II 图1: KZ Hya的CCD图像



第五届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

波兰 西里西亚 2011年8月28日

短问题

- 大多数单次出现的彗星直接从奥尔特云进入太阳系内部。估计一颗彗星完成这段旅程需要多长时间。假设彗星在距离太阳35000 AU的奥尔特云中，处于远日点。
- 如果球状星团边缘的逃逸速度是 6 km s^{-1} ，而且大多数恒星与太阳相似，那么估算一个直径为40 pc的球状星团中的恒星数量。
- 2011年3月9日，旅行者号探测器达到了距离太阳116.406 AU的地方，以 17.062 km s^{-1} 的速度运动。确定探测器的轨道类型：(a)椭圆，(b)抛物线，或(c)双曲线。从旅行者号上看到的太阳的星等是多少？
- 假设火卫一在火星的赤道面一个完美的圆形轨道上绕火星运行，给出火卫一在火星赤道上的一个点在地平线上的时间长度。使用以下数据：

火星半径 $R_{\text{Mars}} = 3393 \text{ km}$. 火星自转周期 $T_{\text{Mars}} = 24.623 \text{ h}$. 火星质量 $M_{\text{Mars}} = 6.421 \times 10^{23} \text{ kg}$. 火卫一轨道半径 $R_P = 9380 \text{ km}$.

- 与直径 $d = 10 \text{ 厘米}$ 的光学望远镜分辨率相同的，工作波长 $\lambda = 1 \text{ cm}$ 的射电望远镜的直径是多少？
- 潮汐力对地球产生力矩。假设在过去的几亿年中，这个力矩和恒星年的长度都是常数，分别为 $6.0 \times 10^{16} \text{ N m}$ 和 $3.15 \times 10^7 \text{ s}$ ，计算 6.0×10^8 年前一年中有多少天。半径为 R ，质量为 m 的均匀填充球的转动惯量为 $I = \frac{2}{5} mR^2$ 。
- 一颗卫星以圆形轨道绕地球运行。卫星的初始动量是由矢量 \mathbf{p} 给出的。在某一时刻，爆炸装置被引爆，给卫星一个额外的冲量 $\Delta \mathbf{p}$ ，大小等于 $|\mathbf{p}|$ 。设 α 为向量 \mathbf{p} 与 $\Delta \mathbf{p}$ 之间的夹角， β 为卫星矢径与矢量 $\Delta \mathbf{p}$ 之间的夹角。通过思考附加冲量 $\Delta \mathbf{p}$ 的方向，考虑是否有可能将轨道改变为下面给出的每一种情况。如果可能的话，在答题纸上标记 YES，并给出可能的 α 和 β 值。如果轨道不可能，则标记 NO。
 - 爆炸地点为近地点的双曲线。
 - 爆炸地点为近地点的抛物线。
 - 爆炸地点为近地点的椭圆形。
 - 一个圆。
 - 爆炸地点为远地点的椭圆。

请注意，对于 $\alpha = 180^\circ$ 和 $\beta = 90^\circ$ ，新的轨道将是一条直线，沿着这条直线，卫星将向地球中心自由落体。

- 假设尘埃颗粒是黑体，确定球形尘埃颗粒的直径，这些尘埃颗粒可以保持在距离太阳1 AU 处平衡太阳辐射压和万有引力。取尘埃颗粒密度为 $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 。

9. 星际间的距离比恒星的大小要大很多. 因此, 不含弥散物质的星团和星系基本上不会遮蔽它们后面的物体. 当我们朝一个面亮度 $\mu = 18.0 \text{ mag arcsec}^{-2}$ 的星系方向看时, 估算天空被星星遮蔽的比例. 假设星系由类似于太阳的恒星组成.
10. 估计一个质子穿透地球磁层所需的最小能量. 假设初始穿透时垂直于 $30 \mu\text{T}$ 的、厚度 $1.0 \times 10^4 \text{ km}$ 恒定磁场. 画出粒子轨迹的草图. (注意, 在如此高的能量下, 动量可以用表达式 E/c 来代替. 忽略任何辐射效应).
11. 根据一个红移 $z = 6.03$ 的星系的光谱, 我们确定这个星系中的恒星的年龄在5.6亿年到6亿年之间. 这个星系中恒星形成的时候 z 为多少? 假设宇宙现在的年龄是 $t_0 = 13.7 \times 10^9 \text{ 年}$, 宇宙膨胀的速率是由一个宇宙学常数 $\Lambda = 0$ 的平面宇宙模型给出的. (在这样的模型中, 比例因子 $R \propto t^{2/3}$, 其中 t 是大爆炸之后的时间.)
12. 由于地轴的岁差, 在固定经纬度的位置可以看到的天空区域会随着时间而变化. 有没有可能, 在某个时间点, 天狼星不会像从克拉科夫看到的那样升起, 而老人星会升起又落下? 假设地轴的轨迹是一个角度为 47° 的圆锥. 克拉科夫位于北纬 50.1° , 这些恒星目前的赤道坐标(赤经和赤纬)是:
天狼星(α CMa): $6^{\text{h}}45^{\text{m}}, -16^\circ43'$
老人星(α Car): $6^{\text{h}}24^{\text{m}}, -52^\circ42'$
13. 赤道坐标系 (α, δ) 中的黄道方程具有以下形式:
- $$\delta = \arctan(\sin \alpha \tan \varepsilon),$$
- 其中 ε 是天球赤道与黄道面的夹角. 在地平坐标系 (A, h) 下, 对于纬度 $\varphi = 49^\circ34'$ 的观测者, 在当地恒星时 $\theta = 0^{\text{h}}51^{\text{m}}$, 找到一个类似的关系式 $h = f(A)$ 来描述银道面.
14. 估算每秒钟通过地球表面垂直于太阳的 1 m^2 面积的太阳中微子的数量. 你可以利用太阳中的每次聚变反应产生 26.8 MeV 的能量和2个中微子这一事实.
15. 考虑到宇宙背景辐射在宇宙演化过程中具有黑体的光谱, 确定其温度如何随着红移 z 而变化. 特别是, 给出在 $z \approx 10$ (目前最远观测到的天体)时背景辐射的温度. 目前宇宙背景辐射的温度是 2.73 K .

长问题

1. 观测到一颗围绕恒星HD209458以84小时为周期运行的行星, 其凌日持续时间为180分钟. 还测量了行星大气中吸收线的多普勒频移, 对应于凌日开始和结束之间(对观测者而言) 30 km/s 的径向速度差. 假设圆形轨道正好与观测者视线方向平行, 求出该恒星的近似半径和质量以及该行星轨道的半径.
2. 在一个红移为 $z = 0.500$ 的星系团范围内, 我们观察到一个看起来像正常椭圆的星系, B波段滤光片中的视星等为 $m_B = 20.40 \text{ mag}$. 对应于 $z = 0.500$ 的红移的光度距离是 $d_L = 2754 \text{ Mpc}$. 椭圆星系在 250 nm 到 500 nm 波长范围内的光谱能量分布(SED)非常近似于这个公式:
- $$L_\lambda(\lambda) \propto \lambda^4$$
- (也就是说, 物体光度的谱密度, 也称为单色光度, 与 λ^4 成正比.)

(a) 在B滤光片中, 这个星系的绝对星等是多少?

(b) 它可以是这个星系团的成员吗? (在最终计算的旁边写YES或NO)

提示: 尝试建立一种关系, 来描述小波长间隔下的谱密度流量对距离的依赖性. 正常的椭圆星系的绝对星等最大值为-22 mag.

3. 天文馆计划“指南”给出了两颗太阳质量恒星的以下数据:

恒星	1	2
赤经	14 ^h 29 ^m 44.95 ^s	14 ^h 39 ^m 39.39 ^s
赤纬	-62°40'46.14"	-60°50'22.10"
距离	1.2953 pc	1.3475 pc
赤经自行	-3.776 arcsec/year	-3.600 arcsec/year
赤纬自行	0.95 arcsec/year	0.77 arcsec/year

根据这些数据, 确定这些恒星是否形成一个引力束缚系统.

假设恒星在主星序上. 如果没有与最终计算结合在一起, 请写上YES或NO.

注意: 赤经的自行运动已经根据恒星的赤纬进行了修正.

第五届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

波兰 西里西亚 2011年8月30日

1. 对最小值时的分析

图1展示了食双星V1107 Cas的光线曲线，它被归类为W Ursae Majoris型。

表1列出了观测到的光变化最小值。这些列包括：最小值的数目、观测到最小值的日期、以日心儒略日表示的最小值时间和误差(以一天的分数表示)。

使用这些数据：

- 确定V1107 Cas的初始周期，假设恒星的周期在观测间隔期间是恒定的。假设一个晚上的观测是连续的。凌日的持续时间可以忽略不计。
- 作出(O-C)图(“观测-计算”)表示最小值的时间，如下：在x轴上标出自选定的初始时刻 M_0 以来经过的周期数(“历元”); 在y轴上标出观测到的最小时刻与用公式(“星历表”)计算出的最小时刻之间的差额：

$$M_{\text{calc}} = M_0 + P \times E$$

其中，历元 E 恰好是一个整数或半整数，而 P 是以天为单位的周期。

- 利用这个(O-C)图，改进初始时刻 M_0 和周期 P 的确定，并估算其值的误差。
- 计算2011年9月1日19时至2011年9月2日02时之间在日心儒略日中给出的V1107 Cas的预测最小值时数。

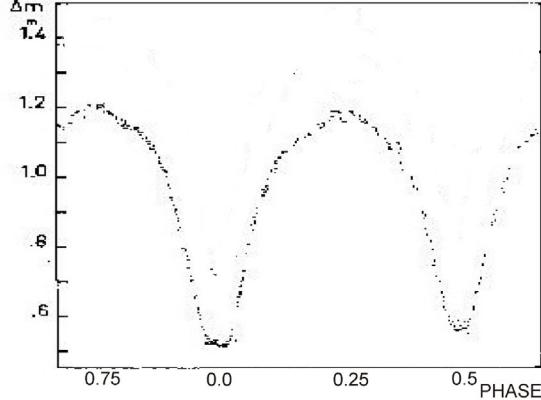


Fig. 1: Light curve of V1107 Cas.

序号	最小值日期 (UT)	最小值时间 (日心儒略日)	误差
1	2006 12 22	2 454 092.4111	0.0004
2	2006 12 23	2 454 092.5478	0.0002
3	2007 09 23	2 454 367.3284	0.0005
4	2007 09 23	2 454 367.4656	0.0005
5	2007 10 15	2 454 388.5175	0.0009
6	2007 10 15	2 454 388.6539	0.0011
7	2008 08 26	2 454 704.8561	0.0002
8	2008 11 05	2 454 776.4901	0.0007
9	2009 01 03	2 454 835.2734	0.0007
10	2009 01 15	2 454 847.3039	0.0004
11	2009 11 15	2 454 847.4412	0.0001
12	2009 11 16	2 454 847.5771	0.0004

表1: V1107 Cassiopeae观测到的最小值时间

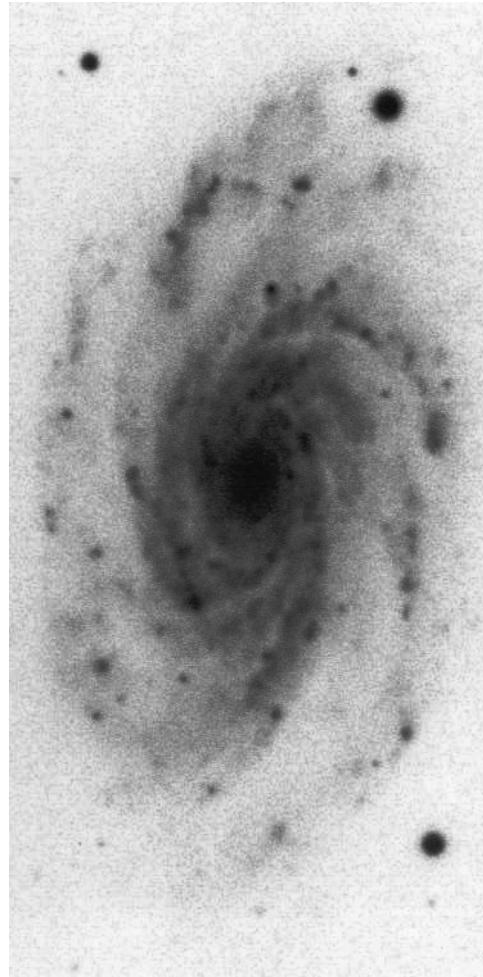
2. 星系称重

附上的图片显示了距离40 Mpc的旋涡星系NGC 7083及其部分光谱。光谱仪的狭缝与星系图像的主轴线对齐。光谱的x轴代表波长，y轴代表星系核心发射区域的角距离，其中1像素 = 0.82角秒。可以看到两条明亮的发射线，静止波长为 $\lambda_1 = 6564$ nm, $\lambda_2 = 6584$ nm。

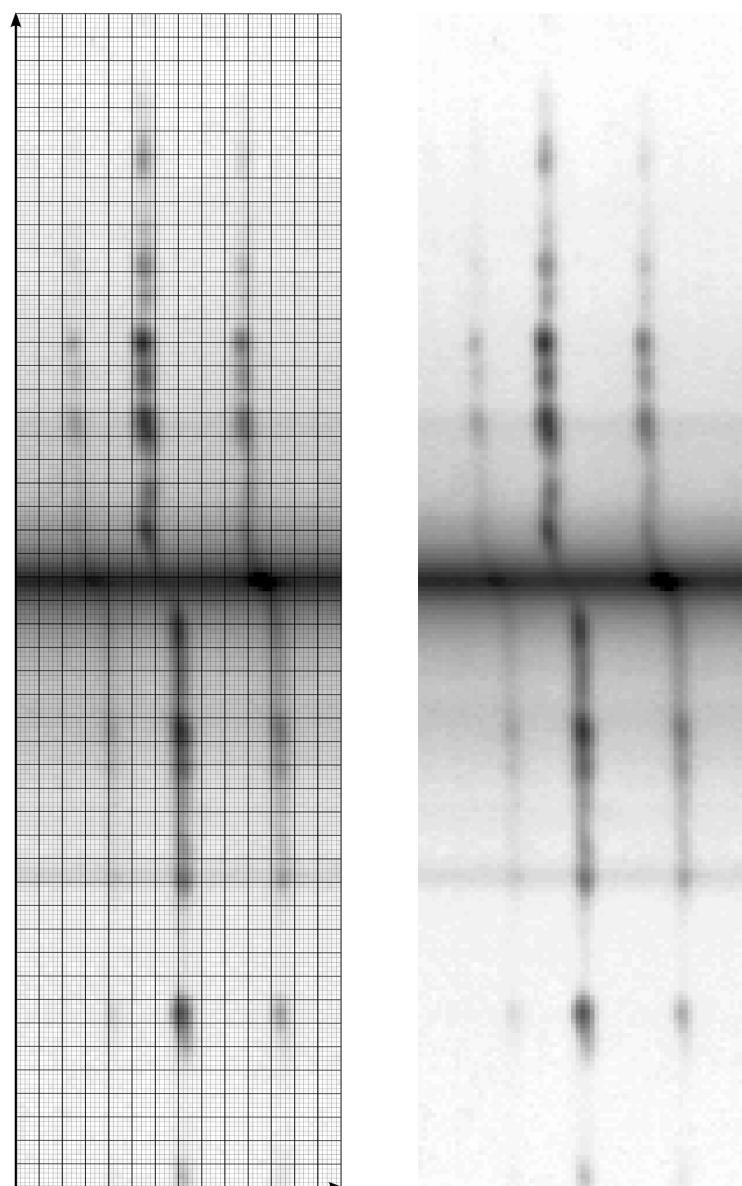
利用光谱来绘制星系的旋转曲线，并估计中央核球的质量。

假设：中央核球呈球形。

这张星系照片有比例正确。



NGC 7083



NGC 7083光谱. 网格表示像素

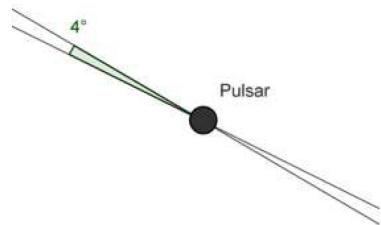
第六届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

巴西 里约热内卢 2012年8月8日

短问题

- 在巴西国立天文台($22^{\circ}54'S$, $43^{\circ}12'W$) 32 cm 望远镜的圆顶上有一个垂直的日晷，日晷朝北。日晷表盘位于东-天顶-西构成的平面上，日晷指针与地球自转轴平行。问：(i)一年中何时(指明月份和季节)，太阳赤纬为多少时起，这个日晷白天至少有一段时间失效？(ii)一年中何时(指明月份和季节)，太阳赤纬为多少时起，这个日晷在白天完全失效？
- 计算地球上一个恒星日的长度。如果地球自转方向突然反向，但自转速度保持不变，新的太阳日和恒星日长度将变为多少？以现在的时间单位量度(即太阳日的时、分、秒制)。
- 火星连续两次冲日的时间间隔为多少？假定火星和地球的公转轨道为圆。
- 如果月球的反照率为1，满月时月球的视星等为多少？
- 计算地球和太阳平均密度之比，只能根据以下信息：
 - 从地球上看到的太阳角直径；
 - 地球表面引力加速度；
 - 一年的长度；
 - 地球上(同经度处)纬度相差 1° ，相应的距离相差大约 111 km 。
- 太阳辐射的绝大部分能量是通过其核心区进行的所谓“P-P”链(质子-质子链式核反应)产生的，“P-P”有三种分支反应。产能最多的反应是 $2^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + 2^1\text{H}$ 。计算该反应释放的能量(以Mev为单位)以及参与反应的粒子质量减少的百分比。
- 高光度蓝变星(LBV)的视亮度变化很大，但其热星等保持不变，是常量。假设一颗LBV恒星的视亮度最大时对应的黑体温度为 5000 K ，视亮度最小时对应的黑体温度为 30000 K 。计算视亮度达到最大和最小时恒星半径之比。
- 一颗脉冲星距离地球 1000 pc ，光度为太阳的 10000 倍，从脉冲星的两极发出均匀的成圆锥状的射电束，即喷流，喷流的张角即圆锥的顶角 $\alpha = 4^{\circ}$ (如图)。假定脉冲星自转轴与喷流的轴夹角为 30° ，对于地球上的观测者，脉冲星喷流的方向是完全随机的，在地球上能够探测到这颗脉冲星发出的喷流的几率是多大？假设我们能够探测到它，这颗脉冲星的视热星等为多少？
- 一颗年老的行星状星云中心有一颗白矮星(WD)，距离地球 50 pc 。在这个行星状星云后面，与这个行星状星云的方向严格一致，距离地球 150 pc 处还有一颗一模一样的白矮星。假定两颗白矮星的绝对热星等都为 $+14.2$ 等，本征色指数都为 $B - V = 0.300$ 和 $U - V = 0.330$ 。考虑星际介质和行星状星云的消光效应。当我们对较近距离的白矮星(位于行星状星云中心的那颗)进行测光时，测得其色指数为 $B - V = 0.327$ 和 $U - B = 0.038$ 。在行星状星云所在的银河系中，消光系数 $A_V = 0.5$ ， $A_U = 0.1$ ， $A_B = 0.2$ ， $A_V = 0.5$ ， $A_U = 0.1$ ， $A_B = 0.2$ 。



河系部分, U、B、V三个波段的星际消光分别为每千秒差距(kpc) 1.50等、1.23等和1.00等. 计算距离较远的那颗白矮星三个色指数的测量值应为多少?

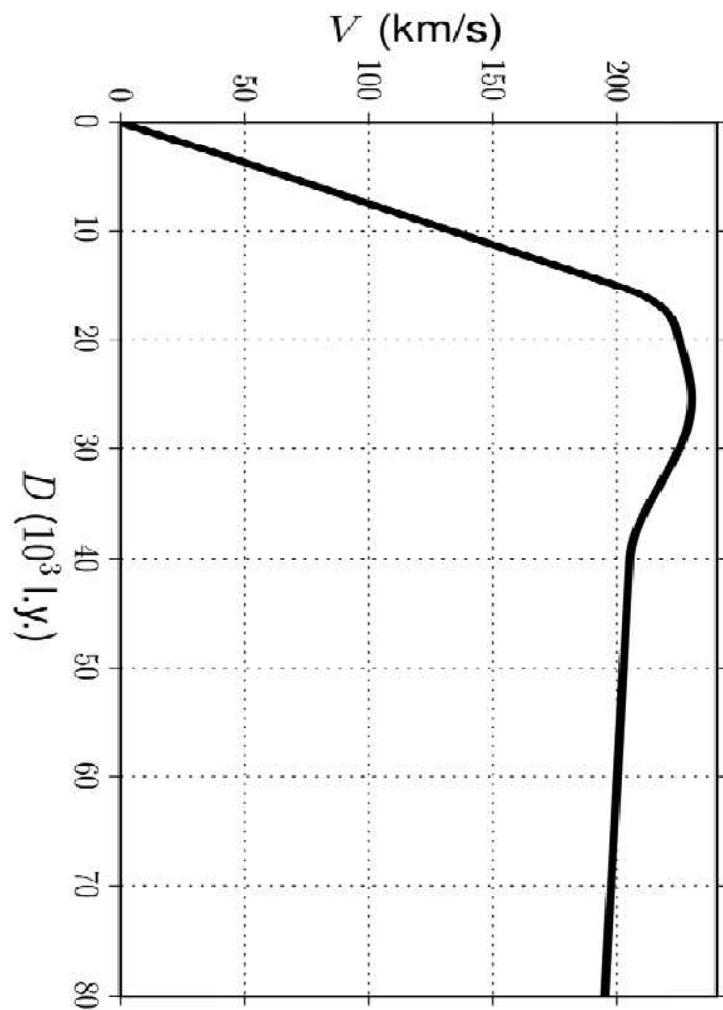
10. 假定现在的宇宙完全由密度参数 $\Omega_0 = 1$ 决定, 即不包含暗能量, 目前宇宙的温度为2.73 K. 已知宇宙的温度与半径(尺度因子)成反比, 计算从现在开始多长时间后宇宙的温度会降低0.1 K.
11. 由于木星摄动, 会使得太阳的运动产生周期性振荡. 假设观测者位于巴纳德星(Barnard's star), 求他看到的这种由木星引起的太阳运动的周期性振荡的张角为多大? 振荡的周期为多少年?
12. 如果把望远镜放在日地系统的一个拉格朗日点(L4或者L5)处, 为了能够在光学和近红外波段探测到由于月球引力造成的地球相对于公转轨道面(黄道面)的摆动, 望远镜的直径至少为多大?
13. 一位南半球的观测者考虑南黄极升起的情形, 他觉得如果天空中的恒星围绕南黄极旋转而不是像通常那样绕着南天极旋转会非常有趣. 画图说明为了看到恒星以与绕南天极旋转相同的方向和速度绕南黄极旋转, 这位观测者该如何移动. 画出这位观测者一整天的运动轨迹. 计算出他第一次穿越赤道时的速度, 包括速度大小和方向.
14. 位于希腊Salonika ($\varphi = +40.65^\circ$)的观测者观测到一个非常明亮的物体($\alpha = 5h55min$, $\delta = +7.41^\circ$, $m = 0.45$)到达上中天后就诡异地脱离了天球并以恒定的切向速度运动. 假定地球是静止的, 天球在旋转, 这个物体将一直保持上述的运动直至永远. 求该物体最后的地平坐标(即高度和方位角)为多少? 多长时间之后该物体的视星等会变为6.00?
15. 前两天我们去过的基督像(Redeemer)是巴西著名的标志. 但巴西和世界各地有很多类似的地标. 假设在Borradaile岛上($\varphi = -66.55^\circ$)也有一个一模一样的基督像, Borradaile岛是人类踏上南极圈的第一个地方.
假定Borradaile岛恰好位于南极圈上, 定义地平面上的笛卡尔坐标系(Oxy), 原点 O 为基督像的基座, Ox 轴为东西方向, Oy 轴为南北方向. 在南半球, 太阳高挂的某个“至日”那天基督像的影长最短, 忽略太阳当日赤纬方向的移动, 写出描述基督像顶端在地平面投影所画出的圆锥曲线的方程. 忽略大气效应.

长问题

1. 一位地球上的天文学家对一个球状星团进行观测, 球状星团的角直径为 α , 成员星数目为 N , 每个成员星的绝对星等都为 M_0 , 球状星团与地球的距离为 D . 在这个球状星团的中心有一个生物学家.
 - 1.1 天文学家和生物学家分别能够看到的全部恒星的合成星等相差多少? 假定星团内恒星的空间分布完全均匀, 生物学家能够看到整个星团的所有成员星.
 - 1.2 如果地球上的天文学家想通过望远镜看到与生物学家看到的同等亮度的球状星团, 望远镜的直径至少为多大?
 - 1.3 如果生物学家的视场直径也为 α , 那么二者看到的视星等之差为多少?
2. 天文学家研究一个旋涡星系, 其相对于天空背景的倾角为 90° , 即侧向(“edge-on”), 视星等为8.5. 天文学家测量了相对于星系中心的自转速度和径向距离, 并给出了星系的旋转曲线.
 - 2.1 用由两条直线构成的连续函数 $V(D)$ 来拟合下图给出的旋转曲线.

- 2.2** 使用相同的观测数据, 天文学家估算出星系盘的压力波自转周期为星系盘的物质自转周期的一半. 估算一条旋臂围绕星系中心旋转一周的时间(利用2.1建立的连续函数).
- 2.3** 利用Tully-Fisher关系(见常数表)计算这个星系的距离.
- 2.4** 计算在这个星系的光谱中观测到的氢线波长的最大值和最小值. 氢线的静止波长为 656.28 nm. 提示: 还要考虑宇宙学膨胀.
- 2.5** 利用下图, 计算这个星系直到半径为 3×10^4 光年处的质量.
- 2.6** 计算这个星系的成员星数目, 假定:
- 成员星的平均质量为1个太阳质量, 三分之一的重子物质是恒星
 - 星系中重子与暗物质所占比例与整个宇宙相同(见常数表)

图1



第六届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

巴西 里约热内卢 2012年8月4日~14日

问题1

关于小行星的光度测量的一些事实:

- 小行星是太阳系中形状不规则的小天体, 它们围绕太阳运行, 轨道近似椭圆.
- 它们在地球上某一时刻观测到的亮度取决于太阳照射的表面积和观测者可以看到的小行星部分. 两者随着小行星的移动而变化.
- 太阳光被小行星表面反射的方式取决于其质地以及太阳、小行星和观测者之间的角度(相位角), 这个角度随地球和小行星沿轨道运行而变化. 特别是, 表面被细尘埃覆盖的小行星(称为浮土)在 φ 接近于零的相位角时(也就是说, 当它们接近于冲时), 亮度会急剧增加.
- 由于观测到的任何来源的流量都随着距离的平方而减小, 所以观测到的小行星的星等也取决于它在观测时离太阳和观测者的距离. 它们的视星等 m 在大气层外为

$$M(t) = M_r(t) + 5 \log(RD)$$

其中 m_r 通常被称为约化星等(意思是如果小行星与太阳和地球的距离缩小到1天文单位时的星等), 并且只取决于可见光照射的表面积和相位角效应. R 和 D 分别是日心距和地心距.

现在考虑下面的场景. 某一小行星在轨道不同点的三个不同夜晚分别获得了该小行星的光变曲线, 每次在该小行星的同一视野内观测到一个光度标准. 表1显示了该小行星在每个夜晚的几何位置(以度为单位的相角 φ , 以及与该小行星一起观测的标准光度恒星的校准星等). 考虑所有的影响后, 将校准的星等作为最终的星等.

表2、表3和表4列出了每个晚上每次观测相对于第一次观测的时间间隔(以小时为单位)、大气质量、小行星的仪器星等和恒星的仪器星等.

大气质量是沿着视线的大气层的无量纲厚度, 在观测天顶时等于1.

1. 为每一组画出星等-大气质量图
2. 计算每个晚上的消光系数(见文末附录A)
3. 这些观测是否有一个晚上受到云层的影响? 把你的答案表达为: (a) A晚, (b) B晚, (c) C晚, (d) 没有.
4. 为小行星的每一组观测数据画出校准的星等-时间图(见附录B).
5. 确定每晚的自转周期. 考虑这个小行星的光变曲线有两个最小值和两个最大值, 半周期是两个最大值和两个最小值之间的间隔的平均值.
6. 确定每个夜晚的光变曲线的振幅(从最大到最小的差)
7. 作出已校准的约化星等 M_r -相位角 φ (使用每条光变曲线的平均值)图
8. 计算相位曲线的角系数(已校准的约化星等与相位角的关系图), 只考虑远离对方的点(参见上面关于小行星光度测量的事实的第3项)
9. 是否有任何理由假定表面覆盖着细小的灰尘(浮土)? 回答YES/NO.

表1

夜晚	D	R	φ	M_{star}
A	0.36	1.35	0.0	8.2
B	1.15	2.13	8.6	8.0
C	2.70	1.89	15.6	8.1

表2: A晚

Δt	大气质量	m_{ast}	m_{\star}
0.00	1.28	7.44	8.67
0.44	1.18	7.38	8.62
0.89	1.11	7.34	8.59
1.33	1.06	7.28	8.58
1.77	1.02	7.32	8.58
2.21	1.00	7.33	8.56
2.66	1.00	7.33	8.56
3.10	1.01	7.30	8.56
3.54	1.03	7.27	8.58
3.99	1.07	7.27	8.58
4.43	1.13	7.31	8.61
4.87	1.21	7.37	8.63
5.31	1.32	7.42	8.67
5.76	1.48	7.49	8.73
6.20	1.71	7.59	8.81
6.64	2.06	7.69	8.92
7.09	2.62	7.87	9.14
7.53	3.67	8.21	9.49

表3: B晚

Δt	大气质量	m_{ast}	m_{\star}
0.00	1.28	13.24	8.38
0.44	1.18	13.21	8.36
0.89	1.11	13.13	8.34
1.33	1.06	13.11	8.33
1.77	1.02	13.11	8.32
2.21	1.00	13.15	8.32
2.66	1.00	13.17	8.32
3.10	1.01	13.17	8.32
3.54	1.03	13.13	8.33
3.99	1.07	13.15	8.34
4.43	1.13	13.14	8.34
4.87	1.21	13.14	8.37
5.31	1.32	13.21	8.38
5.76	1.48	13.30	8.43
6.20	1.71	13.34	8.47
6.64	2.06	13.39	8.54
7.09	2.62	13.44	8.65
7.53	3.67	13.67	8.87

表4: C晚

Δt	大气质量	m_{ast}	m_{\star}
0.00	1.28	11.64	8.58
0.44	1.18	11.53	8.54
0.89	1.11	11.56	8.60
1.33	1.06	11.49	8.52
1.77	1.02	11.58	8.48
2.21	1.00	11.79	8.63
2.66	1.00	11.67	8.53
3.10	1.01	11.53	8.46
3.54	1.03	11.47	8.48
3.99	1.07	11.63	8.67
4.43	1.13	11.51	8.51
4.87	1.21	11.65	8.55
5.31	1.32	11.77	8.61
5.76	1.48	11.88	8.75
6.20	1.71	11.86	8.78
6.64	2.06	12.03	9.03
7.09	2.62	12.14	9.19
7.53	3.67	12.63	9.65

问题2

造父变星是一种非常明亮的变星，其平均绝对星等是其脉动周期的函数。这使得天体物理学家可以很容易地通过观测到的视光度的变化来确定它们的本征光度。

下面是一个造父变星数据的表。 P_0 是以天为单位的脉动周期，而 $\langle M_V \rangle$ 是平均目视绝对星等。

造父变星	P_0 (天)	$\langle M_V \rangle$
SU Cas	1.95	-1.99
V1726 Cyg	4.24	-3.04
SZ Tau	4.48	-3.09
CV Mon	5.38	-3.37
QZ Nor	5.46	-3.32
α UMi	5.75	-3.42
V367 Sct	6.30	-3.58
U Sgr	6.75	-3.64
DL Cas	8.00	-3.80
S Nor	9.75	-3.95
ζ Gem	10.14	-4.10
X Cyg	16.41	-4.69
WZ Sgr	21.83	-5.06
SW Vel	23.44	-5.09
SV Vul	44.98	-6.04

- (1) 将所有造父变星绘制成散点图， $\log_{10}(P_0)$ 为横坐标， $\langle M_V \rangle$ 为纵坐标。
- (2) 用最小二乘法拟合 $\langle M_V \rangle - \log_{10}(P_0)$ 图的直线。这个公式可以让我们从任何一颗造父变星的脉动周期中得到绝对星等。
- (3) 图1和图2显示了两颗造父变星的光变曲线。利用现有的数据来估计到这两个造父变星

的距离. 同时估算距离测定的不确定度(不需要精确的公式).

- (4) 比较两颗恒星的距离与一个星系的典型大小之间的差异, 这两颗恒星是否有可能在同一个星系中? 请注明YES或NO.

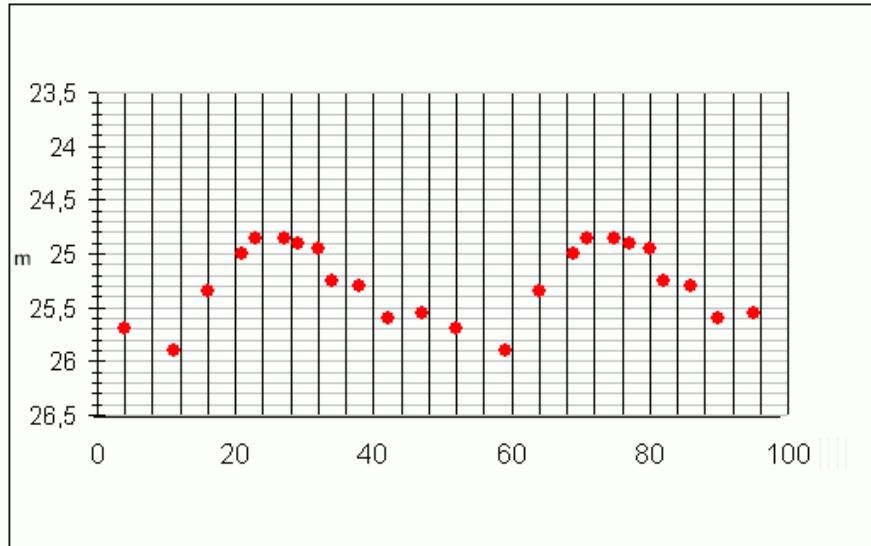


图1

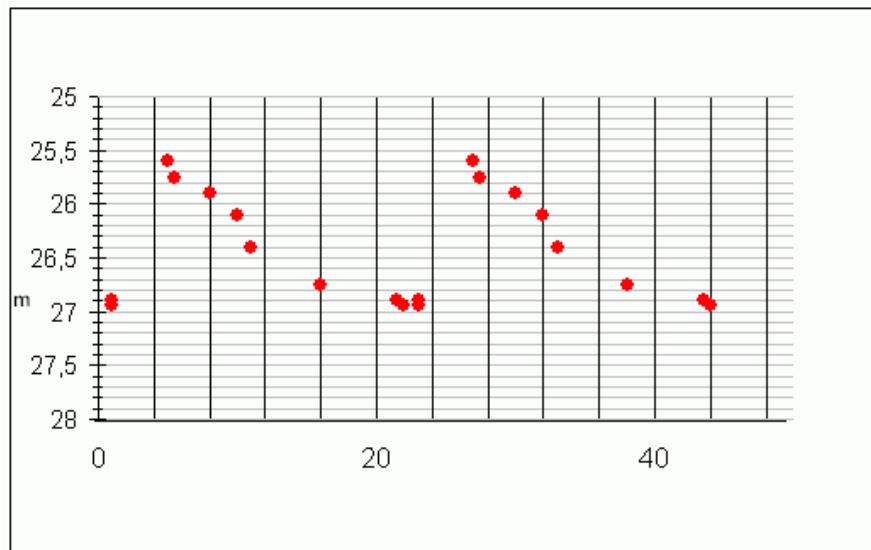


图2

附录A: 消光系数

大气之外的星等是:

$$M = m - A \cdot X + B,$$

其中 A 是消光系数, B 是夜间的零点系数, X 是观测的大气质量, m 是仪器星等(即直接从图像中获得的星等)

附录B: 校准的较差星等

如果标准星与该天体在相同画面内, 则可通过以下方法获得该物体的校准星等:

$$M_{\text{ast}} = m_{\text{ast}} - m_{\text{star}} + M_{\text{star}}$$

附录C: 角系数的最小二乘估计

已知的直线为

$$y_i = \alpha + \beta x_i, \quad i = 1..n$$

给出 β 的最小二乘估计量

$$\beta = \frac{\sum_i^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_i^n x_i \sum_i^n y_i}{\sum_i^n x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i^n x_i)^2}$$

第七届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

希腊 沃勒斯 2013年7月27日~8月5日

短问题

1. 考虑无损耗反照，不考虑温室效应，假设地球是绝对黑体且公转轨道是圆形，那么地球的表面平均温度是多少？
2. 假设我们观测一颗热的类木行星绕一颗恒星旋转，他们的平均距离是 $d = 5 \text{ au}$ ，这个行星系统距离我们 $r = 250 \text{ pc}$ 。那么我们至少要使用多大口径 D 的望远镜才能分辨这两个天体？假设在可见光波段观测($\lambda \sim 500 \text{ nm}$)，地球大气外望远镜光学系统完美。
3. 太阳在离开主序前大约可以存在100亿年，如果太阳的质量是现在的5倍，估算它作为主序星的时间 t_2 。(质光关系见图1)

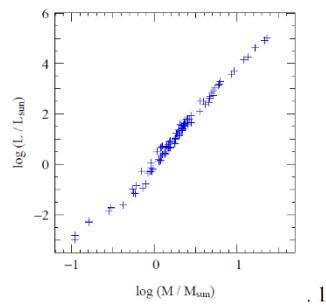


图1：质量-光度关系

4. 图2展示了经典造父变星绝对星等和光变周期的关系。图3是本星系群某星系中的一颗经典造父变星的光变曲线(视星等-周期天数). (a)利用两张图估算这颗造父变星与我们的距离. (b)用星际消光系数 $A = 0.25$ 来修正这个距离.

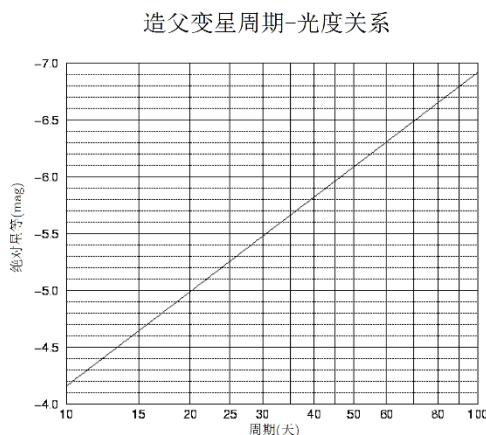


图2

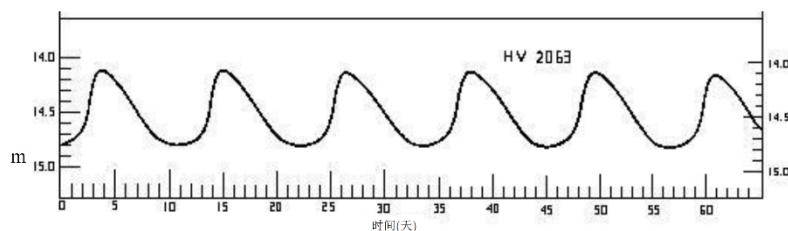


图3

5. 在光学波段一个距离我们 41.67 Mpc 的星系, 巴尔莫H α 线($\lambda_0 = 656.3 \text{ nm}$)红移至 $\lambda = 662.9 \text{ nm}$. (a)用这个距离计算哈勃常数 H_0 . (b)用你的结果估算宇宙年龄.
6. 一颗恒星的有效温度 $T_{\text{eff}} = 8700 \text{ K}$, 绝对星等 $M = 1.6 \text{ mag}$, 视星等 $m = 7.2 \text{ mag}$. 计算: (a)它的距离 r ; (b)光度 L ; (c)半径 R (不考虑消光).
7. 一颗恒星视星等 $m_V = 12.2 \text{ mag}$, 视差 $\pi = 0''.001$, 有效温度 $T_{\text{eff}} = 4000 \text{ K}$, 热改正B.C. = 0.6 mag. (a)计算它的光度, 以太阳光度为单位. (b)这颗恒星是(i)红巨星 (ii)蓝巨星 (iii)红矮星, 将(i)、(ii)或(iii)写在答题纸上.
8. 一个双星系统的a星和b星亮度比为2. 该系统在地球上观测就像是一颗5等星, 计算两颗星的视星等 m_a 和 m_b .
9. 马德里地理纬度 40° , 计算一颗天顶距 $z = 30^\circ$, 方位角 $A = 50^\circ$ (南点起算)星的赤纬和时角.
10. 在银河系的中心, 人马座A*强射电源内有一个大质量黑洞. 一个天文学家团队测出了该射电源内一颗绕黑洞旋转的恒星的角距离为周期 $0.12''$ (角秒), 公转周期为15年, 以太阳质量为单位计算这个黑洞的质量. 假设是圆轨道.
11. 塞萨洛尼基地理纬度 $\varphi_\Theta = 40^\circ 37'$. 尽可能精确地计算满月在这里的最大地平高度 a_M .
12. 作为一个双星系统中的主星, 天狼星A是天空中最亮的恒星, 视星等 $m = -1.47$, 半径 $R_A = 1.7 R_\odot$. 天狼星B为它的伴星, 在直接被观测之前, 著名数学家和天文学家Friedrich Bessel在1844年就已经推算出它的存在. 假设天狼星B与主星光谱型相同, 暗10个星等($\Delta m = 10$), 计算天狼星B的半径.
13. 由于雾很厚, 最近在伦敦看到的太阳的视星等几乎与晴夜的满月视星等相当. 计算这个雾的消光指数函数幂系数 τ , 它经常被称为“光深”.
14. 当织女星($\delta = 38^\circ 47'$)在里斯本($\lambda_2 = -00h36m$, $\varphi_2 = +39^\circ 43'$)上中天时, 计算它在塞萨洛尼基($\lambda_1 = 1h32m$, $\varphi_1 = 40^\circ 37'$)的时角 H 和天顶距 z .
15. 通过光谱观测我们得到了3个遥远星系的多普勒红移:
- | 星系 | 红移, z |
|---------|---------|
| 3C 279 | 0.536 |
| 3C 245 | 1.029 |
| 4C41.17 | 3.8 |
- (a) 计算它们的退行速度. (1)用经典公式; (2)用近似公式 $v = c \cdot \ln(1 + z)$, 它经常被用在宇宙学中; (3)用狭义相对论方法;
- (b) 用三种方法计算出的结果推算它们的退行速度和光速的百分比.
- (c) Which of (1) classical, (2) special relativity (3) approximate cosmological. (※看不懂题, 暂不译)

长问题

1. 在均匀并各向同性的宇宙中, 物质(重子物质和暗物质的和)密度参数 $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = 32\%$, 其中 ρ_m 是物质密度, ρ_c 是宇宙的临界密度.
 - (1) 计算我们所在位置附近的平均物质密度;
 - (2) 计算距离我们 100 Mpc 星系的逃逸速度. 假设对于我们所观测到的宇宙临界密度, 在这个距离上星系相应的逃逸速度等于哈勃定律中的退行速度;
 - (3) 这个星系在以圆轨道围绕我们所在星系团的中心旋转, 计算它在天空中的角速度;
 - (4) 如果有两个这样以不同半径的圆轨道运动的星系, 起初在相同视线方向上, 我们是否可以分辨它们(回答“Yes”或“No”)[假设地球在本星系团中央].
2. 一个太空船始终在距离近地小行星(2608) Seneca 很近的地方向地球发射脉冲信号, 由于 Seneca 和地球都在绕太阳公转, 信号到达地球的时间在 2 分钟至 39 分钟之间变化. 假设地球公转轨道是圆形(轨道半径 $a_{\text{Earth}} = 1 \text{ au}$, 周期 $T_{\text{Earth}} = 1 \text{ yr}$), Seneca 和地球公转的轨道共面但不相交.
 - (1) 计算 Seneca 的轨道半长径 a_{Sen} 和偏心率 e_{Sen} ;
 - (2) 计算 Seneca 的轨道周期 T_{Sen} , 以及它和地球的平均会合周期 T_{syn} ;
 - (3) 用你的结果来估计木星质量 M_{Jup} (可以认为在太阳系中木星是唯一相对太阳质量不能忽略的行星). 假设木星对 Seneca 的轨道没有影响.
3. (1) 位力定理 $-2\langle K \rangle = \langle U \rangle$, 适用于独立的球形系统, 其中 K 是动能, U 是系统平均引力势能. 在已知星系团成员径向弥散速度 σ 和星系团半径 R 的情况下, 列出计算其总质量的公式. 假设这个星系团独立, 密度均匀且呈球形, 所有成员星系的质量相等.
 - (2) 后发星系团距离我们 90 Mpc, 如果其成员星系的径向弥散速度 $\sigma_{v_r} = 1000 \text{ km/s}$, 在天空中的角直径大约为 4° . 通过位力定理计算位力质量.
 - (3) 通过观测得到该星系团的总光度约为 $L = 5 \times 10^{12} L_\odot$. 如果质光关系 $M/L \sim 1$ (假设在所有质量都是可见质量的情况下), 我们可以得到星系团总质量为 $M \sim 5 \times 10^{12} M_\odot$. 计算辐射质量与你在(2)中计算出的总质量结果的比.

第七届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

希腊 沃勒斯 2013年7月27日~8月5日

1. 图1是用数码相机拍摄的大熊星座的一部分, CCD大小为 $17 \text{ mm} \times 22 \text{ mm}$, 计算光学系统的焦距 f , 以及你结果的误差.



图1 大熊座的一部分

2. 你将得到5张近期太阳光球层的图像(来自www.spaceweather.com), 它们拍摄于每天的相同时间(2013年5月1日至9日). 你还会得到两个日心坐标系下的透明网格. (日心坐标经度 ℓ_{\odot} , 纬度是 b_{\odot}) 它们适用于4月28日至5月15日. 由于地球公转轨道平面与太阳赤道面并不平行, 因此每年太阳的赤道中心会在日面中心上浮动7度多一点. 这个角度用 B_0 表示, 它每年以正弦曲线变化. 此外, 太阳自转轴与地球的自转轴的夹角为 P_0 , 也是以年为周期变化. B_0 和 P_0 在5张图中都被标出.

- (1) 在每张图中标出太阳自转轴.
- (2) 找到3个在每张图中都可见的黑子, 在图上标注为S1、S2、S3. 用透明坐标格测量出它们在5月1日至9日间变化的坐标(ℓ_{\odot}, b_{\odot}), 填写在表1中.
- (3) 作3个黑子的 $\Delta\ell_{\odot}/\Delta t$ 图.
- (4) 用这3个黑子分别来计算太阳自转周期, 单位为地球日, 用 P_{S1} 、 P_{S2} 、 P_{S3} 来表示.
- (5) 计算太阳自转的平均周期 P_{\odot} , 单位为地球日.

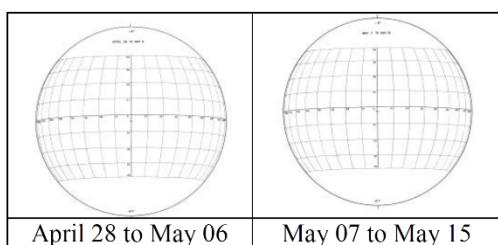
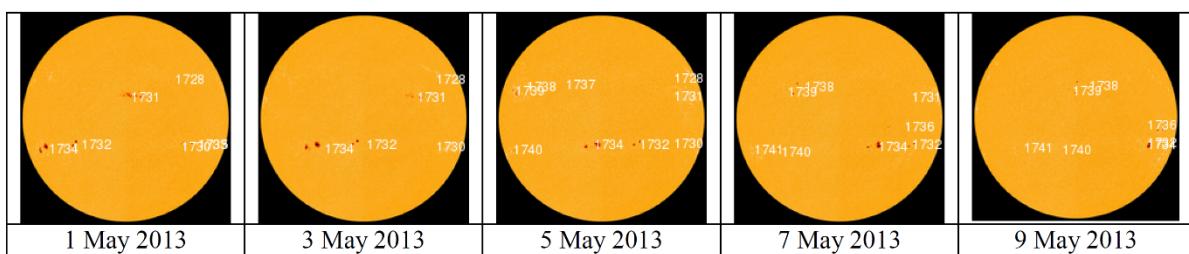


图3A. 太阳光球层(顶部)的五张照片和相应的斯托尼赫斯特网格

Date 日期	黑子Sunspot S1		黑子Sunspot S2		黑子Sunspot S3	
	ℓ_{\odot}	b_{\odot}	ℓ_{\odot}	b_{\odot}	ℓ_{\odot}	b_{\odot}
May 1						
May 3						
May 5						
May 7						
May 9						

3. 图2中是毕星团附近天区的照片，使用Johnson测光系统的V波段拍摄。图3是包含一些已知星的V星等(m_V)的星图(为了避免与星混淆，在标明星等时所有的小数点都被省去了。例如 $m_V = 8.1$ 在图中标注的是“81”)。注意：图2中的一些星可能不在这个星图中。
- (a) 在图2中确认尽可能多的图3中用数字和箭头标出的星，把它们标在图2上。
- (b) 通过对比图2中已知的一些星的V星等，估计图3中尽可能多的用数字和箭头标出星的V星等。

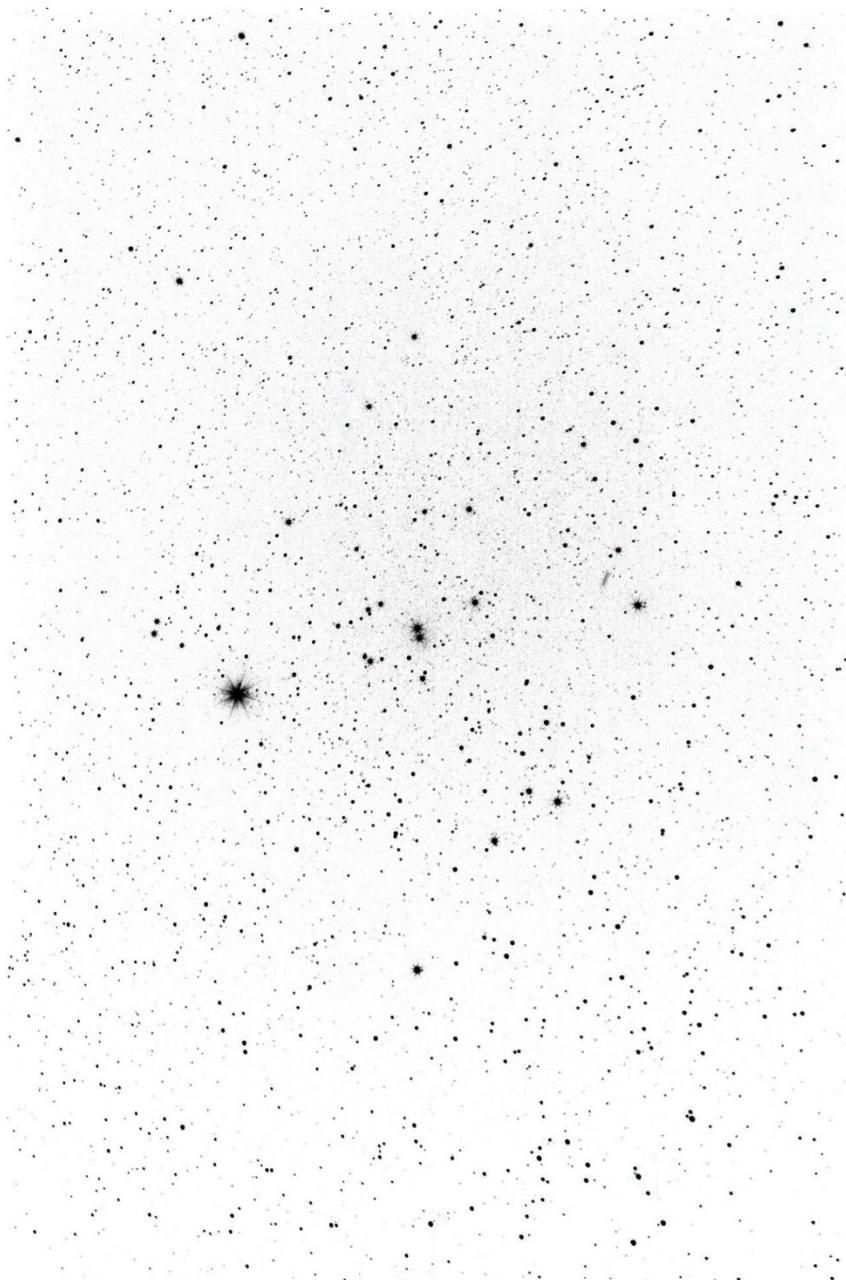


图2. 毕星团(疏散星团)附近的天空照片

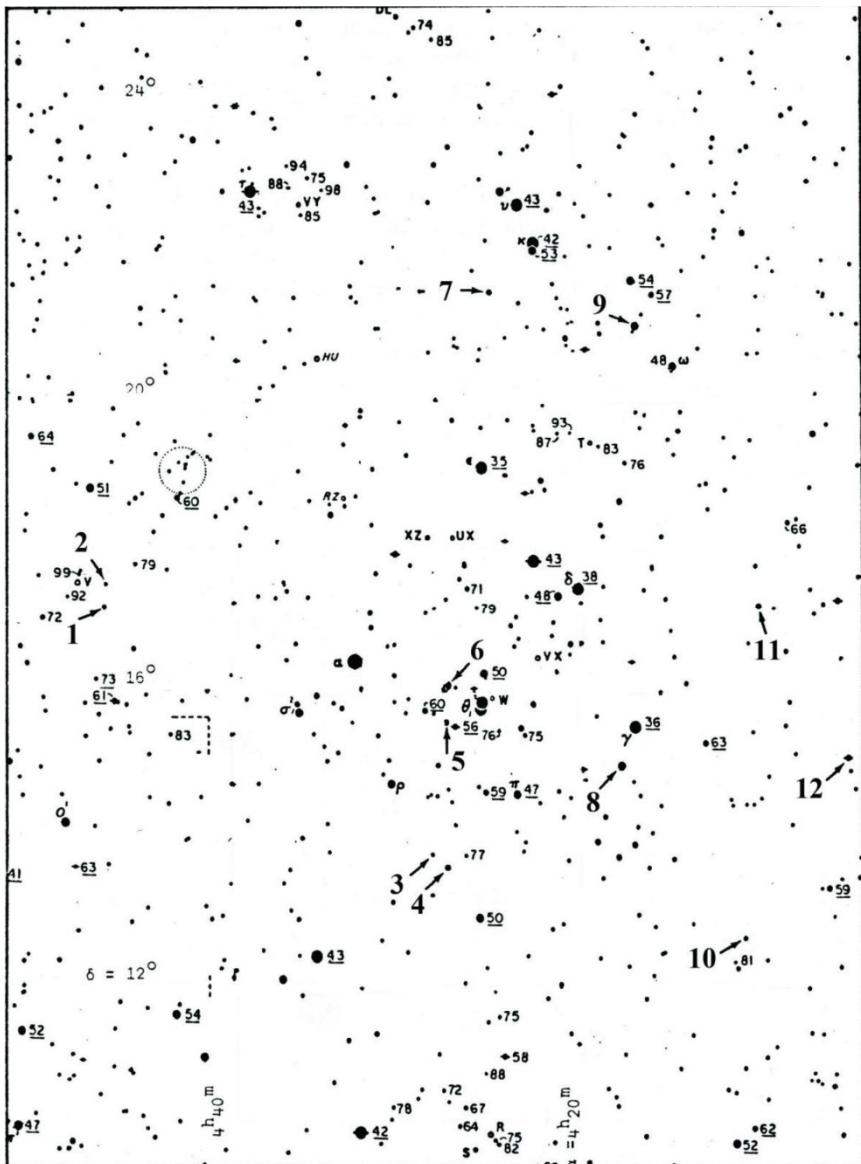


图3. 毕星团(疏散星团)附近区域的天空

4. 用移动星团法计算毕星团到我们的距离(图4).

(1) 文本文件(Hyades-stars.txt)中给出了喜帕恰斯空间望远镜观测到的35颗毕星团附近星的数据. 数据中每列显示的分别是35颗星的(a) 喜帕恰斯星表编号, (b) 赤经(α , α)[h m s], (c) 赤纬(δ)[$^{\circ}$ ' "], (d) 三角视差(p, π)[" $\times 10^3$], (e) 赤经自行乘 $\cos \delta$ ($\mu_{\alpha} \text{axcosd}, \mu_{\alpha} \times \cos \delta$)[" $\times 10^3$ /年], (f) 赤纬自行(μ_d, μ_s)[" $\times 10^3$ /年], (g) 径向速度(v_r, v_t)[km/s]. 把数据导入Excel里.

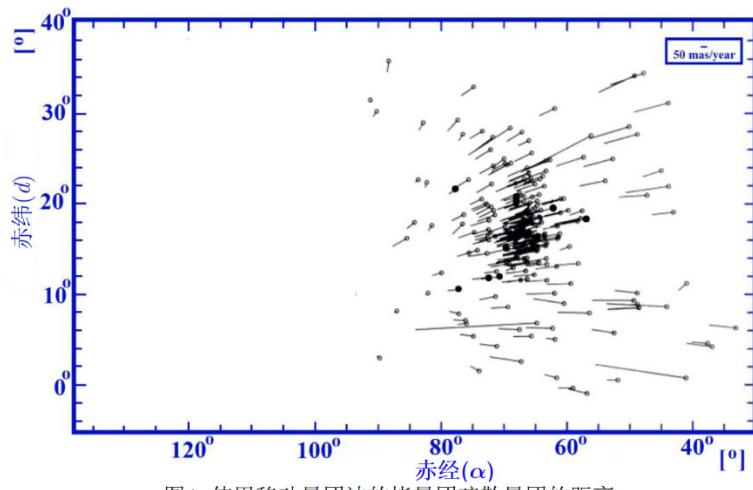


图4. 使用移动星团法的毕星团疏散星团的距离

HIP	alpha	delta	p	mu_axcosd	mu_d	v_r
13834	2 58 5.08	20 40 7.7	31.41	234.79	-31.64	28.10
14838	3 11 37.67	19 43 36.1	19.44	154.61	-8.39	24.70
18170	3 53 9.96	17 19 37.8	24.14	143.97	-29.93	35.00
18735	4 0 48.69	18 11 38.6	21.99	129.49	-28.27	31.70
19554	4 11 20.20	5 31 22.9	25.89	146.86	5.00	36.60
20205	4 19 47.53	15 37 39.7	21.17	115.29	-23.86	39.28
20261	4 20 36.24	15 5 43.8	21.20	108.79	-20.67	36.20
20400	4 22 3.45	14 4 38.1	21.87	114.04	-21.40	37.80
20455	4 22 56.03	17 32 33.3	21.29	107.75	-28.84	39.65
20542	4 24 5.69	17 26 39.2	22.36	109.99	-33.47	39.20
20635	4 25 22.10	22 17 38.3	21.27	105.49	-44.14	38.60
20711	4 26 18.39	22 48 49.3	21.07	108.66	-45.83	35.60
20713	4 26 20.67	15 37 6.0	20.86	114.66	-33.30	40.80
20842	4 28 0.72	21 37 12.0	20.85	98.82	-40.59	37.50
20885	4 28 34.43	15 57 44.0	20.66	104.76	-15.01	40.17
20889	4 28 36.93	19 10 49.9	21.04	107.23	-36.77	39.37
20894	4 28 39.67	15 52 15.4	21.89	108.66	-26.39	38.90
20901	4 28 50.10	13 2 51.5	20.33	105.17	-15.08	39.90
21029	4 30 33.57	16 11 38.7	22.54	104.98	-25.14	41.00
21036	4 30 37.30	13 43 28.0	21.84	108.06	-19.71	38.80
21039	4 30 38.83	15 41 31.0	22.55	104.17	-24.29	39.56
21137	4 31 51.69	15 51 5.9	22.25	107.59	-32.38	36.00
21152	4 32 4.74	5 24 36.1	23.13	114.15	6.17	39.80
21459	4 36 29.07	23 20 27.5	22.60	109.97	-53.86	43.30
21589	4 38 9.40	12 30 39.1	21.79	101.73	-14.90	44.70
21683	4 39 16.45	15 55 4.9	20.51	82.40	-19.53	35.60
22044	4 44 25.77	11 8 46.2	20.73	98.87	-13.47	39.60
22157	4 46 1.70	11 42 20.2	12.24	67.48	-7.09	43.00
22176	4 46 16.78	18 44 5.5	10.81	73.03	-69.79	44.11
22203	4 46 30.33	15 28 19.6	19.42	91.37	-24.72	42.42
22565	4 51 22.41	18 50 23.8	17.27	79.66	-32.76	36.80
22850	4 54 58.32	19 29 7.6	14.67	63.32	-28.41	38.40
23497	5 3 5.70	21 35 24.2	20.01	68.94	-40.85	38.00
23983	5 9 19.60	9 49 46.6	18.54	63.54	-7.87	44.16
24019	5 9 45.06	28 1 50.2	18.28	55.86	-60.57	44.90

- (2) 将赤经和赤纬转换成便于计算的角度(保留4位小数);
- (3) 计算每颗星和收敛点($\alpha_c = 6h7m$, $d_c = +6^\circ56'$)之间的角距离 ϕ ;
- (4) 计算每颗星的自行 μ (单位: /年), 使用数据中给出的 $\mu_\alpha \cos \delta$ 和 μ_δ ;
- (5) 用以上数据计算每颗星的距离 r_μ , 计算公式为

$$r_\mu = \frac{v_r \tan \varphi}{4.74047 \mu}.$$

这里 r_μ 是距离, 单位为秒差距, v_r 是径向速度(单位为km/s), φ 是第3问中我们估算出的

每颗星和收敛点之间的角距离, μ 是第4问我们算出的总自行. 那么每颗星都属于毕星团吗? 你可以认为那些与星团中心($r_\mu = 46.34$ pc)大于10 pc的星不属于这个星团, 在接下来的计算中它们可以被忽略吗?

- (6) 独立使用三角视差 π 计算每颗星的距离 r_π ;
- (7) 分别计算用移动星团法和三角视差法得到的毕星团的平均距离 \bar{r}_μ 和 \bar{r}_π , 以及标准差 σ_μ 和 σ_π ;
- (8) 哪种方法更准确? (i) 表示移动星团法, (ii) 表示三角视差法, 写出(i)或(ii).

第八届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

罗马尼亚 苏恰瓦、古拉胡莫鲁卢伊 2014年8月1日~11日

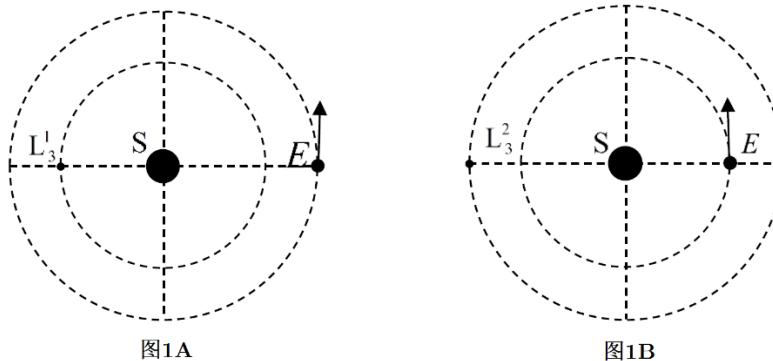
短问题

1. 拉格朗日点

小物体在只受引力作用下绕两个大质量物体作圆周运动的过程中，轨道系统中会包含五个拉格朗日点。例如人造卫星相对地球和月亮运动，或者卫星相对地球和太阳运动。图1中给出了日地系统中拉格朗日点 L_3 的两个可能的位置 L_3^1 和 L_3^2 ，一个在地球围绕太阳运动的轨道以内，一个在地球围绕太阳运动的轨道以外。

请找出 L_3^1 和 L_3^2 中哪个才是真正的拉格朗日点 L_3 ，证明你的结论，并求出太阳到拉格朗日点 L_3 的距离和日地距离相比的差。

已知日地距离为 $d_{ES} = 14.96 \times 10^7$ km，地球和太阳的质量满足 $M_E/M_S = 1/332946$ 。



2. 太阳的引力灾变

一次引力灾变使太阳瞬间损失了一半的质量。如果假定地球的轨道是椭圆的，轨道周期是 $T_0 = 1$ 年，地球轨道的椭率是 $e_0 = 0.0167$ 。

分别计算在以下时间发生引力灾变后地球轨道的运动周期：(a) 7月3日(远日点)；(b) 1月3日。

3. 宇宙辐射

在研究宇宙辐射时，认证了一种中性不稳定的粒子—— π^0 介子。 π^0 的静止质量比电子的静止质量大得多。研究发现，它在飞行过程中分解成了两个光子。在一种特定情况下，一个产生的光子具有最大的能量 E_{Max} ，此时另一个产生的光子则具有最小的能量 E_{min} 。

请以 E_{max} 和 E_{min} 为已知量，推导 π^0 介子分解前初速度的表达式。已知 c 表示光速，且相对论粒子的能量和动量满足 $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ 。

4. 桑德拉·布鲁克和乔治·布鲁尼

一个质量为 $M = 100$ kg的宇航员出舱执行修理卫星的任务。卫星相对太空船静止，间距为 $d = 90$ m。维修任务结束后，宇航员发现返航系统出现故障。他身上带的空气给养只能再支持3分钟。他的手套上结实地绑有一个密封了 $m = 200$ g水的圆柱形罐头(横截面积为 $S = 30 \text{ cm}^2$)。罐子里的冰并不是满满一罐。

如果宇航员沿着正确的方向打开罐头，请确定他能否在空气给养耗尽前平安返回太空船，并通过计算说明。宇航员不能丢下任何装备或者通过触碰卫星借力。

已知如下数据：罐头中冰的温度 $T = 272$ K，在 $T = 272$ K时所对应的水的饱和蒸汽压

为 $P_s = 550$ Pa, 宇宙气体常数 $R = 8300$ J/(kmol·K), 水的摩尔质量 $\mu = 10$ kg/kmol.

5. 一颗主序星的寿命

图2给出了根据观测大量恒星得到的质光函数 $\lg(L/L_s) = f(\lg(M/M_s))$ 关系图. L 和 M 代表一颗恒星的光度和质量, L_s 和 M_s 代表太阳的光度和质量.

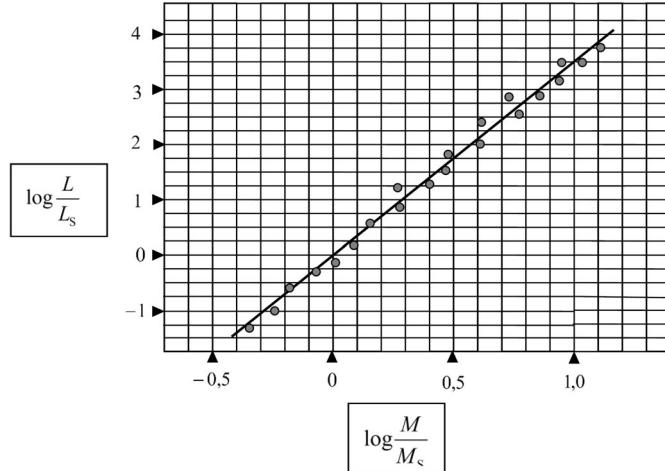


Figure 2

已知太阳在主序阶段的寿命是 τ_s , 一颗恒星的质量转化成能量的百分率是 η , 太阳的质量转化成能量的百分率是 η_s , 恒星的质量是太阳质量的 n 倍, 即 $n = \frac{M}{M_s}$, 并假设恒星在主序阶段的光度是保持不变的. 请推导这颗恒星在主序阶段的寿命的表达式.

6. 恒星表面的有效温度

研究一颗恒星的两种辐射, 它们的波长都在一个窄小的波段内($\Delta\lambda \ll \lambda$), 即在 λ 到 $\lambda + \Delta\lambda$ 之间. 根据普朗克定律(对于绝对黑体), 已知如下关系:

$$r = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{kT}} - 1)}.$$

该式表示了, 单位时间、恒星表面单位面积、单位波长间隔内, 恒星所释放的能量. 在地球上测得, 变化范围均在 $\Delta\lambda$ 内的两种辐射(波长分别为 λ_1 和 λ_2)的光谱辐射强度分别是 $I_1(\lambda_1)$ 和 $I_2(\lambda_2)$ (不需考虑大气影响).

如果光谱辐射强度满足 $I_1(\lambda_1) = 2I_2(\lambda_2)$, 且 $hc \ll \lambda kT$, 请推导两种辐射的波长 λ_1 和 λ_2 之间的关系.

已知: h 代表普朗克常数, k 代表玻尔兹曼常数, c 代表真空中的光速, 当 $x \ll 1$ 时 $e^x \approx 1 + x$.

7. 光压

对于地球上的观测者, 接收到的来自太阳的压力为 $p_{rad,S}$, 接收到的来自某一恒星 Σ 的压力是 $p_{rad,\Sigma}$.

如果太阳的视星等是 m_s , 请推导恒星 Σ 的视星等. 以下提示可能有助于你解题:

通常, 电磁辐射的压力等于电磁辐射的能量密度($p_{rad} = \Delta E / \Delta V$).

已知太阳的质量为 M_s , 太阳的半径为 R_s , 宇宙引力常数为 G , 斯蒂芬-玻尔兹曼常数为 σ , 真空中的光速为 c .

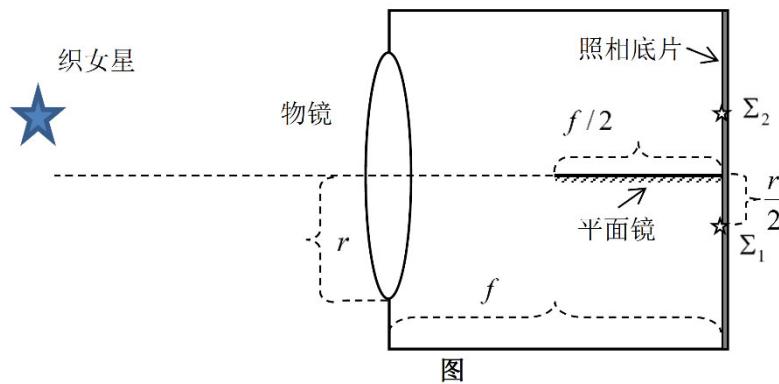
8. 绕日运动的太空船

一艘球形太空船在以圆轨道绕太阳运动，并绕垂直轨道面的轴自转。飞船外表面的温度是 T_N 。假定太空船是理想黑体，且飞船内部没有活动。

计算太空船中的宇航员看到的太阳的视星等和角直径。已知 T_S 代表太阳的有效温度， R_S 代表太阳半径， d_0 代表日地距离， m_0 代表太阳在地球表面的视星等， R_N 代表太空船的半径。

9. 镜中织女

如图所示，在相机物镜的光轴上有一个平面镜。镜子的长度等于物镜焦距的一半。相机的焦面上放置了一张照相底片。底片上捕获了两个亮度不同的图像。织女星不在透镜的光轴上。图像 Σ_1 到光轴的距离是 $r/2$ 。试求底片上的两个织女星图像的星等差。



图

10. 以罗马尼亚语命名的星星

两个罗马尼亚天文学家最近发现了两颗变星。两颗恒星的银经和银纬分别是：Galati V1 ($l_1 = 144.371^\circ$, $b_1 = -11.35^\circ$) 和 Galati V2 ($l_2 = 113.266^\circ$, $b_2 = -16.177^\circ$)。

请计算 Galati V1 和 Galati V2 之间的角距离。

11. 举头望月识星等

已知从太阳上看月球的视星等是 $M_M = 0.25^m$ 。

请分别计算满月和上弦月月相时从地球上看到的月球的视星等。

已知地月距离为 $d_{ME} = 385000$ km，日地距离为 $d_{ES} = 1$ AU，日月距离为 $d_{MS} = 1$ AU。对于地球上的观测者，在计算月球的观测光强时，必须用如下给出的公式来修正月球曲率和光线夹角的影响：

$$p(\Psi) = \frac{2}{3} \cdot \left[\left(1 - \frac{\Psi}{\pi}\right) \cos \Psi + \frac{1}{\pi} \sin \Psi \right], \text{ 其中 } \Psi \text{ 表示日月连线与地月连线的夹角。}$$

12. 造父变星的绝对星等

造父变星是变星的一类，它们光度的变化取决于星体的脉动。已知一颗造父变星的脉动周期满足：

$$P = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}},$$

其中 R 代表造父变星的平均半径， M 代表造父变星的质量（脉动期间为常量）。假定脉动期间恒星的温度为常数。

证明造父变星的绝对星等 M_{cep} 可以表示为如下函数形式：

$$M_{\text{cep}} = -2.5^m \cdot \log k - \left(\frac{10}{3}\right)^m \cdot \log P,$$

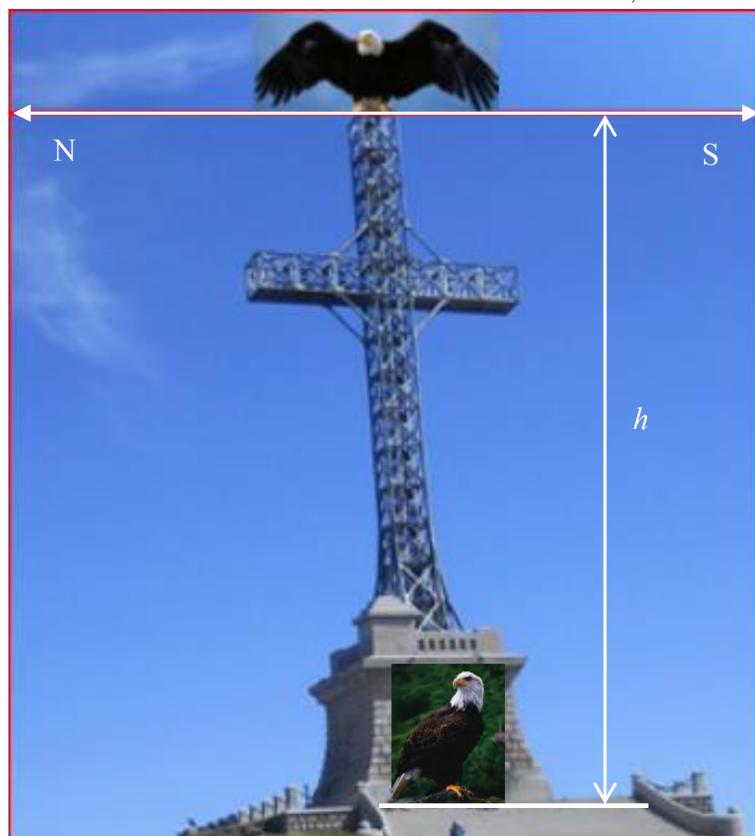
其中 P 为造父变星的脉动周期.

长问题

1. 英雄十字上的雄鹰!

英雄十字建立在海拔 $H = 2300$ m 的卡拉伊曼山顶(Caraorman)上, 十字雕像从基座到顶部的高度是 $h = 39.3$ m. 十字的横臂是指向南北方向的. 十字架所在的纬度是 $\varphi = 45^\circ$.

- A. 2014年3月21日是春分. 当天傍晚, 两只雄鹰停在了英雄十字附近. 如图10所示, 一只停在了基座附近, 一只停在了十字架顶端. 两只雄鹰所在的位置在地表的投影是同一点. 天空非常晴朗, 所以雄鹰能看到地平圈, 并观测到日落. 每只雄鹰都在看到太阳完全消失的时刻起飞. 同一时刻, 在海平面有一个天文学家. 假定他和两只雄鹰所在的位置在地表的投影是同一点. 请在忽略大气折射的情况下, 解决下列问题:



- (1) 计算天文学家观测到的日落的持续时间.
- (2) 计算每只雄鹰看到的日落的持续时间, 并指出哪只雄鹰第一个起飞, 两只雄鹰起飞的时间间隔是多少.

以下信息可帮助你解题:

日落持续时间的起算点是日面最下方和地平线相切的时刻, 结点是日面完全消失的时刻.

地球的自转周期为 $T_E = 24$ h, 太阳半径为 $R_S = 6.96 \times 10^5$ km, 日地距离为 $d_{ES} = 15 \times 10^7$ km, 英雄十字的地理纬度为 $\varphi = 45^\circ$, 地球半径为 $R_E = 6370$ km.

- B. 在2014年3月22日的某一时刻, 两只雄鹰又回到了英雄十字. 一只雄鹰停在了十字的最高点, 另一只鹰停在了十字架基座所在的地面上, 雄鹰的位置正好是十字架竖直杆在地面的投影的顶端. 在那个时刻, 投影的长度为全天的最小值.

- (1) 计算两只雄鹰之间的距离和第二只雄鹰到十字架的距离.
- (2) 如果十字架一侧横臂在立柱上的影子的长度被测为是 $u_b = 7$ m, 请计算十字横臂

的长度 b .

- C. 午夜零点, 天文学家来到了英雄十字. 他站在十字顶端, 看到了一颗位于当地永不下落天体分界线圈上的亮星. 他把这颗星命名为“鹰星”. 已知由于大气折射的影响, 地平线下移了 $\xi = 34'$, 请计算:
- (1) “鹰星”的赤纬.
 - (2) “鹰星”的最大地平高度.

14. 从罗马尼亚.....到对穿点!的一次弹道抛射

第八届IOAA的组织者计划通过弹道抛射的方式向对穿点(发射点与地心的连线与地球表面的另一个交点)传送大会会旗. 弹道抛射物的发射点位于罗马尼亚. 忽略地球的自转.

- (a) 已知发射点的坐标为北纬 $\varphi_{\text{Romania}} = 44^\circ$, 东经 $\lambda_{\text{Romania}} = 30^\circ$, 请计算落地目标点的经纬度.
- (b) 为保证顺利击中目标, 请确定发射速度的大小和发射的角度.
- (c) 计算击中目标时, 抛射物的速率.
- (d) 计算抛射物在抛射过程中速率的最小值.
- (e) 计算抛射物从发射到落地的飞行时间. 已知地球表面重力加速度为 $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, 地球半径为 $R = 6370 \text{ km}$.
- (f) 当抛射物位于最高点时, 它是否是肉眼可见的. 已知: 月球反照率为 $\alpha_M = 0.12$, 月球半径为 $R_M = 1738 \text{ km}$, 地月距离为 $r_{EM} = 385000 \text{ km}$, 满月的视星等为 $m_M = -12.7^m$. 你可以认为抛射物是金属球体, 它的半径为 $r_{\text{projectile}} = 400 \times 10^{-3} \text{ m}$, 它的表面反照率为1.

第八届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

罗马尼亚 苏恰瓦、古拉胡莫鲁卢伊 2014年8月1日~11日

1. 银河系的黑洞

基于观测事实，科学家们发现银河系的中心存在一个黑洞。现假设在银河系中心存在着一个假想的黑洞(SA*)。一颗恒星S*围绕黑洞SA*旋转。

表1给出了以下数据：观测日期和对应的恒星S*的角坐标(α, β)。该角坐标表示了恒星S*在以黑洞SA*为原点的坐标系(U, W)投影的角距离，如图1所示。

在此投影中， $\varphi = 1 \text{ arcsec}$ 的角距离对应的实际距离是 $d = 41 \text{ light day}$ ，故尺度因子为

$$S_0 = \frac{d}{\varphi} = 41 \frac{\text{光天}}{\text{arcsec}}.$$

	Date (year)	α (arcsec)	β (arcsec)
1	1995.222	0.117	-0.166
2	1997.526	0.097	-0.189
3	1998.326	0.087	-0.192
4	1999.041	0.077	-0.193
5	2000.414	0.052	-0.183
6	2001.169	0.036	-0.167
7	2002.831	-0.000	-0.120
8	2003.584	-0.016	-0.083
9	2004.165	-0.026	-0.041
10	2004.585	-0.017	0.008
11	2004.655	-0.004	0.014
12	2004.734	0.008	0.017
13	2004.839	0.021	0.012
14	2004.936	0.037	0.009
15	2005.503	0.072	-0.024
16	2006.041	0.088	-0.050
17	2007.060	0.108	-0.091

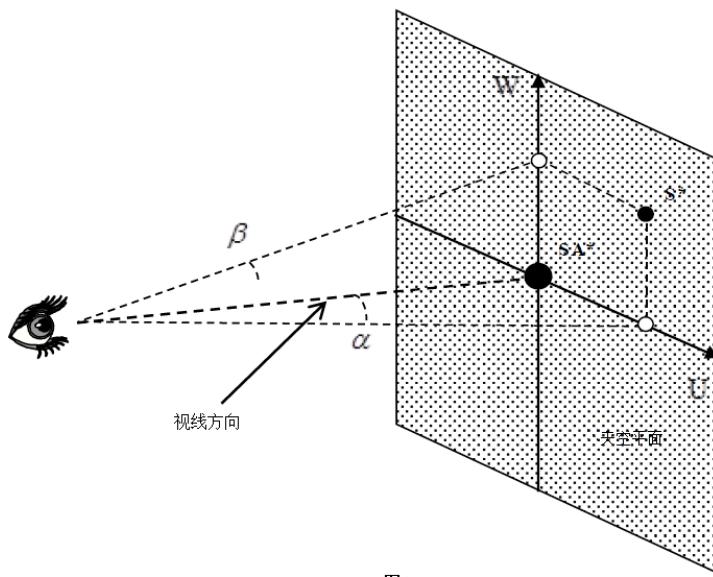


图1

请基于所提供的信息解决下列问题:

- (a) 如图2所示, 在平面P上画出恒星S*的轨迹投影. 这个平面非常靠近观测者. 在这个平面上, 一个 $\varphi = 1 \text{ arcsec}$ 对应的线距离是 $d_0 = 1200 \text{ mm}$, 所以尺度因子为 $S = \frac{d_0}{\varphi} = 1200 \frac{\text{mm}}{\text{arcsec}}$. 请利用坐标纸、复写纸和玻璃纸进行精确作图.

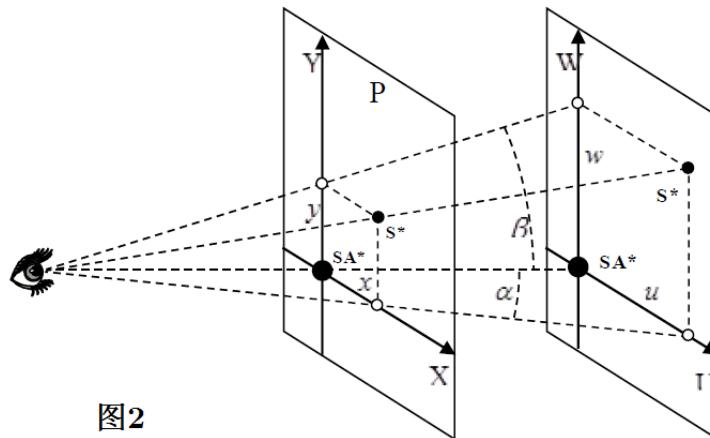


图2

- (b) 通过作图证明视线方向和轨道平面是垂直的.
- (c) 根据你作的图, 找出围绕黑洞SA*运动的恒星S*的轨迹参数, 将最终结果以表格形式列出($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$):
- 半长轴: a (以光天为单位); 半短轴: b (以光天为单位); 椭率: e .
 - S^* 和SA*的最小距离: r_{\min} (以光天为单位); S^* 和SA*的最大距离: r_{\max} (以光天为单位).
 - 观测者到恒星S*的距离.
 - 恒星S*绕SA*运动的轨道周期(取尽可能多的测量值进行平均, 从而得到最佳结果).
 - “SA*-S*”系统的总质量.

2. 热力学测试

科学家发射了一艘太空船来研究两颗太阳系外行星P₁和P₂的大气层(100% CO₂). 大气层处于稳定的流体静力学平衡. 每当太空船靠近行星时, 就会沿垂直方向(行星的半径方向)

向对应的行星发射一个无线电探测器. 当无线电探测器达到均匀速度时, 它就开始测量并传回大气层的压力数据. 图3.1给出了行星P₁上探测器测到的大气压(以任意单位)随探测器的下降时间的变化曲线. 当探测器着落到P₁表面后, 测得行星的温度为 $T_0 = 700 \text{ K}$, 重力加速度为 $g_0 = 10 \text{ m s}^{-2}$.

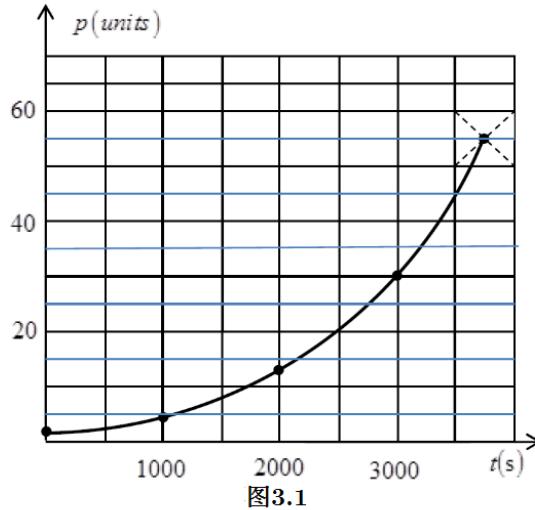


图3.1

假定无线电探测器在匀速下降阶段中, 该行星的重力加速度为常数.

- (a) 计算无线电探测器R₁开始匀速下降并传输数据时, 它离地面的高度 h_0 .
- (b) 计算行星P₁在海拔 $h = 39.6 \text{ km}$ 处的温度. 已知宇宙气体常数 $R = 8.3 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$, CO₂的摩尔质量 $\mu = 44 \text{ g/mol}$.
- (c) 图3.2给出了行星P₂上探测器测到的大气压(以任意单位)随探测器的下降时间的变化曲线. 当探测器着落到P₂表面后, 测得行星的温度为 $T_0 = 750 \text{ K}$, 重力加速度为 $g_0 = 8 \text{ m s}^{-2}$.

请画出行星P₂上CO₂大气层中 $p = f(h)$ 随 $T = f(h)$ 变化的关系图.

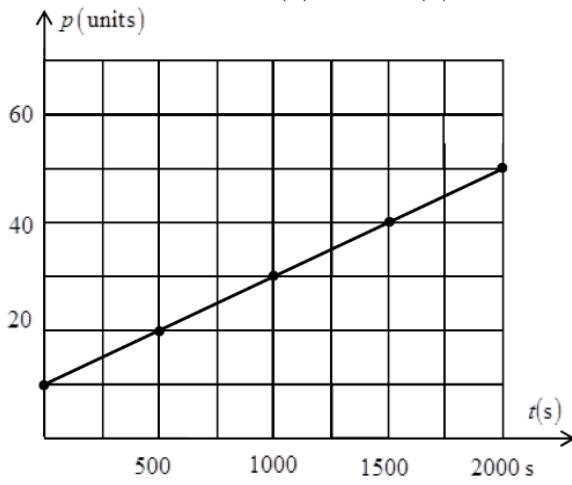


图3.2

3. 太阳系外行星上的IOAA观测者

大犬座的天狼星是地球的夜空中最亮的恒星. 观测者的眼睛所看到的单星实际上是一个双星系统.

天狼星的高亮度是由于两个原因导致的:它的内禀光度, 它离地球很近.

大熊座的开阳多星系统是由4颗从地球上看具有相同视线方向的恒星组成的恒星系统. 它们中的一部分恒星构成了一个引力束缚系统.

假定观测者A位于天狼星系统的一颗卫星上.

计算:

- (a) 观测者A看到的太阳的视星等($m_{\text{Sun}, \text{Planet}}$).
- (b) 观测者A看到的天狼星的视星等($m_{\text{Sirius}, \text{Planet}}$).
- (c) 开阳多星系统的总光度 L_{Mizar} .
- (d) 开阳多星系统中引力相互束缚的恒星们到地球的平均距离.
- (e) 从地球上看, 开阳多星系统到天狼星的角距离 $\Delta\theta$.
- (f) 开阳多星系统中引力相互束缚的恒星们到观测者A的物理距离($d_{\text{Mizar}, \text{Planet}}$).
- (g) 观测者A看到的整个开阳多星系统的星等($m_{\text{Mizar}, \text{Planet}}$).

请在全部解题过程中考虑误差, 以下数据为已知量:

天狼星到地球的距离 $d_{\text{Sirius, Earth}} = 2.6 \text{ pc}$;

从地球上测得的天狼星的视星等 $m_{\text{Sirius, Earth}} = -1.46^m$

日地距离 $d_{\text{Sun, Earth}} = 1 \text{ AU}$;

从地球上测得的太阳的视星等 $m_{\text{Sun, Earth}} = -26.78^m$;

天狼星到它的行星(观测者A所在的行星)的距离 $d_{\text{Sirius, Planet}} = 10 \text{ AU}$.

下表中给出了地球上测得的有关开阳多星系统的数据.

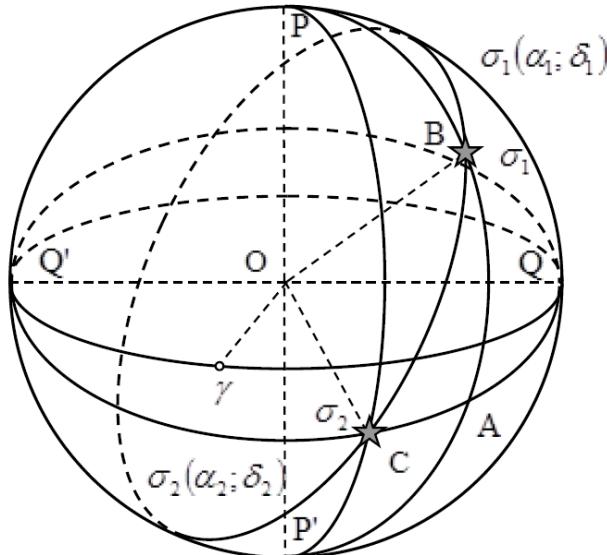
Star number 编号	Name of the star 名称	Apparent magnitude 视星等	Parallax (mas) 视差
1	Alcor	3.99 ± 0.01	39.91 ± 0.13
2	Mizar A	2.23 ± 0.01	38.01 ± 1.71
3	Mizar B	3.86 ± 0.01	38.01 ± 1.71
4	Sidus Ludoviciana	7.56 ± 0.01	8 ± 4

在以太阳为中心的赤道坐标系统中, 开阳多星系统(σ_1)和天狼星(σ_2)的赤经、赤纬分别是:

$$\alpha_{\text{Mizar}} = \alpha_1 = 13^{\text{h}}23^{\text{min}}55.5^{\text{s}}, \quad \delta_{\text{Mizar}} = \delta_1 = 54^{\circ}55'31'';$$

$$\alpha_{\text{Sirius}} = \alpha_2 = 6^{\text{h}}45^{\text{min}}, \quad \delta_{\text{Sirius}} = \delta_2 = -16^{\circ}43'.$$

注意: 当 $x \ll 1$ 时, $\ln(1 - x) \approx -x$; 当 $x \ll 1$ 时, $e^x \approx 1 + x$.



第九届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

印度尼西亚 马格朗 2015年7月26日~8月4日

短问题

1. 在Gliese 876 ($M_G = 0.33 \pm 0.03$)系统里发现了几个系外行星，其主要参数如下，

Gliese系统	质量	半长轴 (AU)
Gliese 876 b	$2.276 M_J$	0.2083
Gliese 876 c	$0.714 M_J$	0.1296
Gliese 876 d	$6.8 M_{\oplus}$	0.0208
Gliese 876 e	$15 M_{\oplus}$	0.334

其中， M_{\odot} , M_J 和 M_{\oplus} 分别为太阳、木星和地球的质量($M_J = 1.89813 \times 10^{27}$ kg)，假设这几个系外行星围绕Gliese 876的公转方向相同。如果两颗行星中一颗的会合周期是另一颗行星会合周期的整数倍，则这两颗行星就被称作处于共振轨道。

请判断Gliese 876系统中是否存在共振轨道，并找出它们。

2. 一颗行星的卫星的轨道周期为7天3小时43分，且其半长轴是该行星平均半径的15.3倍。月球的轨道周期为27天7小时43分，其轨道半长轴为地球平均半径的60.3倍。假设月球和该卫星的质量远小于该行星的质量。请计算该行星平均密度与地球密度的比值。
3. 在2015年5月27日02:18:49发生了恒星HIP 89931 (δ -Sgr)被小行星1285 Julietta掩食的现象，观测者所在的婆罗浮屠正好位于掩食带的中心线上，掩食的时长为6.201 s。假设地球的公转轨道为圆轨道，小行星Juliett的轨道也在黄道面内且其公转方向与地球相同。掩食发生时，Julietta位于远日点附近，而且它与太阳和地球的距离分别为3.076 AU和2.156 AU。假设Julietta的轨道半长轴为 $a = 2.9914$ AU，请估算小行星Julietta本身的直径。
4. 设想一个观测者使用了一个假想中的红外望远镜(波长范围为20至640 μm)，该望远镜的尺寸与地球大小类似。他使用该望远镜观测了一个静止且电中性的黑洞，其质量为 $2.1 \times 10^{10} M_{\odot}$ 。请确定使用该望远镜能分辨该黑洞的最远距离。
5. 一个观测者试图确定一颗人造卫星的轨道偏心率。当该卫星在远地点时，在一个给定的短时段内该卫星被观测到移动了 $\Delta\theta_1 = 2'44''$ ，当该卫星与地球球心的连线垂直于轨道半长轴时，在相同的给定短时段内，该卫星被观测到移动了 $\Delta\theta_2 = 21'17''$ 。假设观测者位于地球球心，请找出该卫星轨道的偏心率。
6. 在每次使用射电望远镜开始观测时，均需要把望远镜指向一个点源做校准。已知该点源在地球大气层外的流量密度为21.86 Jy。假如某日该校准点源的流量密度测量值为14.27 Jy，观测时该点源的地平高度为35度。请估算天顶处大气层的光深 τ_z 。
7. 一个星系团的半径为10 Mpc，一个位于该星系团边缘的星系只要拥有比星系团中心速度大700 km/s的初速度就能够逃离该星系团。请计算该星系团的质量密度。
8. 一个天体发出了一个很强的连续射电谱的脉冲，脉冲持续时间为700 μs ，其在频率1660

MHz被测量到的流量密度为0.35 kJy. 如果已知该射电源的距离为2.3 kpc, 请估算该射电源的亮温度.

9. 假设太阳是完美的黑体. 金星也是完美的黑体, 温度为 T_V , 且处于热平衡(即其从太阳吸收的能量与其辐射出的能量相等), 其轨道半径为0.72 AU. 假设在金星最接近地球时, 它的角直径为66角秒, 请问这时地球上的射电望远镜在5 GHz观测频率下所测量到的金星流量密度是多少?
10. 已知氢分子云的温度是 $T = 115$ K, 分子云中的氢原子(假定为球体)的(共价)半径为 $r_H = 0.37 \times 10^{-10}$ m, 两个原子的球心间的距离是 $d_{H_2} = 0.74 \times 10^{-10}$ m. 假定分子处于热平衡. 估算由于分子转动激发引起的辐射频率.
11. 一个球形物体内部任一位置的质量密度与这个位置到球心的距离成反比, 比例系数为 $\alpha = 5.0 \times 10^{13}$ kg/m². 如果恒星表面物体的逃逸速度是 $v_0 = 1.5 \times 10^4$ m/s, 请计算这颗恒星的总质量.
12. 一个质子以1 GeV能量从太阳表面向地球运动. 太阳的磁场可忽略不计. 试求从地球上看这个质子从太阳到地球的旅行时间.
13. 木卫一的自转周期与其轨道周期同步, 木卫一上的火山活动被认为是木星潮汐加热作用的结果. 潮汐作用力源自于一个天体的近侧和远侧所受到的另一个天体的引力差. 对木卫一的表面形变的雷达测量显示, 在半个轨道周期里, 木卫一表面升降的幅度高达100 m. 只有表层才有如此大的形变幅度, 内层的形变幅度则相应得小些, 因此我们可以假设木卫一的整体质量的平均移动幅度为50 m. 木卫一可以进一步分为两个半球, 每个半球可以近似为一个质点. 请计算木星潮汐加热木卫一的平均热功率.
提示: 你可以在 x 较小时使用以下近似: $(1 + x)^n = 1 + nx$
木卫一的质量为 $M_{Io} = 8.931938 \times 10^{22}$ kg
木卫一的近木距离为 $r_{peri} = 420000$ km
木卫一的远木距离为 $r_{apo} = 423400$ km
木卫一的轨道周期为152853 s
木卫一的半径为 $R_{Io} = 1821.6$ km
14. 假定我们生活在一个尺度无限大, 时间无限久远的宇宙中. 这个宇宙中恒星的平均数密度是 $n = 10^9$ Mpc⁻³, 恒星的平均半径等于太阳的半径. 假定标准欧几里得几何在这个宇宙中仍然适用. 从你自己所在的位置看向任意方向, 你的视线终将看到一颗星星, 请计算你的视线从观测者到被第一颗恒星阻拦的距离的平均值, 以Mpc为单位.
15. 一架飞机从秘鲁首都利马($12^\circ 2' S$, $77^\circ 1' W$)飞往第9届IOAA举办地附近的日惹($7^\circ 47' S$, $110^\circ 26' E$). 飞机在从利马到日惹的飞行过程中选择了最短的航线. 请计算航线上最南点的纬度.

长问题

1. 一个卫星绕行星转动. 行星表面站着一个观测者. 卫星的轨道面与观测者所在的地平面垂直. 经过一些必要的化简后, 它的轨道满足如下方程:

$$9\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} - 4\right)^2 + 25\left(-\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = 225$$

考虑笛卡尔坐标系, 其中 x 轴在地平面上, y 轴指向观测者的天顶. r 表示卫星的半径. 假定行星的自转周期远大于卫星的轨道周期. 忽略大气折射.

- a. 分别计算椭圆的半长轴和半短轴的长度.
- b. 计算卫星在近地点时的天顶距.
- c. 设观测者观测到卫星在地平面以上可视面达到最大值时, 可视面的最高点的仰角为 θ . 请计算 $\tan \frac{\theta}{2}$.

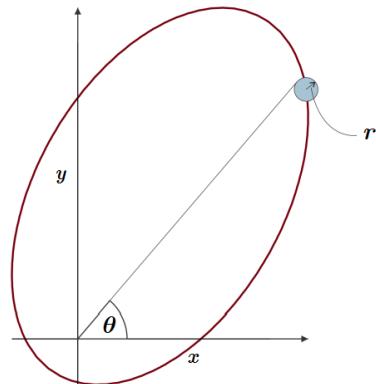


图1

2. A 和 B 是两颗大质量恒星, 它们的质量分别是 m_A 和 m_B , 它们之间的距离是 d . 每颗恒星都由于万有引力的作用绕着两颗恒星共同的质量中心旋转. 假设它们的轨道是圆轨道, 轨道面位于 $X-Y$ 坐标平面内, 坐标系的原点就是二者共同的质心.

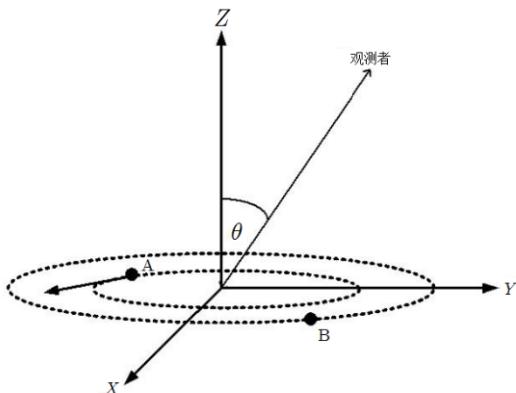


图2

- a. 求恒星A的线速度和角速度的表达式.

如图2, 一个观测者位于 $Y-Z$ 平面上, 他在与 Z 轴夹角为 θ 的非常遥远的地方观测这两颗恒星. 他测到恒星A在他的视线方向的速度分量可以表示为 $K \cos(\omega t + z)$, 其中 K 和 ε 是正数.

- b. 用 m_A 、 m_B 、 θ 和万有引力常数 G 表示 $K^3/\omega G$.

假定观测者测出恒星A的质量为 $30M_S$, 其中 M_S 是太阳质量. 此外, 他还观测到恒星B会释放X射线, 进而观测者推测这可能是一颗中子星或黑洞. 恒星B的分类取决于 m_B : (i) $m_B < 2M_S$, 那么B就是一颗中子星; (ii) $m_B > 2M_S$, 那么B就是一个黑洞.

- c. 观测者测量得到 $\frac{K^3}{\omega G} = \frac{1}{250} M_S$, θ 的数值通常是未知的. 求当B是一个黑洞时, θ 应满足什么限制条件?

3. 假定一颗稳定的球状恒星含有 N 个中性粒子, 它的半径是 R (如图3)

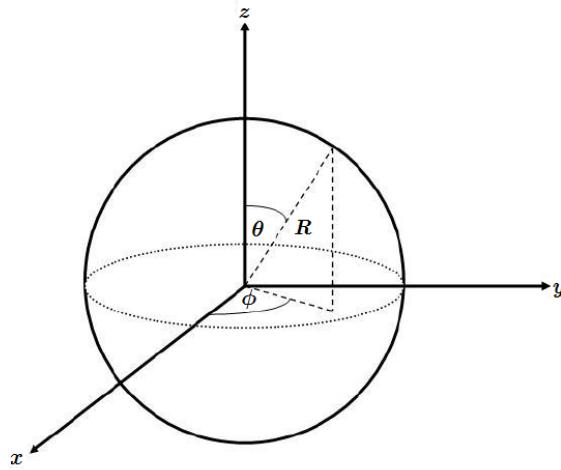


图3

其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, 并满足如下的状态方程

$$PV = Nk \frac{T_R - T_0}{\ln(T_R/T_0)} \quad (1)$$

其中 P 是恒星内部的压力, V 是恒星的体积, k 是玻尔兹曼常数, T_R 是恒星表面 $r = R$ 处的温度, T_0 是恒星中心 $r = 0$ 处的温度. 假定 $T_R \leq T_0$.

- a. 如果 $\Delta T = T_R - T_0 \approx 0$ (叫做理想恒星), 简化恒星的状态方程即式(1).

(提示: 当 x 很小时, $\ln(1 + x) \approx x$)

假设恒星处于准静态过程中, 它只有非常小的收缩或膨胀. 上述状态方程(1)仍然成立.

恒星的热力学第一定律是

$$Q = \Delta Mc^2 + W \quad (2)$$

其中 Q , M 和 W 分别代表恒星的热量、质量和功. c 是真空中的光速, $\Delta M = M_{\text{final}} - M_{\text{initial}}$

接下来我们假定 T_0 是常数, 同时 $T_R \equiv T$.

- b. 用 M 表示体积恒定的恒星比热容 C_v , 用 C_v 和 T 表示压力恒定的恒星的比热容 C_p (提示: 当 x 很小时, $(1 + x)^n \approx 1 + nx$)
- c. 假定 C_v 是常数, 气体处于等压过程, 因此恒星产生并向空间释放热量和辐射. 如果初始温度和最终温度分别是 T_i 和 T_f , 请计算等压过程产生的热量.
- d. (命题出错, 删除该题目, 请跳过这个题号)
接下来的部分, 假定恒星是太阳.
- e. 如果太阳光是单色的, 频率为 5×10^{14} Hz, 计算太阳每秒辐射的光子数.
- f. 假定一秒内太阳表面温度可以从 5500 K 变化到 6000 K, 计算比热容 C_v .

第九届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

印度尼西亚 巴格朗 2015年7月26日~8月4日

问题1

造父变星HV2257的光度和径向速度数据在表1-3中给出，这些数据基于Gieren (MNRAS vol 265, 1993)的观测。该恒星的脉动周期为 $P = 39.294$ 天。图1(Houdashelt et al., 2000)和表4(<http://xoomer.virgilio.it/hrtrace/straizys.htm>)给出了温度-颜色关系的参考图和热改正表。假设太阳光度为 $L_{\odot} = 3.96 \times 10^{26} \text{ J s}^{-1}$ ，其热星等 $M_{\odot,\text{bol}} = 4.72$ 。对于这个问题请不要使用第二个问题的周期-光度关系。

- 根据表1，在相位0.6和1之间作出光线变曲线。
- 在表2中，在相位0.6和1之间作出色指数图。
- 从表3中作出相位0.6和1之间的径向速度曲线。
- 计算恒星的平均径向速度。
- 使用表4和图1中给出的观测数据和补充数据计算到这颗脉动恒星的距离。假设在这个方向上没有消光。

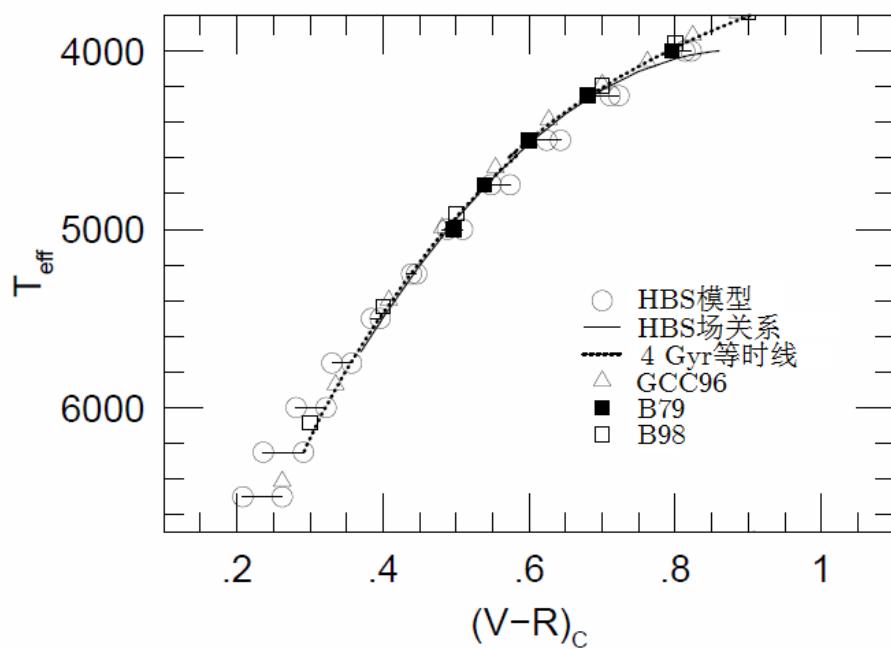


图1 $V - R$ 颜色与温度的关系。不同的符号对应不同的作者。

表1

相位	V mag
0.11	12.81
0.13	12.84
0.14	12.87
0.16	12.88
0.19	12.90
0.19	12.94
0.24	12.99
0.43	13.32
0.46	13.31
0.46	13.32
0.51	13.36
0.54	13.41
0.54	13.45
0.56	13.46
0.59	13.53
0.59	13.52
0.61	13.55
0.64	13.60
0.64	13.62
0.72	13.68
0.74	13.61
0.77	13.45
0.79	13.18
0.80	13.12
0.80	13.07
0.82	12.80
0.82	12.78
0.82	12.73
0.84	12.57
0.85	12.54
0.85	12.53
0.87	12.48
0.87	12.47
0.89	12.49
0.90	12.51
0.92	12.51

表2

相位	V-R
0.22	0.71
0.24	0.73
0.25	0.74
0.27	0.75
0.29	0.75
0.29	0.75
0.34	0.77
0.51	0.87
0.53	0.85
0.53	0.87
0.57	0.85
0.60	0.87
0.60	0.88
0.62	0.87
0.64	0.90
0.64	0.90
0.66	0.88
0.68	0.91
0.69	0.90
0.76	0.88
0.78	0.82
0.80	0.79
0.82	0.70
0.82	0.70
0.82	0.68
0.84	0.60
0.84	0.59
0.84	0.58
0.86	0.53
0.86	0.51
0.87	0.52
0.88	0.51
0.89	0.51
0.90	0.55
0.91	0.53
0.93	0.56

表3

相位	径向速度(km/s)
0.03	232
0.05	234
0.08	234
0.08	237
0.13	242
0.13	246
0.18	243
0.20	249
0.23	250
0.28	254
0.33	259
0.35	261
0.36	260
0.38	266
0.40	265
0.44	266
0.46	272
0.46	265
0.49	270
0.51	270
0.54	272
0.54	273
0.56	274
0.59	274
0.61	273
0.62	274
0.64	274
0.67	276
0.67	274
0.69	274
0.71	274
0.72	276
0.74	278
0.77	271
0.77	264
0.79	253
0.80	259
0.82	242
0.85	230
0.87	228
0.90	224
0.92	224
0.92	225
0.95	228
0.96	228

表4. 热改正

T_{eff} , K	BC, mag
9600	-0.25
9400	-0.16
9150	-0.10
8900	-0.03
8400	0.05
8000	0.09
7300	0.13
7100	0.11
6500	0.08
6150	0.03
5950	0.00
5800	-0.05
5500	-0.13
5250	-0.22
5050	-0.29
4950	-0.35
4850	-0.42
4700	-0.57
4600	-0.75
4400	-1.17
3900	-1.25
3750	-1.40
3550	-1.60
3400	-2.00

问题2

表5给出了仙后座中2颗恒星的BVRIJHKLMN光度测量值. 对于这两颗恒星, 人们认为它们的光线仅仅受到星际物质(ISM)消光散射的影响. 假设观测是在大气层外进行的.

(a) 利用表5至表9中给出的数据, 画出两颗恒星在滤光波段B, V, R, I, J, H, K, L, M, N的 E_{X-V}/E_{B-V} 关于 $1/\lambda_X$ 的函数. 目测拟合近似曲线(特别注意 $E_{X-V}/E_{B-V} \sim \text{const}$, 当 $1/\lambda_X \rightarrow 0$). X 代表测光系统中的每一个波段.

E_{B-V} 是色余.

(b) 使用(a)中得到的图, 估计每颗恒星的 R_V 和 R_R .

$$R_V = \frac{A_V}{E_{B-V}} \text{ 以及 } R_R = \frac{A_R}{E_{R-I}}$$

(A_V 是V波段的消光).

现在应用这些结果来推导出IC 342的估计距离, 它是一个在仙后座被银河系遮挡的旋涡星系. 你应该假设IC 342的ISM性质与我们银河系的ISM性质相似.

(c) 使用IC 342中20个造父变星的周期-星等图(图2和图3), 并假设周期-光度关系:

$$\langle M_R \rangle = -2.91 \left(\lg \left(\frac{P}{\text{day}} \right) - 1 \right) - 4.04 \text{ 和 } \langle M_I \rangle = -3.00 \left(\log \left(\frac{P}{\text{day}} \right) - 1 \right) - 4.06$$

其中 $\langle M_R \rangle$ 和 $\langle M_I \rangle$ 是R和I波段的平均绝对星等，求IC 342中天体的 A_R ，计算IC 342的距离。

表5 仙后座两颗恒星的BVRIJHKLMN光度测量

恒星	MK 分类	B mag	V mag	R mag	I mag	J mag	H mag	K mag	L mag	M mag	N mag
HD 4817	K3lab	8.08	6.18	4.73	3.64	2.76	1.86	1.54	1.32	1.59	-
HD 11092	K4II	8.66	6.57	-	-	3.10	2.14	1.63	1.41	1.65	1.44

表6 特定光谱型和光度的本征颜色 $(B - V)_0$

		$(B - V)_0$ mag	
		II	lab / Ia
F0		-	0.15
G0		0.73	0.82
K0		1.06	1.18
K3		1.40	1.42
K4		1.42	1.50

表7 特定光谱型超巨星的红外本征颜色

	$(V - R)_0$ mag	$(V - I)_0$ mag	$(V - J)_0$ mag	$(V - H)_0$ mag	$(V - K)_0$ mag	$(V - L)_0$ mag	$(V - M)_0$ mag	$(V - N)_0$ mag
F0	0.20	0.31	0.36	0.51	0.60	0.64	0.65	0.82
G0	0.55	0.90	1.14	1.52	1.71	1.72	1.72	1.98
K0	0.95	1.59	2.01	2.64	2.80	2.87	2.79	3.14
K3	1.13	1.96	2.41	3.14	3.25	3.39	3.25	3.63
K4	1.20	2.13	2.59	3.37	3.44	3.62	3.46	3.84

表8 特定光谱型的巨型恒星的红外本征颜色

	$(V - R)_0$ mag	$(V - I)_0$ mag	$(V - J)_0$ mag	$(V - H)_0$ mag	$(V - K)_0$ mag	$(V - L)_0$ mag	$(V - M)_0$ mag	$(V - N)_0$ mag
K0	0.60	1.03	1.23	1.72	1.94	1.97	1.90	1.92
K3	0.86	1.39	1.84	2.40	2.69	2.82	2.70	2.73
K4	0.96	1.61	2.16	2.77	3.05	3.22	3.08	3.02

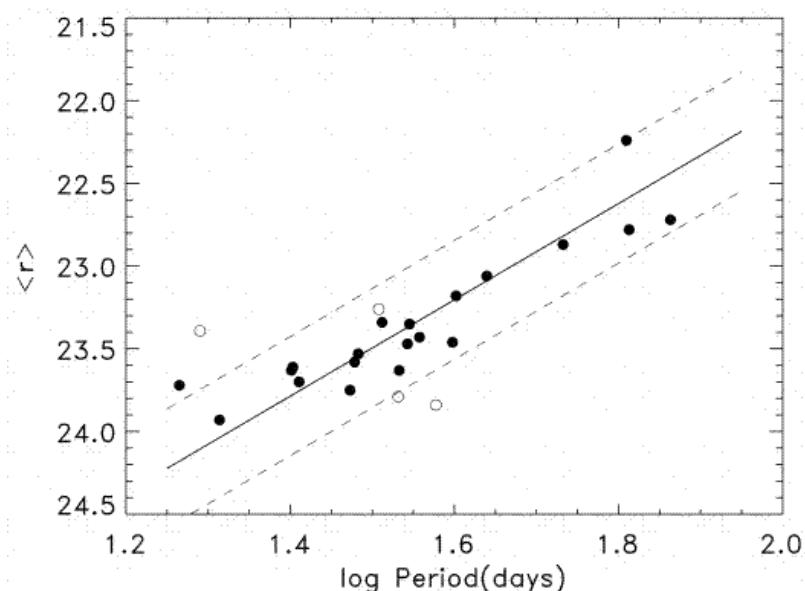


图2. $\langle R \rangle$ 是波段R中的平均绝对星等

表9 选定波段的有效波长

Filter	B	V	R	I	J	H	K	L	M	N
λ_F/nm	450	555	670	870	1200	1620	2200	3500	5000	9000

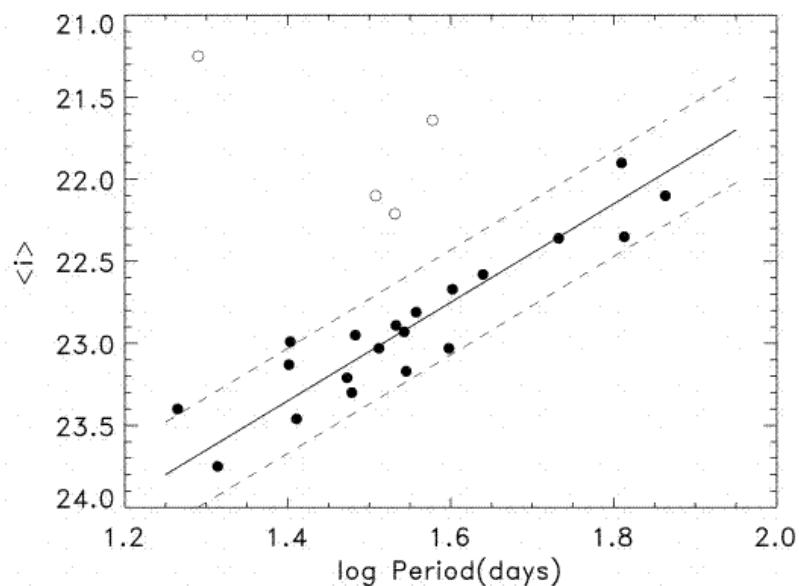


图3. $\langle I \rangle$ 是波段I中的平均绝对星等

第十届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

印度 布巴内斯瓦尔 2016年12月9日~19日

1. 判断

判断每个命题是否正确。请把你的判断结果用对勾的形式填写在答题纸对应的表格 (TRUE/FALSE)中。本题不需要解题过程。

- 1.1 如果在一个满月夜对夜空进行充分的长时间曝光，照片中天空的颜色会类似于白天拍摄的那样蓝。
- 1.2 一名位于布巴内斯瓦尔的天文学家在一年中的每一天的05:00 UT记录太阳的位置。如果地球的自转轴与它的轨道面垂直，那么天文学家记录下来的太阳轨迹将是一条类似于圆的弧线。
- 1.3 一个小天体在黄道面上绕太阳公转，如果它的公转周期比天王星小，那么它的公转轨道一定完全位于天王星的轨道内，不会超出天王星的轨道。
- 1.4 无论何时，太阳系的质心都一定在太阳的体内。
- 1.5 一个光子在自由空间(free space)中运动。随着宇宙的膨胀，它的动量会变小。

2. 泰坦星上的气体

行星大气层中的气体粒子的速度具有很大的变化区间。如果一种气体粒子的热速度的均方根超过了它的逃逸速度的 $1/6$ ，那么绝大部分这种气体就会从行星中逃逸出去。请问若想使一种理想的单原子气体留在泰坦星的大气层中不会逃逸，那么这种气体的最小原子质量数 A_{\min} 是多少？

已知：泰坦星的质量 $M_T = 1.23 \times 10^{23} \text{ kg}$ ，半径 $R_T = 2575 \text{ km}$ ，表面温度 $T_T = 93.7 \text{ K}$ 。

3. 早期宇宙

宇宙学模型表明宇宙中的辐射能量密度 ρ_r 与红移 z 的比例关系为 $(1 + z)^4$ ，物质能量密度 ρ_m 与红移 z 的比例关系为 $(1 + z)^3$ 。已知无量纲的密度参量 Ω 可以表示为 $\Omega = \rho/\rho_c$ ，其中 ρ_c 表示宇宙的临界能量密度。在现在的宇宙中，辐射密度参量 $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$ ，物质密度参量为 $\Omega_{m_0} = 0.3$ 。

- 3.1 当辐射能量密度 ρ_r 与物质能量密度 ρ_m 相等时，请计算红移 z_e 的大小。
- 3.2 假设来自早期宇宙的辐射是黑体辐射，峰值温度为 2.732 K ，请估算红移 z_e 处的辐射温度 T_e 。
- 3.3 如果现在的观测者接收到了来自红移 z_e 处的辐射，请估算光子能量 E_ν （单位为eV）。

4. 影子

一个位于北半球的观测者观测一根长度为 1.000 m 垂直于地表的棍子在一天中影子长度的变化情况，他发现影子最短的长度为 1.732 m ，最长为 5.671 m 。

假设太阳是点光源，忽略大气层的折射作用，请计算观测者所在的地理纬度 ϕ 和太阳的赤纬 δ_\odot 。

5. GMRT的信号接收时间

GMRT是世界上最大的米波射电望远镜阵之一。它位于印度西部($19^\circ 6' \text{N}, 74^\circ 3' \text{E}$)，由30个天线构成，每个天线的直径为 45.0 m ，每个天线的信号接收范围构成了一个指向无穷远的圆锥体。其中一个天线的接收范围的中心轴指向北部的子午线，其中心轴的指向为天

顶以北 $39^{\circ}42'$, 在此设置下, 有一个射电点光源随着地球自转在天球上移动, 该光源的轨迹与这个天线的圆锥接收范围的圆形横截面的直径重合.

如果用这个已知指向方位的单个天线观测一个射电源, 射电源的频率是200 MHz, 那么这个射电源在该天线的信号接收范围所对应的半高全宽(FWHM)区间内移动的持续时间 T_{transit} 是多少?

提示: 对于某一给定频率, 射电天线的信号接收范围的半高全宽(FWHM)的大小对应于天线的角分辨率. 假设接收到的信号是均匀的.

6. 造父变星脉动

β -Doradus是一颗造父变星, 它的脉动周期为9.84天. 为了简化计算, 假设它收缩到最小(半径为 R_1)时最亮, 膨胀到最大(半径为 R_2)时最暗. 变化过程中天体始终为球形且为黑体. 天体的热星等的变化范围为3.46至4.08. 由多普勒位移测量可知, 天体脉动过程中表面膨胀或者收缩的平均径向速度为 12.8 km s^{-1} . 天体的(固有)热辐射峰值会在531.0 nm至649.1 nm范围内变化.

6.1 求天体在极限收缩与极限膨胀状态对应的半径的比值(R_1/R_2).

6.2 求天体在极限收缩与极限膨胀状态对应的半径各是多少(以米为单位).

6.3 计算当天体处于极限膨胀状态时, 它的流量值 F_2 .

6.4 计算天体的距离 D_{star} (以秒差距为单位).

7. 望远镜光学

一架理想折射望远镜的焦比为 $f/5$, 物镜焦距为100 cm, 目镜焦距为1 cm.

7.1 望远镜的放大倍率 m_0 是多少? 镜筒长度即物镜与目镜之间的距离 L_0 是多少?

为了增加放大率又无需大幅增加镜筒长度, 可以在物镜与主焦点之间放置一个凹面镜(巴罗镜). 现在在物镜与目镜之间放一个焦距为1 cm的巴罗镜, 使放大率翻倍.

7.2 为了使放大率翻倍, 求巴罗镜到主焦点的距离 d_B .

7.3 求望远镜的镜筒长度会增大的距离 ΔL .

用之前用到的物镜和一个CCD组装一台望远镜, CCD位于主焦点, 且不再加装任何巴罗镜或目镜. CCD的长和宽均为 $10 \mu\text{m}$.

7.4 如果天空中两个天体的角距离为 $20''$, 那么在CCD上两个天体的图像的中心点的距离 n_p 是多少?

8. U-波段测光

一颗恒星在U波段的视星等为 $m_U = 15.0$. 如果U波段滤光片是理想的, 即可以100%传输该波段的光, 其他波段的传导率为0%. 滤光片的中心波长为360 nm, 工作波长的跨度范围为80 nm. 假设该恒星的能谱分布与频率有关. 任何波段的星等 m 与流量密度 f 在以央斯基($1 \text{ Jy} = 1 \times 10^{-26} \text{ W Hz}^{-1} \text{ m}^{-2}$)为单位的转化公式为: $f = 3631 \times 10^{-0.4m} \text{ Jy}$.

8.1 请估算每秒从恒星垂直入射到地球大气层顶端 1 m^2 范围内的U波段光子数的数量 N_0 .

现在用一台直径为2.0 m的地基望远镜在U波段观测这颗恒星. 观测过程中大气层对U波段的透过率为50%. 你可以假设视宁度非常理想, 可以达到衍射极限. 夜空在U波段的平均表面亮度为 $22.0 \text{ mag/arcsec}^2$.

8.2 当测量孔径为 $2''$ 时, 每秒钟收到的来自恒星的光子数与来自天光背景的光子数的比值 R 是多少?

8.3 在实际观测中, 只有20%射入主镜的U波段光子能够被探测到. 那么每秒钟有多少来自恒星的光子数(N_t)能够被探测到?

9. 火星轨道探测器

2013年11月5日，印度利用极地卫星(PSLV)发射火箭发射了他们的火星探测卫星MOM. 卫星的净重(本体+设备)为500 kg, 燃料质量为852 kg. 起初卫星以椭圆轨道绕地球运转，近地点距地球表面264.1 km, 远地点距地球表面23903.6 km. MOM卫星在经过六次绕地球的升轨之后，卫星将进入飞向火星的转移轨道(Hohmann orbit).

第一次升轨是通过在近地点附近短时间点燃推进火箭实现的. 点燃引擎会改变轨道，但是不会改变轨道面，也不会改变近地点. 在这个极短的升轨过程中卫星获得的净冲量为 $1.73 \times 10^5 \text{ kg m s}^{-1}$. 忽略燃料燃烧引起的质量变化.

9.1 第一次点燃引擎的升轨之后，新轨道的远地点到地球表面的距离 h_a 是多少?

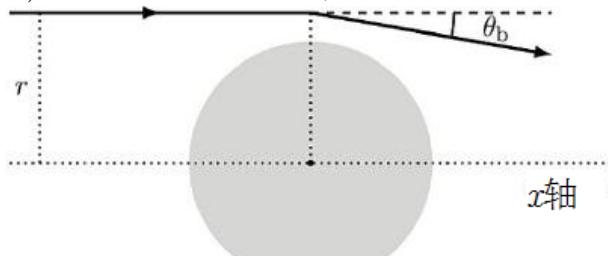
9.2 请计算第一次升轨后新的轨道偏心率 e 和轨道周期 P (以小时为单位).

10. 引力透镜望远镜

爱因斯坦的广义相对论预言了大质量天体会引起光线弯曲. 如图所示，为了简化计算，我们假设光线弯曲是在光线传播过程中的某一个点完成的. 弯曲造成的角度变化 θ_b 可以表示为

$$\theta_b = \frac{2R_{\text{sch}}}{r},$$

其中 R_{sch} 表示引起透镜效应的天体(透镜体)的史瓦希半径. 我们把入射光线距离透镜体中心所在的主光轴(x -axis)的距离称为“影响因子”，用 r 表示.



因此一个大质量天体的作用就像一个透镜. 来自透镜体无限远处并有着相同的影响因子 r 的光线在经过透镜体之后将被汇聚于主光轴上的一点，这个点距离透镜体中心的距离为 f_r . 而 f_r 为 r 的函数，当 r 等于天体半径时， f_r 最小. 由于引力透镜的作用，一个位于焦点上的观测者得到的图像会被大幅增强. 这种情况下的大质量天体会被当作一个引力透镜望远镜，对遥远的信号实现放大效果.

10.1 考虑我们的太阳作为引力透镜望远镜的可能性. 请计算太阳作为引力透镜体能够聚焦光线的最短距离，即太阳中心到焦点的最短距离 f_{\min} (以天文单位AU为单位)

10.2 现将一个半径为 a 的小圆形探测器固定在主光轴上的一点，这个点到日心的距离为 f_{\min} ，探测器的接收面与主光轴垂直. 只有环绕在太阳周围，宽度为 h ($h \ll R_{\odot}$) 的圆环范围内的光线才能被弯曲并被这个探测器接收到. 请画出这个物理情景图并标明各已知量. 请计算出圆环外径处所对应的光线聚焦的焦距表达式，并给出小角近似下接收器半径的表达式.

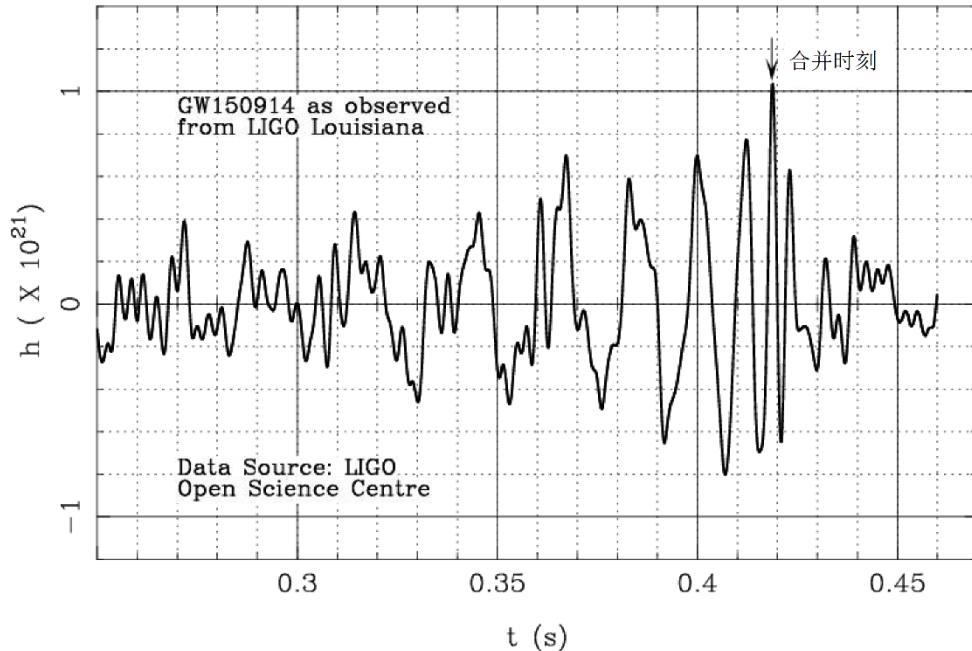
探测器的放大系数的定义是：由于引力透镜效应而射入该探测器的光线的强度与没有太阳时该探测器所接收到的光线强度之比. 请以 R_{\odot} 和 a 为参量表达探测器的放大系数 A_m .

10.3 考虑一种球形质量分布的情况，例如星系团中的暗物质，光线能够穿透这一部分的质量团块，同时也会发生引力弯曲. 为方便计算，假设影响因子为 r 的引力弯曲，只需要考虑半径在 r 以内的质量 $M(r)$ 的引力影响.

在什么样的质量分布 $M(r)$ 下，它所对应的引力透镜效果才会与一个理想的光学凸透镜相同？

11. 引力波

2015年9月，位于美国汉福德和利文斯顿的两台LIGO探测器首次探测到了引力波信号。下图显示了其中一台探测器接收到的信号(横坐标为以秒为单位的时间，纵坐标为形变振幅)。在本题中，我们将尝试用一个小质量测试天体 m 围绕一个大质量的中心天体 M ($m \ll M$)的几个不同的模型来解释所接收到的引力波信号。这几个模型分别对应着不同性质的中心大质量天体，我们将通过不同模型的对比而得出中心天体一定为黑洞的结论。



小质量物体由于释放引力波而损失了能量，由此持续导致它的轨道萎缩，直到测试天体触碰到中心天体表面。或者是在中心天体为黑洞的情形下，测试天体到达最小稳定圆轨道(ISCO)，此时轨道半径为 $R_{\text{ISCO}} = 3R_{\text{sch}}$ ，其中 R_{sch} 为该黑洞的史瓦希半径，这就是所谓的“并合纪元”。在并合纪元时，引力波的振幅为极大，其对应的振荡频率也为极大，并且其引力波的频率永远为测试天体轨道频率的2倍。本题我们只关注并合之前的引力波，此时开普勒定律被假设为是有效的。并合之后，引力波的形式会彻底发生改变。

11.1首先观察图中展示的引力波，并从中估算刚好在并合纪元之前，引力波的时间周期 T_0 是多少，并据此计算出此时所对应的引力波的频率 f_0 。

11.2对任意主序星(MS)，其半径 R_{MS} 和质量 M_{MS} 之间的关系呈幂指数关系，即 $R_{\text{MS}} \propto (M_{\text{MS}})^{\alpha}$ 。当 $M_{\odot} < M_{\text{MS}}$ 时， $\alpha = 0.8$ ；当 $0.08M_{\odot} \leq M_{\text{MS}} \leq M_{\odot}$ 时， $\alpha = 1.0$ 。

如果中心大质量天体是一颗主序星，请用太阳质量、太阳半径、主序星的质量相对于太阳质量(M_{MS}/M_{\odot})和幂指数 α 写出引力波的频率的最大值 f_{MS} 。

11.3利用上一题的结论，结合题目给出的幂指数关系式，对任意主序星找出其引力波频率可能达到的最大值 $f_{\text{MS},\text{max}}$ 。然后对照引力波探测结果进行评估。

11.4白矮星(WD)的质量上限是 $1.44M_{\odot}$ (根据钱德拉塞卡极限)，并且满足质量-半径关系 $R \propto M^{-1/3}$ 。一颗太阳质量的白矮星的半径为6000 km。计算如果测试天体绕一颗白矮星旋转，发出的引力波频率的最大值 $f_{\text{WD},\text{max}}$ 。

11.5中子星(NS)是一种独特的致密天体，它的质量范围为1至 $3M_{\odot}$ ，半径的范围为10–15 km。如果测试天体贴着中子星表面绕中子星旋转，请求出释放的引力波频率的范围，以及最小值 $f_{\text{NS},\text{min}}$ 和最大值 $f_{\text{NS},\text{max}}$ 。

11.6如果测试天体绕黑洞(BH)旋转，请写出以黑洞质量 M_{BH} 和太阳质量 M_{\odot} 表达的释放出的引力波频率 f_{BH} 的表达式。

11.7基于图中给出的并和纪元前的引力波周期(或频率)数据，请确认其中心天体是否可能是一个主序星(MS)，一个白矮星(WD)，一个中子星(NS)，或者是一个黑洞(BH)。请

在答题纸上勾出正确的选项. 并以 M_{\odot} 为单位, 估算出该天体的质量 M_{obj} .

12. 系外行星

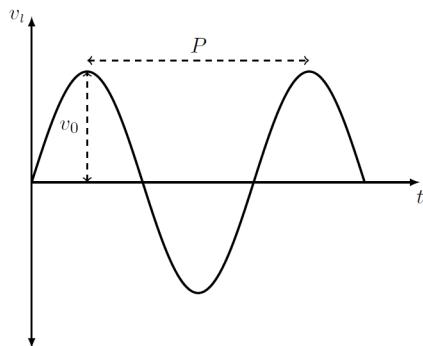
探测系外行星(太阳系外绕恒星运动的行星)有两种主流方法, 一种是视向速度法(或者叫“摆动法”), 另一种是凌日法. 本题中, 我们将尝试一种将两种方法结合的办法, 由此探测系外行星及其寄主星的多种信息.

本题中, 我们考虑一颗质量为 M_p , 半径为 R_p 的行星绕一颗质量为 M_s ($M_s \gg M_p$)半径为 R_s 的恒星公转, 公转轨道半径为 a . 当轨道面的中心轴与视线方向的夹角 i 趋于 $i = 90^\circ$ 时, 观测者的视线与该行星的轨道面平行, 此时被定义为“侧向”. 假设没有其他行星绕恒星公转, 且 $R_s \ll a$.

“摆动法”:

当行星和恒星绕他们的共同质心公转时, 恒星会轻微地移动, 或者叫“摆动”, 因为恒星的质心并不是严格的恒星-行星系统的共同质心. 恒星摆动造成的速度改变会引起恒星发出的光线产生微弱的多普勒位移.

恒星的视向速度 v_t 可以通过已知光谱的多普勒位移求出. 视向速度随时间 t 的周期变化如图所示. 图中显示了这种方式可以测得的两个物理量: 轨道周期 P 和视向速度的最大值 v_0 .

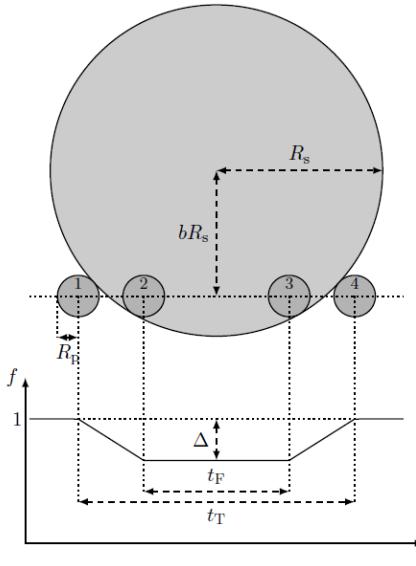


12.1请用 M_s 和 P 表示, 推导出轨道半径 a 和轨道线速度 v_p .

12.2请用 M_s , v_0 和 v_p 表示, 推出行星质量下限 $M_{p,\min}$.

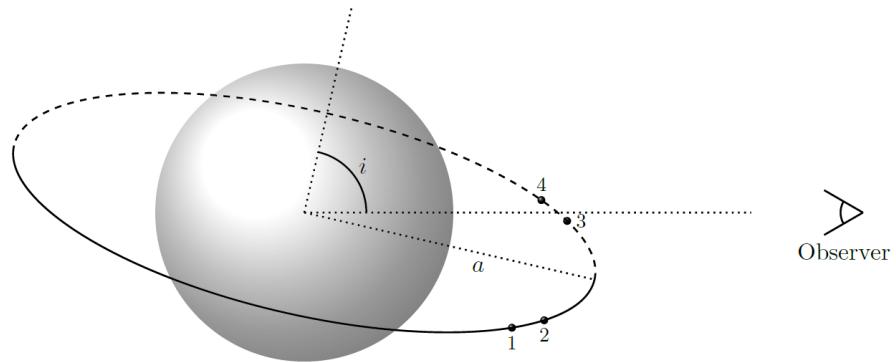
凌星法:

当行星绕寄主星转动, 且轨道面的方向接近侧向($i \approx 90^\circ$)时, 观测者会发现行星周期性地从恒星前方“凌”. 这会引起观测者测得的恒星流量出现微弱的减小. 原理图(未按比例绘制)显示了观测者看到的透视图以及相应的光变曲线(归一化的流量 f 随时间 t 的变化).



如果倾角恰好是 90° , 那么行星凌恒星的路径就是恒星的直径. 如果*i*取其他值, 凌的路径是一条弦, 弦的中心到圆心的距离为 bR_s . 没有行星凌时, 恒星的流量为1, 行星发生凌的过程中流量变化的最大值为 Δ .

图中标注了1至4号四个点, 分别对应了行星凌恒星的过程中先后四次与恒星相切的瞬间. 其中, 2号和3号之间即两次内切的时间间隔为 t_F , 1号和4号即两次外切的时间间隔为 t_T . 这些节点也被标在了下面这张从侧向画出的示意图中(该图示并不一定成比例).



凌星法中可测量的物理量有 P , t_T , t_F 和 Δ .

12.3请用含有 R_s 和 a 的表达式给出*i*的取值范围, 使得位于遥远距离的观测者都能看到凌的现象.

12.4用 R_s 和 R_p 表示 Δ .

12.5用 R_s , R_p , a , P 和 b 表示 t_F 和 t_T .

12.6在轨道半径远大于恒星半径的情况下, 证明参数 b 可以近似表示为

$$b = \left[1 + \Delta - 2\sqrt{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2}{1 - \left(\frac{t_F}{t_T}\right)^2} \right]^{1/2}$$

12.7根据(12.6)的结论, 用凌星法中的可测量量表示 a/R_s , 推导过程可以采用适当的近似.

12.8结合摆动法与凌星法的结论, 用 t_T , t_F , Δ 和 P 表示恒星平均密度 ρ_s , 已知 $\rho_s \equiv \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$.

固态还是气态:

考虑一个从地球看过去为侧向($i = 90^\circ$)的恒星-行星系统(行星轨道为圆轨道). 它的寄主星的质量为 $1.00 M_\odot$, 凌星法观测到的周期 P 为50.0天, 凌星现象的时长为1.00小时, 凌星的流量变化量 Δ 为0.0064. 同一系统通过摆动法测得的最大视向速度为 0.400 m s^{-1} .

12.9计算行星的轨道半径 a 分别以AU和米为单位.

12.10求系统的 t_F/t_T 比值.

12.11用地球质量 M_{\oplus} 和地球半径 R_{\oplus} 的分别求得行星质量 M_p 与行星半径 R_p . 行星是固态的还是气态的? 在答题纸相应的表格中打钩.

恒星黑子与邻边昏暗引起的凌星光变曲线:

12.12考虑一个 $i = 90^{\circ}$ 的行星凌恒星过程, 在恒星的赤道上有一个黑子. 黑子的尺寸与行星的尺寸 R_p 相等. 恒星的自转周期是 $2P$. 在答题纸的五个坐标格中分别画出行星连续五次凌恒星的光变曲线的五幅示意图, 在五个示意图中当没有凌的现象时, 恒星的流量分别独立地被归一. 假设第一次凌时黑子与行星没有相遇, 但是第二次凌时, 黑子与行星相遇了.

12.13至此之前, 我们在此问题中都只考虑了恒星星盘亮度均匀分布的情形. 但是在实际宇宙中, 真实的星盘会有临边昏暗(恒星的亮度从视面中心向边缘逐渐减小的现象)的情形. 请画出有显著临边昏暗情形下的凌星光变曲线.

第十届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

印度 布巴内斯瓦尔 2016年12月9日~19日

1. 脉冲双星

通过近几十年的努力, 天文学家们已发现了大量的毫秒脉冲星(自旋周期 $< 10 \text{ ms}$). 这些脉冲星的大多数来自于双星系统, 这些双星系统的轨道基本都是圆轨道.

对一个在双星轨道上的脉冲星, 所测得的脉冲星自旋周期(P)和所测得的视线方向加速度(a)都随着轨道运动而系统地变化. 在圆轨道的情形下, 这些变化能在数学上用所谓轨道相位 $\phi (0 \leq \phi \leq 2\pi)$ 表达为:

$$P(\phi) = P_0 + P_t \cos \phi, \quad P_t = \frac{2\pi P_0 r}{c P_B}$$
$$a(\phi) = -a_t \sin \phi, \quad a_t = \frac{4\pi^2 r}{P_B^2}$$

其中 P_B 是双星系统的轨道周期, P_0 是脉冲星的本征自旋周期, r 是双星系统的轨道半径.

以下表格给出了一组以太阳系为参照系在不同纪元 T 时的 P 和 a 的测量数据, 其中 T 以区间儒略日(tMJD)为单位, 即 T 以 $\text{MJD} = 2440000$ 为计时零点.

No.	T (tMJD)	P (μs)	a (m s ⁻²)
1	5740.654	7587.8889	-0.92 ± 0.08
2	5740.703	7587.8334	-0.24 ± 0.08
3	5746.100	7588.4100	-1.68 ± 0.04
4	5746.675	7588.5810	$+1.67 \pm 0.06$
5	5981.811	7587.8836	$+0.72 \pm 0.06$
6	5983.932	7587.8552	-0.44 ± 0.08
7	6005.893	7589.1029	$+0.52 \pm 0.08$
8	6040.857	7589.1350	$+0.00 \pm 0.04$
9	6335.904	7589.1358	$+0.00 \pm 0.02$

如果画出 $a(\phi)$ 随 $P(\phi)$ 变化的趋势, 我们会得到一个参数曲线. 从以上给出的条件可以看出, 这条曲线在 $P-a$ 平面内构成了一个椭圆.

本题中, 通过分析这一组数据, 在圆轨道的假设下, 我们将估算本征自旋周期 P_0 , 轨道周期 P_B , 和轨道半径 r .

1.1 以 P 为横轴, a 为纵轴画出这些数据点, 注意画出相应的误差棒(将该图标为“D1.1”).

1.2 画出一个最能契合这些数据点所在位置的椭圆(在同一幅“D1.1”图上).

1.3 利用画出的图像, 估算 P_0 , P_t 和 a_t , 及各自的误差范围(只是估算!).

1.4 以 P_0 , P_t , a_t 为参数, 写出 P_B 和 r 的表达式.

1.5 在(1.3)的基础上, 算出 P_B 和 r 的近似值及误差范围.

1.6 针对数据表中的第1, 4, 6, 8, 9次观测数据点(共五个), 计算它们各自的(轨道)相位.

1.7 在(1.6)结果的基础上, 请通过以下方式改进对轨道周期 P_B 的估算:

1.7a 先确定起始纪元 T_0 . T_0 对应的是第一次观测以前最近的一个零相位的时间点.

1.7b 每次观测的轨道相位所对应的预期时间 T_{calc} 由如下公式给出:

$$T_{\text{calc}} = T_0 + \left(n + \frac{\phi}{360^\circ} \right) P_B$$

其中 n 为 T_0 和 T (或 T_{calc}) 间可能经过的整数相位周期数。请为(1.6)中的五次观测的每一次估算它们所对应的 n 和 T_{calc} 。请记下每个计算的 T_{calc} 和观测值 T 的差别 (T_{0-C})，并把这些计算值填写到答题纸相应的表格中。

1.7c 以 n 为横轴, T_{0-C} 为纵轴, 画出对应的数据图。(将图标为“D1.7”)

1.7d 确定初始纪元 $T_{0,r}$ 和轨道周期 $P_{B,r}$ 的改进计算值。

2. 到月球的距离

下表中给出了2015年9月以地心为坐标原点测量月球的星表。每天的数据都是在00:00 UT采集的。

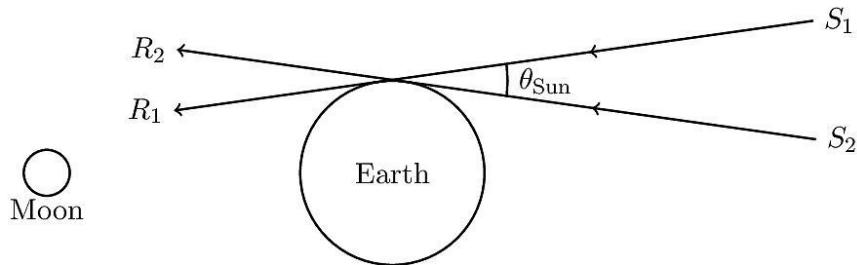
Date 日期	R.A.(α)赤经	Dec.(δ)赤纬	Angular Size(θ) 张角	Phase(ϕ) 相位	东西距角
	h m s	° ' "	"		
Sep 01	0 36 46.02	3 6 16.8	1991.2	0.927	148.6°W
Sep 02	1 33 51.34	7 32 26.1	1974.0	0.852	134.7°W
Sep 03	2 30 45.03	11 25 31.1	1950.7	0.759	121.1°W
Sep 04	3 27 28.48	14 32 4.3	1923.9	0.655	107.9°W
Sep 05	4 23 52.28	16 43 18.2	1896.3	0.546	95.2°W
Sep 06	5 19 37.25	17 55 4.4	1869.8	0.438	82.8°W
Sep 07	6 14 19.23	18 7 26.6	1845.5	0.336	70.7°W
Sep 08	7 7 35.58	17 23 55.6	1824.3	0.243	59.0°W
Sep 09	7 59 11.04	15 50 33.0	1806.5	0.163	47.5°W
Sep 10	8 49 0.93	13 34 55.6	1792.0	0.097	36.2°W
Sep 11	9 37 11.42	10 45 27.7	1780.6	0.047	25.1°W
Sep 12	10 23 57.77	7 30 47.7	1772.2	0.015	14.1°W
Sep 13	11 9 41.86	3 59 28.8	1766.5	0.001	3.3°W
Sep 14	11 54 49.80	0 19 50.2	1763.7	0.005	7.8°E
Sep 15	12 39 50.01	-3 20 3.7	1763.8	0.026	18.6°E
Sep 16	13 25 11.64	-6 52 18.8	1767.0	0.065	29.5°E
Sep 17	14 11 23.13	-10 9 4.4	1773.8	0.120	40.4°E
Sep 18	14 58 50.47	-13 2 24.7	1784.6	0.189	51.4°E
Sep 19	15 47 54.94	-15 24 14.6	1799.6	0.270	62.5°E
Sep 20	16 38 50.31	-17 6 22.8	1819.1	0.363	73.9°E
Sep 21	17 31 40.04	-18 0 52.3	1843.0	0.463	85.6°E
Sep 22	18 26 15.63	-18 0 41.7	1870.6	0.567	97.6°E
Sep 23	19 22 17.51	-17 0 50.6	1900.9	0.672	110.0°E
Sep 24	20 19 19.45	-14 59 38.0	1931.9	0.772	122.8°E
Sep 25	21 16 55.43	-11 59 59.6	1961.1	0.861	136.2°E
Sep 26	22 14 46.33	-8 10 18.3	1985.5	0.933	150.0°E

Sep 27	23 12 43.63	-3 44 28.7	2002.0	0.981	164.0°E
Sep 28	0 10 48.32	0 58 58.2	2008.3	1.000	178.3°E
Sep 29	1 9 5.89	5 38 54.3	2003.6	0.988	167.4°W
Sep 30	2 7 39.02	9 54 16.1	1988.4	0.947	153.2°W

下图是一幅有关当月发生的月全食的复合图像，照片拍摄于整个月全食过程的不同时间。每次拍摄的图像中心都是地球本影南北连线的中心点。假设观测者位于地心，角距指的是天体或影子的角直径。



- 2.1** 2015年9月，月球轨道远地点对应的月相是新月(New Moon)、上弦月(First Quarter)、满月(Full Moon)还是下弦月(Third Quarter)? 请把你的选择以打钩的形式填写在答题纸对应的表格中。本小题不需要解题过程。
- 2.2** 2015年9月，月球轨道升交点对应的月相是新月(New Moon)、上弦月(First Quarter)、满月(Full Moon)还是下弦月(Third Quarter)? 请把你的选择以打勾的形式填写在答题纸对应的表格中。本小题不需要解题过程。
- 2.3** 利用提供的数据计算月球轨道偏心率 e 。
- 2.4** 请以月球的角直径为单位 θ_{Moon} ，计算地球本影的角直径 θ_{umbra} 。解题过程中你需要在答题纸反面作图，并保留作图痕迹。
- 2.5** 如图所示，月食当日太阳相对于地球的张角即太阳的视直径为 $\theta_{\text{Sun}} = 1915.0''$ 。图中 $S_1 R_1$ 和 $S_2 R_2$ 分别是来自太阳视圆面边缘正好完全相对的两个点发出的光线。图像并没有按比例画出。



- 假设观测者位于地心。请以月球的角直径为单位 θ_{Moon} ，计算地球半影的角直径 θ_{penumbra} 。
- 2.6** 用 θ_{Earth} 表示从月球中心观测到的地球的角直径。请以 θ_{Earth} 为单位表示月食当天从地心观测到的月球的角直径 θ_{Moon} 。
- 2.7** 根据以上的结论，以km为单位，计算月球的半径 R_{Moon} 。
- 2.8** 估算月球到地球的最近距离 r_{perigee} 和最远距离 r_{apogee} 。
- 2.9** 利用9月10日的数据计算日地距离 d_{sun} 。

3. Ia型超新星

Ia型超新星是进行银河系外超远距离测量的重要工具。这类天体爆发达到亮度极值及之后变暗的过程所对应的光变曲线具有典型特征，可以用于进行Ia型超新星的证认。

如果把光变曲线进行使当的比例调整，会发现所有Ia型超新星的光变曲线都具有相同的变化趋势。为了达到这个效果，首先，我们需要画出以寄主星系为坐标系的光变曲线。寄主星系的每个观测时间间隔 Δt_{obs} 都会因为受到宇宙学延展的影响而变长，变化的比例系数为 $(1 + z)$ 。在静止参考系中，寄主星系的时间间隔记作 Δt_{gal} 。

静止参考系中，一颗超新星从亮度极大值到星等值改变2个星等所经历的时间间隔为 Δt_0 。如果我们用尺度因子 s 对时间间隔进行比例修正($\Delta t_s = s\Delta t_{\text{gal}}$)使得所有的超新星的时间间隔 Δt_0 都化作同一个数值，那么会发现所有光变曲线的形状都会是相同的。又已知尺度因子 s 与超新星爆发时达到最大光度时的绝对星等 M_{peak} 呈线性关系，关系式为 $s = a + bM_{\text{peak}}$ ，其中 a 和 b 是常数。知道了这个公式中的比例因子，就可以得到未知距离的超新星的绝对星等。

下表中给出了三颗超新星的数据，包括他们在不同时间的距离模数 μ (给出了前两颗的)、退行速度 cz 和视星等 m_{obs} 。定义 $\Delta t_{\text{obs}} = t - t_{\text{peak}}$ 表示相对于超新星爆发达到极亮的天数差。观测得到的星等值已经修正了星际消光和大气改正。

Name	SN2006TD	SN2006IS	SN2005LZ
μ (mag)	34.27	35.64	
cz (km s ⁻¹)	4515	9426	12060
Δt_{obs} (days)	m_{obs} (mag)	m_{obs} (mag)	m_{obs} (mag)
-15.00	19.41	18.35	20.18
-10.00	17.48	17.26	18.79
-5.00	16.12	16.42	17.85
0.00	15.74	16.17	17.58
5.00	16.06	16.41	17.72
10.00	16.72	16.82	18.24
15.00	17.53	17.37	18.98
20.00	18.08	17.91	19.62
25.00	18.43	18.39	20.16
30.00	18.64	18.73	20.48

- 3.1 估算三颗超新星的 Δt_{gal} 值，把结果填写到答题纸背面对应的表格中。把静止坐标系下三颗超新星各自的光变曲线画在同一个坐标图中，并标明“D3.1”。
- 3.2 把超新星SN2006IS的尺度因子 s_2 设为1.00。请通过计算SN2006TD和SN2005LZ的 Δt_0 得到它们各自的尺度因子 s_1 和 s_3 。
- 3.3 估算三颗超新星各自被修正后的时间间隔 Δt_s 。把结果填写在答题纸反面相应的表格中。把三颗超新星各自的光变曲线画在同一个坐标图中，由此证实他们具有相同的轮廓，并标明“D3.3”。
- 3.4 计算SN2006TD和SN2006IS达到亮度极值时分别对应的绝对星等 $M_{\text{peak},1}$ 和 $M_{\text{peak},2}$ 、并由此计算 a 和 b 。
- 3.5 计算SN2005LZ达到亮度极值时的绝对星等 $M_{\text{peak},3}$ 和距离模数 μ_3 。
- 3.6 利用距离模数 μ_3 计算哈勃常数 H_0 。进而估算宇宙年龄 T_H 。

第十一届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

泰国 普吉 2017年11月12日~21日

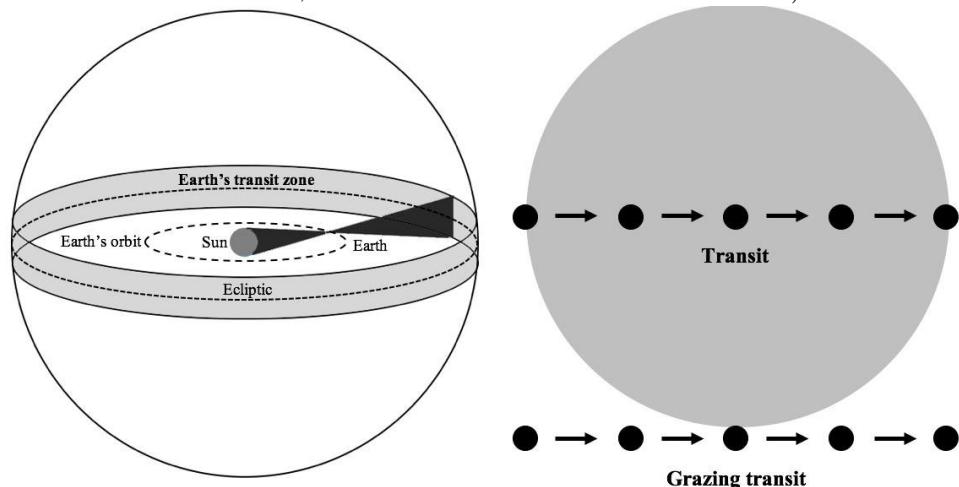
1. 在普吉观测大麦哲伦云

大麦哲伦云(LMC)的坐标为赤经R.A. = 5h24min, 赤纬Dec = $-70^{\circ}00'$. 普吉的地理经纬度为北纬 $7^{\circ}53'N$, 东经 $98^{\circ}24'E$. 你需要注意的是, 在世界时1月1日0时, 格林尼治地方恒星时GST为6h43min, 普吉岛位于东7区, 即UT+7. 那么在同一年里的哪天, 可以在普吉岛区时晚9点这个时间, 观测到大麦哲伦云LMC过中天?

2. 观测地球凌日的区域

地球凌日区域是指在距离太阳系非常遥远的地方, 可以观测到地球凌日, 即穿过太阳视圆面的区域. 对于地球上的观测者来说, 这个区域就是位于天球上黄道附近的一条投影带(下方左侧图中灰色的部分). 假设地球的公转轨道是半径为1 au的圆.

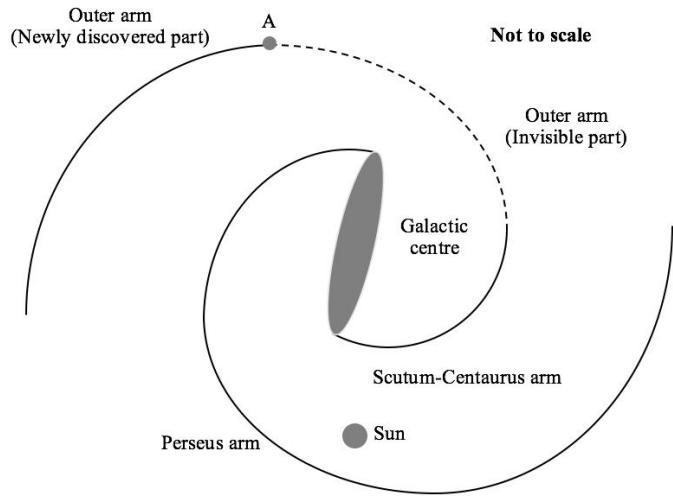
- (a) 计算在太阳系外非常遥远地方的观测者, 可观测到完整地球凌日这条带状区域的宽度张角, 单位为度(注意完整地球凌日就是指可以观测到完整的地球视圆面穿过太阳视圆面).
- (b) 计算在太阳系外非常遥远地方的观测者, 可观测到至少有一部分地球凌日这条带状区域的宽度张角, 单位为度(注意部分地球凌日就是指可以观测到一部分的地球视圆面遮挡住或穿过太阳视圆面, 下方右图是对这两问不同情况的解释).



3. 银河系遥远的外围新旋臂

2011年, 通过使用哈佛史密松天体物理中心的12米望远镜研究CO线, 戴姆和撒迪厄斯发现了银河系一条新的外侧旋臂. 他们发现CO的分布开始于银经 $\ell = 13.25$ (下图中A点)的位置, A点在以 -20.9 km s^{-1} 的径向速度远离太阳. 假设银河系在距银心5 kpc以外的位置, 旋转速度都是相同的. 太阳距离银心8.5 kpc, 绕银心旋转速度为 220 km s^{-1} . 注意示意图非真实比例.

- (a) 计算新旋臂起始位置(A点)到银心的距离.
- (b) 计算新旋臂起始位置(A点)到太阳的距离.



4. 21厘米HI星系寻天

一台射电望远镜的观测频率为1.32到1.52 GHz. 它在1分钟的积分时间内的探测极限为, 每波束 0.5 mJy . 在一次星系寻天中, 典型目标星系的HI谱线光度为 10^{28} W , 谱线宽度为1 MHz. 对于一个大的波束来说, 来自遥远星系的HI辐射区域可以近似为点源. HI自旋翻转谱线具有1.42 GHz的静止参考系频率.

使用这台射电望远镜进行星系寻天, 可以探测到的典型的HI星系的最高红移 z 是多少? 在你的计算中, 可以采用低红移情况下的非相对论近似. 注意 $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$.

5. 同步轨道卫星

同步轨道卫星绕地球公转的周期恰好等于地球的自转周期. 这些卫星的轨道距地球表面的高度为35786 km. 一颗卫星在倾斜同步轨道上运行, 其相对地球赤道平面的倾角 $\theta = 6.69^\circ$. 精确计算在纬度 $\phi = 51.49^\circ$ 的地方观测这颗卫星, 它可能的最大地平高度值. 忽略地球大气折射的影响.

6. 超新星1987A

超新星1987A爆发于1987年5月15日, 爆发最亮时的视星等达到+3等. 随后, 它逐渐变暗, 直到1988年2月4日, 减为裸眼不可见. 假设它的亮度为 B , 随着时间 t 的变化趋势为指数变化 $B = B_0 e^{-t/\tau}$, 其中 B_0 和 τ 是常数. 裸眼的极限星等为+6等.

- (a) 求 τ 的值, 以天为单位.
- (b) 如果观测者有一台传输效率 $T = 70\%$, 口径为6英寸(15.24 cm)的望远镜, 求他能用望远镜观测到1987A的最终日期. 假设人眼的平均直径为0.6 cm.

7. 外星生命

从围绕主序星公转的行星上寻找生命是探索地外文明的热点. 其中一个很好的突破口就是那些和地球气温相似, 且温差变化较小的行星. 已知对于任意主序星, 它的光度 L 和质量 M 满足 $L \propto M^{3.5}$.

假定恒星一生辐射出的总能量 E 与它的质量 M 成正比. 以太阳为例, 它在主序期的时长为100亿年. 下表中给出了不同光谱型的恒星质量. 假设恒星同一光谱型中每级子类(0–9)的分布与 $\log M$ 线性相关.

光谱型	O5V	B0V	A0V	F0V	G0V	K0V	M0V
质量(M_\odot)	60	17.5	2.9	1.6	1.05	0.79	0.51

- (a) 如果行星上进化出智慧生命至少需要40亿年, 那么天文学家重点搜寻的恒星对应的光谱型属于哪个范围? (光谱型应精确到具体的子类)
- (b) 假设目标行星的辐射率 ϵ 和反照率 a 与地球相同, 温度也非常接近, 其主序母星的质量为 M , 请以天文单位au为单位, 给出这种行星到其母星距离 d 的表达式.
- (c) 如果一颗恒星周围有一颗行星围绕它转动, 恒星的视向速度就会发生微小的变化. 如果观测者探测到的波长中的最小多普勒位移是 $(\Delta\lambda/\lambda) = 10^{-10}$, 请计算围绕(a)问中这类光谱型的恒星运动的(b)问中这类行星的最小质量, 以地球质量为单位.

8. 圣诞星

对于地球上的观测者来说, 木星合土星是非常帅气的. 设木星和土星在黄道面上的公转轨道为圆轨道. 从地球上观测, 木星合土星发生的周期是很稳定的, 变化微乎其微. 对于太阳系中心的观测者, 木星合土星发生的周期可认为和在地球上观测是相同的.

- (a) 请计算木星合土星的平均周期(以年为单位), 以及连续两次木星合土星位置的黄经差(以度为单位).
- (b) 下次木星合土星将会发生在2020年12月21日, 位置位于太阳以东 30.3° . 请推算发生时刻它们所在的星座. (给出标准星座名或标准星座名的三字母缩写, 例如Ursa Major或UMa)

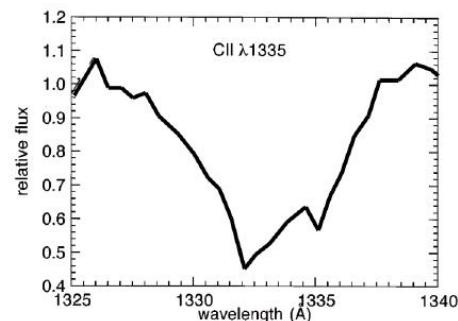
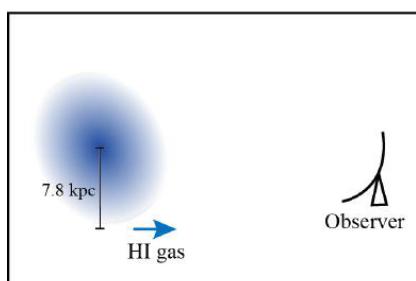
1606年, 开普勒推算出, 由于行星存在逆行, 一年中可能发生三次木星合土星现象. 他还算出这个现象曾在公元前7年(7BC)发生过, 这就是举世闻名的“圣诞星”. 以下计算你可以忽略地球的岁差.

- (c) 请推算公元前7年发生“圣诞星”现象时它们所在的星座. (给出标准星座名或标准星座名的三字母缩写, 例如Ursa Major或UMa)
- (d) 在公元前7年发生的三次木星合土星事件中, 第二次发生时, 对于地球上的观测者, 太阳所在的星座是什么? (给出标准星座名或标准星座名的三字母缩写, 例如Ursa Major或UMa)

9. 星系物质外流

坎农等学者利用甚大基线阵对一个盘状星暴星系IRAS 0833+6517中的HI气体进行了观测. 这个星系到地球的距离大约为80.2 Mpc, 星系倾角约23度. 根据HI气体的速度分布图, 他们发现IRAS 0833+6517正在自旋, 其中HI气体的视向速度是 5850 km s^{-1} , 气体距离星系中心 7.8 kpc (如下图所示). 通过观测星际吸收线相对于背景恒星的连续谱的蓝移, 可以追踪IRAS 0833+6517外流气体的运动情况(如下图所示). 假设这个星系是引力稳定的, 且所有恒星都沿圆轨道运动.

- (a) 计算HI气体相对于星系IRAS 0833+6517中心的转动速度(v_{rot}).
- (b) 一个粒子处于距星系中心 7.8 kpc 的外流气体中, 求它的逃逸速度.
- (c) 根据下右图中CII $\lambda 1335$ 吸收线的速度的位移(它已经进行过退行速度修正了), 请判断外流气体可否从星系中逃出.



10. GOTO望远镜

引力波光学瞬态望远镜(GOTO)的目标是在LIGO和VIRGO发现引力波后的一小时内找出引力波源的光学对应体. 这种巡天观测需要在短时间内大面积搜寻引力波探测所指向的天区，并在光学波段爆发前指向候选区域. GOTO望远镜阵由4个完全相同的折射望远镜组成，每台镜子的口径为40 cm, 焦比为2.5, 同时工作可实现大面积天区监测. 为了简化计算，我们假设不同望远镜的视场不重叠.

- (a) 计算每台望远镜的主焦面上，每毫米对应的角直径，即底片比例尺.
- (b) 如果望远镜的极限星等(探测器每秒钟从天体接收到的光子数为1时，对应的星等)是18.5等，计算要想探测一颗21等的天体且信噪比(SNR)为5，所需最短的曝光时间是多少？

假设噪声由两个因素决定：一个是读出噪声(RON):10计数(Count)/像元，第二个是CCD的暗(热)噪声(DN):1计数/像元/分钟. GOTO使用的CCD大小为每像元6微米，增益(光电信号与计数之间的转换因子)为1. 观测站的视宁度(seeing)为1.0角秒.

信噪比(SNR)的定义式为：

$$\text{SNR} \equiv \frac{\text{Total Source Count}}{\sqrt{\sum_i \text{Noise}_i^2}} = \frac{\text{Total Source Count}}{\sqrt{\sigma_{\text{RON}}^2 + \sigma_{\text{DN}}^2 + \dots}}$$

$$\sigma_{\text{RON}} = \sqrt{N_{\text{pix}} \cdot \text{RON}^2}, \quad \sigma_{\text{DN}} = \sqrt{N_{\text{pix}} \cdot \text{DN} \cdot t}$$

其中 t 为曝光时间.

- (c) 通常来说，曝光时间越长，天体计数越高，来自天体的泊松噪声就会越大. 如果泊松噪声占噪声的主要部分，请给出信噪比(SNR)和曝光时间的关系式.

如果把泊松噪声也考虑在内，若想观测21等的大体，信噪比SNR达到5，如(b)，请重新计算所需的曝光时间。

已知天体的泊松噪声(标准偏差)表达式 $\sigma_{\text{source}} = \sqrt{\text{Source Count}}$. 实际工作中，天光背景对天体泊松噪声的影响是很大的，但本题中忽略天光背景的影响.

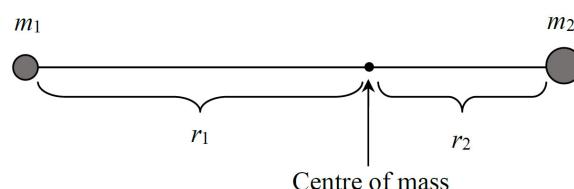
- (d) 已知引力波探测器的定位不确定度大约为100平方度. 我们的目标是在引力波被探测后的1小时内扫描所有可能的天区. 请计算每台望远镜的CCD的最小边长对应的像元数. 你可以假设CCD的读出时间和望远镜指向目标的时间可以忽略不计.

11. 本星系群的质量

仙女座星系M31和银河系(MW)的动力学可以用于估算本星系群(LG)的总质量. 基本的思路是现在它们属于一个双星系系统，而在大爆炸之后的短时间内它们可以被视为位于空间中一个相同的点. 此外，M31和银河系的质量在本星系群的质量中占主导地位. 通过观测谱线的多普勒位移，发现M31正以118 km s⁻¹的速度靠近银河系. 这可能令人惊讶，因为大多数星系正因宇宙膨胀而远离彼此. 由于M31和银河系相互之间的引力已经将它们的初始速度扭转，所以M31和银河系正在靠近彼此. 原则上，如果这对星系可以用独立的质点来表示，那么它们的总质量就可以由它们之间的距离、相对速度以及宇宙的年龄来推算. 卡恩和沃特(1959)就曾使用这个理论来估算本星系群LG的质量.

本题中我们将遵循这套理论来完成以下计算:

- (a) 考虑这两个质点 m_1 和 m_2 位于一个独立的系统中，角动量可以忽略不计(静止的观测者位于它们的质量中心上). 写出该系统总机械能 E 的数学表达式，可用的参数包括 m_1 、 m_2 、 r_1 、 r_2 、 v_1 、 v_2 以及宇宙万有引力常数 G . 其中 v_1 、 v_2 分别为 m_1 、 m_2 的径向速度.



- (b) 利用 r 、 v 、 μ 、 M 和 G 重新表示(a)问中的总机械能. 这里的 $r \equiv r_1 + r_2$, 表示 m_1 和 m_2 的

距离. v 为它们的间距变化率, 即相对速度. $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, 是这两个质点的约化质量.

$M \equiv m_1 + m_2$, 是这个系统的总质量.

(c) 已知 $v^2 = (2GM)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$, 其中 r_0 是一个新的常数, 证明(b)问的等式. 即使用参数 μ 、 M 、 G 和 E 来表示 r_0 .

(b) 问中的等式的解用以下的参数形式给出, 在初始情况下, 即宇宙大爆炸初期 $t = 0$ 且 $r = 0$, 有: $r(\theta) = \frac{r_0}{2}(1 - \cos \theta)$, $t(\theta) = \left(\frac{r_0^3}{8GM}\right)^{\frac{1}{2}}(\theta - \sin \theta)$, 其中 θ 用弧度表示.

(d) 通过上述参数表达式, 证明关于 $\frac{vt}{r}$ 的等式: $\frac{vt}{r} = \frac{(\sin \theta)(\theta - \sin \theta)}{(1 - \cos \theta)^2}$.

(e) 用 m_1 和 m_2 分别代表银河系和 M31. 现在的速度 $v = -118 \text{ km s}^{-1}$, 间距 $r = 710 \text{ kpc}$, t 代表宇宙年龄(137亿年). 代入数据计算出 θ .

(f) 用(e)中得到的 θ 计算两星系的最大间距 r_{\max} . 同时计算出总质量 M , 单位为太阳质量.

12. 海难

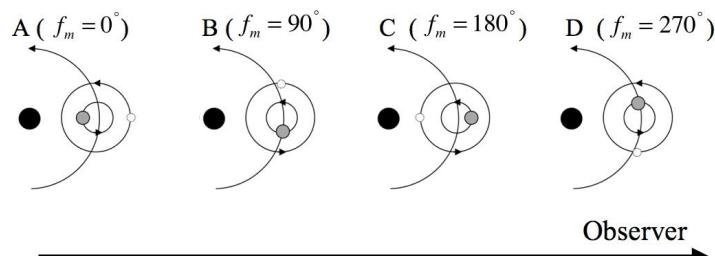
遇到海难后你来到了一个岛上. 幸运的是你带着手表, 它显示着曼谷时区的时间. 你还有一个指南针、一个星图以及一个计算器. 你失去了意识, 醒来后发现天已经黑了. 不幸的是天空中阴云密布. 一小时或更久之后你在云缝中看到了猎户座. 你估计出了参宿七的地平高度为 52.5° , 利用指南针你测量出了它的方位角为 109° , 这是从北点起算. 这时手表显示的时间为 2017 年 11 月 21 日 01:00. 并且你从天文课上学到了世界时 2017 年 1 月 1 日 0 时, 格林尼治地方恒星时 (GST) 约为 6h43min. 参宿七的赤经 RA 为 5h15min, 赤纬 Dec 为 $-8^\circ 11'$. 曼谷时区为 UT+7.

- (a) 计算观测时参宿七的时角(LHA).
- (b) 计算观测时的格林尼治地方恒星时(GST).
- (c) 计算这个岛的地理经度.
- (d) 计算这个岛的地理纬度, 精确到分.

13. 系外卫星

系外卫星是指系外行星的天然卫星. 系外卫星的引力势, 会影响到行星相对于行星-卫星系统的重心位置, 进而导致凌星时间变化现象(TTVs), 即相比于没有卫星的行星, 有卫星的行星凌母星的发生时间提前或错后了. 行星绕行星-卫星系统的重心的绕转运动也会发生持续时间变化现象(TDVs), 即相比于没有卫星的行星, 有卫星的行星凌母星的持续时间缩短或变长了.

规定公转轨道侧向观测者且呈圆形, 设如下参量: M_p 为行星质量, M_m 为卫星质量, P_p 为行星-卫星系统的重心绕母星公转的周期, P_m 为卫星绕行星公转的周期, a_p 为行星-卫星系统的重心到母星的距离, a_m 为卫星到行星-卫星系统重心的距离, f_m 为卫星相位(规定卫星冲母星时, 相位 $f_m = 0^\circ$), τ 为没有卫星时行星凌母星的平均持续时间.



本题只考虑卫星一直逆行, 且卫星公转的运行方向与行星相同. 对于遥远距离的观测

者, 卫星的相位如上图所示, 图中黑色、灰色和白色的圆分别对应母星、行星和卫星.

- (a) 我们定义 $\sigma_{\text{TTV}} \equiv t_m - t$, 其中 t 表示没有卫星时, 预计的凌星时间; t_m 表示有卫星时, 实际观测到的凌星时间. 求证: $\sigma_{\text{TTV}} = \left[\frac{a_m M_m P_p}{2\pi a_p M_p} \right] \sin(f_m)$, 其中, σ_{TTV} 为正值表示凌星实际发生的时间比预计的没有卫星的时间晚.
- (b) 定义 $\sigma_{\text{TDV}} = \tau_m - \tau$, 其中 τ 为没有卫星时, 凌星的持续时长; τ_m 为有卫星时, 实际观测到的凌星的持续时长. 假设行星的公转速度远大于卫星绕行星-卫星系统重心公转的速度, 且凌星过程中卫星的相位不变. 求证: $\sigma_{\text{TDV}} = \tau \left[\frac{P_p M_m a_m}{P_m M_p a_p} \right] \cos(f_m)$, 其中, σ_{TDV} 为正值表示凌星实际发生的持续时间比预计的没有卫星的持续时间长.
- 已知一颗系外行星正在凌它的母星. 母星是一颗主序星($1M_\odot$, $1R_\odot$, 光谱型: G2V). 行星轨道为侧向圆轨道, 公转周期为3.50天. 根据观测数据可知, 行星质量为 $120M_\oplus$, 半径为 $12R_\oplus$. 实际观测到的 σ_{TTV}^2 和 σ_{TDV}^2 满足:
- $$\sigma_{\text{TDV}}^2 = -0.7432\sigma_{\text{TTV}}^2 + 1.033 \times 10^{-8} \text{ days}^2$$
- (c) 假设卫星质量远小于行星质量, 以天为单位, 求行星的平均凌星时长 τ .
- (d) 以天为单位, 求卫星的周期 P_m .
- (e) 以地球半径为单位, 估算卫星到行星-卫星系统的重心的距离 a_m , 并以地球质量为单位求卫星的质量 M_m
- (f) 行星周围, 行星引力占主导的区域称为希尔球(Hill sphere). 希尔球的半径定义为: $R_h = a_p \sqrt[3]{\frac{M_p}{x M_*}}$, 其中 M_* 为母星质量. 求常数 x 的值. (提示: 对于大质量母星, 系统希尔球的半径近似于行星到第一或第二拉格朗日点 L_1 、 L_2 的距离.) 并以地球半径为单位, 求这个行星系统的希尔球半径.
- (g) 洛希极限是指卫星公转时能够保持不被潮汐力瓦解的最小轨道半径. 定义式为: $R_r = 1.26 R_p \sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_m}}$, 其中, ρ_p 和 ρ_m 分别为行星和卫星的密度. R_p 为行星半径. 假设卫星为岩状卫星, 密度大小等于地球密度. 求系统的洛希极限.
- (h) 这个卫星的轨道稳定么?

第十一届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

泰国 普吉 2017年11月12日~21日

1. 测量大麦云的距离

天文学家致力于通过三角视差法精确测量银河系内造父变星的距离，但始终未果。所有已知的银河系内造父变星的距离尺度都大于250 pc，由此导致测量结果存在10%的不确定度，为此引入视差的误差范围：±0.2毫角秒。依巴谷卫星测量了200颗紧邻造父变星的视差，但仍然具有很大的不确定度。近日，哈勃空间望远镜获得了10颗误差范围在±10%以内的造父变星的视差。这些造父变星的周期范围为3.7至35.6天，距离范围为300至560 pc。

	P (day)	$\langle V \rangle$ (mag)	$\langle K \rangle$ (mag)	A_V (mag)	A_K (mag)	$\langle I \rangle$ (mag)	视差 (mas)	误差 (mas)
RT Aur	3.728	5.464	3.925	0.20	0.02	4.778	2.40	0.19
FF Aql	4.471	5.372	3.465	0.64	0.08	4.510	2.81	0.18
X Sgr	7.013	4.556	2.557	0.58	0.07	3.661	3.00	0.18
ζ Gem	10.151	3.911	2.097	0.06	0.01	3.085	2.78	0.18
1 Car	35.551	3.732	1.071	0.52	0.06	2.557	2.01	0.20

表1: 5颗银河系造父变星的周期、平均视星等和视差

表1中给出了周期 P 、V、K、I三个波段的平均视星等 V 、 K 和 I , V、K两个波段的消光 A_V 和 A_K , 视差parallax (单位为毫角秒mas)和视差的误差(单位为毫角秒mas)。表中所有平均视星等的测量误差忽略不计。

(a) 通过观测，天文学家发现造父变星的周期和光度存在周光关系，即 $L \propto P^\beta$ 。但实际使用中，上述关系常用绝对星等随周期的对数的变化来表示。本题中，请用修正后的周光关系解答。

根据表1中的数据，把解题和画图过程中会用到的各物理量的名称和计算结果写在答题纸上，并在坐标纸上通过描点和线性拟合，分别画出V波段和K波段的修正周光关系图。不同波段的关系图画在不同坐标纸上。根据线性拟合的结果，得到斜率的最佳拟合值和误差范围(解题过程中你可能用到的近似为: $\Delta(\lg x) \approx \frac{\Delta x}{x \ln 10}$)。

恒星的周光关系在不同波段是存在差异的，这可以用颜色的差异来解释因此，修正后的周光关系又可以看作是“周期对数-绝对星等-颜色”关系。颜色变化的表现是红化效应，它会引起消光，而消光值是一个与波长有关的函数。消光值可能由于不同的造父变星的金属丰度不同或者前景星际介质或尘埃不同而改变。

为此，我们引入一个新的不依赖红化的平均视星等值，称为“Wesenheit”。这个星等值可以不考虑单个恒星的消光值，而是通过恒星的颜色信息有效地避开消光，从而得到恒星在对应波段的平均视星等。以VI波段为例，这个平均视星等值 W_{VI} 在VI波段的定义式为 $W_{VI} = V - \left[\frac{A_V}{E(V-I)} \right] (V-I) = V - R_V (V-I)$ ，其中， R_V 是红化率。对于VI波段， R_V 取2.45。

- (b) 根据表1中给出的数据，利用平均视星等 W_{VI} ，描点并画出新的不依赖红化的周光关系图。根据你画出的图得出线性拟合对应的斜率及误差范围。
- (c) 接下来，我们将用(a)和(b)两问中分别得出的周光关系，通过大麦云中的造父变星的

周期和星等，计算大麦云的距离.

	P (day)	$\langle V_{\text{corr}} \rangle$ (mag)	$\langle W_{\text{VI}} \rangle$ (mag)
HV12199	2.63	16.08	14.56
HV12203	2.95	15.93	14.40
HV12816	9.10	14.30	12.80
HV899	30.90	13.07	10.97
HV2257	39.36	12.86	10.54

表2: 大麦云中造父变星的周期、经过消光修正的平均视星等 V_{corr} 和利用新方法得到的平均视星等 W_{VI}

表2中给出了周期、经过消光改正后的平均视星等 V_{corr} 和利用新方法得到的平均视星等 W_{VI} . 计算每个天体的距离模数，并根据所有信息计算大麦云中各天体对应不同距离模数的距离(以秒差距为单位)和各波段的标准差，用英语说明你使用的计算标准差的方法是什么. 请判断你得到的两种距离在统计学上是否相同？判断你得到的两种距离对应的标准差在统计学上是否相同？如果标准差不同，哪种更准确？ V 更好还是 W_{VI} 更好？

2. 寻找暗物质

低表面亮度星系(LSB)是一种弥散星系. 当从地球观测时，这种星系的表面亮度至少比周围的夜天光低一个星等. 星系中的一部分物质是以中性氢气体和恒星为代表的“重子物质”，而大部分是不可见的暗物质. 本题我们将研究某个星系中的暗物质的质量对星系的旋转曲线的影响，并描述该星系中暗物质的相关情况.

下表是低表面亮度星系UGC4325的一些数据. 如果假定这个星系是完全侧向我们的. 相对于到星系中心的距离 r , 我们定义如下参数.

r (kpc)	λ_{obs} (nm)	V_{gas} (km/s)	V_* (km/s)
0.70	656.371	2.87	20.97
1.40	656.431	6.75	32.22
2.09	656.464	14.14	40.91
2.79	656.475	20.18	46.75
3.49	656.478	24.08	50.10
4.89	656.484	28.08	47.94
6.25	656.481	29.25	45.47
7.10	656.481	27.03	47.78
9.03	656.482	25.90	45.32
12.05	656.482	21.03	42.30

λ_{obs} : H α 线的观测波长，宇宙哈勃膨胀的影响已经被排除在外.

V_{gas} : 由HI表面密度导致的气体质量 M_{gas} 产生的速度对星系总的旋转速度的贡献.

V_* : R波段测光得到的恒星质量 M_* 产生的速度对星系总的旋转速度的贡献.

来自气体 V_{gas} 和恒星 V_* , 产生的速度对星系总的旋转速度的贡献，被定义为星系盘在不考虑任何外部因素影响的情况下，由于对应机制作用产生的速度. 这些速度是通过观测重子物质的密度分布计算得出的.

半径为 r 范围内的星系所含的暗物质质量 $M_{\text{DM}}(r)$ 可以用暗物质贡献的旋转速度 V_{DM} 、

$$\text{半径 } r \text{ 和引力常数 } G \text{ 表示为: } M_{\text{DM}}(r) = \frac{r V_{\text{DM}}^2}{G}.$$

现有的观测旋转速度 V_{obs} 的最佳约束模型为: $V_{\text{obs}}^2 = V_{\text{gas}}^2 + V_*^2 + V_{\text{DM}}^2$.

对于到星系中心为 r 的位置, 该位置的旋转速度 V_{obs} 取决于这个范围内的星系质量 $M(r)$.

根据星系密度分布模型, 质量密度 $\rho_{\text{DM}}(r)$ 与半径 r 的关系为: $\rho_{\text{DM}}(r) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2}$, 其

中 ρ_0 和 r_c 分别为该星系的中心密度和核半径.

根据密度分布, 暗物质的质量 $M_{\text{DM}}(r)$ 随半径 r 变化的关系由下式表述:

$$M_{\text{DM}}(r) = 4\pi\rho_0 r_c^2 [r - r_c \arctan(r/r_c)]$$

暗物质质量和星系的旋转曲线

- (a) 地球上 H α 的实验室发射波长 λ_{emit} 为 656.281 nm. 计算在距离 r 上观测到的星系旋转速度 V_{obs} 以及基于暗物质的旋转速度 V_{DM} , 单位 km/s. 通过表中给出的不同距离 r , 计算动力学总质量 $M(r)$ 和暗物质质量 $M_{\text{DM}}(r)$, 单位为太阳质量.
- (b) 在坐标纸上画出星系的旋转曲线. 在同一坐标系中分别画出 V_{obs} 、 V_{DM} 、 V_{gas} 、 V_* 随 r 的变化, 标出计算出的速度点并用平滑曲线连接. 依据观测到的旋转速度, 对不同物质的贡献进行排序.

暗物质的贡献

- (c) 使用值较小和较大的 r 估算 ρ_0 和 r_c . 注意当 x 值很大时, $\arctan(x) \approx \pi/2$, 当 x 很小时, $\arctan(x) \approx x - x^3/3$.
- (d) 把 $M_{\text{DM}}(r) = 4\pi\rho_0 r_c^2 [r - r_c \arctan(r/r_c)]$ 看作一个线性方程, 中心密度 ρ_0 可以通过线性拟合得出. 画合适的坐标图用于拟合另一个 ρ_0 的值, 单位为 M_\odot/kpc^3 . 如果你在之前的部分里没有得到 r_c 的值, 那么在这里使用 $r_c = 3.2 \text{ kpc}$ 进行估算.
- (e) 计算暗物质密度的对数值 $\ln[\rho_{\text{DM}}(r)]$, 在坐标纸上通过画图呈现该星系中暗物质随半径 r 的变化趋势.

第十二届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

中国 北京 2018年11月3日~11日

1. 超光速星系

阅读下列叙述，并判断对错。

- (a) 一些星系的视退行速度超过光速。
- (b) 哈勃给出的速度-距离关系不允许退行速度超过光速。
- (c) 哈勃-勒梅特定律(从前叫做哈勃定律)不违背狭义相对论。
- (d) 如果一些星系的视退行速度超过光速，那么这些星系上发出的光子永远无法到达地球。
- (e) 由于宇宙的膨胀加速，视退行速度等于光速的星系上的光子发出的光永远无法到达地球。

2. 距离

一个观测员测量一个星团中恒星的三角视差。由于随机误差，测量到的视差值对称地分布在精确值的两边，分布的标准差是0.05毫角秒。假设没有系统误差，并且这个星团中的恒星光度相同。已知这个星团距离我们 $R = 5 \text{ kpc}$ 。

他把数据表给了他的四个学生(A, B, C和D)，要求他们用以下四种方法估计到星团的距离。

- A. 把每个测量视差转换成距离，然后计算平均值(R_A)
- B. 先计算视差的平均值，然后把它转换成距离(R_B)
- C. 把每个测量视差转换成距离，然后计算中位数(R_C)
- D. 先计算测量视差的中位数，然后把它转换成距离(R_D)

判断以下叙述的对错。如果给出的数学关系是错误的，请给出正确的关系。

- (l) 如果第*i*颗恒星的视差值最小，第*j*颗恒星的视差值最大，那么总有 $R_i - R > R - R_j$
- (m) $R_A = R$ (即A估计的距离有很高的几率和实际距离相符)
- (n) $R_B = R$ (即B估计的距离有很高的几率和实际距离相符)
- (o) $R_C < R$ (即C估计的距离有很高的几率系统地低于实际距离)
- (p) $R_D = R$ (即D估计的距离有很高的几率和实际距离相符)

3. 大气折射

考虑北京($\phi = 40^\circ$)在春分日的日出。

- (a) 令 r_l , r_d , r_r 和 r_u 分别为从没有畸变的日面中心向左，向下，向右，向上到日面边缘的距离。问日出后，这四个半径的大小关系($<$, $=$, $>$)？
- (b) 如果没有大气层，日面上边缘升起的时间应该做怎样的修正。你可以假设为大气折射在地平线附近是 $35'$ 的典型情形。请只考虑周日视运动。

4. 小山的高度

两个朋友想要测量他们村(纬度 $\phi = 40^\circ$)边上的小山的高度。其中一个朋友爬到了山顶，并允诺她会在看到日落后立刻发一个光信号给在留在村里的朋友。他们在3月21日完成了这个实验，留在村里的朋友在看到日落后4.1分钟收到了光信号。估计山的高度和站在山顶的人的地平距离。忽略大气折射。

5. 恒星时

在某一天时，人们观察到一个很有趣的事，就是恒星时会出现两次00:00:00.

- (a) 此时太阳的大致赤经是多少？
- (b) 估计2018年这件事的具体日期。

假设在格林威治皇家天文台，在2018年1月1日0时(儒略日2458119.5)的平均恒星时是6.706^h.

6. 用FAST观测太阳

五百米口径球面射电望远镜(FAST)是坐落于中国贵州省的单口径望远镜。望远镜的直径是500 m，但在观测时的有效接受区域直径300 m。

考虑使用FAST观测来自太阳光球层的热辐射，中心频率3 GHz，带宽0.3 GHz。

- (a) 计算1小时观测能接收到来自太阳的总能量。
- (b) 估计将一张试卷翻面需要的能量。提示：典型的纸张面密度为80 g m⁻²。
- (c) 哪个能量更大？

瑞利-金斯公式： $B_\nu = \frac{2k_B T}{c^2} \nu^2$ ，可以用来计算单位面积单位立体角单位频率的功率。

7. 太阳黑子

正在恒星和黑子的物理过程中磁场很重要。作为近似，我们将太阳光球层简化为一种等离子体，可以按照理想气体一样对待，并且具有一定的磁压 $p_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ ，与当地的磁场(B)有关。磁压的行为与其他的压强类似，只不过它来自磁场而不是粒子的动能。

假设光球层中粒子的数密度是处处相等的，但是太阳黑子内部的磁场($B_{in} = 0.1$ T)远大于外部($B_{out} = 5 \times 10^{-3}$ T)。从黑体谱来看，太阳黑子内部的磁场为 $T_{in} \approx 4000$ K，而外部的温度为 $T_{out} \approx 6000$ K (这也就是为什么黑子看起来更暗)。为了使太阳黑子保持稳定，内部与外部的压强需要保持平衡。

- (a) 估算太阳光球层中粒子的数密度。
- (b) 将计算的结果与地表大气的数密度作比较。

8. 一个可能的贫暗物质星系

今年早些时候，一个科学家团队报道他们发现了一个星系的暗物质远低于星系演化模型的预计(van Dokkum et al. 2018, Nature)。这个星系编号是NGC 1052-DF2，位于椭圆星系NGC 1052 (距离太阳 $D = 20$ Mpc)附近。NGC 1052-DF2的形状像一个椭圆形，半长轴(a) $22.6''$ ， $\frac{b}{a} = 0.85$ 。这个星系一般的光来自于这个椭圆内，椭圆内的平均面亮度是24.7星等每平方角秒。

- (a) 计算这个星系的总视星等。
- (b) 这个团队认为这个星系是NGC 1052的伴星系。假设NGC 1052-DF2的质光关系 $(\frac{M/M_\odot}{L/L_\odot})$ 为2.0，计算这个星系中恒星的总质量。
- (c) 这个团队证认出NGC 1052-DF2中的10个球状星团，它们与星系中心的平均角距离是78.4''. 他们同时测量出球状星团的速度弥散度不超过8.4 km/s。估计这个星系的动力学质量，假设这个星系的质量分布是均匀且球对称的。
- (d) 其他团队对这个发现表示质疑(Kroupa et al., Nature, 2018, Trujillo et al., MNRAS, 2018)，他们认为NGC 1052-DF2并不是NGC 1052的伴星系，距离我们比NGC 1052远得多。解释为何更近的距离会弱化NGC 1052-DF2缺乏暗物质的论证。

9. 射电星系

一位观测者想用中国的500米口径球面射电望远镜(英文缩写FAST)观测一个红移 $z = 0.06$ 的射电星系。假设，在观测频率上，与望远镜的波束尺寸相比，这个射电源是很小的，也就是说在望远镜中，它就像一个点。为了用FAST探测点源，这个点源的信号相对于噪声 σ 必须足够强(即足够亮)，其中， σ 取决于带宽 $\Delta\nu$ 以及积分时间(射电天文学上相当于曝光时间) t_i ，公式如下：

$$\sigma = \frac{2k_B T_{\text{sys}}}{A_e \sqrt{t_i \Delta\nu}}$$

其中， T_{sys} 是系统温度(在0.28 GHz – 0.56 GHz的频率范围，其值约为150 K，在1.05 GHz – 145 GHz的频率范围，其值约为25 K)， $A_e = 4.6 \times 10^4 \text{ m}^2$ 是望远镜的有效面积， k_B 是玻尔兹曼常数。

这个射电星系在 $\nu = 0.4 \text{ GHz}$ 的观测频率上的连续谱流量密度是 $f_\nu = 2.5 \times 10^{-3} \text{ Jy}$ (央斯基)。观测到的连续谱的带宽 $\Delta\nu$ 是 $2.8 \times 10^8 \text{ Hz}$ ，中心是0.4 GHz。

- (a) 用0.4 GHz频段和相应的带宽，观测这样的流量谱密度，信噪比要达到30，所需的积分时间 t_i 是？
- (b) 我们想用21 cm吸收线来搜寻星系里的中性氢HI。在静止坐标系里，中性氢HI的21 cm吸收谱线的频率是1.4204 GHz。求我们观测到的该星系的中性氢HI谱线红移后的频率(ν_{obs})。
- (c) 这个星系的射电连续谱辐射可以被描述为幂次率， $f_\nu \sim \nu^\alpha$ ，谱指数 $\alpha = -0.2$ 。计算这个星系在频率 ν_{obs} 上的连续谱流量密度。
- (d) 中性氢HI的21 cm吸收线的线宽是90 km/s。求观测频率 ν_{obs} 处的线宽，以赫兹(Hz)表示。根据图1，中性氢HI的21 cm线在90 km s⁻¹的线宽上吸收了4%的连续谱流量密度(平均)。为了在3个连续的30 km s⁻¹的通道上探测信噪比大于3($\geq 3\sigma$)的吸收线，需要的积分时间是？

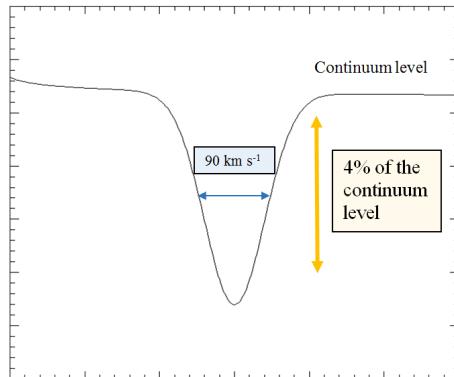


图1：射电星系中，连续谱上的中性氢21 cm吸收谱线

10. 织女星和牛郎星

恒星	赤经 (J2000.0)	赤纬 (J2000.0)	视差 (毫角秒, mas)	自行		径向速度 (km/s)
				赤经方向分量 $\mu_\alpha \cos \delta$ (mas/year)	赤纬方向分量 μ_δ (mas/year)	
织女星	18 ^h 36 ^m 56.49 ^s	+38°47'07.7"	130.23	+200.94	+286.23	-13.9
牛郎星	19 ^h 50 ^m 47.70 ^s	+8°52'13.3"	194.95	+536.23	+385.29	-26.1

在中国民间一个非常著名的传说中，织女星和牛郎星是一对恋人。相传，他们每年能

在银河之上架起的鹊桥上相会一次. 这两颗恒星的数据已在上表中给出. 本题中, 假设坐标系是固定的(即, 不受岁差或太阳运动的影响.)

基于这些数据, 回答以下问题:

- (a) 这两颗恒星的角距离是多少?
- (b) 计算织女星和牛郎星之间的距离(以秒差距为单位).
- (c) 计算每颗恒星的自行矢量的位置角.
- (d) 这两颗恒星在天球上的运行轨迹有几个交点?
- (e) 求离这两颗星最近的交点的坐标. (注: 将以上描述绘制在天球上, 将有助于理解本题)
- (f) 这两颗星过这一点时, 分别是什么时候(哪年)?
- (g) 当牛郎星位于那一点时, 它与织女星的角距离是多少?
- (h) 在三维空间里, 这两颗星的轨迹在过去或未来是否存在一个相交点? 如果有, 请计算坐标. 即使没有, 也需要计算说明. 此处不要忽略径向速度.

11. 宇宙的热历史

基于爱因斯坦的广义相对论, 俄罗斯物理学家亚历山大·弗里德曼推导出了弗里德曼方程, 这一方程可以很好地描述一个均匀、各向同性的宇宙的动力学. 弗里德曼方程通常写为如下形式:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}.$$

我们定义哈勃参数为 $\frac{\dot{a}}{a}$, 其中 a 是比例因子, \dot{a} 是比例因子的变化率. 因此, 哈勃参数是时间的函数. 在弗里德曼方程中, ρ_m 为物质密度, 包括暗物质和重子物质. ρ_r 为辐射密度, Λ 为宇宙学常数, k 为空间的曲率. 下标 0 表示该物理量目前的取值, 例如: H_0 为哈勃参数的当前值. 为避免跟约化哈勃参数相混淆, 我们用约化普朗克常数 $\hbar = h/(2\pi)$ 代替普朗克常量 h .

- (a) 哈勃参数的量纲是什么? 我们可以用哈勃参数来为宇宙膨胀定义一个特征时标(即哈勃时间 t_H). 计算哈勃时间的当前值 t_{H0} .
- (b) 我们定义临界密度为 ρ_c , 它指的是: 要解释一个没有任何辐射或暗能量的平坦宇宙的膨胀, 所需的物质密度. 求临界密度的表达式, 用 H 和 G 表示. 计算当前的临界密度 ρ_{c0} .
- (c) 我们可以方便地用无量纲的形式来定义所有的密度参数, 就像这样: $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$, 即密度与临界密度的比率. 用这种无量纲的密度参数, 弗里德曼方程可以简单地写为:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1.$$

根据以上信息, 求 Ω_Λ 和 Ω_k 的表达式, 用 H , c , Λ , k 以及 a 表示.

- (d) 另一个对物质、辐射和暗能量、宇宙学常数均适用的方程, 叫作流体方程: $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$, 其中 p 是某种成分的压强, ρ 是它的密度, $\dot{\rho}$ 是密度随时间的变化率. 辐射包括光子和无质量的中微子, 它们都以光速运动. 这些粒子(产生)的压强等于它们的能量密度的 $1/3$. 对于辐射, 证明其密度满足: $\rho_r \propto (1+z)^4$, 其中 z 是宇宙学红移.

注: 如果 $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = n\frac{\dot{a}}{a}$, 则 $\rho \propto a^n$.

- (e) 我们知道, 宇宙学常数 Λ 的值不随时间变化. 它的状态方程是 $p = w\rho_A c^2$, 其中, w 为整数. 求 w 的值.
- (f) 普朗克时间定义的是一个特征时标, 在这个时标之前, 我们当前的物理定律全都无效, 需要用到量子引力. 普朗克时间可以写成 \hbar 、 G 、 c 的表达式, 统一用国际标准单位(SI). 用量纲分析的方法, 求普朗克时间的表达式, 并估算它的值.
- (g) 普朗克长度是与普朗克时间相关的长度尺度, 其表达式是 $l_p = ct_p$. 黑洞的最小质量也叫作普朗克质量, 其定义是: 施瓦西半径为普朗克长度两倍的黑洞的质量. 推导普朗克质量 M_p , 并计算以GeV为单位的 $M_p c^2$, 通常认为, 这个质量是基本粒子的上阈值, 超过这个值它们就会塌缩成一个黑洞.
- (h) 最初始时(普朗克时间之后不久), 所有粒子都在宇宙“原初汤”中处于热平衡状态. 随着温度降低, 不同的粒子开始从原初汤中逐个退耦, 在宇宙中自由地游荡光子是在大爆炸之后~300000年退耦的. 这些退耦光子构成了宇宙微波背景辐射(CMB), 它们遵循黑体辐射的斯特藩-玻尔兹曼定律: $\varepsilon_r = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3} (k_B T)^4$. 证明: 宇宙微波背景辐射CMB遵循: $T/(1+z) = \text{常数}$.
- (i) 随着宇宙膨胀, 辐射密度的降低比物质密度的降低要快很多, 在某个时刻, 物质密度等于辐射密度. 辐射包括光子和中微子的辐射. 除了光子, 中微子也对辐射能量密度贡献了(光子的)68%(即, 总辐射能量密度 $\Omega_{r0} = 1.68\Omega_{\gamma0}$, 其中 γ 表示光子). 请用 Ω_{m0} 和约化哈勃参数 $h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}$ 给出物质密度与辐射密度相等时的红移 z_{eq} 的表达式. 你可能需要用到宇宙微波背景当前的温度 $T_0 = 2.73 \text{ K}$.
- (j) 当宇宙温度在1 MeV左右时, 中微子会从原初汤中退耦. 这时, 宇宙中的辐射密度远超过了所有其他成分, 其他这些成分可忽略. 中微子退耦的时间为 $t = \frac{1}{2H}$, 请估算, 这个时间是大爆炸之后的多少秒?

第十二届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

中国 北京 2018年11月3日~11日

1. 产星星系中的尘埃和年轻恒星

作为星系内部恒星形成过程之中的副产品，星系里的尘埃能够显著吸收紫外(ultraviolet, UV)波段和光学波段的星光，然后在远红外(far-infrared, FIR)波段再辐射出来，远红外波段对应的波长范围是10–300微米(μm)。

1.1. 在星系的紫外谱上，紫外辐射主要是由最近发生的恒星形成过程中所诞生的年轻恒星们贡献的，因此星系的紫外光度可以作为量度星系里的“恒星形成率(star-formation rate, 英文缩写SFR)”的一个可靠指标。由于观测到的紫外光度很大程度上受到尘埃散射和吸收的影响而减弱(尘埃消光, dust attenuation)，天文学家为了量化紫外连续谱的形状，定义了一个指数，叫作紫外连续谱斜率(UV continuum slope)(β): $f_\lambda = Q \cdot \lambda^\beta$ 。其中 f_λ 是星系在给定波长上的单色流量(单位: W m^{-3})， Q 是定标常数， β 是紫外连续谱斜率。

1.1.1. 人们定义了一个叫作AB星等的量: $m_{\text{AB}} = -2.5 \log \frac{f_\nu}{3631 \text{ Jy}}$ ，典型的产星星系的

AB星等在紫外波段大致不变。求这类星系的紫外连续谱斜率 β (UV slope)是多少？
(提示: $f_\nu \Delta\nu = f_\lambda \Delta\lambda$).

1.1.2. 表1展示的是一个红移 $z = 6.60$ 的星系CR7的远红外(FIR)流量观测结果。用数据点出星系CR7的AB星等(纵坐标)与静止参考系波长(rest-frame, 横坐标，使用对数坐标)的关系图，记为图1。

1.1.3. 在图1中画出与数据点拟合最佳的直线，用最小二乘法计算星系CR7的紫外连续谱斜率 β ，并与1.1.1.中你所得出的结果相比较。并据此判断，和1.1.1.中的典型产星星系相比，星系CR7里的尘埃是不是更多？请答[YES](更多)或[NO](否)。提示：可以将 m_{AB} 写为静止波长 λ 和 m_{1600} 的方程，其中 m_{1600} 是波长 $\lambda_0 = 160 \text{ nm}$ (1600 \AA)处的AB星等。

表1. 星系CR7的远红外(FIR)测光数据(表中数据为观测到的波长，红移 $z = 6.60$)

波段	Y	J	H	K
中心波长 (μm)	1.05	1.25	1.65	2.15
AB星等 m_{AB}	24.71 ± 0.11	24.63 ± 0.13	25.08 ± 0.14	25.15 ± 0.15

1.2. 假设星系中的尘埃颗粒吸收紫外光子的能量，然后以黑体辐射的形式进行远红外辐射，紫外连续谱斜率(β)、紫外 (UV)亮度(在1600埃处)、远红外亮度(F_{FIR})可以表示为以下函数关系: $\text{IRX} \equiv \log\left(\frac{F_{\text{FIR}}}{F_{1600}}\right) = S(\beta)$ ，其中 F_{FIR} 是观测到的远红外流量， F_{1600} 是160纳米(1600 \AA)波长上的观测流量(“流量” F_λ 定义为: $F_\lambda = \lambda \cdot f_\lambda$)。表2给出的是20个近邻星系的 β 、 F_{FIR} 和 F_{1600} 的20组测量值(Meurer等人1999)。

1.2.1. 基于表2中给出的数据，在画图纸上绘制纵坐标IRX和横坐标 β 的关系图，记为图2，画出拟合直线。在图的旁边写出拟合直线的方程(形式类似于 $\text{IRX} = a \cdot \beta + b$)。

1.2.2.用以下等式，求出IRX的观测值 IRX_{obs} 与拟合预测值 IRX_{pred} 的均方差 σ (单位为dex, $\text{dex}(x) = 10^x$, 例如 $\log(10^9) - \log(10^4) = 5$ dex):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\Delta \text{IRX}_i)^2}{N-1}} \quad (\text{单位: dex})$$

其中 $\Delta \text{IRX}_i = \text{IRX}_{i,\text{obs}} - \text{IRX}_{i,\text{pred}}$.

表2. 20个邻近星系的紫外谱斜率(UV slope)、流量(flux, 10^{-3} W m^{-2})和远红外流量(FIR flux, 10^{-3} W m^{-2})

星系名称	紫外谱斜率 β	$\log(F_{1600})$	$\log(F_{\text{FIR}})$
NGC 4861	-2.46	-9.89	-9.97
Mrk 153	-2.41	-10.37	-10.92
Tol 1924-416	-2.12	-10.05	-10.17
UGC 9560	-2.02	-10.38	-10.41
NGC 3991	-1.91	-10.14	-9.8
Mrk 357	-1.8	-10.59	-10.37
Mrk 36	-1.72	-10.68	-10.94
NGC 4670	-1.65	-10.02	-9.85
NGC 3125	-1.49	-10.19	-9.64
UGC 3838	-1.41	-10.81	-10.55
NGC 7250	-1.33	-10.23	-9.77
NGC 7714	-1.23	-10.16	-9.32
NGC 3049	-1.14	-10.69	-9.84
NGC 3310	-1.05	-9.84	-8.83
NGC 2782	-0.9	-10.5	-9.33
NGC 1614	-0.76	-10.91	-8.84
NGC 6052	-0.72	-10.62	-9.48
NGC 3504	-0.56	-10.41	-8.96
NGC 4194	-0.26	-10.62	-8.99
NGC 3256	0.16	-10.32	-8.44

1.3.在前文假设的能量转移过程中, F_{FIR} 与 F_{1600} 的比率可用幂律关系表示:

$\frac{F_{\text{FIR}}}{F_{1600}} \approx 10^{0.4A_{1600}} - 1$. 其中 F_{1600} 是未消光的流量; A_λ 是尘埃在波长 λ 的波段上的消光数值
(以星等为单位).

1.3.1.求 A_{1600} 的表达式, 以IRX为自变量.

1.3.2.根据表2的数据以及上面推导出的 $A_{1600}(\text{IRX})$ 的关系式, 在图画纸上绘制 $A_{1600} \sim \beta$ 关系图, 记为图3, 画出拟合直线. 在图旁边写出拟合直线的方程(形式类似于 $A_{1600} = a' \cdot \beta + b'$).

1.3.3.如果你1.3.2.中的线性模型是正确的, 对一个没有尘埃的星系, 它的紫外连续谱斜率 β_0 会是多少?

1.4.确定了近邻紫外谱斜率 β 与IRX之间的关系之后, 我们就可以在高红移宇宙中检测这个经验定律了. 2016年, 观测者得到了星系CR7的ALMA(阿卡塔马大型毫米波/亚毫米波阵)观测数据, 观测到它的远红外连续谱的流量上限 F_{FIR} 等于 $1.5 \times 10^{-19} \text{ W/m}^2$ (在 3σ 置信度上).

1.4.1.计算星系CR7的IRX. 这一数值是上限还是下限?

提示: 这里 F_{1600} 应写为如下形式: $F_{1600} = \lambda_0 \cdot f_{1600}$. 其中 $\lambda_0 = 160$ nm(1600 Å), f_{1600} 是静止坐标系的观测流量.

1.4.2.你认为当前的观测是否足够充分, 以至于能够发现星系CR7偏离了你推导出的近域宇宙的IRX- β 关系式? 请答[YES](够充分)或[No](不够充分). 给出IRX的差, 并在答题纸上写下计算过程.

2. 一个双星系统中的致密天体

在阿帕奇天文台的“星系演化实验”(APOGEE)中, 天文学家在御夫座(Auriga)天区发现了一个不同寻常的双星系统. 在以下这些题目中, 你将要分析数据, 并自己重现他们的发现.

研究团组致力于用径向速度(radial velocity, RV)方法找出双星系统中的致密恒星. 他们研究了APOGEE存档的“单一”恒星的光谱, 并测量了这些数据中恒星径向速度的视变化. 针对其中大约200颗有着最高加速度的恒星, 研究人员比对了超新星自动化全天巡天(ASAS-SN)获得的光度变化数据, 来分析哪些有可能存在凌星(transit)、椭球变星(ellipsoidal variation)或者恒星黑子(starspot)等现象. 此后, 他们找出了一颗径向速度变化很大、光度变化也很大的恒星, 名为2M05215658+4359220.

2.1.下表展示的是恒星2M05215658+4359220在APOGEE光谱观测的三个径向速度测量值.

这里我们假设它的径向速度的变化是由一颗看不见的伴星引起的. 恒星的自行可以忽略.

表3: APOGEE测量的恒星2M05215658+4359220的径向速度值

观测序号	约化儒略日 MJD	径向速度 RV (km/s)	误差 Uncertainty (km/s)
1	56204.9537	-37.417	0.011
2	56229.9213	34.846	0.010
3	56233.8732	42.567	0.010

2.1.1.利用这些数据和一个简单的线性模型, 来初步估算恒星的视最大加速度:

$$a_{\max} = \frac{\Delta RV}{\Delta t} \Big|_{\max} \quad (\text{其中单位为km/s/day})$$

2.1.2.请利用这些数据, 初步估计那颗看不见的伴星的质量.

2.2.在发现了这颗特殊恒星之后, 天文学家展开了后续观测, 使用的设备是位于美国亚利桑那州霍普金斯山弗雷德劳伦斯惠普尔天文台(FWO)的1.5米多目标反射光栅摄谱仪(TRES). 以下表格展示的就是用这个设备得到的径向速度测量值.

表4: TRES测量的恒星2M05215658+4359220的径向速度值

约化儒略日 MJD	径向速度 RV (km/s)	误差 Uncertainty (km/s)
58006.9760	0	0.075
58023.9823	-43.313	0.075
58039.9004	-27.963	0.045
58051.9851	10.928	0.118
58070.9964	43.782	0.075
58099.8073	-30.033	0.054
58106.9178	-42.872	0.135
58112.8188	-44.863	0.088
58123.7971	-25.81	0.115
58136.6004	15.691	0.146
58143.7844	34.281	0.087

2.2.1. 在画图纸上绘制TRES径向速度(RV)和时间的关系图, 记为图4 (Figure 4). 绘制一个合适的正弦曲线来拟合给定的数据. 根据你的绘图, 估算其轨道周期(P_{orb})和径向速度的半变幅(K , 即正弦曲线的振幅).

2.2.2. 如果这颗恒星在以圆轨道运转, 求这颗恒星的轨道半径(r_{orb})的最小值, 分别用太阳半径 R_{\odot} 和天文单位au表示.

2.2.3. 双星系统的质量函数可以定义为:

$$f(M_1, M_2) = \frac{(M_2 \sin i_{\text{orb}})^3}{(M_1 + M_2)^2}.$$

其中下标“1”代表主星, “2”代表它的伴星. 参数 i_{orb} 是双星系统的轨道(orb)倾角. 这个质量函数也可以用可观测量表示. 计算这个系统的质量函数, 以太阳质量 M_{\odot} 为单位.

2.3. 基于对APOGEE、TRES光谱和GAIA视差测量的详细分析, 天文学家得出如下恒星参数.

表5: 恒星2M05215658+4359220的部分物理参数

有效温度 T_{eff} (K)	表面重力 $\log g$ (cm/s ²)	视差 π (毫角秒mas)	测量的 径向自转速度 $v_{\text{rot}} \sin i$ (km/s)	热辐射流量 F (W m ⁻²)
4890 ± 130	2.2 ± 0.1	0.272 ± 0.049	14.1 ± 0.6	$(1.1 \pm 0.1) \times 10^{-12}$

测光观测表明, 它的光变曲线的周期与轨道周期相同, 因此我们可以假定它的自转周期和轨道周期相等: $P_{\text{rot}} = P_{\text{orb}} \equiv P$, 且轨道倾角和恒星自转轴倾角(rot)满足 $i_{\text{orb}} = i_{\text{rot}} \equiv i$.

2.3.1. 计算能看见的那颗恒星的光度(L_1 , 单位为 L_{\odot})、半径(R_1 , 单位为 R_{\odot})、轨道倾角正弦值($\sin i$), 以及质量(M_1 , 单位为 M_{\odot}). 每个量都要给出误差.

2.3.2. 从以下选项中, 选出这颗恒星的正确类型:

- (1) 蓝巨星(Blue Giant),
- (2) 黄主序星 (Yellow main sequence star),
- (3) 红巨星(Red Giant),
- (4) 红主序星(Red main sequence star),
- (5) 白矮星(White Dwarf).

2.3.3. 基于双星系统的质量函数 $f(M_1, M_2)$, 在你的图画纸中画出伴星质量 M_2 (纵轴)相对于主星质量 M_1 (横轴)的曲线, 记为图5 (Figure 5).

这里你需要根据2.3.1.中推导出的($\sin i$)作图, 并考虑其误差, 把根据其上限($\sin i + \Delta \sin i$)和下限($\sin i - \Delta \sin i$)计算所得的曲线也画在图上.

2.3.4. 在你画的图5中, 画出一个垂直阴影区域, 覆盖范围 $[M_1 - \Delta M_1, M_1 + \Delta M_1]$, 再画两条水平的虚线, 纵坐标取值分别为白矮星和中子星的质量上限. 那颗看不见的伴星 M_2 , 它的质量可能是多少? 它可能是一个什么天体?

第十三届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

匈牙利 凯斯特海伊 2019年8月2日~11日

1. 著名天文事件

将以下天文学事件按时间顺序排序。在答题纸每个事件序号前的方格中写出该事件发生的时间顺序编号(1至11)。

- (1) 哈勃太空望远镜发射
- (2) 海盗号探测器抵达火星
- (3) 火卫一和火卫二的发现
- (4) 1/P哈雷彗星最近一次位于近日点
- (5) 谷神星(小行星/矮行星)的发现
- (6) 天王星(行星的发现
- (7) 首次成功测量恒星视差
- (8) 发现第一个行星状星云
- (9) 星族(I型和II型)的发现
- (10)首次把一个光学目标证认成类星体
- (11)发现宇宙是膨胀的

2. 射电光子在太阳系天体引力场中的偏转

一些天文学家测量了1919年日全食期间恒星光线的偏转现象，这些恒星非常靠近太阳。偏转角满足理论预言，为 $1.75''$ 。光线(或光子)以距离 d 从太阳旁边掠过，形成的偏转角满足：

$$\Delta\theta \propto \frac{4GM_{\odot}}{dc^2}.$$

当今的VLBI(甚长基线干涉测量)技术在射电波段的精度为0.1 mas(毫角秒)。

请计算如果来自类星体的射电光子掠过(a)木星, (b)月球，能否探测到光子的偏转？估计两种情况下的偏转角度，通过和甚长基线干涉测量技术的分辨精度比较，然后判断。把两种情况能否探测到光子偏转的结论“Yes”或“No”分别标记在答题纸相应的方框中。

3. 银河系和M87中心的超大质量黑洞

事件地平望远镜(EHT)国际团队拍摄到了第一张黑洞图像。图像拍摄的是环绕在M87星系中心的超大质量黑洞。图像使用的观测波长为 $\lambda = 1.3$ mm, 这个波长的星际消光不太严重。

- (1) 需要多大的仪器才能分辨星系中心超大质量黑洞的阴影(阴影大小实际上是光子捕获半径，即史瓦西黑洞半径的三倍)？将结果表示为黑洞的距离 d 和质量 M 的函数。
- (2) 代入图像的观测波长，分别以地球半径为单位表示观测以下目标所需的仪器口径。
 - (A) M87中心超大质量黑洞. ($d_{\text{BH-M87}} = 5.5 \times 10^7$ ly, $M_{\text{BH-M87}} = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$)
 - (B) 人马座A*处，银河系中心超大质量黑洞. ($d_{\text{Sgr A*}} = 8.3$ kpc, $M_{\text{Sgr A*}} = 3.6 \times 10^6 M_{\odot}$)
- (3) 研发这种仪器需要以下哪一种技术？用×在答题纸相应字母前的方框中标出答案。
 - (A) 暗物质引力透镜
 - (B) 把多个射电望远镜排成阵列进行干涉测量
 - (C) 致密环境中的光子减速
 - (D) 减少引入波前畸变的影响(E强电磁场中的中微子聚焦)

4. 改进普通反射望远镜

一个学生有一架成像质量一般的卡塞格林式反射望远镜，它的主镜和副镜都镀有一层反射率 $\varepsilon_1 = 91\%$ 的铝膜。

- (1) 用“优质”反射率 $\varepsilon_2 = 98\%$ 的镜面涂层取代原有的镀膜，这架望远镜的极限星等会有什么变化？
- (2) 假设学生还有一个反射镜，它的反射率也是 ε_1 。如果他/她把这个反射镜的反射率改进为 $\varepsilon_3 = 99\%$ ，并把它用在采用“优质”反射率 ε_2 改进过的望远镜上，与把未优化的反射镜用在最初的望远镜上比，极限星等相差多少？(反射镜是平面镜，与光轴的倾角为 45° 。)
- (3) 这个变化人眼能感受到吗？在答题纸上标记“Yes”或“No”。

考虑全部可见光波段，忽略任何波长依赖性和几何效应。

5. 宇宙微波背景烤箱

由于人体主要由水构成，因此可以有效吸收微波光子。假设宇航员的身体是一个完美的球形吸收器，质量 $m = 60 \text{ kg}$ ，平均密度和比热容与纯水相同，即 $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $C = 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 。

- (1) 如果宇航员在星系空间，求他吸收宇宙微波背景辐射(CMB)的吸收率的近似值(以瓦特为单位)。CMB的光谱能量分布可以通过黑体辐射的温度 $T_{\text{CMB}} = 2.728 \text{ K}$ 来近似。
- (2) 宇航员每秒大约能吸收多少CMB光子？
- (3) 忽略其他能量输入和输出，CMB需要多长时间才能将宇航员的温度提高 $\Delta T = 1 \text{ K}$ ？

6. 蒂萨伊瓦罗斯发电厂烟囱的高度

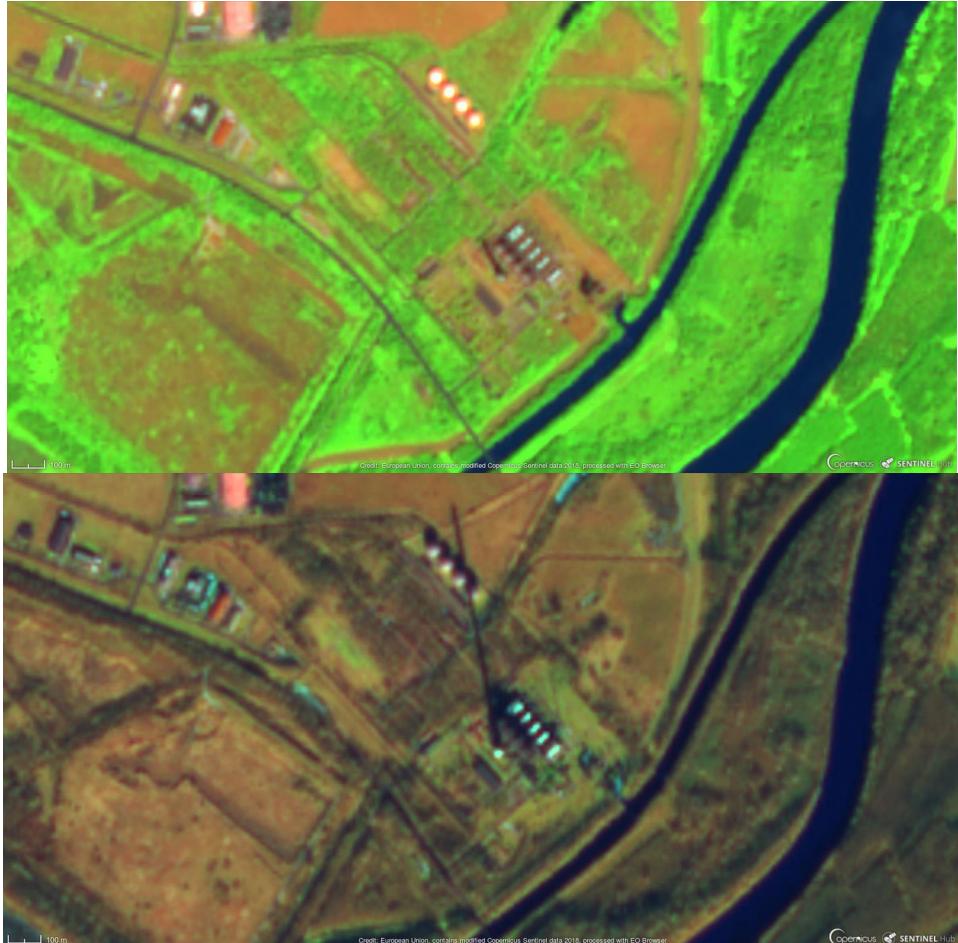
欧洲哥白尼地球观测项目运行了两颗哨兵-2号遥感卫星。这些卫星在太阳同步极轨轨道上绕地球运行，高度约为800千米。它们每隔几天经过一次给定区域，总是在同一当地时间拍摄图像(精确到几分钟之内)。这些相机对13种不同的光学和近红外波长非常敏感。图像的分辨率为10 m。

匈牙利第三高楼是蒂萨伊瓦罗斯镇附近的一座发电厂的烟囱。你可以看到两张哨兵-2卫星拍摄的照片。一张是6月29日拍的，另一张是12月16日拍的，分别接近夏至和冬至。照片的方向是常见的上北、下南、左西、右东。

根据图1、2和左下角给出的比例尺测得，图1中烟囱影子的长度 $x_1 = 125 \text{ m}$ ，图2中影长 $x_2 = 780 \text{ m}$ 。回答以下问题：

- (1) 哪天的阴影更长？用×在答题纸相应字母前的方框中标出答案。
(A) 6月29日
(B) 12月16日
- (2) 哨兵-2号卫星在一天中的哪个时间飞过这个地区？用×在答题纸相应字母前的方框中标出答案。
(A) 清晨
(B) 上午晚些时候
(C) 午后
(D) 傍晚
- (3) 根据给定的影子长度，估计烟囱的高度。对于这一问，假设卫星图像是在当地中午拍摄的。
- (4) 哪些因素会影响推导烟囱高度的准确性(可能有多个选择)？用×在答题纸相应字母前的方框中标出答案。

- (A) 地球是椭球形的.
- (B) 卫星图像分辨率有限, 阴影边缘定义不明确.
- (C) 烟囱所在位置的海拔高度.
- (D) 地球自转轴倾角的季节性变化.
- (E) 考虑到大气折射的影响.



7. 太阳黑子对太阳辐照度的影响

自1978年以来, 机载人造卫星上的探测器一直对太阳常数进行连续测量. 这些精确的测量表明, 太阳常数有季节性、按月的、按年的以及更长时间尺度的变化. 虽然季节变化起源于周期性变化的日地距离, 但长达十年的准循环变化主要取决于太阳的活动周期.

- (1) 假设太阳辐射是完美的黑体辐射, 当地球距完美的平静太阳刚好1 AU时, 计算太阳直射下地球大气层外沿的太阳常数值.
- (2) 计算一月初和七月初时, 太阳直射下地球大气层外沿的太阳常数值, 并求出它们的比.
- (3) 如果在太阳赤道附近有一个平均温度 $T_{sp} = 3300$ K, 直径 $D_{sp} = 90000$ km的黑子. 计算此时的太阳常数与没有黑子的太阳常数的比, 然后求出新的太阳常数.

假设太阳黑子是圆形的, 忽略球形投影的影响. 不考虑其他运动特征. 同时假设太阳旋转得足够快, 因此太阳辐照度仍然是各向同性的.

- (4) 在现实中, 太阳辐照度不再是各向同性的. 计算太阳黑子从地球上不可见和完全可见这两种情况时, 太阳的辐照度, 即在地球上接收到的太阳辐射流量的比率.

8. 天琴座RR变星的光变幅度

匈牙利天文学家对天琴座RR脉动变星的研究做出了重要贡献, 该类变星的光变情况展现出了振幅调制的循环特性(Blazhko效应).

在两个波长 $\lambda_1 = 500$ nm 和 $\lambda_2 = 2000$ nm 对一颗天琴座RR变星进行了观测. 在不同的

波长, 我们观测到了该星不同的深度. 我们将深度用层1和层2来表示. 可以通过半径和适当深度处的黑体辐射强度来确定该星在给定波长的光强. 此外, 维恩近似可以用于计算黑体在单位面积上的辐射功率: $F(\lambda, T) \propto \frac{1}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{k\lambda T}\right)$, 其中 h 是普朗克常数, k 是玻尔兹曼常数, c 是真空中的光速. 为了简化计算, 我们引入了一个新的常数 $C_b = hc/k \approx 0.0144 \text{ m K}$.

- (1) 假设在两个层中温度在 $T_1 = 6000 \text{ K}$ 和 $T_2 = 7400 \text{ K}$ 之间变化, 忽略半径的变化, 计算在两个不同探测波长中, 该星星等变化的振幅之比.
- (2) 计算在波长 λ_1 处探测到的该星光变曲线的振幅, 单位为星等.
- (3) 忽略温度变化, 当 $R_{\min} = 0.9\langle R \rangle$, $R_{\max} = 1.05\langle R \rangle$ 时, 计算在给定波长处由半径变化引起的光变曲线的振幅. 这里的 $\langle R \rangle$ 是给出层的平均半径.
- (4) 目前的观测和模型证实了光球层半径变化对振幅调制循环即 Blazhko 循环的影响很小, 而温度变化的影响更重要. 因此, 光变曲线的振幅在不断变化. 让我们假设在振幅最小的情况下, 该脉动变星的温度变化范围缩小到 $T_{\min} = 6100 \text{ K}$, $T_{\max} = 6900 \text{ K}$. 那么此时在两个不同波长处哪个振幅最小, 最小值是多少? 较大振幅的结果可以使用第(1)问中温度变化引起的结果.
- (5) 哪个描述是正确的(可能是一个或者多个正确答案)? 在答题纸上本题对应字母前方的方框中标 \times .
 - (A) 在红外波段 Blazhko 效应更容易被观测到.
 - (B) 温度变化主导了在可见光波段的光变曲线.
 - (C) 如果我们忽略半径的变化, 则振幅与波长成反比.
 - (D) 多波段的观测对研究 Blazhko 效应没有意义.

9. 地月系统拉格朗日L2点的距离

2019年1月3日, 中国的“嫦娥4号”探测器着陆在了以著名匈牙利裔物理学家西奥多·冯·卡门命名的环形山附近.

由于在探测器所在的区域, 地球始终处于地平线以下, 就需要一个中继站来维持与地球的任务控制通讯. 中国航天部门发射了另一个探测器“鹊桥”, 它在一个围绕地月系统 L2 点的圆轨道上运动, 也是在月球另一侧.

计算卫星到月球表面的距离(h). 月球公转轨道可以被认为是一个正圆, 半径为 $R = 384400 \text{ km}$. 忽略太阳和其他行星的干扰.

提示: 计算中你可以用以下近似: 当 $|x| \ll 1$, $1/(1+x)^2 \approx 1 - 2x$.

10. 南→东→北

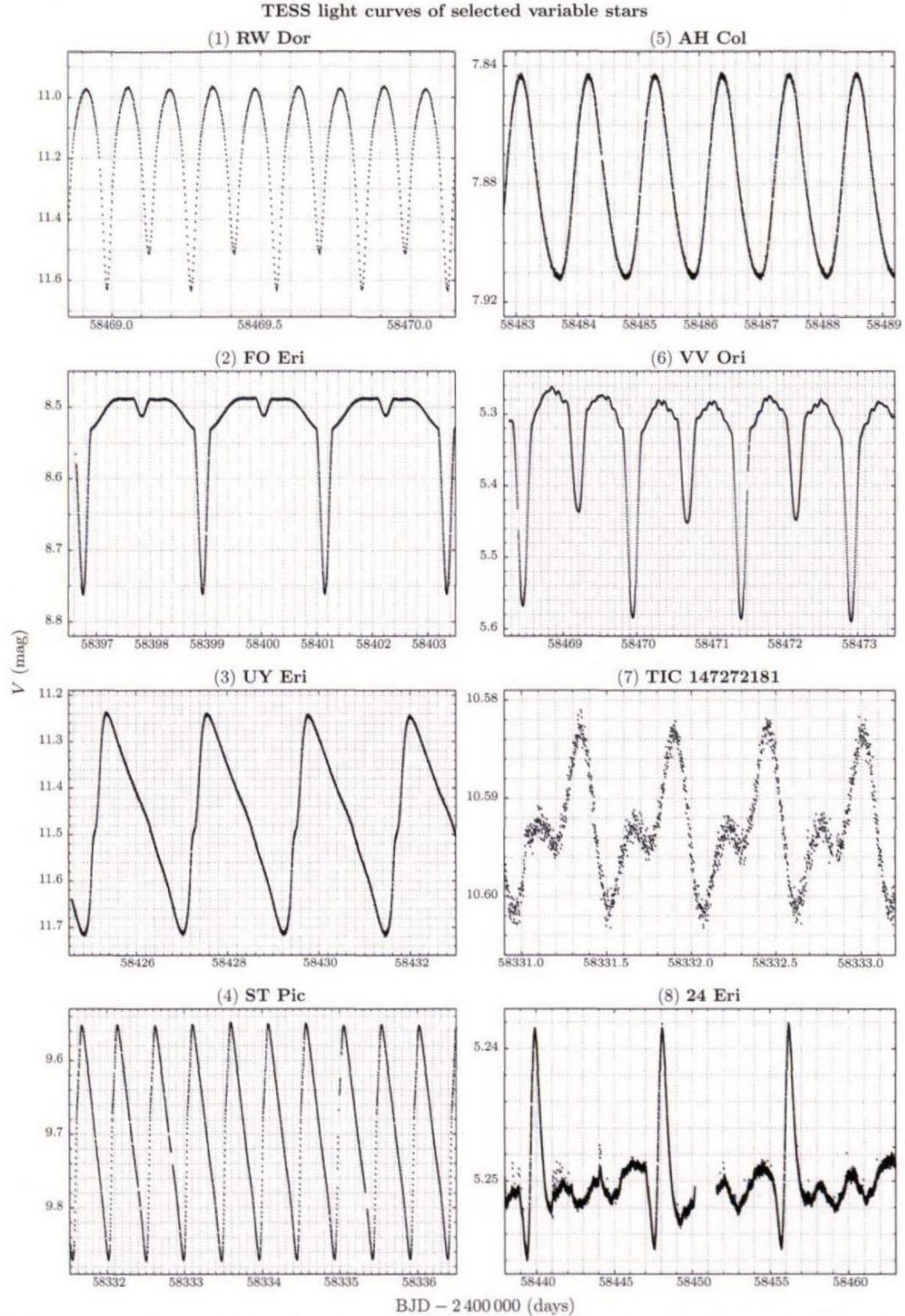
假设地球是一个半径 $R = 6378 \text{ km}$ 的刚性正球体, 表面为平滑的刚体. 在地球表面存在一些这样的点, 我们从那里出发先向南 6378 千米, 再向东 6378 千米, 再向北 6378 千米, 就会回到出发的位置. 找到这些点和路径. 计算这些转向点的地理坐标, 并画出路径.

为了简单起见, 我们用 0° 到 $+360^\circ$ 来标定从格林威治向东的经度, 用 0° 到 $+90^\circ$ 来标定赤道向北的地理纬度, 用 0° 到 -90° 来标定赤道向南的地理纬度. 由于地球是旋转对称的, 从不同的子午圈出发的情况不会被认为是不同的解决方案.

11. 通过光变曲线认证所选变星的类型

TESS(凌星系外行星巡天望远镜)是 NASA 最新的系外行星搜寻计划. 其通过南天巡天获得的大量的时序光变现象(脉动或食变星, 超新星, 恒星耀斑以及小行星等情况), 确定那些围绕距离我们较近、亮度较高的恒星公转的行星.

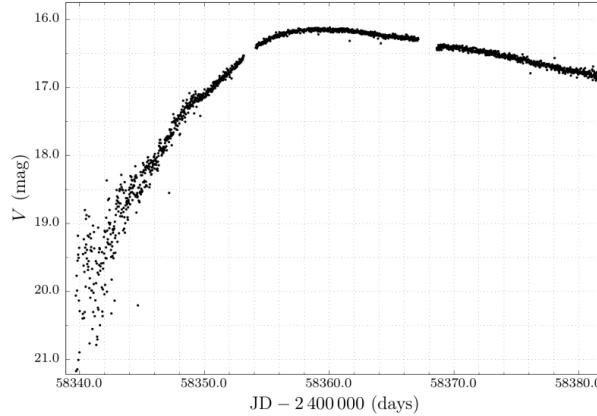
在图3上你能找到8颗不同的周期性变星的光变曲线图(本征变星、食变星或是旋转引起的光变, 编号为FO Eri, RW Dor, 24 Eri, TIC 147272181, ST Pic, UY Eri, VV Ori, AH Col), 它们来自TESS的观测目标列表, 序号1至8横坐标是 $BJD - 2400000$, 单位是天, 纵坐标 V 的单位是星等. 这里 BJD 是质心儒略日, V 表示视亮度.



(1) 下方列出了不同的变星类型, 请在答题纸上将每颗变星的编号填写在对应类型后的方框中.

- 心率动型变星
- 天琴座RR型(RRab子集)脉动变星
- 脉动大陵五型食双星(半接双星)

- 猎犬座a型脉动变星
 - 室女座W型(星族II)造父脉动变星
 - 独立的具有强烈反射效应的食双星
 - 大熊座W型近距食双星
 - 旋转变星(点源)
- (2) 基于光变曲线图, 估计每颗变星的光变周期, 单位为天. 填写在答题纸对应的位置上, 结果最多保留2位小数. 周期在实际值的±5%范围内都可以被接受.
- (3) 哪类被TESS观测到的天体会生成图4中的光变曲线? 请在答题纸上对应的字母前方的方框里标×.



- (A) 微引力透镜事件
 (B) 与火星角距离较近的饱和星系
 (C) 临近视场边缘的彗星彗发
 (D) 遥远星系中的超新星爆发
 (E) 超巨星上的超级耀斑

12. 近地小行星的距离

假设一颗近地小行星被两位天文学家观测到, 其中一位来自匈牙利的Nagykanizsa, 另一位来自纳米比亚的Windhoek. 两个城市的经度都是格林威治以东 17° . 他们观测到小行星通过各自的子午圈. 位于Nagykanizsa的观测者看到小行星位于其天顶以南 25° , 与此同时位于Windhoek的观测者看到了小行星位于天顶以北 45° . 两个城市的地理纬度分别为 $46^{\circ}27'N$ 和 $22^{\circ}34'S$. 两位天文学家所处的位置均视为海平面.

- (1) 画图来反映两地观测卫星这个几何情景.
 (2) 计算该小行星到地心的距离, 单位可以为地球半径或地月平均距离. 请使用所有可用信息来解答. 忽略大气折射的影响.

13. 后发星系团的距离

后发星系团(Abell 1656)在天空中的角直径大约是100角分, 包含了超过1000个独立星系, 其中大部分是矮星系和巨椭圆星系, 它们围绕星系团的质量中心做近似圆轨道运动. 表1中列出了一些独立星系团成员的视向速度.

序号	v_r (km/s)						
1	6001	6	7116	11	7156	16	7111
2	7666	7	7004	12	7522	17	8292
3	6624	8	4476	13	7948	18	5358
4	5952	9	6954	14	4951	19	4957

- (1) 通过列表中星系的平均视向速度推导出该星系团到我们的距离.
- (2) 估计星系团的物理直径(单位Mpc).
- (3) 位力定理(曾被称为维里定理)指出, 如果星系团处于动平衡状态, 平均动能 $\langle K \rangle$ 和平均引力势能 $\langle U \rangle$ 有以下关系: $-2\langle K \rangle = \langle U \rangle$.

假设后发星系团是正球形的.

为了简化计算, 假设每个成员星系的质量大致相同, 为 m . 使用位力定理证明, 在这种情况下星系团的总质量 M (也被称为位力质量)可以表示为:

$$M = \frac{5R}{G} \sigma_r^2$$

其中 σ_r^2 被称为星系团的速度弥散.

标准差公式为: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$.

- (4) 利用表中的数据, 估算后发星系团的位力质量, 以太阳质量为单位.
- (5) 后发星系团的总光度为 $L \approx 5 \times 10^{12} L_\odot$ (单位为太阳光度 L_\odot). 计算星系团的质量光度比, 以“太阳质量每太阳光度”为单位.
- (6) 下列表述中正确的是(正确的答案可能多于一个)? 在答题纸上本题对应字母前方的方框中标 \times .
 - (A) 后发星系团的质量光度比明显高于银河系这样典型的旋涡星系.
 - (B) 后发星系团的质量光度比与典型的旋涡星系相近.
 - (C) 后发星系团的质量光度比明显小于典型的旋涡星系.
 - (D) 与典型的旋涡星系相比, 后发星系团包含的暗物质更多.
 - (E) 与典型的旋涡星系相比, 后发星系团包含的暗物质更少.

14. 拍摄小卫星

第一颗完全由匈牙利自主制造的卫星“MASAT-1”是一颗体积很小的立方星(图5). 它主要由铝制成, 边长 $l = 10 \text{ cm}$ 、总质量为 1 kg , 还有一根较长的通信天线. 它于2009年由布达佩斯技术大学(BME)的学生设计制作. 2012年2月13日, 使用来自库鲁发射场的织女星火箭发射. 一同发射的还有几个来自其他国家的立方星. 它成功运行到了预期寿命的最后时刻(2015年1月9日晚上, 射电接收器捕获了卫星传输的最后一个数据包. 几个小时后, 小卫星重新进入大气层并解体).

MASAT-1的轨道高度在 $h_{\min} = 350 \text{ km}$ 和 $h_{\max} = 1450 \text{ km}$ 之间变化(轨道偏心率较大). 但在本题中, 假设它始终在海平面上方 900 km 的圆形轨道上运转. MASAT团队希望从地面拍摄他们的小卫星. 因此, 他们联系了巴哈天文台(匈牙利南部, $\lambda_B = 19.010843^\circ$, $\varphi_B = 46.180329^\circ$, $h_B = 100 \text{ m}$), 希望工作人员用望远镜拍摄MASAT-1轨道的照片. 天文台有一架RC型反射望远镜, 口径为50厘米, 焦比为f/8.4. 安装在望远镜上的CCD相机尺寸为 4096×4096 , 像元大小为 $9 \mu\text{m}$. 该CCD的量子效率约为70%. 曝光时间 $\tau_{\exp} = 2 \text{ min}$ 对应的可见光波段的极限星等约为 19.5^{m} . 忽略视宁度的影响. MASAT-1的轨道倾角约为 $i = 70^\circ$, 轨道运动的方向与地球自转相同.

假设, 反射面积始终为 100 cm^2 . 望远镜指向当地的天顶, 赤经轴跟踪精度良好. 只考虑来自太阳的光线, 地球和月球反射的光线可以忽略, 也不考虑大气消光的影响.



- (1) 在理想的观测条件下, 即午夜时, 卫星正好位于观测地点(匈牙利巴哈)的天顶, 计算该立方星的视星等. 忽略所有大气层的影响, 认为地球是一个球体. 镜面铝板的反照率为 $a \approx 0.70$.

提示: 将MASAT-1与满月进行比较.

- (2) 能否用天文台现有的设备拍摄他们的小卫星? 天文台对MASAT小组的答复是什么?
在答题纸上标记“Yes”或“No”. 通过详细的计算解答.
- (3) 如果他们考虑到大气层的模糊效应, 即视宁度, 答案是什么? 在匈牙利, 视宁度的典型FWHM(半高全宽)值即星象的展宽(可近似于接近天顶的对称2D高斯轮廓)约为 $3.5''$.
在答题纸上标记“Definitely Yes”、“Definitely No”或“Close To The Limit”. 通过简短计算解答.

提示: 虽然焦平面上的视宁度的照度可以通过对称2D高斯轮廓进行近似, 但计算时, 可以将其考虑为一个固定值.

第十三届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

匈牙利 凯斯特海伊 2019年8月2日~11日

1. 新星海豚座2013的测光与光谱

2013年8月14日14:01 UT (MJD = 56518.584) Koichi Itagaki发现了星等为6.8的经典新星海豚座V339(海豚座新星2013). 专业和业余天文学家很快开始了新星的测光和光谱测量. 消息发出后不到10小时, 当匈牙利夜幕降临时, 当地天文学家使用1 m望远镜接eShel echelle光谱仪拍摄了该新星的第一条光谱.

根据图1.1和1.2回答以下问题.

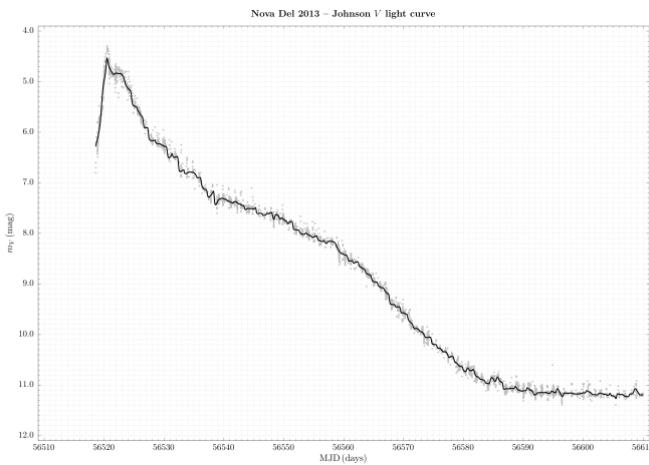


图1.1: 海豚座新星2013 – Johnson V光变曲线

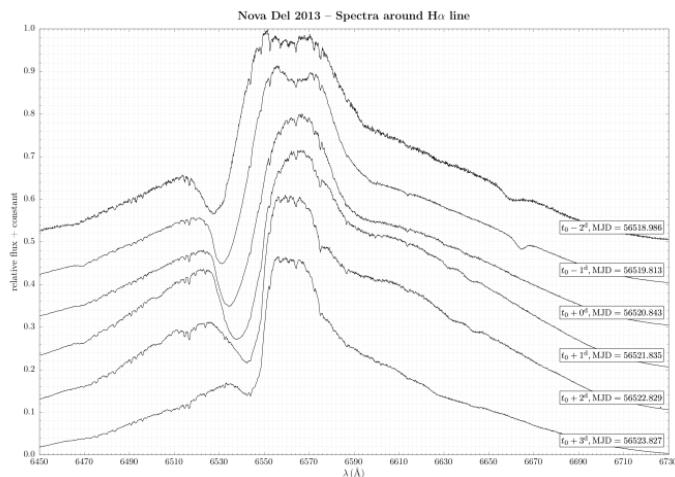


图1.2: 海豚座新星2013 – H α 谱线附近的光谱

图1.1显示了新星的光变曲线, 该曲线基于从AAVSO(美国变星观测协会)网站下载的数据. 横轴是观测的简化儒略日(MJD = JD 240000.5), 纵轴是Johnson V星等. 灰色圆点(约38000个数据点)表示测量值, 连续黑线是使用高斯滤光片(半高全宽FWHM = 0.5天)对数据进行平滑处理得到的“平均”光变曲线.

t_2 和 t_3 表示变化所需的时长, 以天为单位, 角标2和3分别表示新星的星等比最大亮度变化2个星等和3个星等对应的时间间隔.

一些文献给出了V波段绝对星等的峰值(M_0)和 t_2 、 t_3 之间的几个经验公式:

(i) $M_0 = -7.92 - 0.81 \arctan \frac{1.32 - \log t_2}{0.23}$ (Della Valle, M. & Livio, M.: 1995, ApJ 452,

- (ii) $M_0 = -11.32 + 2.55 \log t_2$ (Downes, R.A. & Durbeck, H.W.: 2000, AJ 120, 2007)
 - (iii) $M_0 = -11.99 + 2.54 \log t_3$ (Downes, R.A. & Durbeck, H.W.: 2000, AJ 120, 2007)
- 海豚座新星2013的色余 $E(B - V)$ (Chochol, D. et al.: 2014, Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso 43, 330)是: $E(B - V) = 0.184 \pm 0.035$.

图1.2显示了在H α 线附近波长范围拍摄的新星光谱. 拍摄的时间为新星达到最大亮度之前和之后连续六个晚上. 最大亮度对应的时间为(t_0). 为了便于观察, 每条谱线在竖直方向进行了平移. 每次观测的简化儒略日(MJD)列在每条谱线的右侧.

H α 线具有被称为P Cygni的展宽的轮廓. 这种现象不仅存在于新星, 而是存在于几乎所有光谱型中, 它表示了从恒星中喷出的物质存在显著的径向运动. P Cygni轮廓由强且宽的发射线和较弱的蓝移成分共同组成, 其中宽发射线的中心静止波长(对于H α) $\lambda_0 = 6562.82 \text{ \AA}$. 新星喷出的外壳的(径向)膨胀速度可以从吸收线的测量波长中近似得到, 计算时利用多普勒公式, 其中 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, 径向速度用 v_r 表示, c 代表光速.

假设H α 线显示出的P Cygni轮廓是因为球形膨胀壳的最外层激发引起的, 并且在拍摄第一条光谱时, 膨胀范围还可以忽略不计.

- (a) 根据图1.1, 直接读出新星处于峰值星等状态时对应的简化儒略日(MJD₀)以及峰值星等值. 读星等数值时应把结果表示为读出值加上0.05^m的误差值.
- (b) 写出星等改变2个和3个后对应的星等值, 然后读图得出这两个星等值分别对应的简化儒略日, 然后分别计算出 t_2 和 t_3 对应的时间间隔.
- (c) 根据(b)问算出的 t_2 和 t_3 , 利用三个经验公式, 分别计算出三个公式对应的峰值绝对星等, 然后计算出这些峰值绝对星等的平均值(M_0), 并利用标准差公式计算出这三个峰值绝对星等的标准差, 把标准差表示为平均值的误差.

$$\text{标准差公式: } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

- (d) 根据给定的色余数值及误差式, 计算新星的星际消光 A_V 及其误差. 利用红化率 $R_V = 3.1$, 不考虑红化率的误差.
- (e) 分步骤写明距离的推导表达式. 然后以kpc为单位, 估算新星的距离及其误差.
- (f) 依据图1.2, 测量P Cygni轮廓吸收线的中心波长, 写出径向速度表达式, 计算对应的径向速度. 不用做误差估计.
- (g) 画出径向速度随简化儒略日的变化趋势.
- (h) 根据(g)问画出的图像, 以天文单位au为单位, 估算最后一天膨胀球壳的物理半径.
- (i) 根据新星的距离和5天后膨胀球壳的半径, 估算膨胀球壳的视角直径.

2. 三重掩食分级式三恒星系统

HD 181068是NASA的系外行星猎手开普勒空间望远镜在近4年中连续观测的主要任务中最亮的目标之一. 开普勒望远镜观测到周期为0.453天的亮度减弱, 约 $3 \sim 4 \times 10^{-3}$ 星等. (注意, 观测到的偶数周期的减弱略小于奇数周期)此外, 还观测到每22.7天有一个持续2.3天、0.007等的亮度减弱.

匈牙利天文学家完成了对这个很不寻常的星等变化的解释工作. 他们发现, HD 181068其实是一个几乎侧向我们的紧致分级式三恒星系统.

该系统由A、B、C三颗恒星组成. 其中B、C星形成了所谓内部的密近双星系统. 而A星始终与另外两颗恒星保持着较远的距离, 它的轨道半长轴明显大于内部的绕转轨道(通常是数量级的区别). 该三星系统的示意图见图2.1.

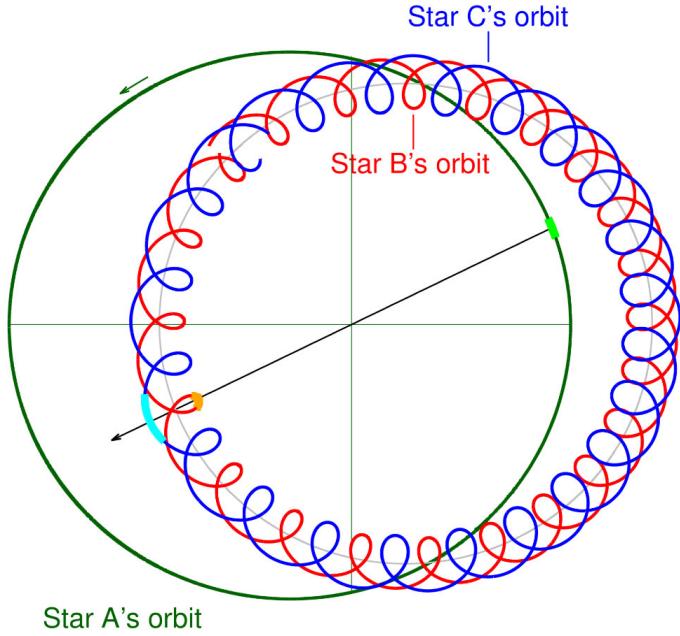


图2.1: 共面、分级式三恒星系统的极向示意图. 黑色箭头指向地球的方向. 三个轨道上较粗段表示掩星发生时所对应的弧长

从数学上讲, 分级式三星系统的运动可以看作是两个互不干扰的开普勒二体运动: (1) 内部双星的开普勒二体运动. (2) 密近双星的质量中心和第三颗恒星的另一个开普勒绕转轨道, 即“外双星”.

本题中B星和C星是一个周期为 $P_1 = 0.9056768$ 天的食双星系统, 它们的质量中心和A星形成了一个周期为 $P_2 = 45.4711$ 天的绕转外双星. 这个轨道的平面几乎是平行于开普勒探测器的视线方向(即地球的方向), 在外轨道运动的过程中, 不仅是星B和星C会彼此掩食, 星A也会同时掩食它们或被它们掩食, 造成了“变得最暗”的情况.

i. 掩食的几何情况确定恒星的物理尺度(和其他参数)

以下假设用于解决这部分的问题: (1) 内双星轨道和外双星轨道都是正圆, (2) 内双星轨道和外双星轨道共面, (3) 该平面平行于视线方向(即 $i_1 = i_2 = 90^\circ$ 且 $i_{\text{rel}} = 0^\circ$). 我们来考虑之前说的那种“变得最暗”的情况, 即类似中心食(“掩”或者是“凌”一类似环食的情况). 这样就有4个接触时刻, 类似日食的初亏、食既、生光、复圆的情况. 现在情况变得更复杂, 因为并非两颗, 而是三颗星参与了掩食. 当然, 尽管如此, 我们可以通过光变曲线来确定不同的接触时刻, 而且还能确定是密近双星中的哪颗与之接触(当然另一颗参与掩食的星一定是A星.)

表1中列出了开普勒探测器测得的一些掩食接触的精确时刻, 接触的类型以及参与的星都列出了. 时刻以质心儒略日(BJD)的方式给出.

事件序号	接触类型	参与的恒星	BJD	φ_1	φ_2
1	I	A, B	2455476.1096		
	II	A, C	2455476.4245		
	III	A, B	2455477.9677		
	IV	A, B	2455478.4722		
2	I	A, B	2455521.5217		
3	III	A, C	2455568.9434		
4	I	A, C	2455612.4733		
	III	A, C	2455614.3571		
5	III	A, B	2455659.9241		
	IV	A, C	2455660.2422		

- (a) 给出 $T_{01} = 2455051.2361$ 和 $T_{02} = 2455522.7318$ 分别代表内双星和外双星的接触时间点(即从观测者的角度来看, C星掩食B星, 和A星掩食B星和C星的质量中心).

定义: $\varphi_1(t) = \{(t - T_{01})/P_1\}$, $\varphi_2(t) = \{(t - T_{02})/P_2\}$ 分别为内双星和外双星的相位角, 就是内部两颗星连线和其质量中心到观测者方向所成的夹角, 以及A星到质量中心和质量中心到观测者方向所成的夹角.

$\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分. 如果 $\{x\} < 0$ 就用 $\{x\} + 1$ 替代. x 就是上式大括号中计算得到的数值. 计算表1中不同接触时刻对应的相位角, 结果保留4位小数.

- (b) 在几次掩食事件中, 是A星, 还是密近双星距离观测者更近. 将答案填写在答题纸相应的表里.
- (c) 利用表1的结果, 计算(1)每颗恒星的无量纲半径与外轨道半长轴之比($R_{A,B,C}/a_2$), (2)两个轨道半长轴之比(a_1/a_2), 以及(3)B星和C星的质量比($q_1 = m_C/m_B$). 提示: 在计算中保留至少4位小数的精确度. 要注意, 由于给出的时间数据精度有限, 计算中可能无法利用到所有理论上的接触数据组合.
- (d) 基于上述结果, 计算外双星的质量比($q_2 = m_{BC}/m_A$).
- ii. 通过径向速度(RV)和掩食的时长变化(ETV)来确定恒星的质量.

为了确定RV的数据, 使用了四种不同的设备进行地面光谱观测. 只有A星的谱线被四个设备观测到. 根据其随时间变化的情况, A星径向速度的变化曲线符合以下形式: $V_{\text{rad},A} = V_\gamma + K_A \sin \phi_{\text{RV}}$,

其中 V_γ 是整个系统的速度, K_A 是其在双星系统中的速度变化幅度:

$$V_\gamma = 6.993 \pm 0.011 \text{ km s}^{-1}, K_A = 37.195 \pm 0.053 \text{ km s}^{-1}, P_2 = 45.4711 \pm 0.0002 \text{ d}, \\ \phi_{\text{RV}} = \frac{2\pi}{P_2} [t - (2455522.7318 \pm 0.0095)].$$

接下来, 研究人员确定了密近双星(B星和C星)形成的常规掩食的中间时刻, 并发现该时刻可以引入轨道旋转的周期 N^{th} 简化公式得出: $T_N = T_0 + P_1 N + A_{\text{ETV}} \sin \left(\frac{2\pi}{P_2} P_1 N + \phi_0 \right)$, 其中, $T_0 = \text{BJD } 2455051.23607 \pm 5 \times 10^{-5}$, $P_1 = 0.9056768 \pm 3 \times 10^{-7} \text{ d}$, $A_{\text{ETV}} = 0.001446 \pm 0.000110 \text{ d}$, $\phi_0 = -0.76779 \pm 0.01937 \text{ rad}$.

在上式中, A_{ETV} 表示每次掩食开始时间变化的幅度, T_0 表示一次主掩食(初始)的中心时刻, N 表示周期数, 其中整数表示主掩食(当较暗的C星挡住较亮的B星), 半整数表示另一种情况(B星挡住C星).

确定(1)密近双星的总质量和A星的质量比($q_2 = m_{BC}/m_A$), 只能使用ii中的结果, (2)A星的质量(m_A), 以及(3)内部密近双星的总质量(m_{BC}). 计算(1), (2)和(3)中质量的误差. 提示: 为了节约时间, 关于质量请用太阳质量作为单位, 关于轨道请用太阳半径或au作为单位.

- iii. 利用(i)和(ii)中的结论, 确定B星和C星的质量. 分别计算三颗恒星的物理大小(以太阳半径为单位).

2020年国际天文与天体物理奥林匹克线上竞赛

理论试题

2020年9月25日~9月27日

1. 天文摄影

位于赤道的一名天文摄影师使用一架高质量的数码相机拍摄星空。相机固定于三脚架之上，不进行跟踪。相机配150 mm焦距的望远镜镜头，口径(物镜直径)为81 mm。传感器的有效集光区域的直径为22.5 mm。拍摄目标是位于天顶的一片星场。

- (a) 计算使用这套设备的传感器所拍摄的视场大小(图像的角直径)，以度为单位给出答案。
- (b) 相机传感器像素间距为 $3.23 \mu\text{m}$ 。对于单张照片，如果要求恒星图像不出现拖线，可能的最长曝光时间是多少？以秒为单位给出答案。
- (c) 为了获得更高质量的星场照片，拍摄者决定以上一问(即b问)所确定的曝光时间连续拍摄一系列照片并将其叠加起来。总的拍摄时间为30秒(忽略相机保存数据的时间)。达到更高信噪比的部分占总视场的多大比例？以0到1之间的数字写出台答案。

2. 扁平地球

一种新的世界模型正在部分人中流行起来。这些人相信“地球是平的”，即地球不是一个椭球体，而是一个半径为 R_{\oplus} 的圆。地球的中心轴(垂直于圆心C)穿过观测者对应的天顶。

这个模型必须和下列观测事实保持一致：

- 太阳常数 $S_{\odot} = 1366 \text{ W/m}^2$ 。
- 地球中心轴的岁差进动周期为25800年。
- 岁差圈半径对应的张角为 23.5° 。

假设：(1) 地球是一个温度均匀的完美辐射黑体，且太阳离地球足够远，太阳光都是平行的；(2) 太阳当前(初始)位置位于天顶。

求地球的平衡温度下降 1°C 需要多少年。答案以年为单位。

3. 镜子

一位宇宙学家闲来无聊提出了一个思想实验，来测定他稳恒态宇宙模型中的哈勃常数(H_0)。这个实验将一个大的、全反射的平面镜(装有几个陀螺仪以保持它的空间方位在同一平面)放置在一个到太阳系距离为 D 的没有引力影响的区域。从地球上向那个区域长时间直射激光束。经过一段时间 T ，辐射将返回并被检测到，以此来测定哈勃常数 H_0 。

- (a) 以距离 D 、光速 c 、时间 T ，给出哈勃常数 H_0 的表达式。

考虑到太阳系和镜子间的空间间距 S 只会随着宇宙的膨胀而增加，膨胀定律为 $S = s \cdot e^{H_0 t}$ ， s 代表初始空间间距。当 $x \ll 1$ 时，可以使用近似 $e^x \approx 1 + x$ 。如果必要，可以假设在这个膨胀宇宙里，光经过时间 t 的传播距离是 ct 。

- (b) 假设把这面镜子安置在织女星附近(织女星也是第一届GeCAA标志的特色)。织女星是太阳系外第一颗被拍摄的恒星，也是第一批在1810年被G.W.von Struve精确测量出视差($\rho = 0.125''$)的恒星之一。

估计这次 H_0 测量实验的总持续时间。答案以年为单位。

4. 光变曲线

假设存在一对侧对地球观测者的掩食双星系统，其中恒星X(半径 r_X ，光度 L_X)更亮，恒星Y(半径 r_Y ，光度 L_Y)更热。图1为对应的光变曲线A。图中横坐标为：时间(天)；纵坐标为：流量(10^{-12} W/m^2)。

(a) 这两颗恒星哪一颗更可能位于主序阶段? (写下“X”或者“Y”)

(b) 根据光变曲线A, 进行估算:

(b.I) $\frac{r_x}{r_y}$, 两颗恒星的半径之比.

(b.II) $\frac{L_x}{L_y}$, 两颗恒星的光度之比.

(c) 以光变曲线A所在双星系统为原型, 每次改变且仅改变一个参数后, 对应得到光变曲线B到F.

针对改变后的各种光变曲线, 请在下列1-15表达中选择最符合光变曲线B到F的描述.

1. 恒星X尺寸变大.
2. 恒星X光度变高.
3. 恒星X尺寸变小.
4. 恒星X光度变低.
5. 恒星Y尺寸变大.
6. 恒星Y光度变高.
7. 恒星Y尺寸变小.
8. 恒星Y光度变低.
9. 恒星X是一颗变星.
10. 恒星Y是一颗变星.

11. 该双星系统相对于地球观测者的倾角发生改变.

12. 该双星系统与地球观测者之间距离减小了.

13. 该双星系统相对于地球观测者距离增加了.

14. 该双星系统的轨道周期变长了.

15. 该双星系统的轨道周期变短了.

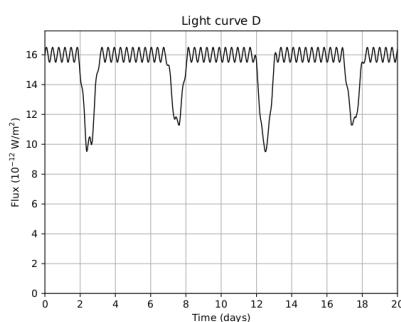
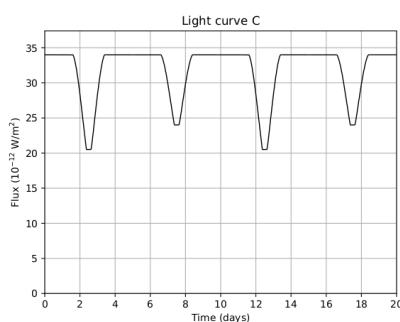
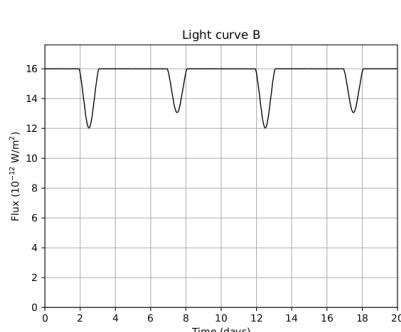
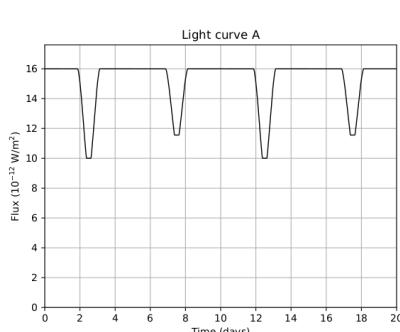
光变曲线B _____

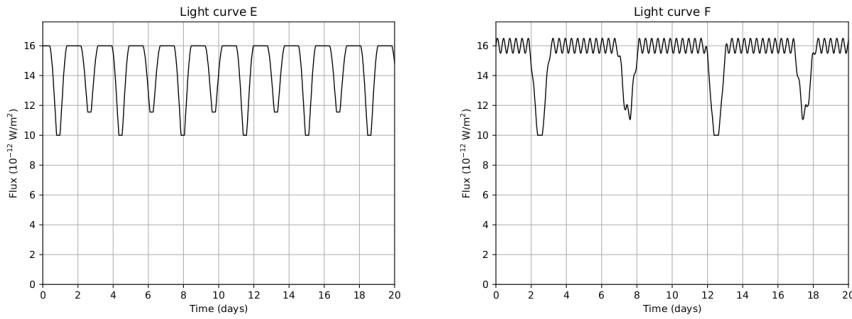
光变曲线C _____

光变曲线D _____

光变曲线E _____

光变曲线F _____





5. HII区

高光度蓝变星(LBV)是一种大质量、不稳定的超巨星，由于大气中的不稳定性,它们会经历非常剧烈的质量损失. 在这样的事件之后, 会围绕恒星形成一个稠密的星云. LBV是非常热的恒星, 产生大量高能光子, 这些光子能够电离氢原子($E_{\text{ph}} > h\nu_0 = 13.6 \text{ eV}$), 形成一个大致呈球形的电离氢区(HII区).

在这道题中, 我们考虑一个静态、均匀、只由氢构成的星云, 其密度为 $n_{\text{H}} = 10^8 \text{ m}^{-3}$, 温度为 $T_{\text{HII}} = 10^4 \text{ K}$, 被一颗单独的LBV恒星电离, 其光子(photons)产生速率为 $Q = 10^{49} \text{ ph/s}$. 假设每个光子只能电离一个氢原子. 在HII区的特定位置, 单位体积内的光电离速率与复合速率相平衡, 这决定了完全电离区域的半径, 这个区域被称为斯特龙根球区(Stromgren sphere), 半径为 R_{S} .

每体积的复合总数(The total number of recombinations per volume)与质子的浓度 n_{p} 、电子的浓度 n_{e} 成正比, 氢的复合系数为 $\alpha(T_{\text{HII}}) = 10^{-19} \text{ m}^3/\text{s}$. 为了简化, 本题忽略复合过程也可以释放电离光子的事实.

(a) 推导斯特龙根球区半径的代数表达式, 并以题自所给的数据计算其值. 答案的单位为秒差距(pc).

(b) 氢原子在基态时与频率为 ν_0 的光子相遇时的光致电离截面等于 $\sigma \approx 10^{-21} \text{ m}^2$.

计算电离光子的平均自由程 l_{ν_0} . 比较 l_{ν_0} 和 R_{S} 以确定这个电离星云的边界是否比较窄(sharp-edged)? (回答“YES”或“NO”)

A. YES

B. NO

(c) 请估计斯特龙根球区会在什么时间尺度上形成? 答案以年(years)为单位.

(d) 电离氢云(HII区)的辐射通常被称为自由-自由发射, 因为它的产生是由于自由电子被离子散射而不被捕获: 电子在相互作用之前是自由的, 在相互作用之后仍然是自由的. 在这个过程中, 电子保留了大部分的散射前能量.

当一个电子经过一个质量大得多的单电离氢原子时, 产生频率为 $\nu = 10 \text{ GHz}$ 的射电光子. 在题目所给的斯特龙根球区温度下, 计算HII区的平均电子热能. 这是一个自由-自由发射的例子吗? (回答“YES”或“NO”)

A. YES

B. NO

(e) 由于HII区处于局部热力学平衡, 我们可以计算出与光学深度 $\tau_{\nu} \propto \nu^{-2.1}$ 成正比的吸收系数, 结果表明, 在射电频率足够高时, 热等离子体几乎是透明的, 因此 $\tau_{\nu} \ll 1$.

光子的流量密度具有 $S_{\nu} \propto \nu^{\beta}$ 形式的幂律谱.

请给出射电频率 β , 写出数值.

6. X射线源的掩星现象

考虑一个观测X射线源的卫星, 其轨道在地球的赤道平面上, 轨道半径为 r , 轨道周期

为 P . 假设该卫星在一定的时间里指向一个固定的空间方向(固定的X射线源). 取地球半径为 R .

当卫星运动到地球的后面时, 该X射线源就被地球挡住了, 从而观测到该源的X射线流量下降为零. 但是, 由于地球存在大气, 这种下降是渐进的. 如果观测该源的视线方向穿过大气, 则衰减程度取决于沿视线方向的大气质量(即气体柱的长度).

- (a) 假设卫星以0度倾斜角(declination)指向一个固定的源, 如果来自光源的光由于大气而衰减为50%, 我们即认为该源被掩食了. 假设此时视线离地球表面的最小高度为 h .

请写出此时卫星到地球的方向和卫星到该源的方向的夹角 θ_0 的表达式.

- (b) 定义源的“掩星时间” Δt 为源的流量从掩星前流量的90%衰减到10%的时间间隔. 假设当最小视线高度为($h + 0.5\Delta h$)时, 源流量衰减为掩星前流量的90%, 当最小视线高度为($h - 0.5\Delta h$)时, 源流量衰减为掩星前流量的10%, 其中 $\Delta h \ll R$.

请利用 r 、 P 、 Δh 和 θ_0 求出 Δt 的表达式.

- (c) 如果卫星不是以0度倾斜角, 而是以任意倾斜角 β 指向一个源(β 不太大), 那么 Δt 的表达式是什么?

注意: 如果卫星不在地球赤道平面内, 那么该问题可以假设卫星的轨道平面为赤道平面, 此时 β 变成“相对倾斜角”.

7. 流星雨辐射

2020年9月25日, 中国台北嘉义(北纬 23.5° , 东经 120.4° , GMT+8)的一位观星者看到两颗流星在21:00(中国台北时间)划过天空. 其中一颗流星恰好出现在正西方的地平线上, 并在北方地平线正上方 15° 的高度划过一个点. 第二颗流星起源于高度 23.5° , 方位角 210° , 终止于高度 75° , 方位角 255° .

- (a) 观测时的本地恒星时是多少?
 (b) 计算流星辐射点的地平坐标.
 (c) 求辐射点的赤道坐标.
 (d) 下列哪一个星座最接近辐射源?

Crux/Dorado/Pavo/Tucana/Triangulum Australes

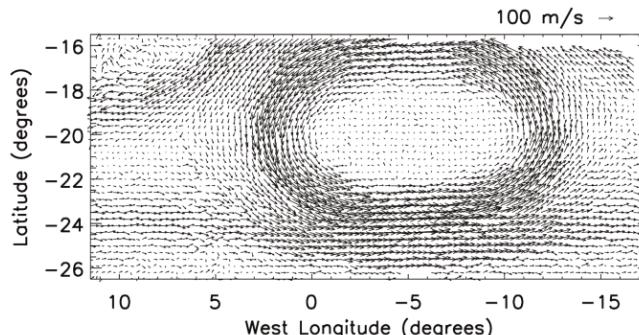
(选择一个, 并在答案框中写上相同的名字)

提示:

- 方位角是从北(0°)向东测量的。
- 2020年1月1日UT 00:00时的格林威治恒星时(GST)为 $6^{\text{h}}40^{\text{m}}30^{\text{s}}$.

8. 木星大红斑

本问题中, 我们将基于速度场数据研究木星大红斑(GRS)的流体力学. 下图显示了GRS和周围区域的相对速度图. 箭头的方向和长度表示不同点的风方向和大小.



由于重力和旋转的共同作用, 木星的两极稍微展平. 木星形状的近似椭球方程可以表

示为:

$$\frac{x^2}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_e^2} + \frac{z^2}{R_p^2} = 1.$$

其中 $R_e = 7.15 \times 10^7$ m 是木星的赤道半径, $R_p = 6.69 \times 10^7$ m 是极半径, 椭球上任意点的曲率半径可以通过下式来计算 ($\epsilon = \frac{R_e}{R_p}$):

$$r(\phi) = R_e(1 + \epsilon^{-2} \tan^2 \phi)^{-1/2},$$

$$R(\phi) = R_e \epsilon^{-2} \left(\frac{r(\phi)}{R_e \cos \phi} \right)^3.$$

其中 $r(\phi)$ 和 $R(\phi)$ 分别是指任意点在纬线圈方向上和经线圈方向上的曲率半径, 它们都与该点的纬度 ϕ 有关. 木星的恒星日 $P = 3.57 \times 10^4$ s.

- (a) 分别计算大红斑中心位置在纬线圈和经线圈方式上的曲率半径 (\bar{r} 和 \bar{R}), 答案单位为千米(km).
- (b) 估算大红斑的偏心率.
- (c) 这里的“涡度”是描述任意一点流体旋转的量, 由位于流体参考系中的观测者测量. 在数学上它被称为速度场的卷曲(矢量导数乘积), 在这里平均相对涡度可以通过这个公式来估算: $\xi = \frac{V_w L_{GRS}}{A_{GRS}}$, 这里的 V_w 是速度场的最大风速值, L_{GRS} 是大红斑的周长, A_{GRS} 是大红斑的面积, 请估算大红斑的平均相对涡度.

答案以数值形式写出, 相关的国际单位制标准单位应仅在答题纸上写出. 例如答案是0.25 m则写成0.25.

注意: 椭圆的周长可以通过相应辅助圆和次圆的周长的平均值来近似得出. 以国际单位制标准单位给出答案.

- (d) 通过加入科里奥利参数 $f = 2\Omega \sin \phi$ 可以求出绝对涡度 $\xi_a = (\xi + f)$. 以SI单位给出答案.

答案以数值形式写出, 相关的国际单位制标准单位应仅在答题纸上写出. 例如答案是0.25 m则写成0.25.

- (e) 如果绝对涡度与纬度符号相同, 则我们将该风暴称为“气旋”. 如果它们的符号相反, 则该系统为“反气旋”. 那么木星大红斑是“气旋”还是“反气旋”?
 - A. 气旋
 - B. 反气旋
- (f) 假想大红斑移动到了另一个纬度 ϕ_1 , 这时绝对涡度的符号发生了变化(例如从反气旋变成了气旋, 或许反之). 估算位移最小情况下的 ϕ_1 值. 答案以度为单位, 四舍五入取整数值.

在你的分析中, 假设大红斑在新的位置和原来的纬线方向上的跨度相同, 且风速和偏心率不变.

2020年国际天文与天体物理奥林匹克线上竞赛

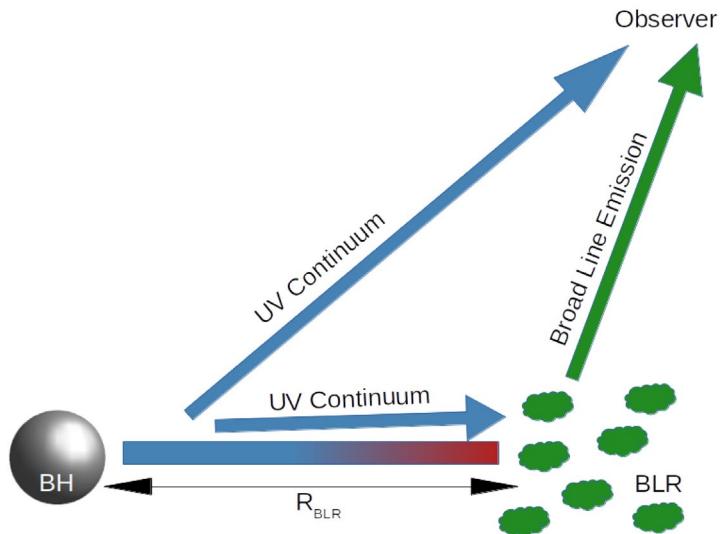
数据分析试题

2020年9月25日~27日

1 AGN

研究认为，星系中心超大质量黑洞(BH)周围的吸积盘产生紫外线热辐射。这种辐射与活动星系核(AGN)有关。

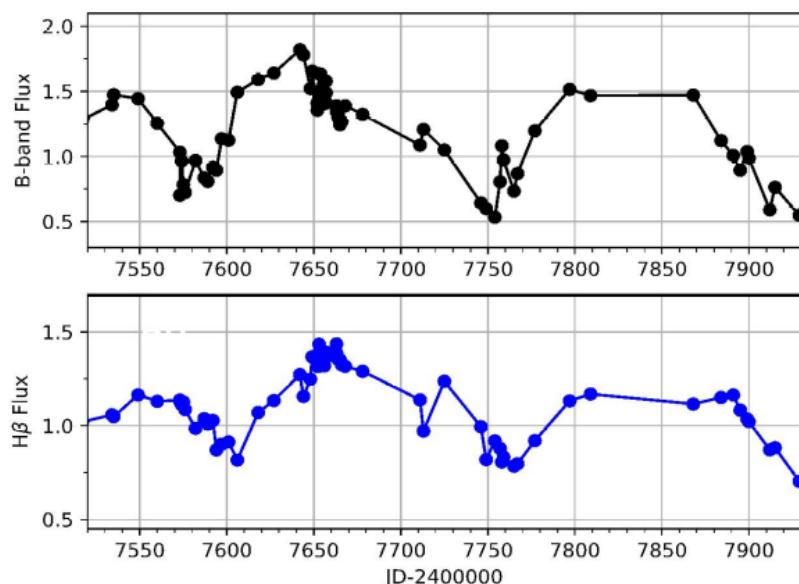
明亮活动星系核的光学光谱显示出额外的明亮宽发射线。这些发射线来自于宽线区(BLR)中的致密气体，这些致密气体被来自吸积盘的紫外线光子电离。请参考草图，将这个模型可视化。



我们可以假设宽发射线的流量随着紫外连续谱的变化而变化，存在一个延迟。这个时间延迟应该与黑洞(BH)和BLR之间的距离 R_{BLR} 成正比。

假设吸积盘的大小与 R_{BLR} 相比可以忽略不计。

- (a) 利用下图所示的光线曲线，估算B波段连续谱与宽发射线($H_{-\beta}$)之间的时间差(天)。x轴是约化儒略日(JD)。



- (b) 估算 R_{BLR} ，以秒差距(pc)为单位。

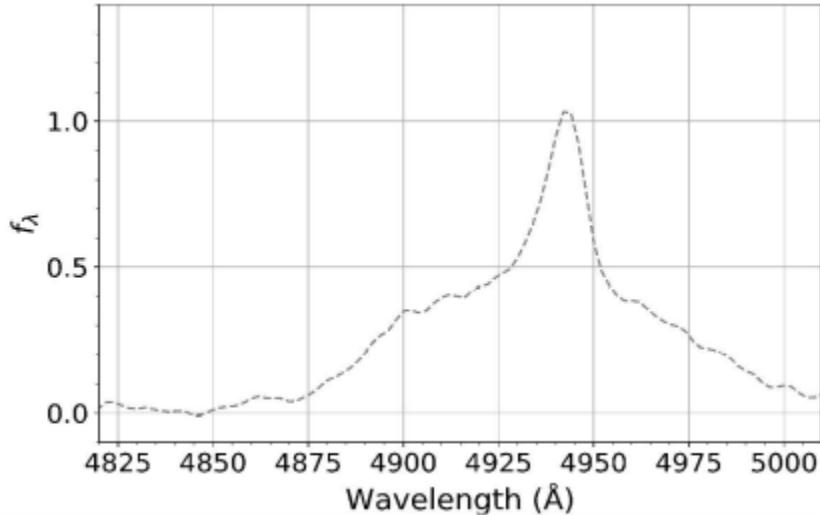
- (c) 如果这个活动星系核距离我们100 Mpc, 估算这个区域与黑洞的角距离 θ_{BLR} (以角秒为单位).

如果已知BLR中气体的速度弥散和系统的大小, 就可以用位力定理来估算系统的质量. 假设吸积盘和宽线区的质量与黑洞相比可以忽略不计. 速度弥散 v_σ 可以通过给定发射线的展宽来估计. 我们将取相应的波长弥散为

$$\sigma = \frac{\text{FWHM}}{2.35}$$

其中FWHM是宽发射线的半峰全宽.

- (d) 根据下图所示的谱线, 计算速度弥散 v_σ (以km s⁻¹为单位).



- (e) 计算中央BH的质量($M_{\text{vir,BH}}$, 以 M_\odot 为单位).

2 小行星

表1给出了某个假设的小行星在不同时间(t)的黄经(λ)和视差(p). 视差的基线是地球的直径. 时间是以年表示的, 供你参考的相同的日期中太阳黄经(λ_\odot)也在表中给出. 让我们假设这颗小行星的轨道倾角相对于黄道面来说是可以忽略的, 而且地球轨道的离心率可以忽略不计.

- (a) 计算日心极坐标系中小行星的坐标, 并把它们绘制成极坐标图. 图中的 x 轴应该朝向小行星的初始位置. 画出小行星轨道的长轴.

如果有的话, 识别错误的观测数据.

- (b) 假设小行星的日心轨道为椭圆形, 计算

- (i) 半长轴长度 a_p .
- (ii) 离心率 e .
- (iii) 周期 P .

- (c) 估算 P 、 a_p 和 e 的误差.

表1: 小行星数据

t [年]	λ [$^\circ$]	λ_\odot [$^\circ$]	p ['"]
2012.3	336.73	40.95	3.82
2012.6	3.44	134.83	7.24
2012.9	50.71	242.08	7.09
2013.4	94.52	64.84	2.40
2013.6	121.40	134.59	2.16

2013.9	154.31	241.82	2.75
2014.2	25.33	353.29	3.16
2014.5	148.51	99.04	1.99
2014.8	176.26	205.45	1.83
2015.0	216.33	280.19	2.03
2015.3	187.5	28.55	2.897

3 超高速恒星

近年来，出现了一个新的研究领域，即超高速恒星(简称HVS). 这些恒星位于我们的银河系中(大部分位于其外围)，它们正在以过快的速度运动，可能正在逃离银河系.

在这个问题中，你将使用光谱和天体测量来计算一颗这样的恒星的速度，称为“HVS1”，考虑它的起源和它是否可能逃离银河系.

图1显示了HVS1光谱中从蓝色到紫外部分的光谱:

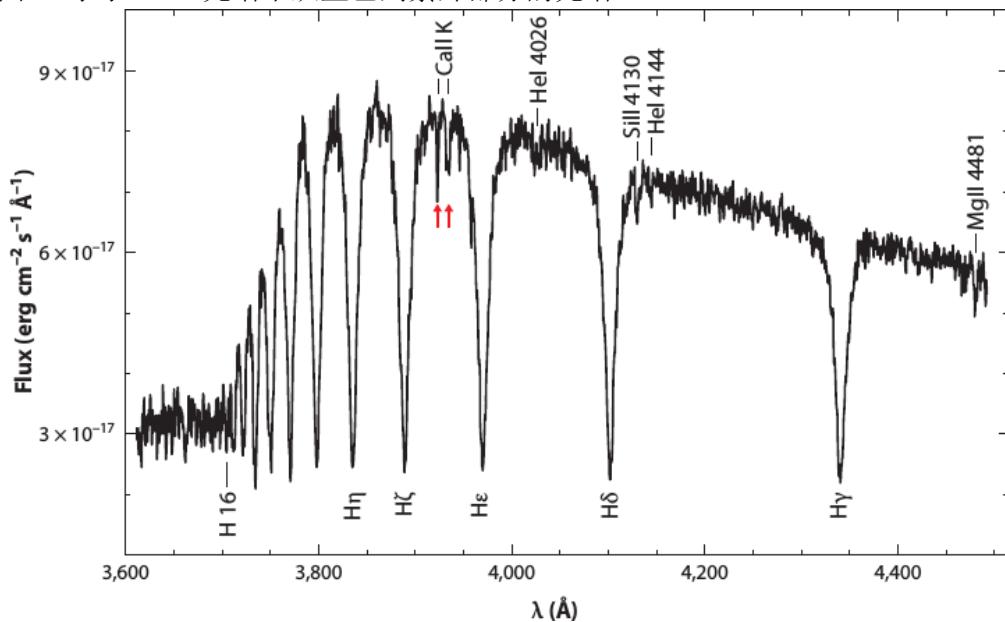


图1: 移动到恒星的静止系的HVS1光谱(也就是说，没有由于恒星在视线上的运动产生的多普勒频移).

- (a) 使用附录3中的标准光谱和HVS1光谱上的吸收线确定恒星的光谱型. (请注意，上面的光谱包含恒星和星际吸收线.)
- (b) 谱线的详细建模将恒星置于光度型V(主序星)和IV(亚巨星)之间.

- i. 目视波段中恒星的星等为 $m_V = 19.84$. 使用附录1中的2个可能的光度型计算这颗恒星的绝对星等 M_V .

你可以忽略 m_V 中的不确定度，因为你计算中的不确定度将被 M_V 的不确定度所主导.

- ii. 对于这两种可能的光度型，计算恒星到太阳的距离，忽略星际消光.

- iii. HVS1的银道坐标为 $l = 227.33537267^\circ$, $b = 31.33199386^\circ$. 忽略星际消光的假设是正确的吗? 写“YES”或“NO”.

- iv. 自2014年以来，欧洲航天局的盖亚任务一直在绘制银河系的地图，测量15亿颗恒星的视差和自行，精确度在0.04毫角秒到0.1毫角秒之间. 盖亚能否测量到HVS1的视差，

(A) 如果它是MS星号？请写“YES”或“NO”.

(B) 如果它是亚巨星？请写“YES”或“NO”.

对于这个问题的其余部分，采用上面计算的两个距离中较大的一个.

- v. 假设太阳到银河系中心的距离为8.0 kpc. 对HVS1、太阳和银河系中心的相对位置作一个粗略的草图. 用它计算HVS1到银河系中心的距离(r).

(c) 在这里, 你将计算HVS1的实际速度.

- i. 图1中的光谱显示了由Ca II引起的两条吸收线. 一个是由恒星的大气层造成的, 另一个是由于星际介质. 这条线的移动是由于恒星相对于星际介质的运动. 测量这个多普勒频移并计算HVS1相对于太阳的径向速度.
- ii. 我们感兴趣的是相对于银河系中心的速度. 为此, 我们首先需要考虑由于银河系的自转而产生的太阳的速度. 下面的方程将恒星日心径向速度 v_{HHC} 的速度转换为银河系静止框架(rf)中的速度 v_{rf} :

$$v_{\text{rf}} = v_{\text{HHC}} + 11.1 \cos l \cos b + 247.24 \sin l \cos b + 7.25 \sin b$$

速度以km s⁻¹为单位.

计算HVS1的速度 v_{rf} .

- iii. HVS1的自行测量如下:

$$(\mu_\alpha, \mu_\delta) = (+0.08 \pm 0.26, -0.12 \pm 0.22) \text{ mas/yr}.$$

计算HVS1的切向速度分量(以km s⁻¹为单位). 你可以忽略对赤纬的修正, 因为这颗恒星靠近天赤道.

- iv. 计算恒星相对于银河系中心的速度 v_T (大小以km s⁻¹为单位, 角度相对于银河系中心的方向).
- v. 假设这颗恒星诞生在银盘中, 使用你计算的速度来估计它更有可能来自银盘中的哪里:
 - (A) 银心附近
 - (B) 在更远的银盘中

(d) 从能量方面的考虑,

- i. 写出逃逸速度 v_{esc} 与银心距离和所含质量的函数表达式.
- ii. 计算银河系在HVS1距离半径内的质量(以太阳质量计算).

$$M_r = 4\pi\rho_0 r_c^2 \left[r - r_c \tan^{-1} \left(\frac{r}{r_c} \right) \right]$$

其中 $r_c \approx 8$ pc 是方程的常数, $\rho_0 = 1.396 \times 10^4 M_\odot \text{ pc}^{-3}$.

- iii. 计算HVS1距离处的逃逸速度的大小.
- iv. 这是一颗将逃离的星吗? 写“YES”或“NO”.

(e) HVS1到达这个位置需要多长时间?

(f) 根据这颗恒星的光谱型和光度型, 估计HVS1的年龄, 并与上一部分的结果进行比较. 关于恒星的起源, 下列哪个陈述是正确的:

- (A) 这颗恒星在形成时或形成后不久就被抛出.
- (B) 该恒星在主星序中途被抛出.
- (C) 该恒星在其主星序上的时间接近尾声时被抛射出去.

(g) 天文学家寻找HVS时, 首先从观测与HVS1类似的光谱型的银河晕中的恒星样本开始. 解释下列哪一个陈述是正确的:

- (A) 这种光谱型的恒星是年轻的, 因此属于晕的本地星族.
- (B) 这种光谱型的恒星年龄较大, 因此属于晕的本地星族.
- (C) 这种光谱型的恒星是年轻的, 因此不属于晕的本地星族.
- (D) 这种光谱型的恒星年龄较大, 因此不属于晕的本地星族.

第十四届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

哥伦比亚 波哥大(线上) 2021年11月17日

1. LIGO

2016年, LIGO(激光干涉引力波天文台)宣布第一次探测到了引力波GW150914. 探测到的信号对应于两个质量分别为 $35M_{\odot}$ 和 $30M_{\odot}$ 的黑洞合并, 合并后形成一个质量为 $62M_{\odot}$ 的黑洞. 忽略黑洞的旋转能量, 你可以假设这个过程所释放的能量(E_{GW})完全以引力波的形式发射出来, 这在2015年被干涉仪观测到. 已知一颗超新星(SN)的爆发会释放出 $E_{\text{SN}} = 2 \times 10^{44} \text{ J}$.

1.1 为了得出这两个事件(SN、GW)中哪个释放出更多的能量, 请估计能量比 $\frac{E_{\text{SN}}}{E_{\text{GW}}}$.

2. 地球的温度

至少在过去几百万年里, 地球与地球轨道距离上的太阳辐射一直处于大致的热平衡状态.

2.1 假设我们的行星是一个理想的黑体, 计算地球的平衡温度(摄氏度)会是多少.

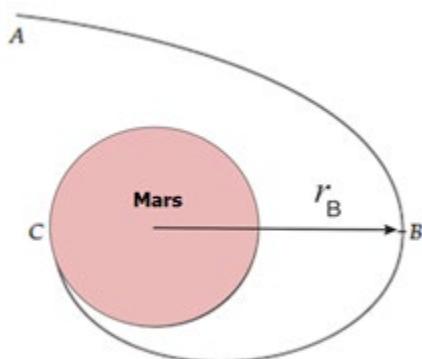
2.2 地球的反照率约为30%. 考虑到地球的反照率, 计算地球的表面温度(摄氏度).

2.3 地球吸收的辐射作为黑体辐射从其表面重新释放出来, 但其大气层重新吸收了58%的能量, 造成了温室效应. 考虑到这种效应, 请计算地球的表面温度(这将与低层大气的温度相同). 请以摄氏度为单位给出你的答案.

为简单起见, 考虑重吸收效应只发生一次, 不要把大气层看作一个独立的黑体.

3. 火星

一个质量为 $m = 5.0 \times 10^4 \text{ kg}$ 的航天器以相对于火星的抛物线轨道 AB 接近. 当航天器到达与火星中心距离最小的点 B 时, $r_B = 6.8 \times 10^6 \text{ m}$, 它利用火箭进行瞬间减速, 进入一个完美计算的轨道, 使得它将正好在与 B 相对的点 C 接触火星表面, 正如图中所示.



3.1 确定航天器在减速前的 B 点的速度(km s^{-1}).

3.2 计算航天器在B点和C点之间移动时的总能量(J).

3.3 计算航天器在C点的速度(km s⁻¹).

4. ALMA - 计算光子

ALMA是一个具有革命性设计的射电天文台. 它由66个高精度天线组成, 工作波长范围为0.32 mm至8.60 mm. 主阵列有50个天线, 每个直径12 m, 可以作为一个单一的望远镜在所谓的干涉模式下一起工作. 还有一个由四个12 m的天线组成的阵列, 以及12个每个直径为7 m的较小的天线.

想象一下, 一个12 m的天线正在被校准, 指向一个已知的入射通量为 1×10^{-20} W/m²的源.

4.1 假设所有的通量都到达ALMA灵敏度的最短波长, 请确定每秒钟到达探测器的平均光子数量.

4.2 将其与如果所有的通量都到达最长的工作波长时到达探测器的平均光子数量进行比较.

4.3 一根12 m长的天线, 在74.9 GHz下工作, 其角分辨率是多少(以角秒为单位)?

4.4 想象一下, 主阵列在74.9 GHz的干涉模式下工作. 为简单起见, 假设空间分辨率仅由最长的基线(任何一对天线之间的最大距离)给出, 即 $D_{\max} = 16$ km, 在这种情况下, 角分辨率(以角秒为单位)是多少?

将这种情况视为单缝孔径而不是圆形孔径.

4.5 对于射电天线, 术语SEFD指的是“系统等效通量密度”, 它是天线的特征能量通量密度, 取决于其温度和尺寸. 我们还注意到, 对于射电光子的能量估计, 瑞利-金斯近似是有效的. 假设系统温度为691 K, 如果所有66根天线都能一起工作, 那么以央斯基为单位的整个ALMA观测站的SEFD将是多少?

5. 在压力下

太阳中的磁场不断地塑造着太阳大气中各种不同特征的结构, 在任何特征内部, 磁场(B)增加了气体施加的总压强. 这个所谓的磁压是高度 z 的函数, 可以表示为:

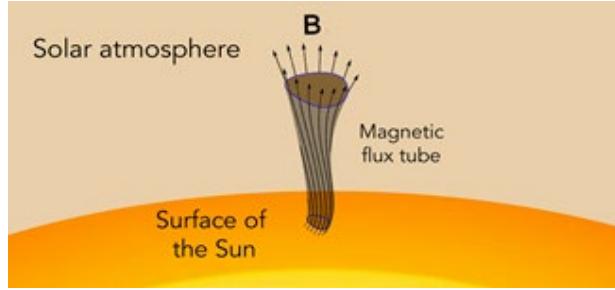
$$P_{\text{mag}}(z) = \frac{B^2(z)}{2\mu_0}$$

另一方面, 可以认为气体处于静力平衡状态, 因此, 气体压强从初始压强值 P_0 随着 z 的增加呈指数式衰减,

$$P_{\text{gas}}(z) = P_0 e^{-z/H}$$

其中 H 是标高, 即压强下降到 $\frac{P_0}{e}$ 时的高度.

考虑一种类型的特征, 即一个从太阳表面上升到非磁化环境的磁通管(见下图). 假设管内材料和管外材料的总压强处于平衡状态.



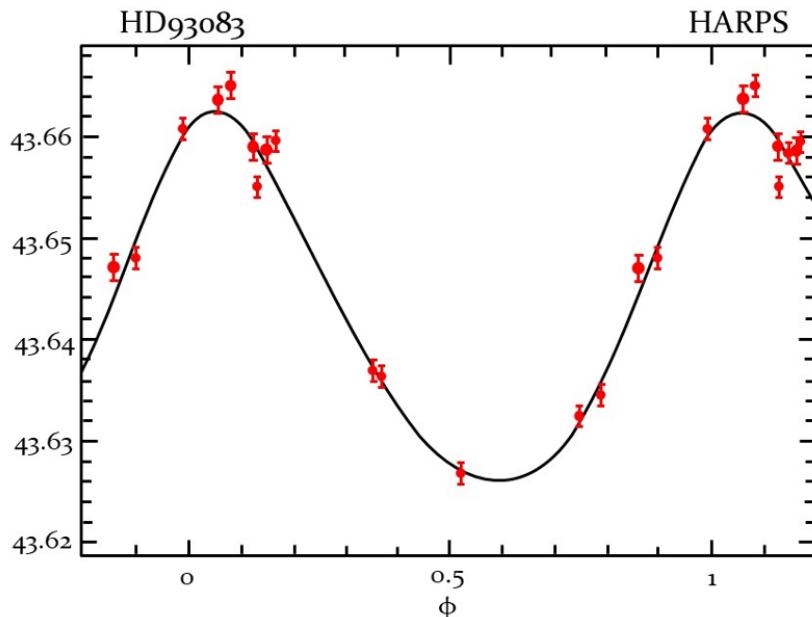
5.1 找出磁场强度与高度 z 的函数表达式.

5.2 如果磁通管底部的磁场是0.3 T, 在一个给定的太阳模型中, 标高 H 是150 km, 那么在什么高度磁场会减少到0.03 T?

6. Macondo和Melquiades

2019年, 作为国际天文学联盟NameExoWorlds活动的一部分, 哥伦比亚获得了为HD 93083星及其行星系统选择名称的机会. HD 93083是一颗K型矮星, 有一颗太阳系外行星围绕着它运行. 今天, 它们被正式称为Macondo(恒星)和Melquiades(行星), 来自哥伦比亚作家Gabriel García Márquez的文学思想.

这颗恒星的有效温度为4995 K, 视亮度为8.3等. 根据GAIA DR2, Macondo的视差是35.03毫秒. 你可以假设Melquiades的轨道是完全圆形的. 在图中, 你可以看到Macondo的径向速度与相位的关系图.



Macondo的径向速度(Y轴 , km s^{-1})与相位(X轴)的关系.

6.1 找出Macondo在其静止参考系内(即忽略多普勒频移)的峰值发射波长(以nm为单位).

6.2 找出这个系统与地球的距离(以秒差距为单位)和该星的绝对目视星等(M_V).

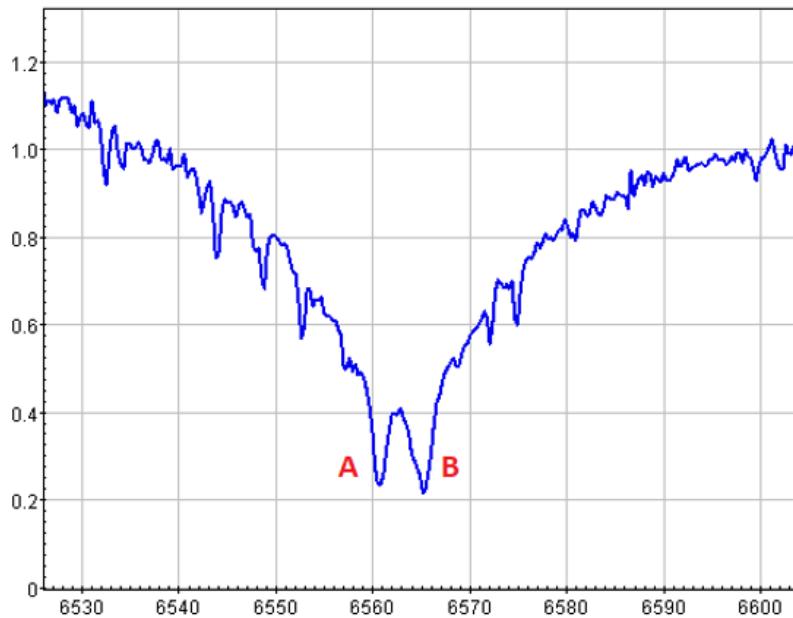
6.3 计算Macondo的平均径向速度(单位: km s^{-1}).

6.4 如果恒星的质量(m_s)为 $0.7 M_\odot$, 系外行星的质量(m_p)为 $7 \times 10^{26} \text{ kg}$, 计算Melquiades的轨道速度 v_p (单位: km/s). 假设该系统的轨道平面相对于我们的视线来说是边缘对齐的.

6.5 找出Melquiades的轨道半径(au)和它的轨道周期(天).

7. 五车三(御夫座 β)

我们看到的几乎一半的恒星都是双星或多星系统. 一个著名的例子是五车三(御夫座 β), 它最初被认为是一颗恒星, 但现在被认为是一个由两颗恒星组成的双星系统, 我们将其称为五车三A和B. 在下图中, 显示了该系统的光谱(由波哥大的安第斯大学的观测站获得).



在H α 区域的五车三双星系统的光谱. Y轴是相对流量, X轴测量波长. 五车三A在图中被标记为A, 而五车三B被标记为B.

利用该图回答下列问题, 并注意实验室参考系内H α 线的波长为656.28 nm. 假设是圆形轨道, 并假设双星系统作为一个整体相对于观察者是静止的.

7.1 在光谱中, 我们可以看到该系统中每颗恒星的H α 线. 计算每颗恒星的视向速度(km/s), 并确定在这次观测时, 这两颗恒星中的哪一颗正在向我们移动.

7.2 这个双星系统距离地球81.1光年, 轨道周期为3.96天. 经测量, 五车三B(较小的恒星)的半长轴为3.35毫角秒. 如果这两颗成员星的质量比为1.026, 请找出该系统的总质量(以太阳质量计).

7.3 计算五车三A和B的单个质量, 以太阳质量计.

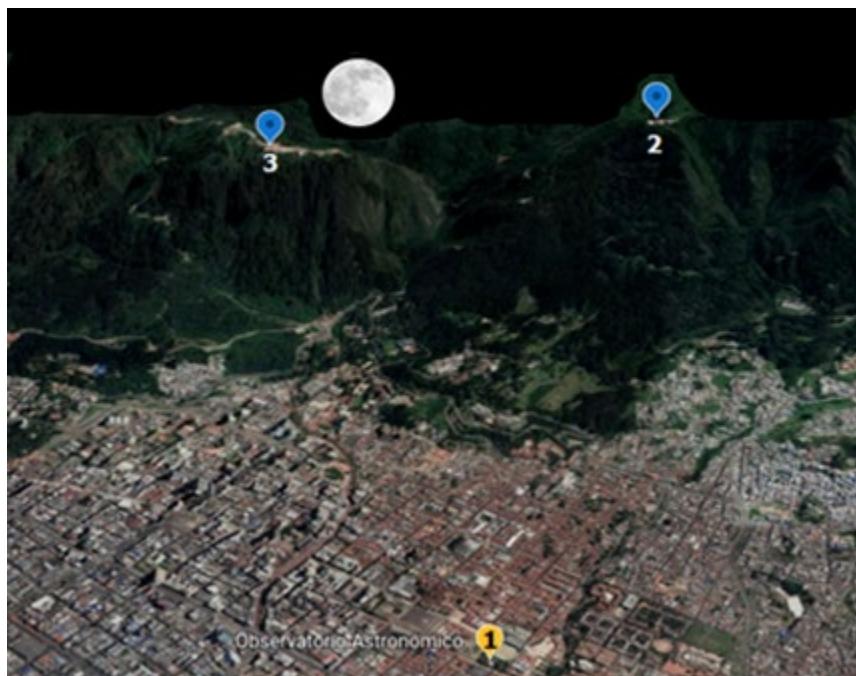
7.4 由于五车三A和B是主序星, 所以使用关系

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5}$$

来估计每颗恒星的光度(以太阳光度计).

8. IOAA标志

IOAA2021的标志由缩写IOAA构成, 其中第一个字母由哥伦比亚国家天文台(OAN)的建筑剪影表示, 这是美洲最古老的天文台. 这个天文台位于波哥大, 成立于1803年. 哥伦比亚的首都与两座著名的山丘接壤, 即Monserrate和它的邻居Guadalupe, 它们是波哥大城市景观的标志, 装饰着标志的背景.



波哥大市的鸟瞰图. 数字表示引用的地点: 1是OAN; 2是Guadalupe; 3是Monserrate.

点	纬度	经度	海拔(高于海平面, 米)
1	4°35'53"N	74°04'37"W	2607
2	4°35'30"N	74°03'15"W	3296
3	4°36'18"N	74°03'19"W	3100

8.1 估计2号点(Guadalupe)和3号点(Monserrate)之间的距离(km).

8.2 估计从哥伦比亚国家天文台(1)观测到的Guadalupe(2)和Monserrate(3)之间的角距离(单位: 度).

8.3 9月21日晚上8点, 从OAN观察到月球向东边的山丘(在Monserrate和Guadalupe之间). 测得的月球的黄道坐标(经度和纬度)见表. 确定观测时月球的赤道坐标.



当地时间: 8:00 p.m.
$Az: +90^\circ 42' 59'' / Alt: +19^\circ 01' 42''$
$\lambda: +12^\circ 20' 16'' / \beta: -04^\circ 24' 14''$

注: 方位角从北向东测量.

9. 冥王星的卫星

9.1 冥王星的最大卫星卡戎的质量是冥王星质量的 $1/8$. 这两个天体都围绕一个共同的质心在圆形轨道上运动. 此外, 它们都是潮汐锁定的.

行星中心和卫星中心之间的距离是 $R = 19640$ km, 卫星的半径是 $r = 593$ km.

设 g_0 为卡戎表面的重力加速度, 仅由其质量引起. 设A是卡戎表面直接面对冥王星的那一点, B是相对的一点. 计算A和B的重力加速度相对于 g_0 的百分比差异.

10. 地球凌日

注: 在下面的两个问题中都假设是完美的圆形轨道.

10.1 一位来自遥远的行星系统的外星天文学家正在观察太阳. 突然间, 由于地球在它前面通过, 太阳的亮度下降了. 这次凌日可能持续的最长时间是多少(以小时为单位)? 假设该天文学家观察的行星没有相对于太阳的移动.

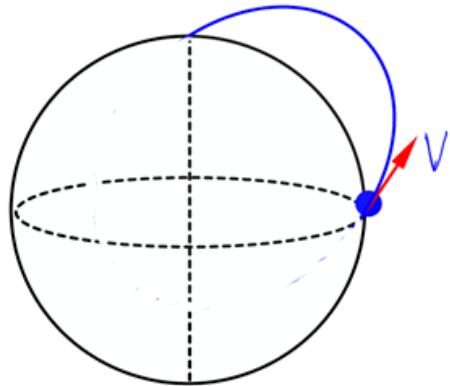
10.2 想象一下, 从地球上看到的某颗系外行星的凌星持续了31分钟. 主星是一颗红矮星, 其质量和半径是太阳质量和半径的10%. 这颗系外行星可能具有的最小轨道周期是多少(以天计)?

11. 抛射物的最小速度

11.1 从赤道的地球表面发射一个抛射物，使抛射物到达北极的最小速度是多少？

11.2 求抛射物的轨迹的偏心率

你可以忽略地球的旋转。同时假设地球表面是球形的。



参考图

12. 速端曲线

在行星围绕恒星的曲线运动中，速度矢量的方向不断变化。这可以用所谓的“速度空间的轨迹”来表示，其获得方法如下：对于空间轨迹上的每一个点，画出相应的速度矢量，使其起点位于速度空间的原点，其大小和方向与该点的速度矢量相同。这个可变速度矢量的尖端在速度空间中产生了一条曲线。（汉密尔顿在1846年为这条曲线命名为“速端曲线”）。

作为一个例子，请看下面的图1和图2。对于一个圆形轨道（图1），速度的大小是恒定的，因此，开普勒圆周运动的速度矢量的速端曲线（图2）也是一个圆，其中心位于速度空间的原点。这个圆的半径等于圆周速度的恒定大小。

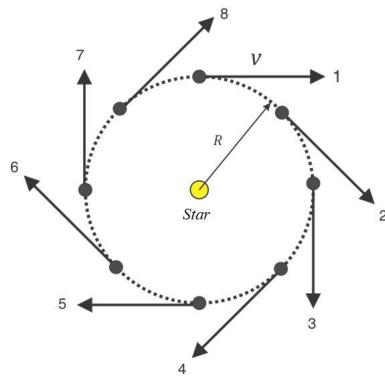


图1 围绕恒星做匀速圆周运动的行星的空间轨迹。

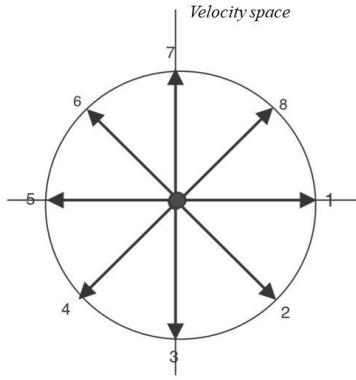


图2 相应的速端曲线

12.1 请写出图2中速端曲线的半径，作为恒星质量 M ，行星运动的圆形轨道半径 R 的函数。

12.2 对于处于开普勒轨迹的行星，请写出向心加速度矢量(\mathbf{a})和角动量大小(L)的表达式。对于任何开普勒轨迹来说，有

$$|\Delta v| = k\Delta\theta \quad (1)$$

其中 k 是每种开普勒轨迹的常数。请找出常数 k 与恒星和行星的质量 M 和 m 以及角动量 L 之间的函数关系。

公式(1)允许我们得出结论，对于任何开普勒轨迹来说，速端曲线(v 作为 θ 的函数)是一个圆，但是除了圆周运动，速端曲线的中心并不与恒星重合。没有必要证明这个结果，你可以简单地接受它作为一个已知条件。对于匀速圆周运动的速端曲线，符合公式(1)的情况是完全明显的，如图3所示。

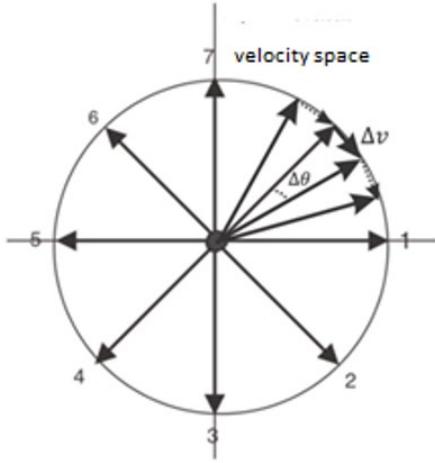


图3

12.3 确定行星圆周运动速端曲线的常数 k 的表达式。

12.4 鉴于开普勒椭圆运动的速端曲线是一个圆，请确定这个速端曲线的半径以及速端曲线中心与恒星位置之间的距离，作为近点速度和远点速度的函数。根据图4所示的示意图，在答题纸上画出一个粗略的速端曲线。黑圈是恒星。

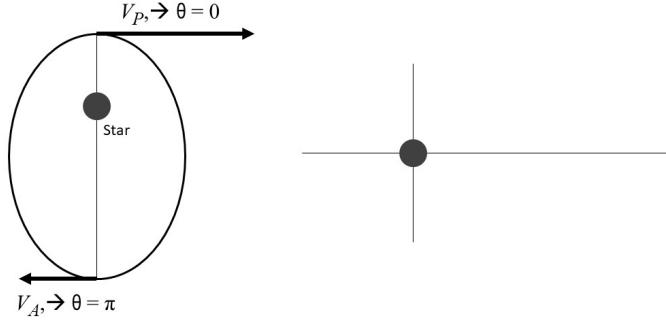


图4

12.5 同样地，对于抛物线开普勒轨迹，确定相应的速端曲线的半径以及从该速端曲线圆心到恒星的距离。将半径表示为近点速度的函数。在答题纸上画出一个粗略的速端曲线的草图。

13. Lucy: 第一个前往特洛伊小行星的任务

空间探测器上的CCD相机非常敏感，并暴露在空间天气条件下。穿过CCD的强烈辐射在CCD芯片的硅中产生电子-空穴对。在操作航天器上的相机时，这些电子对产生的速度是一个重要的参数，并且可以对任何特定能量的辐射进行计算。

一个高能量的粒子或辐射的光子通过CCD时，它产生的每个电子-空穴对都会在芯片中沉积一些能量。硅对特定类型的粒子的“阻止力”可以测量为硅从移动的粒子中“带走”的每一面密度(面密度=每单位面积的质量)的能量。

美国宇航局的Lucy任务将是第一个研究特洛伊小行星的任务，将彻底改变我们对太阳系形成的认识。船上的仪器之一是L'LORRI(Lucy LOng Range Reconnaissance Imager)，它包含一个敏感的CCD，以便制作特洛伊小行星的详细图像。不幸的是，木星周围的辐射非常强烈，它会在CCD的像素中产生大量的“噪音”。

让我们假设一个被困在木星磁场中的带电粒子的平均能量为15 MeV，并且该区域的这种粒子的流量相当于大约 $600 \text{ e}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ 。还假设，对于通过一个像素的粒子所产生的每一个电子-空穴对，它在该像素中正好沉积了该对的激发能量。当像素超过电子-空穴对的阈值数量后，它就被“激发”了，在该像素中不能再产生任何电子-空穴对。粒子中的任何剩余能量都被传递给下一个像素(以此类推)。

利用下面给出的L'LORRI相机中CCD芯片的数据，回答下列问题。

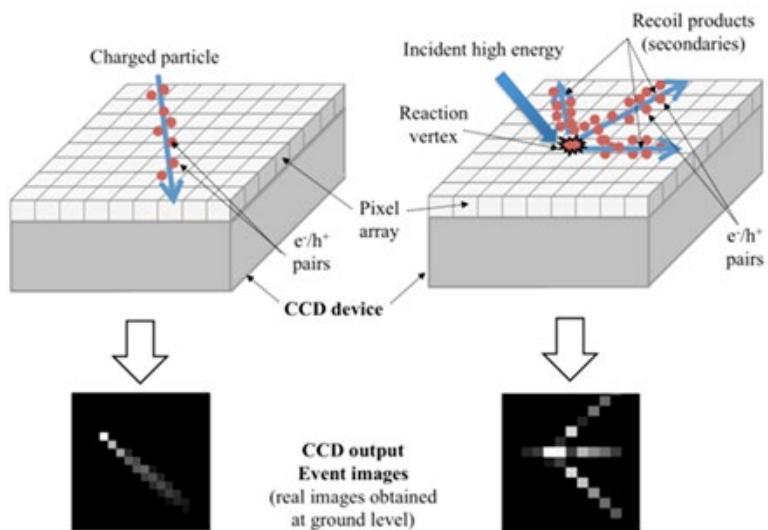
13.1 当航天器在木星轨道附近时，一个这样的辐射粒子通过CCD会激发多少个像素？

13.2 鉴于木星附近的辐射通量，图像中的像素总数有多大比例会被激发？

CCD数据：

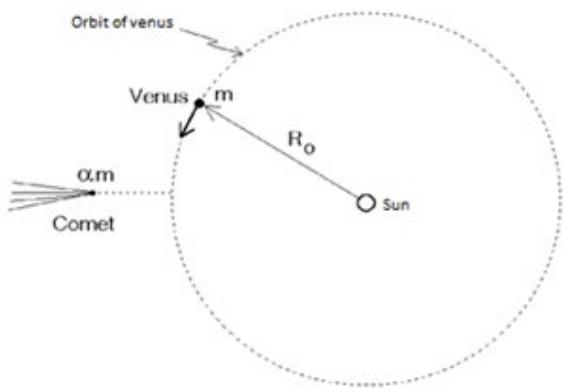
- 一幅图像的曝光时间 = 30 ms
- CCD上的像素 = 1024×1024
- CCD面积 = $13 \text{ mm} \times 13 \text{ mm}$
- CCD芯片厚度 = 0.06 cm
- 硅的密度 $\rho = 2.34 \text{ g cm}^{-3}$

- 单对的激发能量 = 2.36 eV
- 单一像素的激发阈值 = 250对
- 硅对15 MeV电子的停止功率 = $3.012 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^{-2}$



14. 金星-2的形成

一颗质量为 αm 的彗星在径向上向太阳飞去(“坠落”). 已知彗星的总机械能为零. 彗星撞上了质量为 m 的金星. 我们进一步假设, 在碰撞之前, 金星的轨道是半径为 R_0 的圆形. 碰撞后, 彗星和金星形成一个单一的物体, 称为“金星-2”.



14.1 用 M_{sun} 和 R_0 求出金星碰撞前的轨道速度 v_0 的表达式.

14.2 找出金星在与彗星碰撞前在其轨道上的总机械能的表达式.

14.3 找出“金星-2”在碰撞后的径向速度 v_r 和角动量 L 的表达式.

14.4 找出组合体“金星-2”的机械能的表达式, 并用碰撞前的能量 E_i 和 α 来表示.

14.5 证明“金星-2”的碰撞后轨道是椭圆的, 并确定该轨道的半长轴.

14.6 确定“金星-2”上的居民的一年长度是否因为与彗星的碰撞而被缩短或延长了. 写出金星2号和金星的周期之比.

14.7 α 的值应该是多少，才能使金星-2号的碰撞后坠入太阳？我们将其称为 α_c

14.8 一颗 $\alpha = \alpha_c$ 的彗星与金星发生碰撞。计算碰撞后金星速度大小的变化百分比(δv)和速度矢量方向的变化($\delta\theta$)。

15. 宇宙弦

简介

根据我们目前的理解，在大爆炸之后，当宇宙非常热的时候，电磁力、强核力以及弱核力被统一为一种大统一力。

当宇宙冷却到 $T_{\text{GUT}} = 1029$ K时，强核力与弱电力解耦。后来，当温度降低到 $T_{\text{EW}} = 1015$ K时，弱力与电磁力解耦。这些转变是在大爆炸后的一小段时间内快速连续发生的。人们认为，这些相变产生了各种奇特的物体，称为真空缺陷，今天仍然可以观察到。

本问题将讨论这种可能的缺陷类型之一的属性，即宇宙弦及其观测效应。

注1. 除非另有说明，否则请使用牛顿力学定律。

注2. 你将使用以下常数：

- 斯特藩-玻尔兹曼常数

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60h^3 c^2}$$

- 约化普朗克常数

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

- 通用辐射常数

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.5657 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

- 普朗克温度

$$T_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = 1.416784 \times 10^{32} \text{ K}$$

注3. 回顾一下，引力场 \mathbf{g} 满足高斯定理的要求：

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{A} = -4\pi G M_{\text{in}}$$

其中 M_{in} 是表面 A 所包围的质量。

A部分：宇宙弦的引力场

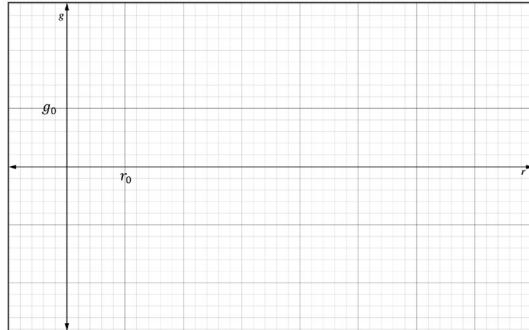
作为一级近似，让我们把宇宙弦视为一个半径为 r_0 、单位长度质量为 μ 的无限长的圆柱体。



A.1 用常数 G 、 μ 和 r_0 写出弦所产生的引力场 $\mathbf{g}(r)$ 的表达式. 单独考虑 $r_0 < r$ 和 $r_0 > r$ 的情况

A.2 用常数 G 、 μ 和 r_0 写出 $g_0 \equiv |\mathbf{g}(r_0)|$ 的表达式.

A.3 将 g 定义为 $\mathbf{g}(r) \cdot \hat{\mathbf{r}}$. 请在答题纸中画出 g 关于 r 的粗略图.



A.4 有可能定义一个围绕宇宙弦的稳定轨道. 对于半径 $R > r_0$ 和周期 τ 的圆形轨道, 可以得到以下关系

$$R = A\tau^\alpha$$

其中 A 和 α 是常数. 在 G 和 μ 的条件下找到 A 和 α

以下三个问题是关于一个经典的牛顿粒子在离弦的距离 $r > r_0$ 时以速度 v 运动. 你将需要使用下面的结果:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

A.5 证明粒子的引力势能为

$$U = Gm\mu \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

其中 b 是任意固定的距离.

A.6 粒子能到达的与弦的最大距离 R_{\max} 是多少?

A.7 粒子有可能逃离引力场吗？在答题纸上写下“YES/NO”。

B部分：作为光子气的宇宙弦

现在将宇宙弦视为半径为 r_0 的极长圆柱体内的光子气，圆柱体的壁是绝热的，在温度 T 下处于热平衡状态。

B.1 用 T 、 \hbar 、 k_B 和 c 表示弦的能量密度 ρ 是多少？

B.2 半径 r_0 与温度 T 的关系为

$$r_0 = \frac{\hbar^{n_1} c^{n_2}}{k_B T},$$

其中 \hbar 是约化普朗克常数， c 是真空中的光速， k_B 是玻尔兹曼常数， n_1 和 n_2 是整数。确定 n_1 和 n_2

B.3 用 ρ 和 r_0 表示弦的单位长度质量 μ 是多少？

B.4 只用 T 和 T_{pl} 表示弱场条件的不等式，定义为

$$\frac{2G\mu}{c^2} \ll 1$$

B.5 计算 $\frac{2G\mu}{c^2}$ ，当

- $T = T_{\text{EW}}$
- $T = T_{\text{GUT}}$

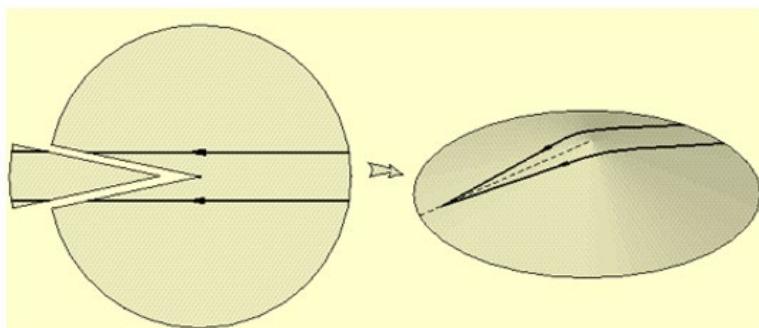
B.6 T_{EW} 的弱场条件是否成立？回答YES或NO。

T_{GUT} 的弱场条件是否成立？回答YES或NO。

C部分：来自宇宙弦的引力透镜

到目前为止，在A和B部分，我们忽略了弦内光子气的内部压强。如果我们把它包括在我们的分析中，我们需要考虑广义相对论。

在解出爱因斯坦场方程后，人们发现宇宙弦周围的时空是圆锥形的，就像从平坦的薄片上移开一个狭窄的楔子，并将其边缘连接起来，如下图所示。



http://www.ctc.cam.ac.uk/outreach/origins/cosmic_structures_five.php

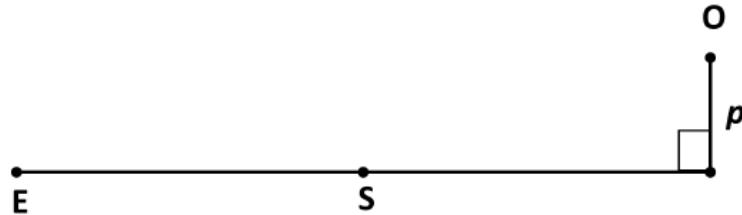
这个模型的一个显著结果是光被宇宙弦偏转，这带来了通过引力透镜进行探测的可能性。

来自遥远的类星体(下图中的O)的光线，在经过宇宙弦(下图中的S)附近并最终到达地球上的观测者(下图中的E)时，其偏转角度(以弧度为单位)为

$$\delta\phi = \frac{4\pi G\mu}{c^2}$$

并且与参数 p 无关, 如下图所示.

图中E和O在垂直于弦的平面内. 观察者与弦的距离为 D_{ES} , 观察者与源的距离为 D_{OE}



C.1 尽管偏转角不取决于参数 p , 但只有当 p 的值在一定范围内时, 地基观测者才能看到一个以上的像. 用 D_{ES} 、 D_{OE} 和温度 T 表示参数 p 值的条件, 使地基观测者能看到物体O的一个以上的像.

C.2 如果观察者看到一个以上的像, 那么每一对像之间的角距离是多少? 用 D_{ES} 、 D_{OE} 和 $\delta\phi$ 表示

C.3 如果 $D_{OE} = 2D_{ES}$, 请确定能分辨这个由GUT弦产生的透镜事件所需的最小光学望远镜的尺寸.

第十四届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

哥伦比亚 波哥大(线上) 2021年11月15日

数据分析1: 标度关系

在你开始做这个问题之前, 请阅读单独信封中的一般说明.

螺旋星系是盘状的旋转结构, 其动态状态可以通过所谓的旋转曲线得到相当的把握, 该曲线量化了盘在离中心不同距离的平均旋转速度(见图1, 曲线B). 一个有趣的特征是曲线的平坦区域, 这归因于暗物质的存在. 如果没有暗物质, 在离中心较远的地方, 旋转速度会稳步下降, 如曲线A所描述.

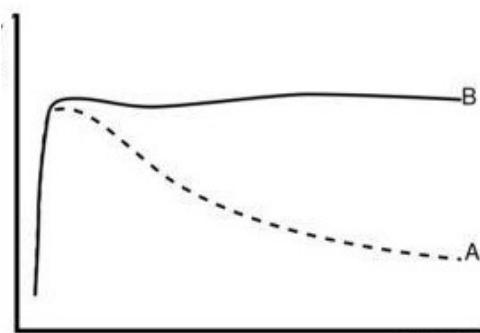


图1: 旋转曲线. 圆周速度(Y轴)与半径(X轴)的关系

在盘状星系中, 已经观察到整个星系的本征光度与渐进的旋转速度(由星系外缘的旋转曲线即 R_{\max} 给出)之间有很强的相关性, 这一结果被称为Tully-Fisher关系. 如果是特定波段的光度, 这个关系也是成立的. 图2中显示了一个星系团中的一些星系. 每个点都是一个星系, 实线是整个样本中K波段的绝对亮度与 $\log_{10}(V_{\max})$ 的最佳拟合线性关系.

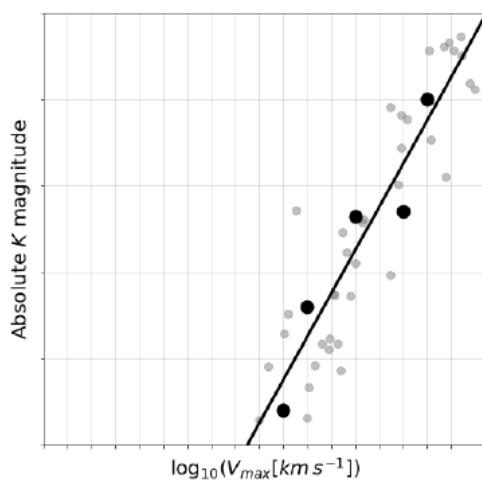


图2: K波段的绝对星等与 $\log_{10}(V_{\max}[\text{km s}^{-1}])$. 几个星系的Tully-Fisher关系. 每个点代表一个星系. 暗点是五个选定的星系, 我们将在1.2部分提供一些数据.

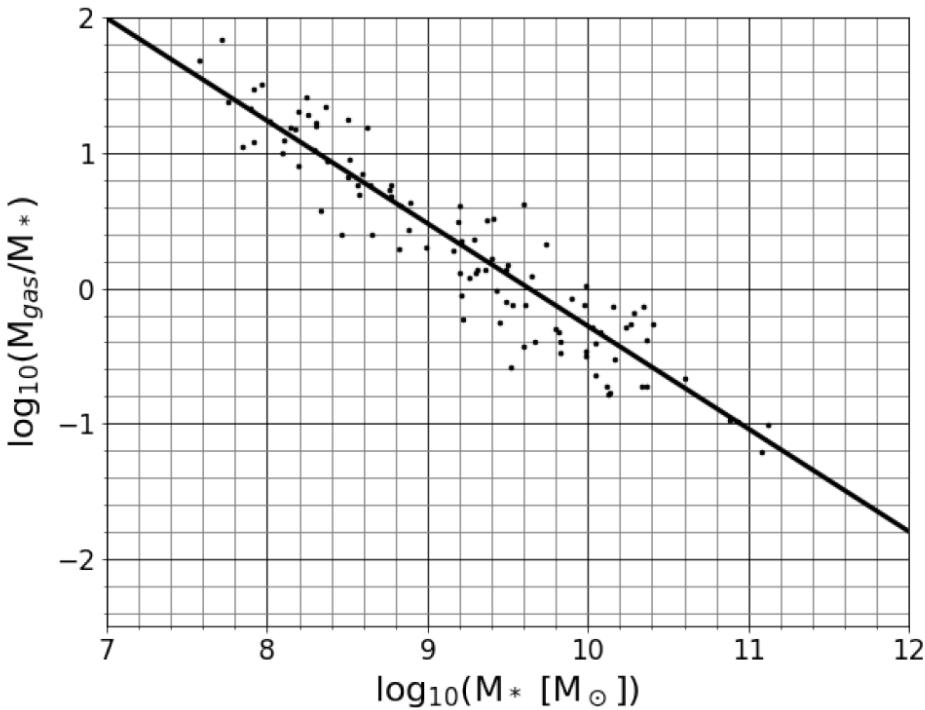


图3：气体分数与恒星质量的关系.

另一个有趣的趋势显示在图3中：具有较大恒星质量(M_*)的星系往往具有较小的气体比例(M_{gas}/M_*)。

在下面的问题中，你将被要求利用刚才介绍的比例关系来提取有关星系的物理信息。请考虑以下准则。

- 假设 V_{max} 是在所有星系的相同半径(R_{max})处测量的，位于旋转曲线的平坦部分，远远超过恒星盘的末端。
- 用 M_{dm} 来表示达到 R_{max} 处的暗物质质量，用 M_{tot} 表示所有成分(气体、恒星和暗物质)的总和。
- 假设所有星系都有相同的星族¹，并假设气体成分不与恒星光相互作用。
- 星系团很远，它的距离比星团的大小大得多。
- 在球形对称的质量分布中，要推断离中心有 r 距离的粒子的引力作用，只需考虑到该半径以内的总质量 $M(\leq r)$ ，就好像它被放在分布的最中心。

¹术语星族指的是一个星系中存在的恒星的类型，以及每种类型相对于恒星总数的数量。

第一部分

1.1 根据对图3的分析，找出下列关系中合适的常数： $M_{\text{gas}} = a \times M_*^b$

$$a = ?$$

$$b = ?$$

1.2 在Tully-Fisher关系图中，有5个突出的点。这5个星系的数据在下表中给出。使用这个数据集，使用最小二乘法进行线性拟合，为表下的TF关系找到适当的常数。

注：在线性拟合中，将 $\log_{10}(V_{\text{max}})$ 作为 x 变量，将 K 作为 y 变量。

V_{max} [km/s]	K [mag]
79.4	-16.8
100.1	-19.2
158.5	-21.3
251.2	-21.4
316.2	-24.0

$$K = c \times \log_{10}(V_{\max}) + d$$

$$c = ?$$

$$d = ?$$

第二部分

对于星团中的两个星系, G₁和G₂, 记录的视星等是:

$$k_1 = 19.2 \quad ; \quad k_2 = 25.2$$

利用这些信息和第一部分中标定的关系, 在下列方程中找到正确的指数.

2.1

$$\frac{M_{*1}}{M_{*2}} = 10^e \quad ; \quad e = ?$$

2.2

$$\frac{M_{\text{gas}1}}{M_{\text{gas}2}} = 10^f \quad ; \quad f = ?$$

2.3

$$\frac{M_{\text{tot}1}}{M_{\text{tot}2}} = 10^g \quad ; \quad g = ?$$

第三部分

3.1

星系	视星等 k	M_{gas} [M_{\odot}]	M_{*} [M_{\odot}]	M_{dm} [M_{\odot}]	M_{tot} [M_{\odot}]
G ₁	19.2				4.39×10^{11}

利用以下事实填补表中缺失的数值: 对于星系G₁, 在 R_{\max} 之内, 暗物质与重子的质量比为6.82.

第四部分

4.1 考虑到由于CCD的校准误差, 每个视星等的系统误差为 $\sigma_{\text{sys}} = \pm 0.2$. 那么 k_1 必须读作 $k_1 = 19.2 \pm 0.2$, 也就是说, 我们唯一知道的是, k_1 很可能位于[19.0, 19.4]的区间内. k_2 的情况也是如此.

重新计算比例关系 $\frac{M_{*1}}{M_{*2}} = 10^e$ 中的指数(可在2.1中找到), 将 e 表示为通过考虑 k_1 和 k_2 的极端可能变化而估计的区间.

$$e \in [?, ?]$$

4.2 现在我们考虑, 任何关系附近的数据总是有一个自然分布. 例如, 对于给定的 K 星等, TF关系给出的单一值为 $\log_{10}(V_{\max})$, 但更现实的是报告一个可信值的区间, 该区间来自TF关系平均值附近数据的自然扩散. 我们把这称为统计误差, σ_{stat} .

使用问题1.2中的TF关系从 K 中推断出 $\log_{10}(V_{\max})$, 估计统计误差. 为此, 考虑每一点的 $\log_{10}(V_{\max})$ 值与实际测量的 $\log_{10}(V_{\max})$ 之间的差异, 并将 σ_{stat} 作为这些差值的均方根(RMS)的两倍[†].

$$\sigma_{\text{stat}} = ?$$

[†]一组数值的均方根是这些数值平方的算术平均值的平方根.

4.3 重新计算比例关系 $\frac{M_{\text{tot}1}}{M_{\text{tot}2}} = 10^g$ 中的指数，将 g 表示为通过考虑系统和统计误差引起的极端可能变化而估计的区间。

$$g \in [?, ?]$$

数据分析策 恒星和系外行星

在开始这个问题之前，请阅读单独信封中的一般说明。

在这个问题中，我们将探索系外行星的物理特性和它们的宿主恒星之间的联系，并将利用观测数据尽可能多地发现这些系统。你可以忽略星际消光。

第一部分

行星名	恒星名	T_{eff} (K)	g (m s ⁻²)	m_v (mag)	视差(毫角秒)
Gorgona	HD 209458	5980	347	7.63	20.67

表1: Gorgona系外行星及其母星HD 209458的观测数据

有效温度(T_{eff})和恒星表面的重力加速度(g)可以通过光谱的形状和吸收线来测量。目视星等(m_v)和视差则分别通过光度测量和天体测量来测量。

此外，据观察，每隔3.52天，这颗恒星的亮度就会因为它前面的行星的凌星而下降，就像这条光曲线中所表示的那样：

1.1

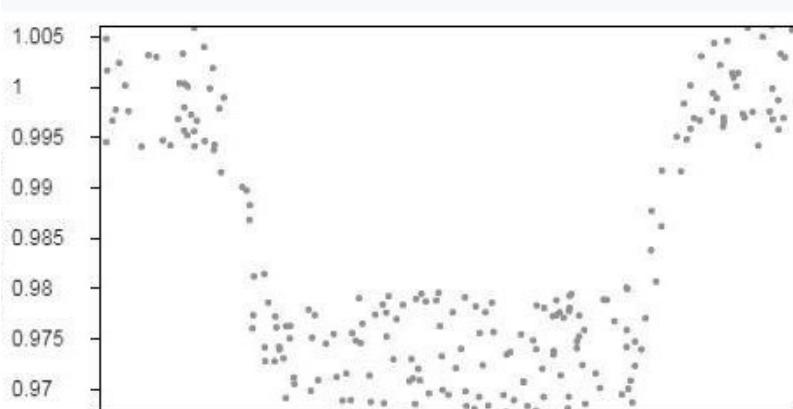


图1: 母星HD 209458的归一化通量(y轴)与时间(x轴)的关系

使用给定的信息来计算HD 209458系统的下列量。

恒星光度	恒星半径	恒星质量	行星轨道 平均半径	行星半径, 以木星半径为单位
L_* [L_\odot]	R_* [R_\odot]	M_* [M_\odot]	a [au]	R_p [R_J]

注：假设所有F型和G型恒星的测光校正是相同的。

第二部分

宜居带被定义为一颗行星表面可能有液态水的区域。这主要与从宿主恒星接收的辐射量有关，辐射量必须在一定范围内，以确保行星表面温度的有利范围。

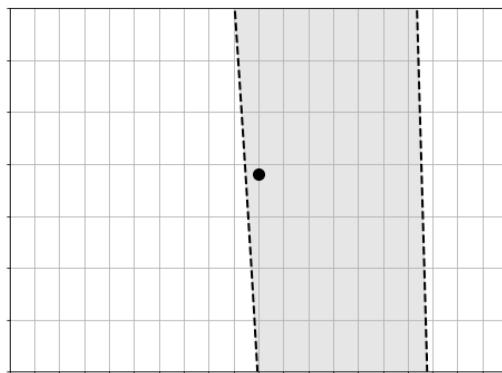
我们将行星接收的有效通量定义为： $S_{\text{eff}} = \frac{L}{a^2}$ ，其中 L 为太阳单位的恒星光度， a 为平均轨道半径 (au)。宜居带的最小通量可近似为 $S_{\text{min}} = S_{\text{eff}\odot} + n \cdot T_* + b \cdot T_*^2 + c \cdot T_*^3 + d \cdot T_*^4$ 。其中 $T_* = (T_{\text{eff}} - T_{\text{eff}\odot})$ ， $S_{\text{eff}\odot}$ 是太阳情况下的等效通量，它与系数 n 、 b 、 c 、 d 一起在下表中给出。宜居的最大通量， S_{max} ，用同样的公式但不同的常数可算出。

常数	S_{max}	S_{min}
$S_{\text{eff}\odot}$	1.0512	0.3438
n	1.3242×10^{-4}	5.8942×10^{-5}
b	1.5418×10^{-8}	1.6558×10^{-9}
c	-7.9895×10^{-12}	-3.0045×10^{-12}
d	-1.8328×10^{-15}	-5.2983×10^{-16}

下表给出了7个不同恒星-行星系统的真实数据。而行星的名称已经被改变，以纪念哥伦比亚的一些自然保护区。

恒星参数		行星参数	
T_{eff} [K]	M_V [mag]	名字	a [au]
6180	3.68	Tayrona	0.04
5730	3.87	Iguaque	0.04
5980	4.21	Gorgona	0.04
5480	6.04	Amacayacu	0.08
5770	3.48	Malpelo	0.05
6130	3.07	Pisba	0.03
6140	3.85	Tatamá	0.06

2.1 在下图中，纵轴代表恒星的有效温度，横轴代表行星接收的有效通量。图中标记的点代表地球，虚线标志着宜居带的界限。



在两个轴上的刻度线位置标上数字。在同一张图上画出Gorgona和Amacayacu的确切位置，假设如果它们也位于距离相应恒星1 au的位置。

2.2 现在，考虑表格中给出的每颗行星的实际轨道半径，用“YES”或“NO”来表示哪些行星位于宜居带。在Working Sheet上展示你的定量推理。

行星名	是否在宜居带内? YES/NO
Tayrona	
Iguaque	
Gorgona	
Amacayacu	
Malpelo	
Pisba	
Tatamá	

第三部分

在最后一页，你会发现一份38颗系外行星的名单，目标是找出低质量系外行星(LME)和高质量系外行星(HME)是否倾向于围绕具有不同特征的恒星运行。

3.1 为了得到一个可信的低质量子样本，我们可以应用一种叫做“迭代 σ 排除”的方法。其思路是计算质量的平均值(μ)和标准差(σ)，并从样本中排除那些质量高于 $\mu + \sigma$ 的行星。然后对剩余的子样本再重复同样的步骤两次。我们会说，最后的子样本中的行星是低质量的，而那些在迭代过程中被排除的行星是高质量的。将你在这一过程中发现的数字填入下表。

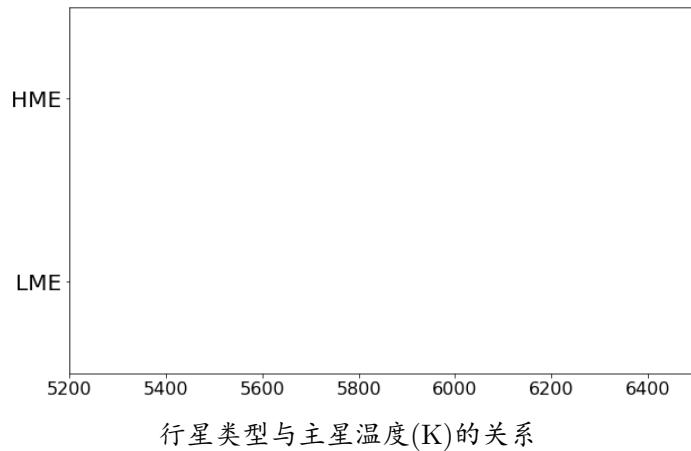
低质量样本	样本容量	μ	σ	$\mu + \sigma$	排除的行星数
全部/原始	38				
第一次迭代后子样本					
第二次迭代后子样本					
最终迭代后子样本		—	—	—	—

3.2 用X轴表示列表中行星的序列号(1, 2, 3,), Y轴表示行星的质量，做一个图。在你在迭代中发现的 $\mu + \sigma$ 阈值处标记3条横线。

3.3 让我们研究一下这两组宿主星的有效温度可能存在的差异，计算一些描述性的统计数据。

	最小值	第一四分位数	中位数 第二四分位数	第三四分位数	最大值
LME					
HME					

3.4 画出总结你刚才计算的数字的箱型图。你是否看到低质量和高质量行星所围绕的恒星的温度有明显的不同？写下“是”或“否”。



序号	行星名	行星质量 [M_J]	恒星 T_{eff}
1	KEPLER-37 b	0.01	5520
2	KEPLER-21 b	0.02	6256
3	HD 97658 b	0.02	5468
4	HD 46375 b	0.23	5345
5	HD 219134 h	0.28	5209
6	HD 88133 b	0.30	5582
7	HD33283 b	0.33	5877
8	HD 149026 b	0.36	6096
9	BD-10 3166 b	0.46	5578
10	HD 75289 b	0.47	6196
11	HD 217014 b	0.47	5755
12	HD 2638 b	0.48	5564
13	WASP-13 b	0.49	6025
14	WASP-34 b	0.59	5771
15	HD 209458 b	0.69	5988
16	HAT-P-30 b	0.71	6177
17	WASP-76 b	0.92	6133
18	WASP-74 b	0.97	5727
19	HAT-P-6 b	1.06	6442
20	HD189733 b	1.14	5374
21	WASP-82 b	1.24	6257
22	KELT-7 b	1.29	6460
23	HD 149143 b	1.33	6067
24	KELT-3 b	1.42	6404
25	KELT-2A b	1.49	6164
26	HD86081 b	1.50	6015
27	HAT-P-7 b	1.74	6270
28	HD 118203 b	2.14	5847
29	HAT-P-14 b	2.20	6490
30	WASP-38 b	2.71	6178
31	HD17156 b	3.20	5985
32	KELT-6 c	3.71	6176
33	HD 75732 d	3.86	5548
34	HD 115383 b	4.00	5891
35	HD 120136 b	5.84	6210
36	WASP-14 b	7.34	6195
37	HAT-P-2 b	8.74	6439
38	XO-3 b	11.79	6281

第十五届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

理论试题

格鲁吉亚 库塔伊西 2022年8月16日

1 普朗克单位

在马克斯·普朗克的自然测量单位系统(宇宙学中常用的)中, 所有单位都用4个基本常数来表示: 光速(c)、宇宙万有引力常数(G)、约化普朗克常数($\hbar = \frac{h}{2\pi}$)和玻尔兹曼常数(k_B). 另外, $(4\pi\varepsilon_0)$ 也包含在这个常量列表中.

使用量纲分析, 找出以下量的表达式

- 普朗克长度(L_p),
- 普朗克时间(t_p),
- 普朗克质量(m_p),
- 普朗克温度(T_p),
- 普朗克电荷(q_p).

2 环绕双星的行星

一个恒星系统由两个主序星组成, 每个主序星 $2M_\odot$ 在一个圆形轨道上运行, 周期为4年. 环绕双星的行星在相同的轨道平面和方向上以固定的20 au距离围绕双星系统的中心运行.

- (a) 计算行星相对于双星系统重新出现在同一位置所需的时间.
- (b) 在给定的时刻, 行星表面接收至少一颗恒星发出的光的最大面积是多少? 忽略任何大气影响和恒星的大小.

3 膨胀的环状星云

一个行星状星云, 距离地球100 pc, 形状是一个完美的圆环, 内半径为 $7.0'$, 外半径为 $8.0'$. 它的光度是由星云中心的白矮星残余物的紫外线辐射提供的. 通过其他观测, 我们知道2000年前, 星云的内半径是 $3.5'$, 外半径是 $4.0'$. 我们认为在这2000年中, 星云的演化服从于自由膨胀的情况, 因此引力可以忽略不计, 膨胀速度随时间保持不变. 假设行星状星云中的所有物质都是在同一时刻喷射出来的, 但是不同的气体粒子具有不同的速度.

- (a) 估计气体粒子的速度范围
- (b) 自由膨胀的假设是否有道理? 写出“YES”或“NO”, 并附上适当的计算结果.
- (c) 如果这个行星状星云足够明亮, 国际空间站上的宇航员是否能够清楚地分辨外壳的厚度? 写出“YES”或“NO”, 并附上必要的计算.

4 星系之间的旅行

我们开始了一段漫长的旅程, 前往位于距离 $d_0 = 10$ Mpc(在我们的旅程开始时)的行星. 在我们旅行期间, 宇宙根据哈勃-勒马特定律不断膨胀. (假设哈勃常数(H)没有变化).

- (a) 写出从我们的旅程开始的时间 t , 地球和行星之间的距离的表达式.

- (b) 火箭应该有多小的恒定速度 v_0 才能到达目的地？假设我们的火箭的速度为 $v_0 = 1000 \text{ km/s}$, 我们能到达行星吗？写出“YES”或“NO”。如果可以，我们的旅程将需要多长时间？

提示：解释我们宇宙膨胀的一个简化方法是引入一个“标度因子” $a(t)$, 它将两个物体之间的距离 $\lambda(t)$ 在时间 t 与时间 $t = 0$ 时的距离 λ_0 联系起来，即 $\lambda(t) = a(t)\lambda_0$

5 燃烧的原行星盘

行星是年轻恒星周围形成环星盘的云层坍缩的产物。在这个问题上，我们研究了一种原行星盘的热结构。我们认为来自中心恒星的辐射是最主要的加热过程，并假设星盘是有光学厚度的，辐射只能在星盘的表面层被吸收。这种类型的星盘被称为**燃烧**的星盘(见下文图1)。在这种情况下，恒星直接照亮圆盘的表面，光线和圆盘表面之间的浅角 β 随着与恒星的距离增加而增大。

- (a) 假设 $h(r) \ll r$, 找到 β 与 r 的函数表达式。

提示：该表达式涉及 $h(r)$ 、 r 和 $\frac{\Delta h(r)}{\Delta r}$

- (b) 找出盘的平衡温度(T_D)作为 $\beta(r)$ 、 r 和恒星光度(L_s)的函数的表达式(忽略恒星的大小)。

- (c) 我们将圆盘高度参数化为 $h(r) = ar^b$, 其中 a 和 b 是常数。 a 和 b 取什么值时能够满足等温层的条件($T_D = \text{常数}$)？用 T_D 和 L_s 写出你对常数 a 的答案。

提示：如果 $\Delta r \ll r$, 那么 $(1 + \frac{\Delta r}{r})^b \approx 1 + \frac{b\Delta r}{r}$.

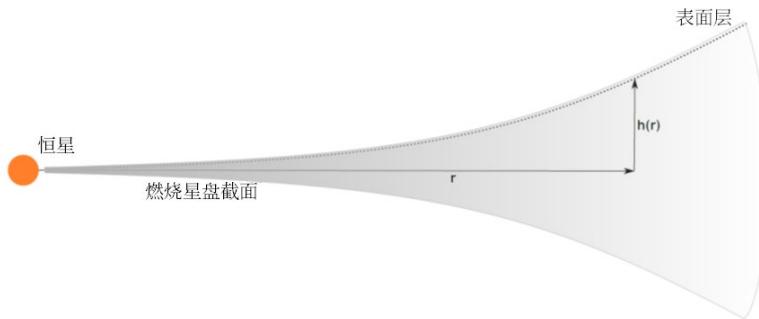


图1：燃烧星盘的横截面

6 双星的测光

我们观测到一个双星系统，距离 $d = 89 \text{ pc}$ ，围绕共同质心的圆形侧向轨道，周期为100天。我们的天基望远镜的直径为 $D = 10 \text{ m}$ ，工作波长为 $\lambda = 364 \text{ nm}$ 。我们注意到，在每个完整的周期中，总共有38天，这两颗恒星不能被这个望远镜作为独立的天体加以分辨。A星的峰值发射波长为 $\lambda_A = 500 \text{ nm}$ ，B星的峰值发射波长为 $\lambda_B = 600 \text{ nm}$ 。

- (a) A和B星的温度是多少, (T_A, T_B)
 (b) 计算恒星之间的距离 l
 (c) 计算恒星的质量之和(M_T)。

该系统的综合测光：

构型	U_0	$(U - B)$	$(B - V)$	BC
1 恒星在各自旁边	6.39	0.2	0.1	0.1
2 B在A的前面穿过	6.86	0.25	0.12	0.175

U 的每kpc的星际消光为 $a_U = 1.4 \text{ mag/kpc}$. 恒星的密度之比 $\rho_A/\rho_B = 0.7$

注: 对于热改正, 我们使用惯例:

$$\text{BC} = m_{\text{bol}} - m_V$$

(d) 计算两颗星的质量(M_A, M_B).

7 从格鲁吉亚到佐治亚

天文学家凯托沿着最短的路线连夜向西飞行, 从第比利斯(格鲁吉亚的首都)到亚特兰大(美国佐治亚州的首府). 她注意到, 在整个飞行过程中, 她都能从飞机的一个窗口观察到孙增一($\zeta \text{ CMa}$)(尽管它有一次触及地平线, 当时它也恰好在正南方向).

计算她登陆的亚特兰大的纬度 ϕ_B 和经度 λ_B .

已知:

- 这次旅程持续了11小时25分钟, 飞机的平均速度为875 km/h.
- 孙增一的赤纬为 $\delta_F = -30^\circ 4'$.
- 第比利斯的坐标是 $\phi_A = 41^\circ 43' \text{N}$, $\lambda_A = 41^\circ 48' \text{E}$.
- 你应该忽略飞行过程中地球的自传、飞机的高度、大气折射和任何风的影响.

8 行星环

我们得到一个质量为 M 的平坦圆盘, 内半径为 r , 外半径为 R .

- (a) 一个质点 m 位于圆盘的对称轴上, 与圆盘平面的距离为 x (我们自始至终假定质量 m 保持在对称轴上, 并且可以在垂直方向上自由移动). 施加在该质点上的引力是多少?

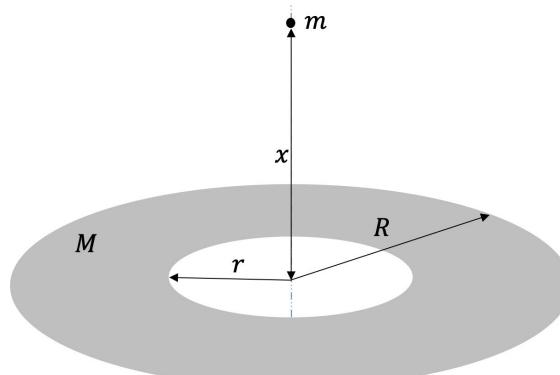


图2: 质点周围的平盘

提示1: 你可以用符号 σ 表示面密度, 并计算一个小的面元 ΔS 所施加的力, 它对 m 的立体角为 $\Delta\Omega$.

提示2: 张角为 2θ 的圆锥体在半径为 R 的球体上切下的面积:

$$S = 2\pi R^2 [1 - \cos(\theta)]$$

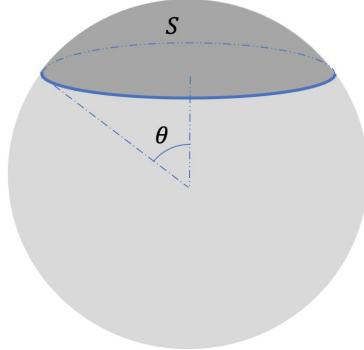


图3：圆锥体在球体上切出的面积

- (b) 系统的小幅振荡的频率将是多少($x \ll r$).

9 水星上的太阳逆行运动

水星的轨道有一个异常高的偏心率. 此外, 它的恒星自转周期是恒星年的 $\frac{2}{3}$. 由于这些因素, 当水星接近近日点时, 太阳会在水星的天空中表现出逆行运动.

计算在水星围绕太阳的一次公转中, 这种明显的太阳逆行运动的总时间. 用地球日表示你的答案.

10 吸积

考虑一个致密天体(如黑洞、白矮星或中子星)有一个球对称的气体吸积球, 假设吸积的气体是氢气. 当粒子落入天体时, 它们会发热并辐射, 从而产生辐射压力, 作用于吸积物质的其余部分. 这个力由以下公式给出。

$$F_L = \sigma_e \frac{I}{c}$$

其中, $\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2$

是电子的汤普森截面, c 是光速, I 是光的强度. 尽管 F_L 是针对电子计算的, 但它有效地作用于整个原子.

- (a) 如果中心致密天体的质量为 M , 请求出爱丁顿极限(L_E)的表达式, 它是吸积球的最大可能光度.
- (b) 对于一个特定的致密天体, 由于物质吸积而产生的光度与太阳光度 L_\odot 相同. 为了达到这个光度, 这个天体的最小可能质量是多少(以 M_\odot 为单位)?

假设吸积球中的原子起源于远离致密天体的地方. 当这些原子落入致密天体时, 它们的引力能被转化为辐射.

- (c) 用致密天体的质量(M)、质量吸积率($\dot{M} = \frac{\Delta M}{\Delta t}$)和致密天体的半径(R)推导出吸积光度(L_{acc})的表达式.
- (d) 证明稳定状态下的最大可能吸积率并不直接取决于致密天体的质量.
- (e) 对于一个 $R = 12 \times 10^9$ m的天体, 计算最大可能的吸积率 \dot{M} (以 M_\odot /年为单位).

在现实中, 吸积的几何形状是圆盘状的, 其中大多数粒子在一个几乎圆形的轨道上围绕着致密天体. 考虑一个由质量为 M_1 的致密天体和质量为 M_2 的氢气燃烧星组成的双星系统, 两者之间的距离为 a . 来自烧氢星的气体被致密天体吸积, 由于这种质量转移, 双星系统的周期发生变化.

- (f) 若要使得恒星之间的距离会不断增加, 找出两个质量的条件. 忽略恒星的自转.

11 戴森球

卡尔达肖夫指数根据获得和使用能量的标准，将文明的演变分为三个阶段。

II型文明能够利用其自身恒星所辐射的所有能量。目前，我们是一个零型文明(我们甚至没有利用到达地球的100%的能量)。成为II型文明的方法之一是建造一个**戴森球**。你可以把它想象成一个球体，围绕太阳而建，内表面覆盖有太阳能电池板。

我们假设使用现代太阳能电池板来建造这个球体。首先，让我们找出它应该建在离太阳多远的地方。

太阳能电池板背面的发射率为 $\epsilon = 0.8$ 。

- (a) 太阳能电池板吸收并将大约 $k = 30\%$ 的入射辐射转化为内部热量。求出半径为 R 的戴森球的温度。用 k 、 R 、 ϵ 和 L_{\odot} (太阳光度)表示你的答案。你可以把太阳看作是一个黑体。忽略太阳能电池板的反射。忽略任何可能的影响，即能量没有转移到太阳能电池板的内部热量或变成电池板产生的电能。

假设现代太阳能电池板的最高运行温度约为 $T_{\max} \approx 104.5^{\circ}\text{C}$ 。在这之后，效率会显著下降。为了尽量减少材料的使用量，我们应该考虑把球建得越小越好。

- (b) 为使面板正常工作，计算球的半径。地球是停留在球内部还是外部？在答题纸上写上**IN**或**OUT**。
- (c) 如果现代太阳能电池板的最终输出功率约为入射能量的 $\eta = 20\%$ ，求这个戴森球所利用的功率。
- (d) 目前，整个世界的平均用电量约为17太瓦(TW, 1 TW即 10^{12} W)。如果这个戴森球收集一秒钟的能量，可以满足我们多久的能源需求？
- (e) 在戴森球完全阻挡太阳光线的情况下，地球上的温度将明显下降。如果目前的平均温度约为 15°C ，请计算在这种情况下地球的平均温度的变化。假设地球也是一个黑体。
- (f) 建造一个这么大的刚性球形物体几乎是不可能的。另一种“建造”这个球体的方法是发送单独的太阳能电池板绕着太阳运行(在不同的倾斜轨道上)，半径为b部分中的 R 。计算在该半径下围绕太阳运行的任何物体的周期 T 。
- (g) 假设每块太阳能电池板是一块薄薄的硅片，其面密度 $\rho = 1 \text{ kg/m}^2$ 。来自太阳的辐射压力，可能会干扰到面板的轨道。计算距离为 R 的面板单位表面积的引力和光子力的比值 α ，你设所有的入射光都被吸收了。这种辐射压力会有任何可测量的影响吗？在答题纸上写下**YES**或**NO**。

现在假设戴森球是一个刚体，以f部分中发现的周期旋转，并具有b部分中发现的半径。

- (h) 对戴森球的一个主要威胁是轨道与球体表面交叉的小行星。解决这个问题的方法之一是将面板从小行星的路径上移开。显然，小行星应该通过的洞的大小要比球体的半径小得多。

天文学家发现一颗小行星的轨道在黄道面上，与戴森球的自转方向相同。他们计算出这颗小行星将于8月14日进入球体，9月20日离开球体。计算球上两个孔之间的角距离，以便为小行星提供一个安全通道。

这颗小行星在日心圆柱坐标系中的轨迹可以描述为

$$r = \frac{a}{1 - \cos \theta}$$

其中 $a = 1.00 \text{ au}$ 。

- (i) 如果一个II型文明在一个遥远的星系中创造的戴森球与地球的距离是 d , 并且该球可以在温度 T_1 和 T_2 之间运行($T_1 < T_2$), 我们应该在什么波长范围内寻找该戴森球. 假设只有非相对论的影响.

12 共轨卫星

这个问题应用了Dermott和Murray在1981年开发的一种确定两颗近似同轨卫星质量的方法.

假设质量为 m_1 和 m_2 的两颗小卫星围绕质量为 M 的大中心天体近似共轨(在非常相似的轨道上运动), $m_1, m_2 \ll M$. 在任意瞬间, 卫星的轨道可近似为半径分别为 r_1 和 r_2 的开普勒圆形轨道, 尽管 r_1 和 r_2 会由于卫星之间的相互引力作用而随时间的推移略有变化.

图4描述了以中心天体为中心的零角动量的旋转参考系中的轨道形状. 我们用 θ 表示角度 $\angle m_1 M m_2$, 而 R 、 x_1 和 x_2 表示卫星的平均轨道半径和径向偏差.

在整个问题中, 请在惯性参考系中写出所有答案.

提示: 对于 $\alpha x \ll 1$, 有 $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

首先我们要确定 $\frac{m_1}{m_2}$ 的值.

(a) 写出质量为 m_i 的卫星在其圆形轨道半径为 r_i 时的角动量 L_i .

(b) 卫星的总角动量 $L_1 + L_2$ 是守恒的. 令 $x_1, x_2 \ll R$ 为图4中所示的距离. 找出 $\frac{m_1}{m_2}$ 和 $\frac{x_1}{x_2}$ 的比例之间的简单关系.

现在, 我们将尝试确定 $m_1 + m_2$ 的值. 对于接下来的部分, 我们将使用系统的实际质心, 它可能不完全在行星的中心.

(c) 卫星 m_1 和 m_2 各自的角动量将由于它们的引力相互作用而随时间变化. 证明第二颗卫星的角动量的变化率为

$$\frac{\Delta L_2}{\Delta t} \approx -\frac{Gm_1m_2}{R} h(\theta) \quad \text{其中 } h(\theta) = \left[\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{4\sin^2(\frac{\theta}{2})} - \sin \theta \right]$$

(d) 证明 $s = r_2 - r_1$ 满足

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx -2\sqrt{\frac{G}{MR}}(m_1 + m_2)h(\theta)$$

(e) 对于图4所示的角度 $\theta = \angle m_1 M m_2$, 求 $\frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ 的表达式

(f) 利用上述结果, 找出 Δs 和 $\Delta \theta$ 之间的关系.

(g) 对上面的表达式进行积分后, 我们将得到结果,

$$\bar{x}^2 \approx \frac{4R^2}{3} \frac{m_1 + m_2}{M} \left(\frac{1}{\sin(\frac{\theta_{\min}}{2})} - 2\cos\theta_{\min} - 3 \right)$$

其中 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Epimetheus(m_1)和Janus(m_2)是土星的两个近似同轨的卫星. 旅行者1号和卡西尼号航天器对它们的轨道进行了详细观测, 发现 $R = 150\ 000$ km, $x_1 = 76$ km, $x_2 = 21$ km. Janus和Epimetheus之间的最小距离是13000 km. 已知土星的质量为 5.7×10^{26} kg. 估计一下Epimetheus和Janus的质量.

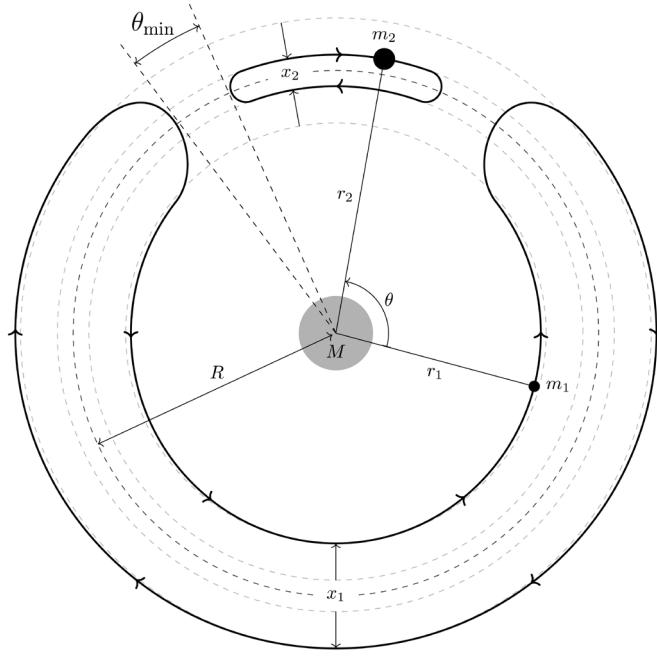


图4: 该图示意性地描述了旋转参考系中的轨道形状, 选择该系时, 两个卫星的总角动量为零.

13 相对论性射束

考虑一个频率为 ν_0 的各向同性的光源, 其参考系是固定在光源上的(即静止参考系). 在这个静止参考系内, 考虑从光源发出的一条光线与 X 轴成一角度 θ_R . 光源以实验室参考系内测量的(相对论性)速度 v 沿 X 轴正方向运动.

- (a) 求出这条射线在实验室系内的频率 ν , 以及这条射线在实验室系内与 X 轴所成角度的余弦的表达式.

提示: 在相对论力学中, 粒子在静止和实验系之间的能量 E 和动量 p 以下列方式相关:

$$\begin{aligned}\frac{E_L}{c} &= \gamma \left(\frac{E_R}{c} + p_{x_R} \frac{v}{c} \right) \\ p_{x_L} &= \gamma \left(p_{x_R} + \frac{E_R v}{c^2} \right) \\ P_{y_L} &= P_{y_R} \\ P_{z_L} &= P_{z_R}\end{aligned}$$

其中:

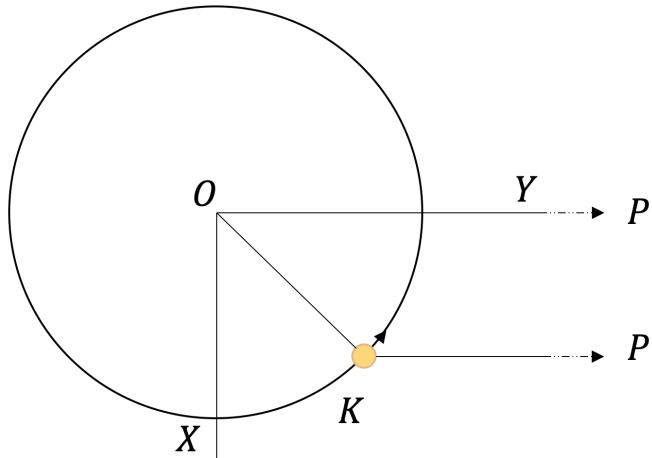
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- (b) 对于以下情况:

- i) $\theta_R = 0^\circ$
- ii) $\theta_R = \cos^{-1}(-v/c)$
- iii) $\theta_R = 90^\circ$
- iv) $\theta_R = 180^\circ$

在静止系的 XY 平面和实验室系的 $X'Y'$ 平面分别画出光束的方向矢量.

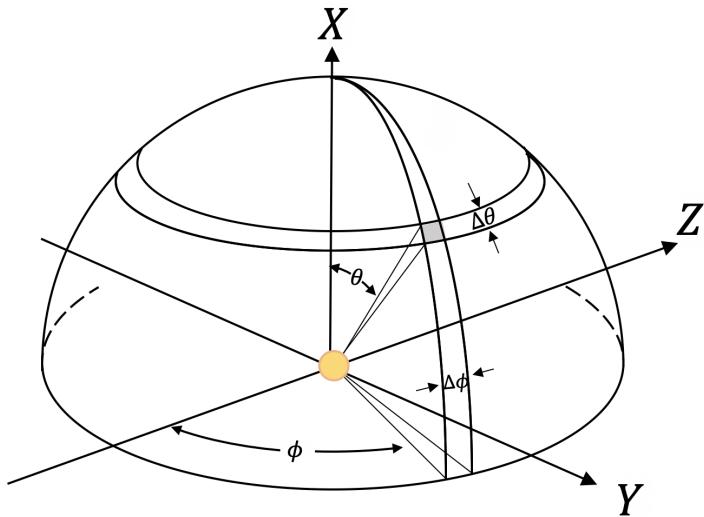
在黑洞周围的吸积盘中，带电粒子以相对论速度运行，在它们的静止系中可以被视为各向同性的光点源。考虑这样一个粒子 K 在半径为 r 、角速度为 ω 的圆形轨道上围绕位于 O 的中心天体运行(见图)。



让我们假设，我们的实验室系对位于 OY 轴上某一点 P 的观测者来说是固定的，该点相对于 O 来说是静止的。 $OP = R \gg r$ 。令 $t_{L_0} = t_{R_0} = 0$ 对应于看到 K 穿过 OX 轴的时刻。当 K 以相对论速度运动，观测者在源 K 的静止系内测得的持续时间 Δt_L 与在 P 处的实验室系内测得的持续时间 Δt_R 相关，表达式为 $\Delta t_L = \gamma \Delta t_R$ 。

(c) 推导出 Δt_L 关于 t_R 的函数表达式 ($t_L > R/c$)？

让我们考虑从源头发出的一部分光，在一个无限小的实体角 $\Delta\Omega_R = -\Delta(\cos \theta_R) \cdot \Delta\phi$ 的方向上，相对于静止系中的 X 轴成一个角度 θ_R ，如下图所示。



(d) 证明，在实验室系内测量时

$$\Delta\Omega_L = \frac{\Delta\Omega_R}{\gamma^2 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_R\right)^2}$$

(e) 如果光源的本征亮度为 L ，那么在 t_L ($t_L > R/c$) 时刻，观测者在 P 点观察到的能量通量 F_L 是多少？

提示: 在光源的静止系中, 你可以假设在时间间隔 Δt_R 内, 有 N_R 个光子被引导到实体角 $\Delta\Omega_R$ 内.

- (f) 从M87星系中心的超大质量黑洞射出的相对论光束中的带电粒子, 其速度高达 $0.95c$. 对于来自M87的相对论光束, 其能量通量的最大和最小放大系数将是多少?

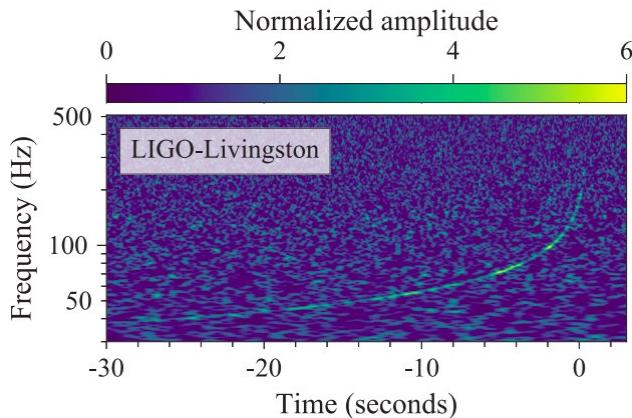
第十五届国际天文与天体物理奥林匹克竞赛

数据分析试题

格鲁吉亚 库塔伊西 2022年8月18日

一.

在这个问题中，我们将分析包含引力波事件GW170817的时间-频率数据，这是LIGO对双中子星系统合并的第一次观测。



1 图表中的数据

(1.1) 你将得到半对数图，你需要从中提取频率和时间的值。求出一个线性表达式，使其能从测量的横轴坐标 x 得到实际时间 t 。

(1.2) 同样地，求出频率 f 关于测量坐标 y 的函数表达式。

(1.3) 使用你获得的关系，从给定的图表中提取至少12个时间和相应频率的值。其中至少有一个值应对应于100 Hz以上的频率。

2 计算系统参数

对这种频率演化最合理的解释是，由于引力波的发射，两个彼此环绕、质量 m_1 和 m_2 的天体向内旋转。在较低的频率下，这种演化可用啁啾质量表征

$$M_{\text{chirp}} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = \frac{c^3}{G} \left[\frac{5}{96} \pi^{-8/3} f^{-11/3} \dot{f} \right]^{3/5}$$

其中 f 和 \dot{f} 是观察到的频率及其时间导数， G 和 c 是引力常数和光速。

(2.1) 将上面给出的方程线性化，得到频率关于时间的函数。

注：如果 $x^n \dot{x} = k$ ，那么 $\frac{x^{n+1}}{(n+1)} = kt + C$ ，其中 k 、 n 和 C 都是一些常数。

(2.2) 使用毫米纸，以太阳质量及其不确定度表示啁啾质量。

我们意识到，地基GW探测器所测量的实际上是探测器参考系质量，它与源参考系质量的关系是

$$m_{\text{detector}} = (1 + z)m$$

其中 z 是双星的红移。

(2.3) 已知宿主星系NGC 4993红移 $z = 0.009783$ ，求出源参考系的啁啾质量。

(2.4) 求NGC 4993的距离.

(2.5) 质量比 $q = m_1/m_2$ 更难测量. 高级波形分析显示, 这个系统的 q 在0.73到1.0的范围内. 计算质量 m_1 (主星)和 m_2 (伴星)的数值范围.

3 引力波的速度

费米伽马射线暴监测仪(GBM)探测到伽马射线暴GRB 170817A几乎与引力波事件同时出现. 同一中子星合并被确定为信号的来源. 在下面的表格中, 第一栏是自引力波峰值到来后的时间, 它发生在2017年8月17日12:41:04 UTC. 这个峰值象征着中子星合并的开始. 第二列给出了在费米GBM测量的探测器计数. 背景噪音已经从信号中减去.

$t(s)$	事件计数(/s)
0.5981	15
0.7975	-62
0.9968	9
1.1962	-24
1.3956	24
1.5949	-50
1.7943	0
1.9937	18
2.1930	53
2.3924	179
2.5918	176
2.7911	91
2.9905	26
3.1899	71
3.3892	38
3.5886	59
3.7880	21

(3.1) 在毫米纸上画出事件计数随时间变化的图.

(3.2) 估算合并开始与伽马射线暴开始之间的延迟 Δt .

从这个测量结果可以确定在行程中所谓的相对速度差.

$$\frac{\Delta v}{v_{\text{EM}}} = \frac{v_{\text{GW}} - v_{\text{EM}}}{v_{\text{EM}}}$$

(3.3) 用 Δt 和到源的距离 D 来表示这个量.

(3.4) 如果我们保守地假设引力波信号的峰值和第一个GRB光子是同时发射的, 从而将整个滞后归因于引力波信号的快速传播, 这个时间差提供了一个 Δv 的上限. 计算这个上限.

(3.5) 为了得到 Δv 的下限, 我们可以假设两个信号的发射时间相差超过 Δt , 而较快的EM信号弥补了部分差异. 取最大时间延迟为10 s, 求出下限.

二. 银河系巡天

在宇宙学中，星系群的观测对于研究和验证复杂的理论模型、宇宙膨胀及其行为分析非常重要。有许多望远镜专门用于星系巡天和进行特殊的统计分析。这一切的产物就是星系星表，它是这种观测和复杂计算分析的结果。

通常情况下，星系是在非常大的(球状)暗物质晕内成群形成的。大多数物质都集中在中心，因此那里有一个中心大质量星系的概率很高。在这些问题中，我们将假设所有晕都有一个中心星系和几个卫星星系。

可以猜到，所有这些都需要大量的计算能力：区分星系，用红移和其他方法处理校正后的坐标，等等。复杂的统计分析包括计算星系群的相关函数，也就是为所有可能的两个星系对之间的距离做一个直方图。这个问题的主要目标是对观测数据进行理论统计分析，弄清楚已经观测到的是什么样的星系群。一个理论模型可以用很少的观测数据推断出星系群的特征，这对科学家来说非常有用，可以节省大量的计算时间和那些数据分析中可能出现的错误。

在图 1 中，你可以看到不同星系群的概率密度。X 轴是距离，Y 轴是概率密度。有六种星系团类型 (A-F)，各自有相应的密度。这个问题的目标是确定我们观测到的是哪种暗物质晕群。

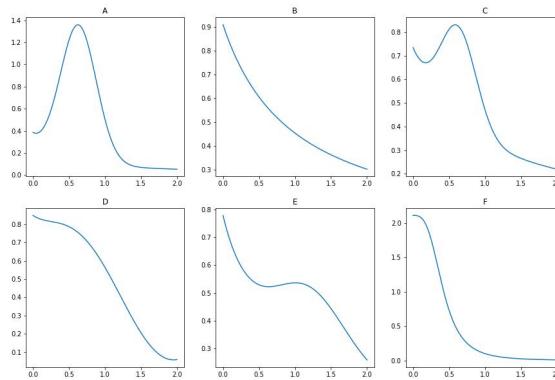


图 1：所有可能的星系对的概率密度(来自不同/相同的暗物质晕)。

第一部分

你得到的表 1. 代表了来自观测的数据。从其他数据和观测中可以得出结论，所有这些星系都属于同一个暗物质晕。你可以看到卫星星系的坐标。中央星系的坐标是 8.300; 6.200; 1.100。额外的一列代表了在该点附近发现的星系的数量。为了简单起见，你可以假定它们的坐标是相同的。这些坐标是在直角坐标系中给出的，其中心与地球上的观测者一致。

	x (Mpc)	y (Mpc)	z (Mpc)	N (星系数)
1	8.401	6.309	1.394	291
2	9.883	7.189	1.506	170
3	8.883	6.413	2.226	253
4	8.444	6.569	2.439	8
5	7.782	6.048	-0.358	72
6	8.780	6.305	2.463	120
7	7.990	5.881	0.532	302
8	8.540	6.388	0.369	52
9	7.975	6.030	1.216	28
10	7.072	5.431	0.488	40
11	8.037	5.965	0.615	72
12	8.681	6.483	0.734	379
13	7.115	5.259	1.403	82

14	9.587	7.130	0.322	62
15	8.193	6.104	0.915	305
16	7.613	5.847	1.666	293

在我们开始将直角坐标转换为球面坐标之前，我们需要找到适当的本地坐标系，原点在晕的中心。

- (a) 将所有的直角坐标对画在不同的图上。鉴于这个晕的形状像一个圆盘，请找出其法线的方向。
- (b) 写下本地坐标系的单位向量。选择适当的方向，取 X' 轴时使之与视线重合。
- (c) 将给定的直角坐标转换为本地的 $X' Y' Z'$ 坐标。将数值填入表 1(答题纸中另有一张): X', Y', Z' 。
- (d) 将本地直角坐标转换为球面坐标(以中心星系为坐标系的中心, ϕ 相对于 X' 轴计算, θ 相对于 Z' 轴计算)。填写表 1(答题纸中另有一张)的其他数值: r, θ, ϕ 。
- (e) 用卫星星系与中心星系的距离的 8 个分箱绘制直方图(参数取决于落在特定范围内的数据点总数)。以 0.2-2 Mpc 作为直方图的范围。直方图也必须转换为概率密度函数。注意：概率密度函数是在某一点上的概率。在概率函数的情况下，你可以通过注意 Y 轴的其他限制来避免绘制两个独立的图形。
- (f) 理论上，直方图由以下公式给出

$$H(r) = \frac{1}{A + B \cdot r}$$

将给定的依赖关系线性化，并从图中求出 A 和 B 的值。

第二部分

众所周知，在用红移法(由于宇宙膨胀而产生的大的相对速度)测量物体的距离时，由于星系的运动，可能会出现误差。本题的目的就是要纠正这些误差。

假设中心星系的质量为 $10^{10} M_{\text{Sun}}$ ，所有卫星星系都在圆形轨道上运动，它们之间的相互作用可以忽略不计。

- (a) 使用表 1 中填写的数据，画出极角直方图(将直方图的分箱宽度取为 60 度)。角度的分布应该是均匀的，但它不是。计算与均匀值的方差。
- (b) 原本在 60-120 和 240-300 分箱的星系将需要最多修正，因为它们是沿视线运动的星系。假设角坐标与相应星系的中心重合(在我们的例子中是 90 和 270)，并将表达式写成与中心距离的函数，描述星系的圆周运动引起的极角变化。提示：你可以假设离中心的距离不会因为这个修正而有明显的变化。
- (c) 使用上一题的结果，修正最后一个直方图中使用的角度。用修正后的数据绘制新的直方图(对距离的概率依赖关系)。计算与均匀值的方差。

第三部分

我们只计算了中心星系-卫星星系(来自同一星系)的直方图。现在是时候继续计算其他关系了。

我们对不同的晕及其中心星系进行了同样的观测和数据分析。图 2. 直方图的数据只包括不同暗物质晕中中心星系之间距离的分布概率密度函数。

假设我们有 500 个晕，因此有 500 个中心星系($N_C = 500$)。以一个晕中卫星星系的平均数量为 1000 ($N_S = 1000$)。

(a) 计算以下量:

1. N_{CC} , 中心星系对的总数量
2. N_{CS}^* , 同一晕中的中心星系-卫星星系对的总数量
3. N_{CS} , 不同晕中的中心星系-卫星星系对总数
4. N_{SS}^* , 同一晕中的卫星星系-卫星星系对总数
5. N_{SS} , 不同晕中的卫星星系-卫星星系对总数

下面给出了不同暗物质晕中中心星系之间不同距离的概率密度值的表格.

r (Mpc)	ρ
0.3125	0.406
0.5375	0.808
0.7625	1.341
0.9875	1.134
1.2125	0.479
1.4375	0.143
1.6625	0.073
1.8875	0.060

我们可以用你在第一部分中计算出的中心-中心数据和中心-卫星数据来计算所有的概率密度. 其关系如下:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{SS}}^*(r) &= c_1 \rho_{\text{SS}}^*(r)^2 r \\ \rho_{\text{CS}}(r) &= c_2 \rho_{\text{CS}}^*(r)^2 r \sqrt{\rho_{\text{CC}}(r) + 1} \\ \rho_{\text{SS}}(r) &= c_3 \rho_{\text{CS}}^*(r)^2 (\rho_{\text{CC}}(r) - 5)^2\end{aligned}$$

其中 c_1 、 c_2 和 c_3 是归一化常数, 应该为每个密度求得.

(b) 计算并画出 $\rho_{\text{SS}}^*(r)$ 、 $\rho_{\text{CS}}(r)$ 和 $\rho_{\text{SS}}(r)$.

(c) 画出所有星系对的最终概率密度. 图 1 上的 6 个图中, 哪一个与你的图最相似?