

2020年广东省天文知识竞赛复赛(实测理论)模拟练习答案

1. (CNAO 2011选拔赛低) 恒星观测

- (1) 第一颗恒星“过子午圈”，既可能是上中天也可能是下中天。先考虑上中天，根据其上中天时的地平高度等数据，代入以下公式：

$$h = 90^\circ - |\phi - \delta|$$

当地的地理纬度为：

$$\phi = 40^\circ 05' 02'' \text{ (南半球) 或 } \phi = -29^\circ 34' 42'' \text{ (北半球)}$$

若它此时是下中天，其地平高度为：

$$h = |\phi + \delta| - 90^\circ$$

代入数据可知： $\phi = \pm 145^\circ 10' 08'' - 5^\circ 15' 10''$ ，即 $|\phi| > 90^\circ$ ，结果无意义。表明这颗恒星此时不可能是下中天。

- (2) 第二颗恒星比第一颗晚30分钟上中天，意味着它的赤经比第一颗大 30° ，所以第二颗恒星的赤经为：

$$\alpha_2 = 1^h 20^m 05^s + 30^m = 1^h 50^m 05^s$$

仍然利用(1)中的公式，可以求出第二颗星的赤纬为：

$$\phi = 40^\circ 05' 02'' \text{ 时, } \delta_2 = -6^\circ 34' 33'' \text{ (天顶以南上中天) 或 } \delta_2 = 86^\circ 44' 37'' \text{ (天顶以北上中天);}$$

$$\phi = -29^\circ 34' 42'' \text{ 时, } \delta_2 = -76^\circ 14' 17'' \text{ (天顶以北上中天) 或 } \delta_2 = 17^\circ 4' 53'' \text{ (天顶以南上中天)}$$

2. (CNAO 2016选拔赛低&高) 假星 (非官方答案, 仅供参考)

我们可以这样思考：将闪光灯看作另外一个很小很小的恒星，也就是把假星变“真”星(便于计算)。

因此，我们假设闪光灯的等效光度为 L ，太阳的光度为 L_\odot 。根据后面给出的条件，可以得知

$$2000 \cdot \frac{L}{4\pi d_0^2} = 250 \cdot \frac{L_\odot}{4\pi d_{SE}^2}$$

故

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{d_0^2}{8d_{SE}^2}$$

在拍摄过程中实际上只闪了一次，即 $1/250$ 秒，因此

$$\begin{aligned} m_{fake} - m_\odot &= -2.5 \lg \frac{F_{fake}}{F_\odot} = -2.5 \lg \frac{L/4\pi d^2}{L_\odot/4\pi d_{SE}^2} \\ &= -2.5 \lg \frac{L}{L_\odot} - 5 \lg \frac{d_{SE}}{d} \\ &= -5 \lg \frac{d_0}{8d_{SE}} - 5 \lg \frac{d_{SE}}{d} \\ &= -5 \lg \frac{d_0}{8d} \end{aligned}$$

已知 $m_\odot = -26.77^m$ ，代入可得

$$m_{fake} = m_\odot - 5 \lg \frac{d_0}{8d} = -6.63^m$$

3. (IOAA 2018) 用FAST观测太阳

- (1) 根据瑞利-金斯定律，太阳在3 GHz的热辐射为 $B_\nu = \frac{2k_B T}{c^2} \nu^2$ ，即单位辐射面积、单位立

体角、单位频率的辐射功率. 因而, 在3 GHz上, 太阳的光度为 $L_\nu = B_\nu \cdot 4\pi R_\odot^2$. 在地球上(距离太阳1个天文单位), 太阳在3 GHz的单色流量为: $f_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi D^2}$. 因此FAST能接收到的流量为: $F_\nu = f_\nu \cdot \Delta\nu \cdot \pi^2 \frac{d_c^2}{4}$.

望远镜观测1小时, 接收器收集到的总能量为: $E_\odot = F_\nu \Delta t = \frac{2k_B T}{c^2} \nu^2 \frac{R_\odot^2}{D^2} \cdot \pi^2 \frac{d_c^2}{4} \Delta\nu \Delta t = 8.5 \times 10^{-5} \text{ J}$.

- (2) 接下来我们算一下翻转一页答题纸(A4纸)所需的能量. 一张A4纸($297 \text{ mm} \times 210 \text{ mm}$)的质量为: $m = \rho \cdot L_1 L_2$.

翻转一页答题纸所需的能量为:

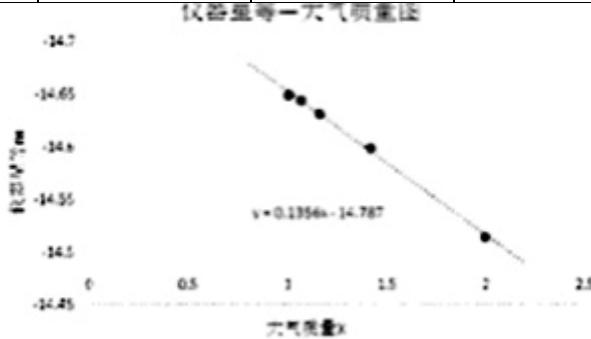
$$E' = mg \cdot \frac{L_2}{2} \approx 5 \times 10^{-3} \text{ J}.$$

- (3) 通过比较可以得出, $E' > E_\odot$.

4. (CNAO 2012选拔赛低) 测量星等

(1)

地平高度	A星流量计数 N	X (大气质量)	m (仪器星等)
90°	723610	1	-14.649
85°	724336	1.004	-14.650
70°	720493	1.064	-14.644
60°	712209	1.155	-14.632
45°	690903	1.414	-14.599
30°	639394	2	-14.514



$m = m_0 + K \cdot X$ 是消光公式, 对任何定义的星等包括仪器星等也同样适用. 由图中的拟合可知, 大气外仪器星等 $m_0 = -14.79$, 消光系数 $K = 0.136$. (注意这个大气外仪器星等 m_0 在第二问又被标记成了 m'_0 .)

- (2) 如上问所述, $m'_0 = -14.79$. 定标常数 $C = 13.2 - m_0 = 28.0$.

- (3) $X = 1/\sin h = 1.305$, 代入拟合公式得 $-2.5 \lg 500000 = m + 0.136 \times 1.305$, 所以大气外仪器星等 $m'_0 = -14.43$, 大气外星等 $m_0 = m'_0 + C = 13.57$.

对500000的总计数可能有两种理解, 恒星总计数或者恒星+天光的总计数. 仔细考虑就会发现, 天光在不同位置是不一样的, 没有任何办法可以通过A星的天光数据推断B星附近的天光情况, 如若理解成“恒星+天光”则本题没有合理的解法. 从而应当理解为恒星总计数.

5. (IOAA 2017) 寻找暗物质

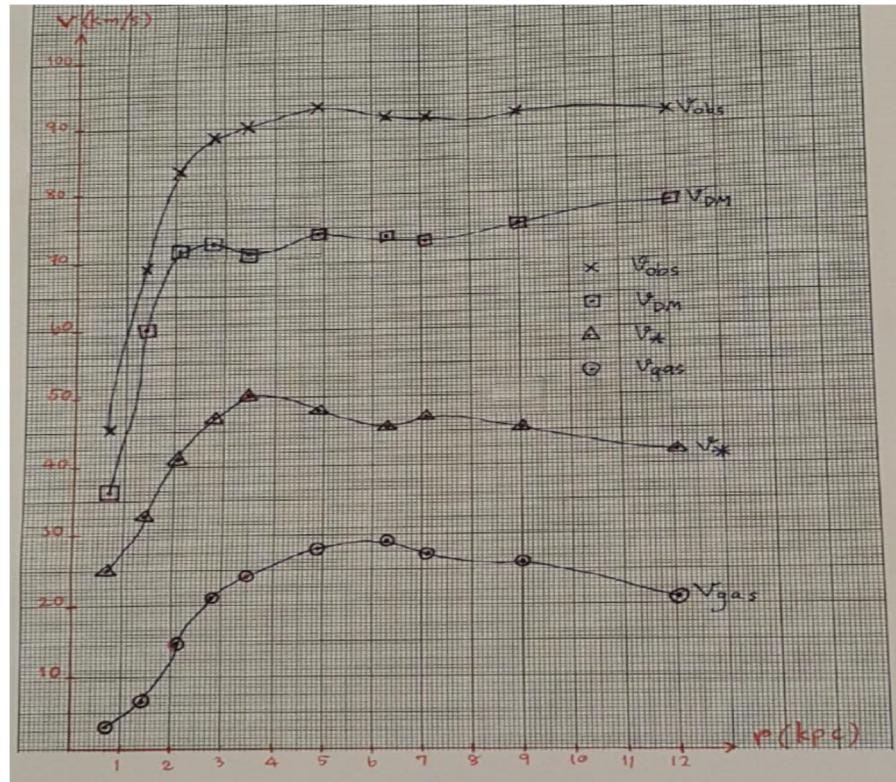
$$(1) \text{ 红移: } z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}}$$

观测旋转速度: $V_{\text{obs}} = zc$

正确计算数值:

r (kpc)	z	V_{obs} (km/s)	V_{DM} (km/s)	$M(r)$ (M_{\odot})	$M_{\text{DM}}(r)$ (M_{\odot})
0.70	1.37×10^{-4}	41.11	35.25	2.75×10^8	2.02×10^8
1.40	2.29×10^{-4}	68.52	60.10	1.53×10^9	1.18×10^9
2.09	2.79×10^{-4}	83.60	71.52	3.40×10^9	2.49×10^9
2.79	2.96×10^{-4}	88.62	72.53	5.09×10^9	3.41×10^9
3.49	3.00×10^{-4}	89.99	70.77	6.57×10^9	4.06×10^9
4.89	3.09×10^{-4}	92.73	74.25	9.78×10^9	6.27×10^9
6.25	3.05×10^{-4}	91.36	73.65	1.21×10^{10}	7.88×10^9
7.10	3.05×10^{-4}	91.36	73.03	1.38×10^{10}	8.80×10^9
9.03	3.06×10^{-4}	91.82	75.54	1.77×10^{10}	1.20×10^{10}
12.05	3.06×10^{-4}	91.82	78.74	2.36×10^{10}	1.74×10^{10}

(2)



(3) 求解 ρ_0 :

$$M_{\text{DM}}(r) = 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^2 [r - r_{\text{C}} \arctan(r/r_{\text{C}})]$$

$$M_{\text{DM}}(r) = 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^3 [x - \arctan(x)], \text{ 其中 } x = r/r_{\text{C}}$$

$$M_{\text{DM}}(r) \approx 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^3 \left[x - \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \right], \text{ 对于很小的 } x$$

$$M_{\text{DM}}(r) \approx 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^3 \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{4\pi\rho_0 r^3}{3}$$

$$\rho_0 \approx \frac{2.02 \times 10^8 M_\odot \times 3}{4\pi(0.7 \text{ kpc})^3} = 1.42 \times 10^8 M_\odot/\text{kpc}^3$$

$$M_{\text{DM}}(r) = 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^2 [r - r_{\text{C}} \arctan(r/r_{\text{C}})]$$

求解 r_{C} (法1)

$$M_{\text{DM}}(r) \approx 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^2 \left[r - r_{\text{C}} \frac{\pi}{2} \right],$$

取 r 很大的最后两个数据点, 然后得到($r \gg r_{\text{C}}$)

$$\Delta M_{\text{DM}}(r) \approx 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^2 [\Delta r]$$

$$r_{\text{C}} = 1.01 \text{ kpc}$$

求解 r_{C} (法2)

$$M_{\text{DM}}(r) \approx 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^2 \left[r - r_{\text{C}} \frac{\pi}{2} \right],$$

取最后两个数据点, 我们得到一个三次方程, 可以解出

$$r_{\text{C}} = -0.855, 0.964, 7.56 \text{ kpc}$$

取正解 $r_{\text{C}} = 0.964$ 作为最终答案, 因为对最后的数据点 $r \gg r_{\text{C}}$

不太精确的 r_{C} :

忽略最后一项,

$$M_{\text{DM}}(r) \approx 4\pi\rho_0 r_{\text{C}}^2 r$$

$$r_{\text{C}} \approx \sqrt{\frac{1.74 \times 10^{10} M_\odot}{4\pi \times 1.40 \times \frac{10^8 M_\odot}{\text{kpc}^3} \times 12.05 \text{ kpc}}} = 0.901 \text{ kpc}$$

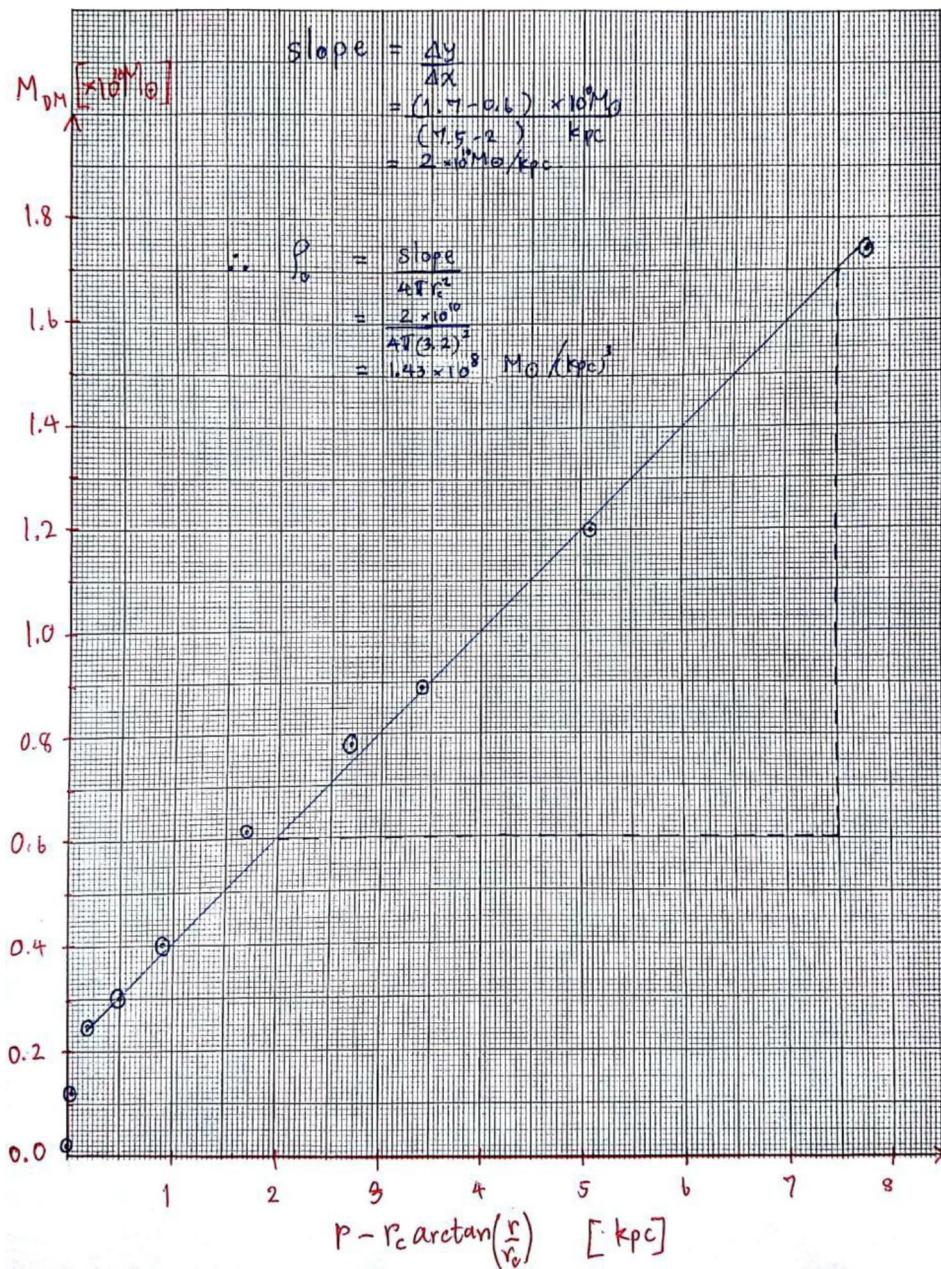
(4) 解1:

$$x = \left[r - r_{\text{C}} \arctan\left(\frac{r}{r_{\text{C}}}\right) \right]$$

$$y = M_{\text{DM}}(r)$$

作图:

$x = [r - r_{\text{C}} \arctan(r/r_{\text{C}})]$ (kpc)	$y = M_{\text{DM}}(r)$ (kg)
0.010855	2.02×10^8
0.0803	1.18×10^9
0.2386	2.49×10^9
0.495	3.41×10^9
0.838	4.06×10^9
1.718	6.27×10^9
2.738	7.88×10^9
3.428	8.80×10^9
5.093	1.20×10^{10}
7.854	1.74×10^{10}



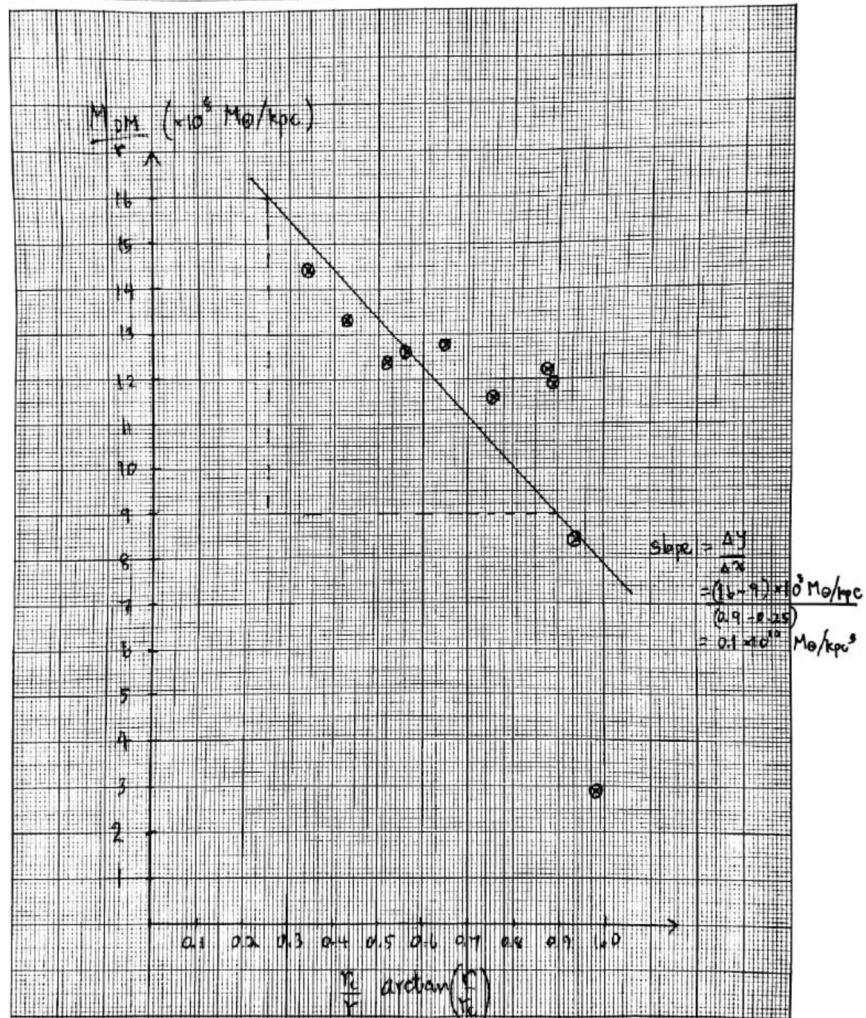
解2:

$$x = \frac{r_c}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_c}\right)$$

$$y = M_{DM}(r)$$

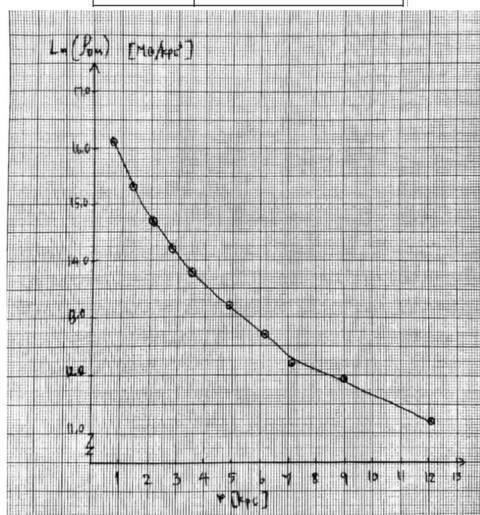
作图:

$x = \frac{r_c}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_c}\right)$	$y = M_{DM}(r)$ (M_\odot)
0.984	2.89×10^8
0.943	8.40×10^8
0.886	1.19×10^9
0.822	1.22×10^9
0.760	1.16×10^9
0.649	1.28×10^9
0.562	1.26×10^9
0.517	1.24×10^9
0.436	1.33×10^9
0.348	1.44×10^9



(5) 解1: 由(3), $r_C = 0.906 \text{ kpc}$,

r (kpc)	$\ln [\rho_{\text{DM}}(r)]$ ($\frac{M_\odot}{\text{kpc}^3}$)
0.70	16.11
1.40	15.36
2.09	14.73
2.79	14.23
3.49	13.81
4.89	13.17
6.25	12.69
7.10	12.44
9.03	11.97
12.05	11.40



解2: $r_C = 3.2$ kpc

r (kpc)	$\ln [\rho_{DM}(r)]$ ($\frac{M_\odot}{kpc^3}$)
0.70	12.79
1.40	11.95
2.09	11.47
2.79	11.21
3.49	11.07
4.89	11.16
6.25	11.26
7.10	11.16
9.03	11.27
12.05	11.41

