

# 天文奥赛教程

## 宇宙学基础

郭雨泽

武汉大学物理科学与技术学院

二〇二四年二月一日



## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

## ① \* 广义相对论基本概念

度规

Lorentz 变换 & Minkowski 空间

广义相对论

## ② 宇宙学观测

### ③ 均匀且各向同性的宇宙

#### ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

## ① \* 广义相对论基本概念

度规

Lorentz 变换 & Minkowski 空间

广义相对论

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# 度规

## 概念引入

- 简单地说, 度规 (metric) 就是在空间中衡量距离的方式.
- Euclid 空间线元 (line element):

- 直角坐标 (勾股定理)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1)$$

- 球坐标

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2)$$

- 一般形式写为

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j \quad (3)$$

其中  $g_{ij}$  就是度规张量 (metric tensor) 中的元素.

度规  
示例

### Euclid 空间

- ## • 直角坐标

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

- ## ● 球坐标

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad \Rightarrow \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

## ① \* 广义相对论基本概念

度规

Lorentz 变换 & Minkowski 空间

广义相对论

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

Lorentz 变换

- 从原点射出一道光束，在时刻  $t$ ，时空坐标满足

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (6)$$

- 对两个相对速度  $v$  的惯性系  $xyz$  和  $x'y'z'$ , 著名的Lorentz 变换 (Lorentz transformation)给出坐标变换:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (7)$$

Minkowski 空间

- Lorentz 变换可由  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$  的不变性得到, 因此两个事件的时空间隔

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (8)$$

对一切 Lorentz 变换不变.

- 度规

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

具有这样度规的时空就叫 Minkowski 空间 (Minkowski space).

## ① \* 广义相对论基本概念

度规

Lorentz 变换 & Minkowski 空间

广义相对论

## ② 宇宙学观测

### ③ 均匀且各向同性的宇宙

#### ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# 等效原理 (The Equivalence Principle)

- 两种质量:

- 惯性质量 (inertial mass)  $m_i$ : Newton 第二定律  $F = m_i a$
- 引力质量 (gravitational mass)  $m_g$ : 引力  $F = m_g g$

## 定理 (等效原理)

- 弱等效原理:  $m_i = m_g$
- 强等效原理: 只要我们将研究的时空范围限制得足够小, 则我们无法判断引力场与匀加速运动的区别

# 空间曲率

- 测地线 (geodesics): 广义相对论将引力描述为时空的几何效应, 质点在时空中的运动会沿着最短的可能路径.  
! 测地线在三维空间中的投影可能并不是端点之间的最短路径.
- 单质点情况下, 时空的 Schwarzschild 度规

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (10)$$

可以证明这个度规不能化为常量: 时空必然因质量而弯曲.

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

Olbers 谬论

河外空间

Hubble-Lemaître 定律

宇宙微波背景辐射

宇宙学原理

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

Olbers 谬论

河外空间

Hubble-Lemaître 定律

宇宙微波背景辐射

宇宙学原理

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# Olbers 谬论

- 最简单的观测结果: 夜晚的天空是黑的.

- Olbers 谬论 (the Olbers Paradox):

假设宇宙无穷大, 恒星均匀分布, 那么不论看向哪里, 视线方向上总能看见一颗恒星; 而又由于面亮度与距离无关, 因此整片天空应该始终像太阳表面那样亮, 而这与夜空是矛盾的.

- 对 Olbers 谬论的解释:

- 恒星存在的时间是有限的, 因此极为遥远的恒星的光还没有到达我们这里.
- 宇宙并非无穷大/恒星并非均匀分布
- 星际空间并非透明
- ...

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

Olbers 谬论

河外空间

Hubble-Lemaître 定律

宇宙微波背景辐射

宇宙学原理

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# 河外空间

- 1923 年, Hubble 证明了仙女座星系 M31 是除银河系之外的另一个星系. 这极大地拓宽了当时对于宇宙尺度的认知.
- 宇宙的**均匀性**对宇宙学是十分重要的. (分布 & 运动)
- 研究星系分布的大尺度各向同性的方法: 对亮度高于某特定星等  $m$  的星系进行计数.  
若星系均匀分布, 则计数  $N \propto 10^{0.6m}$ .

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

Olbers 谬论

河外空间

Hubble-Lemaître 定律

宇宙微波背景辐射

宇宙学原理

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# Hubble-Lemaître 定律

- 1920s: Hubble 发现谱线红移量与距离成正比  
——宇宙在做整体膨胀.
- 谱线红移量:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (11)$$

定理 (Hubble-Lemaître 定律)

$$z = \frac{H}{c}r \quad (12)$$

其中  $H$  即 Hubble 常数 (Hubble Constant).

# Hubble-Lemaître 定律

## 例题

- (IOAA 2010 T3) 观测到一个类星体的红移是  $z = 0.20$ , 估算它的距离. 哈勃常数是  $72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

由 Hubble 定律易得

$$r = \frac{cz}{H} \approx 833 \text{ Mpc}$$

# Hubble-Lemaître 定律

$$z = \frac{H}{c}r$$

- 对较小的速度 ( $v \ll c$ ), 红移  $z = \frac{v}{c}$ , Hubble 定律

$$v = Hr \tag{13}$$

- 对绝对星等  $M_0$  的「标准烛光」, Hubble 定律  $\Rightarrow$

$$m = M_0 + 5 \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} = 5 \lg z + C \tag{14}$$

# Hubble-Lemaître 定律

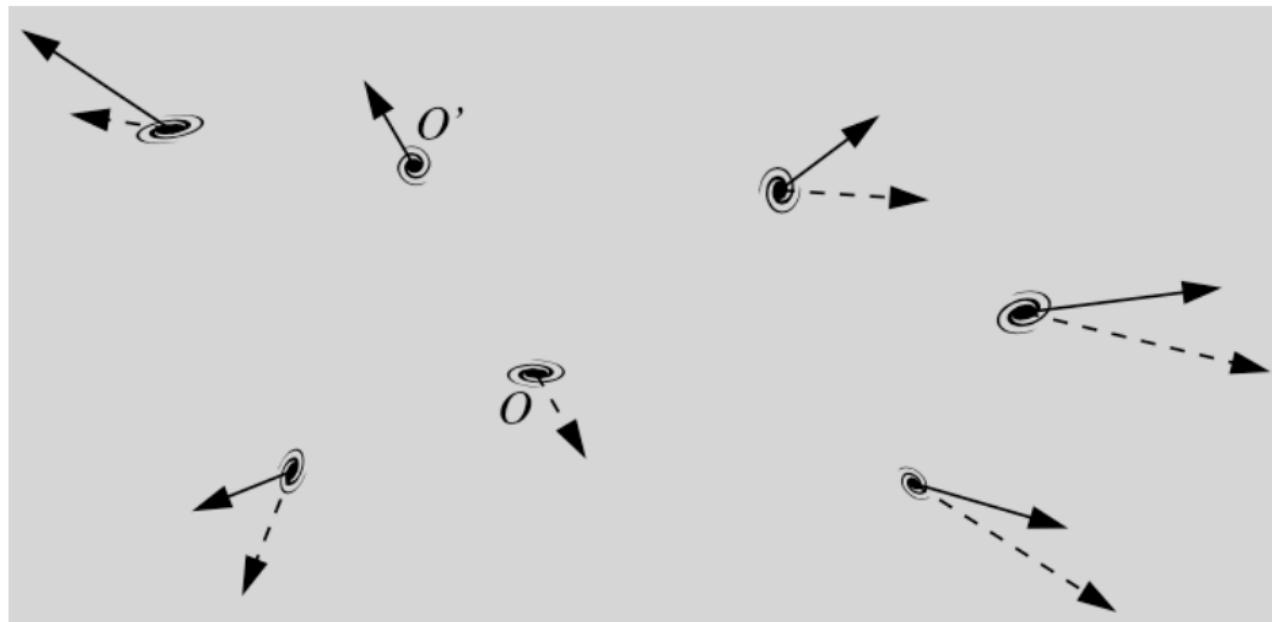
- **宇宙年龄的估计**

若宇宙膨胀速度不变，则宇宙的年龄  $T = H^{-1}$ .

- $H$  的测量值基本上在  $65 \sim 75 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$  之间.

- **注:** 宇宙并不存在膨胀的中心；由均匀且各向同性，宇宙各处应该有相同的 Hubble 膨胀.

# Hubble-Lemaître 定律



## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

Olbers 谬论

河外空间

Hubble-Lemaître 定律

宇宙微波背景辐射

宇宙学原理

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

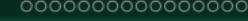
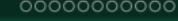
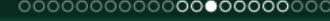
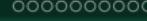
## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

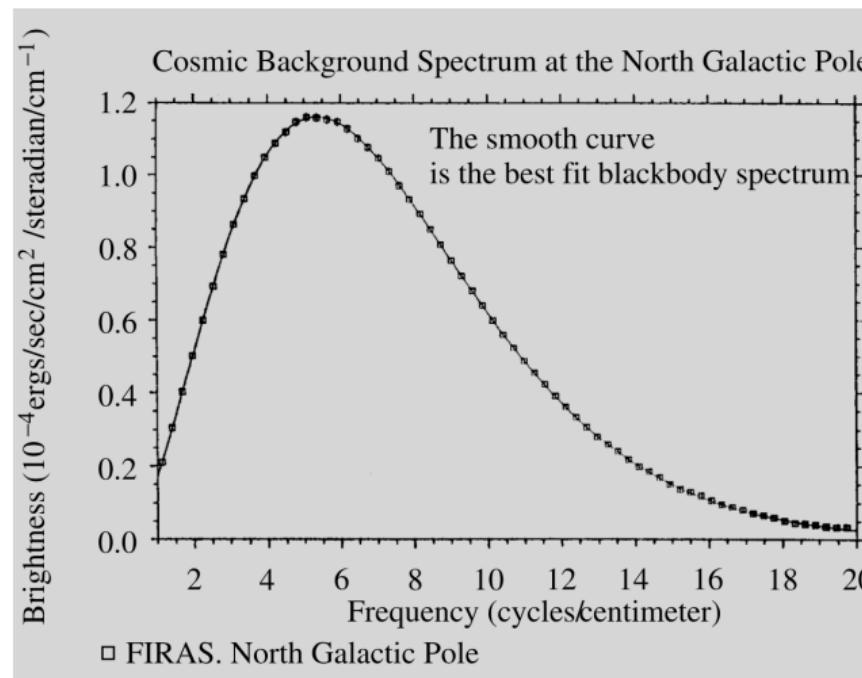
## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# 宇宙微波背景辐射

- 由 Arno Penzias 和 Robert Wilson 于 1965 年发现, 是继 Hubble 膨胀后最重要的宇宙学发现.
- 大爆炸 300,000 年后的遗迹.
- 宇宙中存在着一个能量集中在微波波段的背景辐射, 其辐射谱对应于一个温度约为 3 K 的黑体.
- 特性:
  - 大尺度各向同性: 宇宙早期物质能量分布的大尺度均匀性  $\Rightarrow$  宇宙学原理
  - 局部温度涨落: 暴涨时期的量子涨落  $\Rightarrow$  星系及宇宙大尺度结构



# 宇宙微波背景辐射



# 宇宙微波背景辐射 观测事实

- 在全天空背景下，始终存在一个稳定的额外热辐射，等效温度为  $\sim 2.7\text{K}$ ；
- 该辐射在大尺度下具有各向同性 (isotropy)；
- 存在微小的各向异性 (anisotropy)；
- 存在 E 与 B 两种模式的偏振 (polarization).

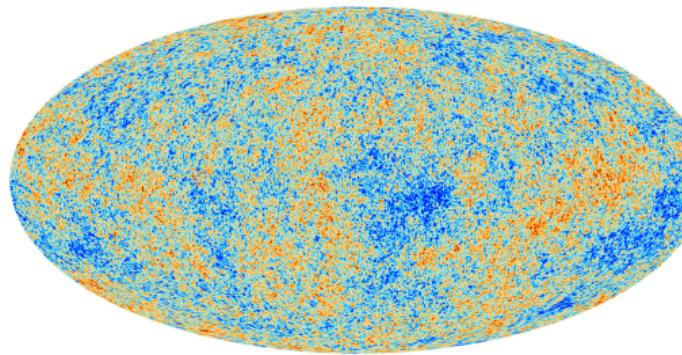


图 1: Planck 卫星得到的 CMB 谱

# 宇宙微波背景辐射

## 理论预测

- 复合阶段 (Recombination): 大爆炸后 38 万年,  $T \sim 3000\text{ K}$ , 自由电子和质子结合形成氢原子, 电子数密度急剧减小.

电子对光子散射作用减小 (类似平均自由程  $\lambda = \frac{1}{\sigma n}$ ), 光子经过最后一次散射后可以在空间中自由传播, 宇宙变「透明」.

- 最后散射面 (Last Scattering Surface): 经过最后一次碰撞成为自由传播光子所分布的一个球面 ( $z \approx 1060$ );  
最终散射层 ( $\Delta z \approx 200$ )

更早期的光子因短自由程而无法传播至今, 因此可以说, 最后散射面就是 CMB 的光源, 也就是我们通过电磁波手段所能观测到的最遥远的宇宙.

# 宇宙微波背景辐射 宇宙图景

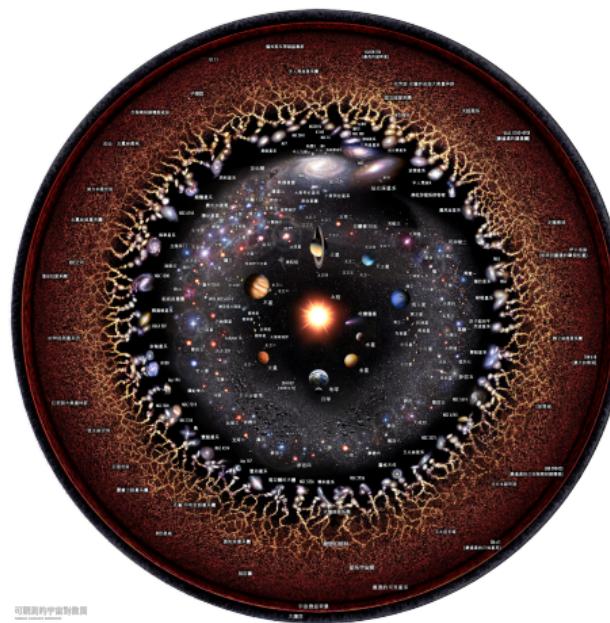


图 2: 以我们为中心的宇宙全景, 长度呈对数增长. 注意距离我们越远, 时间也约靠前.

# 宇宙微波背景辐射

## 结论

- ① 存在 — 对热大爆炸模型的有力支持;
- ② 黑体辐射谱型 — 早期宇宙的高度热平衡;
- ③ 各向同性 — 宇宙学原理;
- ④ 各向异性 —
  - 偶极各向异性: 由地球空间运动引起的 Doppler 频移;
  - 全空间背景辐射温度涨落 ( $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$ ): 宇宙早期微小密度涨落的反映, 形成宇宙大尺度结构的「种子」. (暴涨, 量子涨落...)

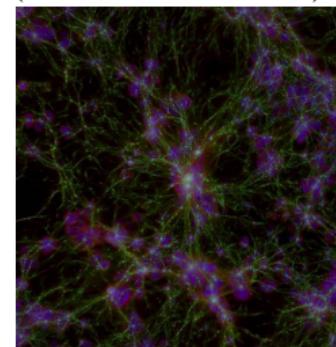


图 3: 宇宙大尺度结构 (Large Scale Structure)

# 宇宙微波背景辐射

## 我超, 原!

### ⑤ CMB 的偏振

- **E-polarization** — 类似电场 ( $E$ ), 在形式上是球面上的散度场; 来自于 Thompson 散射;
- **B-polarization** — 类似磁场 ( $B$ ), 形式上是旋度场; 其来源预计有二:
  - ① E-polarization 经引力透镜 (gravitational lensing) 形成;
  - ② 暴涨时产生的原初引力波 (Primordial Gravitational Waves) 对最后散射面上的辐射影响.

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

Olbers 谬论

河外空间

Hubble-Lemaître 定律

宇宙微波背景辐射

宇宙学原理

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

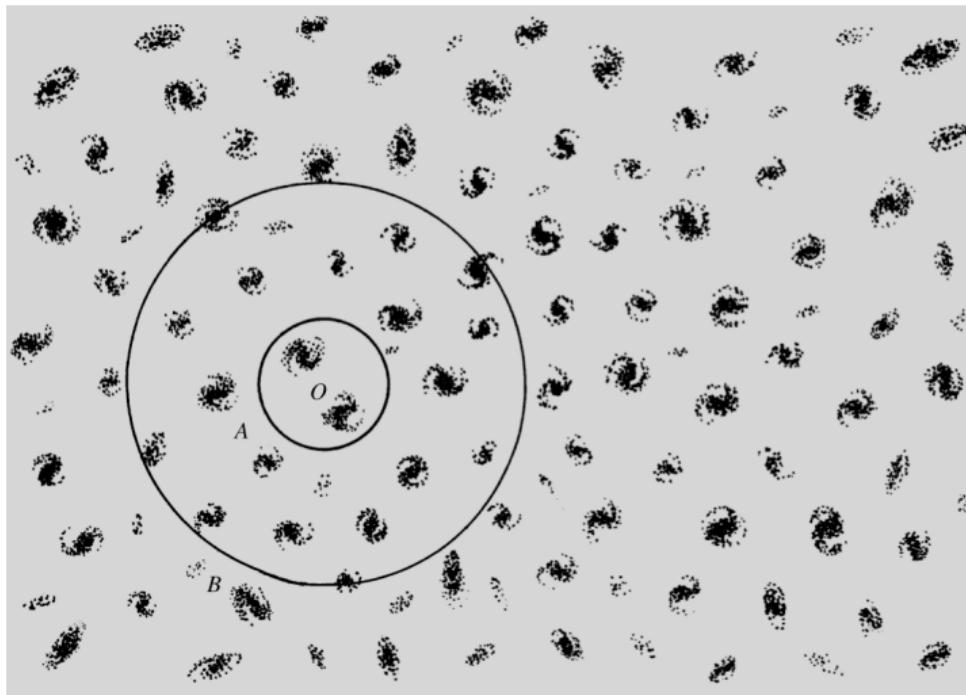
# 宇宙学原理

- 宇宙大尺度的均匀和各向同性
  - 星系分布
  - Hubble 膨胀
  - CMB 温度
  - 射电源分布、X 射线背景、遥远的暗星系 …

## 定理 (宇宙学原理)

宇宙在大尺度上是均匀且各向同性的.

# 宇宙学原理



## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

\*Robertson-Walker 度规

尺度因子与宇宙学红移

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

\*Robertson-Walker 度规

尺度因子与宇宙学红移

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# \*Robertson-Walker 度规

在均匀且各向同性的宇宙中，线元的形式

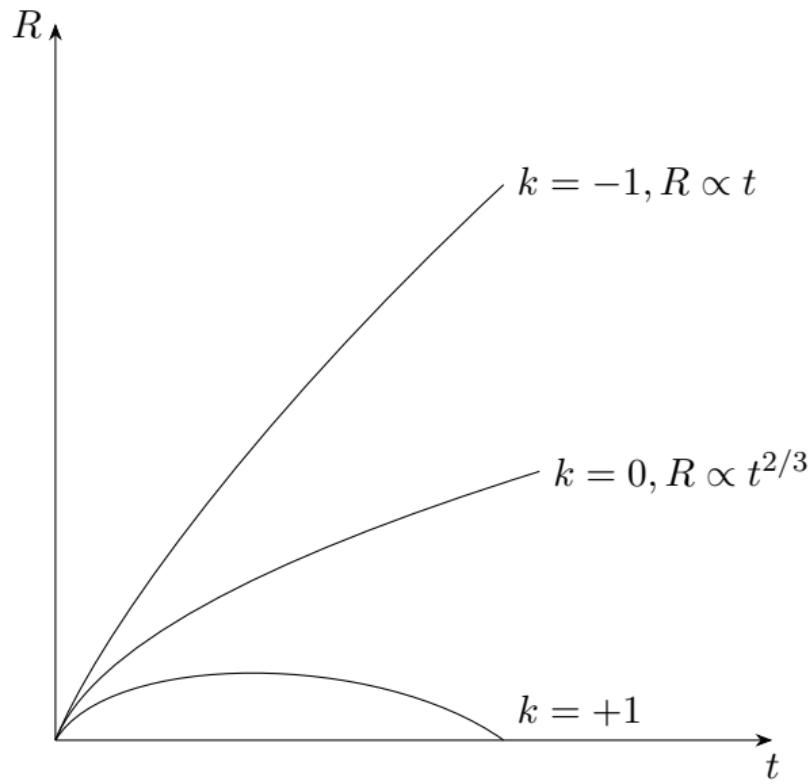
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left[ (1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (15)$$

即 Robertson-Walker 度规 (Robertson-Walker metric).

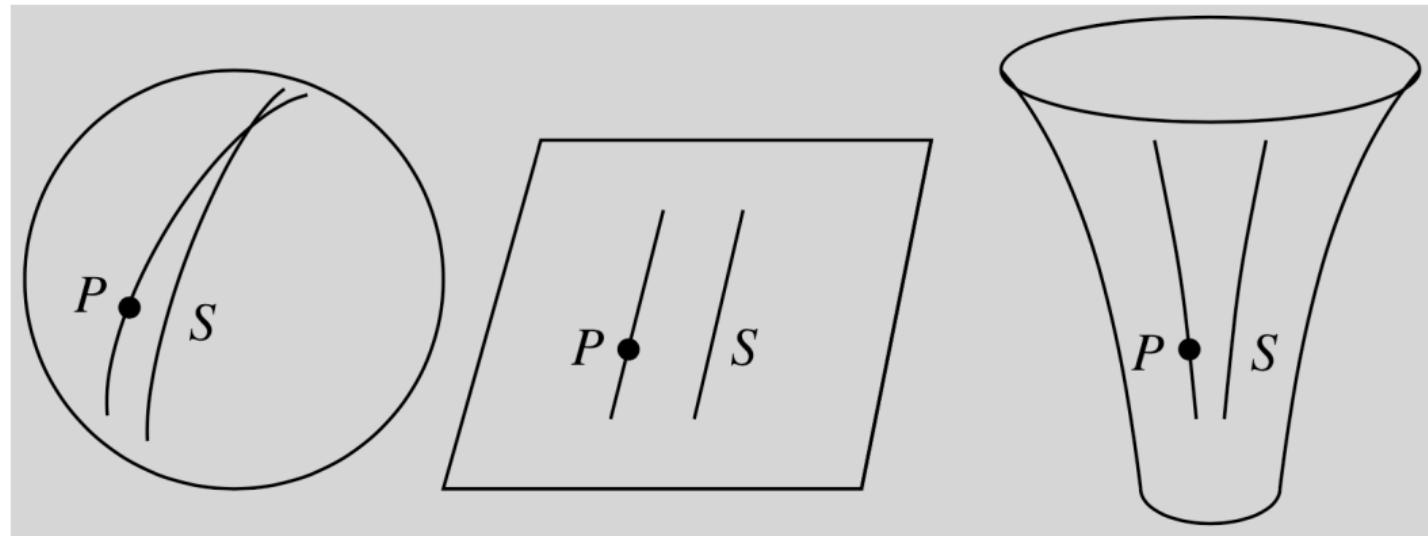
其中

- $R(t)$ : 尺度因子，表征宇宙尺度的、随时间变化的因子.
- 系数  $k$  可取  $+1, 0, -1$  三个值，对应于三种模型
  - $k = +1$ : 一个闭合的宇宙，它具有有限的体积，但并没有边缘. 可以类比二维球面（面积有限但没有边界）.
  - $k = 0$ : 平直空间或 Euclid 空间，此时线元的形式几乎与 Minkowski 空间的相同，区别就在于尺度因子  $R$ .
  - $k = -1$ : 类比二维双曲面，是体积无限的开放宇宙.

# \*Robertson-Walker 度规



# \*Robertson-Walker 度规



## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

\*Robertson-Walker 度规

尺度因子与宇宙学红移

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# 尺度因子

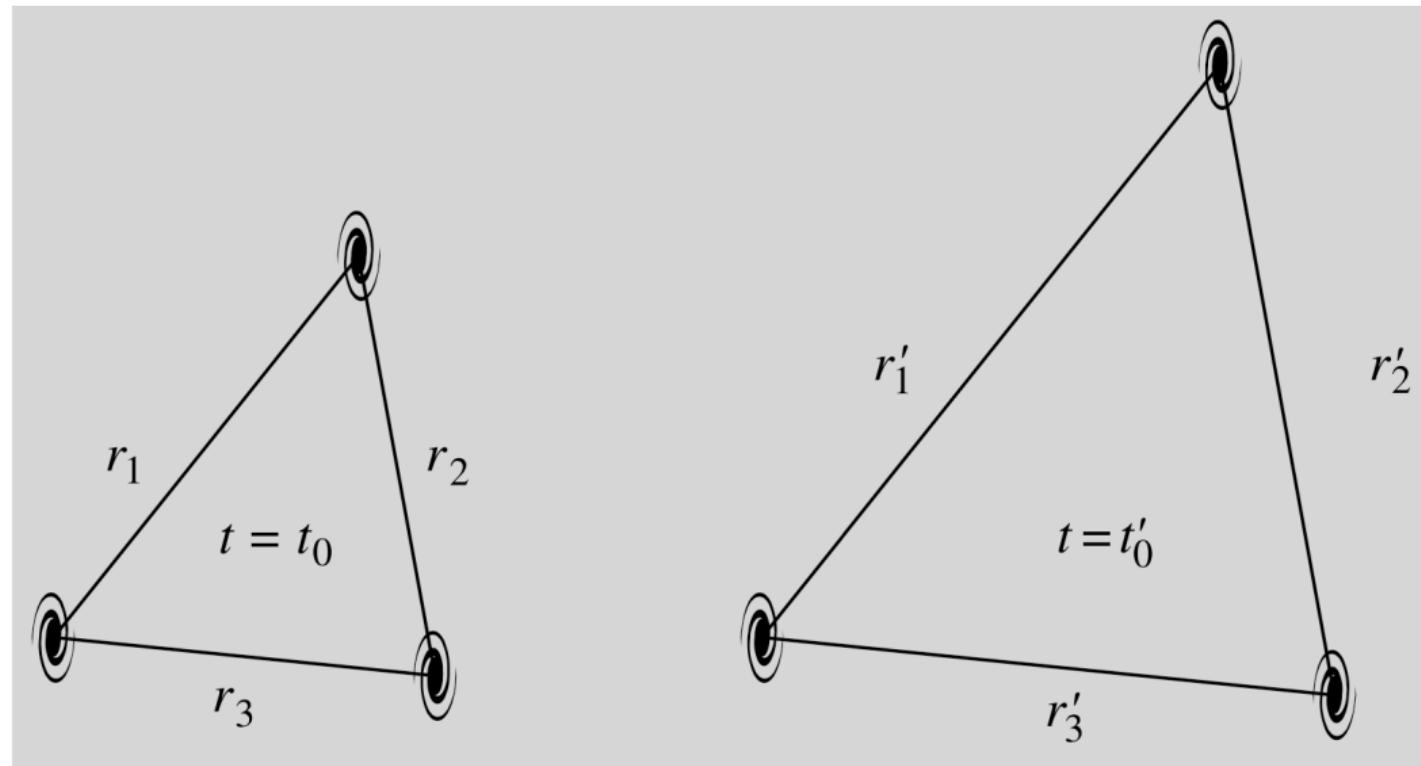
宇宙中的很多物理量会因含有尺度因子  $R$  而与时间有关.

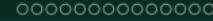
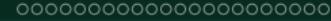
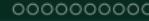
- 宇宙中的距离均与  $R$  成正比

$$\frac{r_0}{r} = \frac{R(t_0)}{R(t)} \quad (16)$$

- 宇宙中的体积均与  $R^3$  成正比
- ...

# 尺度因子





# 宇宙学红移

与长度相同，辐射的波长也与  $R$  成正比.

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{R_0}{R(t)} \quad (17)$$

而由红移的定义我们可以得到

$$1 + z = \frac{R_0}{R} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad (18)$$

故星系的红移可以表示自辐射发出以来尺度因子的改变量.

# 宇宙学红移

## CMB 红移

随着宇宙膨胀，背景辐射同样也会红移.

- 光子能量  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \propto R^{-1}$ , 光子数密度  $n \propto R^{-3}$   
 $\Rightarrow$  CMB 的能量密度

$$w = n\varepsilon \propto R^{-4} \quad (19)$$

- 由黑体辐射理论,  $w \propto T^4$ .

综上, CMB 的温度

$$T \propto R^{-1} \quad (20)$$

# 宇宙学红移

- (IOAA 2011 T15) 考虑到宇宙背景辐射在宇宙演化过程中具有黑体的光谱, 确定其温度如何随着红移  $z$  而变化. 特别是, 给出在  $z \approx 10$ (目前最远观测到的天体) 时背景辐射的温度. 目前宇宙背景辐射的温度是 2.73 K.

黑体辐射的温度  $T \propto R^{-1}$ , 即

$$\frac{T}{T_0} = \frac{R_0}{R}$$

而

$$1 + z = \frac{R_0}{R} = \frac{T}{T_0}$$

解得

$$T = (1 + z)T_0 = 30.03 \text{ K}$$

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

Newton 推导

相对论性讨论

Friedmann 方程

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# Friedmann 模型

## Einstein 的宇宙模型

为了得到尺度因子  $R(t)$  的具体形式, 需要引入具体的引力理论.

- 1917, Einstein:

- ① 宇宙在几何上是对称的
- ② 宇宙体积有限但没有边界

Einstein 的宇宙不仅满足宇宙学原理, 它还是静态的, 即宇宙的大小不变.

- (当时 Hubble 膨胀还没被发现, 当时的主流观点就是静态宇宙.)

# Friedmann 模型

## Einstein 的宇宙学常数

- 静态的宇宙仅在引力的作用下必然会自发坍塌
- Einstein 为了得到静态宇宙, 引入了一个新的斥力, 即宇宙学项 (cosmological term), 以和引力抗衡. 其大小由宇宙学常数 (cosmological constant)  $\Lambda$  表征.
- 现代观测表明, 似乎必须存在一个非零的  $\Lambda$ .

## Friedmann 模型

物理学家 Alexander Friedmann 和 Georges Lemaître 各自独立地研究了 Einstein 方程的宇宙学解.

当  $\Lambda = 0$  时, 这个宇宙模型有三种情况:

- ① 膨胀后收缩;
- ② 永远收缩;
- ③ 永远膨胀.

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

Newton 推导

相对论性讨论

Friedmann 方程

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

Friedmann 模型

Newton 力学推导

- 考虑对象：宇宙中一个相对较小的球形膨胀区域。
  - 考虑这个区域边缘上一个质量为  $m$  的星系，它的总机械能守恒

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (21)$$

- 代入 Hubble 定律  $v = Hr$ ; 再设宇宙平均密度  $\rho$ ,  $M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ ,

$$E = \frac{1}{2}mH^2r^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho mr^2 \\ = mr^2\left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho\right) \quad (22)$$

# Friedmann 模型

Newton 力学推导

$$E = mr^2 \left( \frac{1}{2} H^2 - \frac{4}{3} \pi G \rho \right)$$

- 当  $E = 0$  时, 对应的密度称为 **临界密度** (critical density)  $\rho_c$ ,

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2 \quad (23)$$

- (与天体运动类比: 中心天体质量  $M \Rightarrow$  宇宙平均密度  $\rho$ ; 初始速度  $v_0 \Rightarrow$  Hubble 常数  $H$ )

# \*Friedmann 模型

## 例题

- (CNAO 2013 选拔赛) 宇宙密度

如果宇宙临界密度与「正常」物质(也称重子物质, 不是暗物质)的密度相等, 约为  $10^{-28} \text{ kg/m}^3$ , 相应的哈勃常数是多少? 与最新的宇宙学观测结果符合吗?

由临界密度公式可得

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_c}{3}} = 7.3 \text{ km/(Mpc} \cdot \text{s)}$$

显然与最新的宇宙学观测结果不符合. 这说明宇宙中除了重子物质之外还有大量其他物质.

## Friedmann 模型

### Einstein-de Sitter 模型

$E = 0$  的模型被称为 Einstein-de Sitter 模型 (Einstein-de Sitter model).

- 真实密度  $\rho > \rho_c$ : 膨胀将会停止并收缩, 对应于一个闭合 Friedmann 模型.
- $\rho < \rho_c$ : 膨胀会持续下去, 我们就会得到持续膨胀的双曲模型.

这三种情况被合称为标准模型 (standard models). 它们是  $\Lambda = 0$  时最简单的相对论性宇宙学模型.

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

Newton 推导

相对论性讨论

Friedmann 方程

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

Friedmann 模型

Hubble 常数与尺度因子

- 考虑  $t$  时刻相距为  $r$  的两点，则

$$r = \frac{R(t)}{R(t_0)} r_0 \quad (24)$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t_0)} r_0 \quad (25)$$

- 故有 Hubble 常数

$$H = \frac{v}{r} = \frac{\dot{R}}{R} \quad (26)$$

# Friedmann 模型

## 减速因子

膨胀的减速度由 **减速因子** (deceleration parameter)  $q$  描述:

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} \quad (27)$$

它描述了膨胀  $\dot{R}$  的速率变化, 是 无量纲量.

# Friedmann 模型

## 减速因子与密度参数

将减速因子用 Hubble 常数和密度表示出来：

$$q = \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3 H^2} \quad (28)$$

定义密度参数 (density parameter)  $\Omega = \rho/\rho_c$ . 在 Einstein-de Sitter 模型中  $\Omega = 1$ , 得

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 R_0^3}{R^3 H^2} \quad (29)$$

因此  $\Omega$  和  $q$  之间有简单关系：

$$\boxed{\Omega = 2q} \quad (30)$$

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

Newton 推导

相对论性讨论

Friedmann 方程

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# Friedmann 模型

## Friedmann 方程

$R(t)$  的动力学方程: ( $c = 1$ )

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) + \frac{1}{3}A \quad (31)$$

- $\rho$ : 物质的能量(质量)密度
- $p$ : 物质的压力

$\Rightarrow$  在广义相对论中, 压力也可以成为引力的源.

# Friedmann 模型

## Friedmann 方程

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda$$

以上式为基础, 可导出标准宇宙学模型<sup>1</sup>的基本方程, 即Friedmann 方程 (Friedmann Equation):

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{R^2} \quad (32)$$

(关于 Friedmann 方程的进一步简要讨论, 可见 IOAA 2018 理论试题的最后一题.)

---

<sup>1</sup>即基于宇宙学原理和 Einstein 场方程的宇宙学模型.

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

# 大爆炸宇宙模型

- 在整个宇宙中，氢和氦的质量占到 98% 以上，其中氦占到 25%~30%，而仅靠恒星内部的聚变反应不可能达到如此高的氦丰度
- 1948 年，俄国物理学家 George Gamow 和他的学生 Alpher, Herman 和 Bethe 提出一个宇宙诞生的新理论，认为宇宙是由高温高压状态下的原始基本粒子，因空间的突发膨胀而开始创生的
- 随后的宇宙微波背景辐射等发现强有力地支持大爆炸理论，使其成为了当今宇宙学的标准模型.

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

暗物质

引力透镜

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

暗物质

引力透镜

# 暗物质

- 顾名思义，即宇宙中不发光的物质
- 存在证据：漩涡星系的转动曲线，各种星系远大于 1 的质光比，广泛存在的引力透镜现象 …
- 两大类：
  - ① 重子暗物质：参与电磁相互作用，只是单纯缺少发光条件，如行星、黑矮星等；
  - ② 非重子暗物质（主要）：不参与电磁相互作用而不发光，被称为有质量弱作用粒子（Weakly Interacting Massive Particles, WIMPs）。目前还不清楚这些粒子到底是什么粒子。

## ① \* 广义相对论基本概念

## ② 宇宙学观测

## ③ 均匀且各向同性的宇宙

## ④ \*Friedmann 模型

## ⑤ 大爆炸宇宙模型

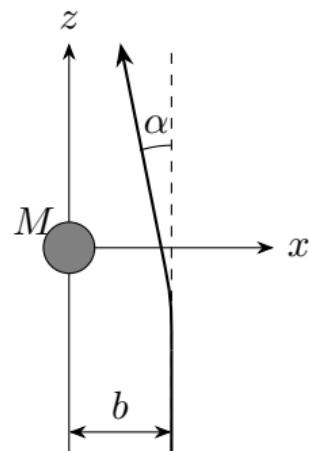
## ⑥ 宇宙学部分前沿问题

暗物质

引力透镜

# 引力透镜

- 广义相对论：质量能够引起时空的弯曲，从而使得光线的传播方向发生偏折



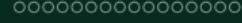
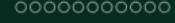
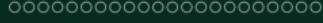
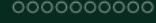
- Einstein 给出的光线偏折角  $\alpha$  为

$$\alpha \simeq \frac{4GM}{bc^2} \quad (33)$$

## 参考文献

- [1] 向守平. 天体物理概论 (彩色修订版)[M]. 北京: 中国科学技术大学出版社, 2008.
- [2] 苏宜. 天文学新概论 (第五版)[M]. Fifth. 北京: 科学出版社, 2019.
- [3] KARTTUNEN H, KRÖGER P, OJA H, et al. Fundamental astronomy[M]. Sixth edition ed. Berlin: Springer, 2017.
- [4] CARROLL B W. An introduction to modern astrophysics[M]. Second edition. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- [5] 张同杰, 刘文斐, 李时雨. 宇宙学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2021.

更多资料可见<https://ryan-gwo.github.io/resources>



*Thanks!*