

AMATEUR ASTRO NOMER

(2010)京新出报刊准字第(25)号

# 天文爱好者

增刊

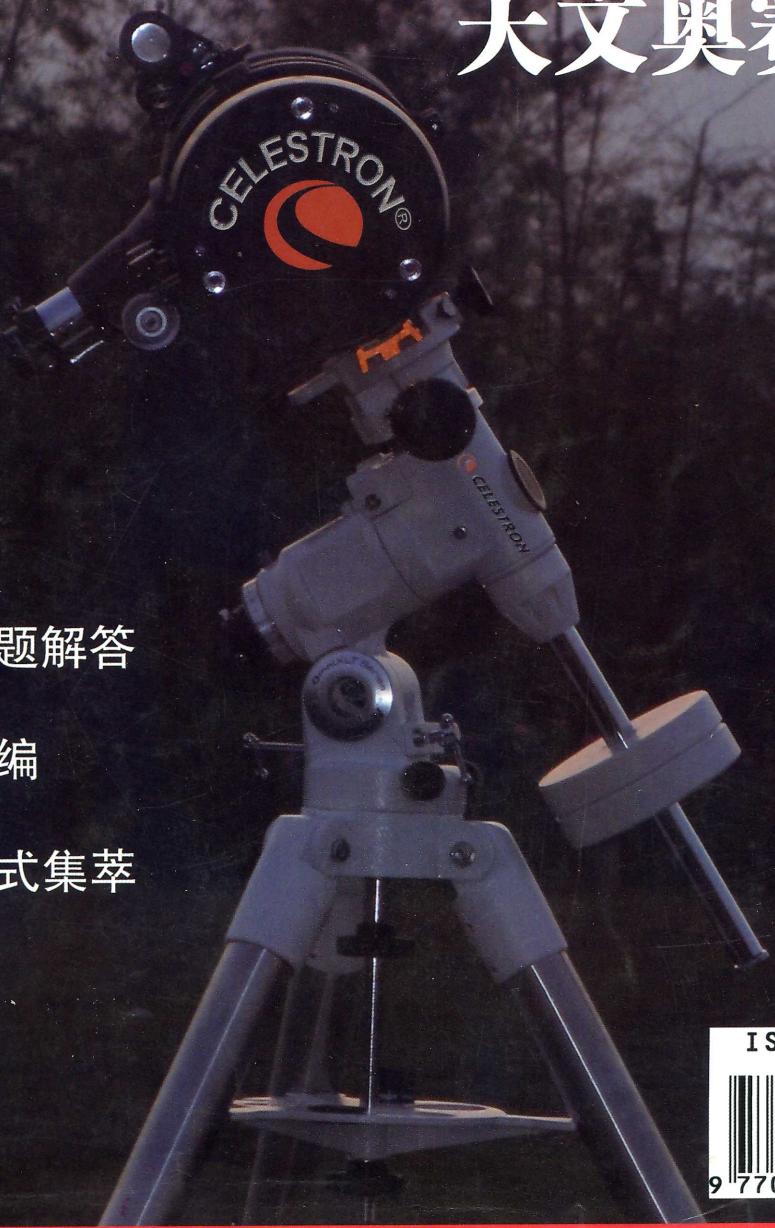
- 国际天文奥赛试题
- 亚太天文奥赛试题
- 全国天文奥赛试题
- IOAA 竞赛试题

## 天文奥赛指南

历届天文奥赛试题解答

备战奥赛习题精编

天文奥赛常用公式集萃



ISSN 0493-2285



9 99

9 770493 228106



**封面说明：**落日下的天荒坪。杭州高级中学天文社林嵒摄于2008年全国天文奥林匹克竞赛决赛暨杭州天文邀请赛比赛地—天荒坪，照片中的望远镜是本次竞赛观测考试指定设备—Celestron®星特朗Astromaster 130EQ镜筒及CG-4赤道仪。

**主管** 中国科协  
**主办** 中国天文学会 北京天文馆  
**编辑出版** 《天文爱好者》杂志社  
**社址** 北京西城区西直门外大街138号, 100044  
**国际标准连续出版物号** ISSN 0493-2285  
**国内统一连续出版物号** CN11-1390 / P  
**增刊刊号** (2010)京新出报刊准字第(25)号  
**广告经营许可证** 京西工商广字第0408号  
**总发行** 国内 北京报刊发行局  
国外 中国国际图书贸易总公司(北京399信箱)  
**邮发代号** 2-352  
**印刷** 北京博海升彩色印刷有限公司  
**定价** 48元(2010年2月15日出版)  
**社长** 齐锐  
**主编** 朱进  
**常务副主编** 陈冬妮  
**责任编辑** 齐锐 陈冬妮 李良 张恩红 李鉴  
**版式设计** 张恩红(封面) 李鉴(内页)  
**读者服务部** 于杰鸿 李国良  
**订购热线** 010-51583320 13717671688 club@bjp.org.cn

## 编者的话

《天文爱好者》杂志作为全国中学生天文奥林匹克竞赛的唯一官方指定参考读物，在过去8年里曾刊登了大量历届天文奥赛试题，广受爱好者们欢迎。为了方便大家查阅，杂志社一直都有把奥赛习题结集出版的计划，在国际天文年顺利落幕的时候，这本增刊也终于付梓。在这里要特别感谢北京天文馆馆长朱进博士，作为我国中学生天文奥林匹克竞赛的主要发起人之一，他不仅组织编撰了历届全国天文奥赛的试题和集训试题，而且多次带领中国队参加各类国际天文赛事，与各国同行和各赛事组委会建立了深厚的友谊，我们才得以获得这些宝贵的奥赛资料。

这本《天文奥赛指南》中有许多习题和解答都是首次刊登，改正了之前的一些排版错误，并重新绘制、编排了图片和表格。其中注明“翻译”、“译解”的题目，答案由奥赛组委会提供、相关人员编译，注明“解答”的题目，答案由相关人员提供。所有题目和答案均由朱进、李鉴、陈冬妮审阅，答案中的图片由李鉴绘制、处理。尽管经过几次校对，但仍然难免错漏，恳请广大读者不吝指正，请联系：scalar@vip.sina.com。这里汇集了目前国内最齐全的天文奥赛习题资料，但仍有一小部分题目没有登出或是没有给出答案，在此向广大读者致歉。我们将尽量在今后的《天文爱好者》杂志中陆续补齐。

我们必须强调，天文奥赛绝不是为了比赛而进行的比赛，更不是靠题海战术而能取得佳绩的赛事，它的宗旨是激发中学生探索浩瀚宇宙的兴趣，并促进同龄天文爱好者的交流。《天文奥赛指南》的出版目的，是希望能有助于大家了解奥赛的风格，学习知识、巩固基础，而不是纯粹为了应付考试本身。

亚里士多德说：“古往今来，人们的探索都起源于对自然万物的惊异”。的确，好奇的目光常常可以看到比他所希望看到的更多，而茫茫宇宙中，还有什么比宇宙本身更令人惊奇的呢？愿这本增刊能成为我们探索宇宙之路的亲密朋友！

《天文爱好者》编辑部

## 版权声明

《天文爱好者》2010增刊《天文奥赛指南》，系：  
国际天文奥赛组委会唯一授权指定读本  
亚太天文奥赛组委会唯一授权指定读本  
全国中学生天文奥赛组委会唯一授权指定读本  
国际天文和天体物理竞赛组委会唯一授权指定读本  
本刊所载内容(包括但不限于文字、图片、表格)，受《中华人民共和国著作权法》等法律法规和有关国际条约的保护，相应权利由《天文爱好者》杂志社和相关权利人享有。未经《天文爱好者》杂志社和相关权利人书面许可，任何人不得将本刊所登载的内容用于各类商业目的或进行任何形式的盗版，否则，《天文爱好者》杂志社将依法追究侵权者的法律责任。

# 目录

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 1996年第一届国际天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 4  |
| 1997年第二届国际天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 7  |
| 1998年第三届国际天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 9  |
| 1999年第四届国际天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 12 |
| 2000年第五届国际天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 15 |
| 2002年第七届国际天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 17 |
| 2003年第十八届国际天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 19 |
| 2004年第九届国际天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 22 |
| 2005年第十一届国际天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 28 |
| 2006年第十一届国际天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 33 |
| 2007年第十二届国际天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 42 |
| 2008年第十三届国际天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 49 |
| 2009年第十四届国际天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 55 |
| 2005年第一届亚太天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 63 |
| 2006年第二届亚太天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 68 |
| 2007年第三届亚太天文奥林匹克竞赛试题 .....  | 72 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 2009年第五届亚太天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 79  |
| 2007年第一届IOAA试题 .....       | 86  |
| 2008年第二届IOAA试题 .....       | 92  |
| 2009年第三届IOAA试题 .....       | 100 |
| 2003年全国中学生天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 107 |
| 2004年全国中学生天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 113 |
| 2005年全国中学生天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 117 |
| 2006年全国中学生天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 123 |
| 2007年全国中学生天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 127 |
| 2008年全国中学生天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 132 |
| 2009年全国中学生天文奥林匹克竞赛试题 ..... | 141 |
| 2006年俄罗斯天文通讯赛试题 .....      | 146 |
| 2008年俄罗斯天文通讯赛试题 .....      | 150 |
| 天文奥赛国家队集训习题选编 .....        | 156 |
| 备战奥赛——练习题精选 .....          | 161 |
| 天文奥赛常用公式集萃 .....           | 169 |
| 常见天文学名词解释 .....            | 178 |

# 1996年第一届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/姜晓军 翻译、解答

### 低年组

1、为什么有时候使用在地球轨道上的小望远镜比使用在山顶上的大望远镜更好？

**解答** 这道题考查的是参赛者的天文常识。

大家知道，一般来说天文望远镜的口径越大越好，口径增大会带来两个直接的好处，一是增加了集光本领，二是提高了空间分辨率。但是由于地球大气扰动的影响，对于安放在地面上口径较大的天文望远镜，其实际分辨率无法达到理论值，而对于在太空中的望远镜（如哈勃空间望远镜）由于在大气层之上，其分辨率可以达到理论值。所以对于需要高空间分辨率的观测项目，使用在环绕地球的轨道上的小望远镜观测的效果要优于使用山顶上的大望远镜。

2、一只大头苍蝇落在5厘米望远镜的物镜上，通过这架望远镜观测月亮能够看到什么？

**解答** 望远镜对于附着在物镜上的任何物体都是不成像的，故观测者在观测时对于落在物镜上的苍蝇应该毫无知觉，但是如果这只苍蝇足够大，由于它的挡光会使得望远镜的成像变暗。

3、解释一下为什么我们在半夜至黎明看到的流星要比从黄昏至半夜看到的多。

**解答** 这是由于地球在自西向东自转的同时还在围绕太阳公转，处在上半夜的地区在地球公转方向的后面，因此上半夜出现的仅仅是那些能够追上地球的流星。而处在下半夜的地区位于地球公转方向的前面，下半夜出现的流星是与地球迎面相遇的，或是地球追上的流星，因而较多，也较亮。

4、黄道十二宫是均匀分布在黄道上的，请问太阳在哪一宫呆的时间最短？

**解答** 由于地球绕太阳运动的轨道不是正圆形而是椭圆形的，根据开普勒第二定律，地球在近日点附近的公转速度最快，作为地球上面的观测者这时看到的太阳周年视运动的速度也就最快。地球在每年的一月初过近日点，此时太阳位于黄道十二宫中的人马宫(Sagittarius，简写为Sgr)，因

此太阳在人马宫停留的时间最短。

5、（高年组和低年组）一颗5等星将在冥王星表面上一平方厘米内每秒落下大约10000个光子。那么如果使用口径6米的BTA望远镜，在地面上每半小时能够接收到来自一颗20等恒星的多少个光子？

**解答** 在历届天文奥林匹克竞赛中涉及“星等”概念的考题的出现率很高，因此牢固掌握“星等”的定义和相关的数学公式是非常必要的，这里我们对相关的概念作一简单的介绍。

星等是表示天体亮度的数值，最初人们把全天肉眼可见的恒星按感觉的亮度分为6等，最亮的20颗星定为1等星，恒星的亮度随着星等数值的增加而降低，肉眼可见的最暗恒星为6等。后来人们又发现1等星比6等星亮约100倍，即当星等差是5时(6-1=5)，亮度比为100；那么1个星等差对应的亮度比就是 $100^{1/5} = 2.512$ ，或者写成：

$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg(F_1/F_2)$$

式中 $m_1$ 和 $m_2$ 是两颗恒星的星等， $F_1$ 和 $F_2$ 是它们的亮度。这是一个非常重要的公式，一定要熟练掌握，需要注意的是该公式中的2.5是精确值，而不是2.512的近似值。

具体到本题中的问题，由于恒星到地球的距离要远远大于地球到冥王星的距离，因此我们认为对于同一颗恒星，在单位时间内来自它的光子落到地球或冥王星相同面积上的数量是相同的。从题中已知在冥王星上每秒钟每平方厘米上接收到的来自5等恒星的光子为10000个，那么相同条件下来自一颗20等的恒星的光子数应为：

$$N = (20 - 5) \times 10000 / 2.512$$

口径6米的望远镜的面积为 $2.83 \times 10^5 \text{ cm}^2$ ，半小时=1800秒，则答案为：

$$1800 \times 2.83 \times 10^5 \times 15 \times \frac{10000}{2.512} = 5.09 \times 10^6 \text{ 个光子}$$

6、太阳的视差是8.8角秒。有一颗星具有同样的绝对亮度，而视差是0.022角秒，请问在夜空中能否用肉眼看到这颗星？

**解答** 要解答这道题除了要用到我们上面介绍的星等的概念外，还需要掌握有关天体距离的一些基本知识。大家都知道光年是天文上常用的距离单位，它是光在真空中1年所传播的距离(缩写为ly)，等于94605亿千米。但是对于天文学家来说，还有两个更为常用的距离单位——天文单

位(记为AU)和秒差距(缩写为pc)。天文单位是地球到太阳的平均距离, 1天文单位=1.496亿千米, 天文单位主要用于测量太阳系内天体之间的距离。秒差距的定义为当天体的视差为 $1''$ 时, 其距离即为1秒差距, 反过来说, 当一颗恒星距离我们为1秒差距时, 从它上面看来, 地球与太阳的角距为 $1''$ 。

秒差距缩写为pc, 1秒差距=3.2616光年=206265天文单位=308568亿千米。秒差距因为数值巨大, 所以通常只用在太阳系以外。根据秒差距的定义可知当天体的视差 $\pi$ 已知时, 其以秒差距为单位的距离:  $D = 1/\pi$ ( $\pi$ 的单位为角秒)。

本题中恒星的距离为:  $1/0.022=45.45$  pc, 又知该星的绝对星等(即当该星距离观测者10秒差距时的视星等)与太阳相同, 为4.83等, 则其视星等为:

$$4.83 + 2.5 \lg(45.45/10)^2 = 8.1 \text{ 等}$$

故用肉眼无法看到。

7、昨天在圣彼得堡(北纬60度、东经30度)月亮恰好是在半夜时落山的, 那么地球上的什么区域有机会在下个星期里观测到日全食?

注: 本次考试的时间为1996年11月1~8日。

**解答** 在圣彼得堡, 月亮半夜(0点)落山, 也就是说它的黄经与太阳大约相差90度, 即它位于太阳以东90度, 此时为上弦月。月亮在星空背景中沿白道(即月亮的公转轨道)每天自西向东运动13.6度, 一周后差不多变为满月, 与太阳的黄经相差180度左右, 太阳落而月亮升, 所以不管在地球上的什么地方, 都不可能看到日全食。

(李鉴)

8、一艘飞船降落在一颗直径为2.2千米的小行星上。小行星的平均密度是每立方厘米2.2克, 并且缓慢地旋转着。宇航员们决定用2.2小时的时间乘车沿小行星的赤道旅行一圈。请问他们能够做到这件事吗? 如果答案是否定的, 为什么? 如果答案是肯定的, 他们还需要注意什么?

**解答** 本题中的宇航员与小行星构成了一个二体问题, 可以方便地利用活力公式解决, 活力公式是反映天体的位置、速度和轨道半长径之间关系的公式, 可以写作:

$$v^2 = \mu(2/r - 1/a)$$

式中 $v$ 和 $r$ 为一个天体相对于另一个天体的速度和距离,  $\mu = G(M+m)$ ,  $G$ 为万有引力常数,  $M$ 和 $m$ 分别为两个天体的质量;  $a$ 为常数, 在椭圆轨道中表示半长径, 圆形轨道中表示半径。

由已知条件可以求出小行星的质量 $M = 1.22 \times 10^{13}$ kg, 宇航员的体重 $m$ 与 $M$ 相比可以忽略不计; 将以上条件代入活力公式, 得:

$$v = \sqrt{GM/r} = 0.862 \text{ m/s}$$

$v$ 也是这颗小行星的第一宇宙速度, 当宇航员的运动速度大于 $v$ 时, 他将脱离小行星引力束缚飘向宇宙空间。如果宇航员打算用2.2小时绕小行星表面一周, 那么他的速度应为0.872m/s, 大于 $v$ , 故不可能。

## 高年组

1、为什么有的星在蓝光里表现为双星而在红光里却无法分辨而是单星?

**解答** 这是由于望远镜的分辨角与口径成正比, 而与观测的波长成反比, 其表达式为: 分辨角 $\delta = 1.22\lambda/D$ , 式中 $\lambda$ 为波长,  $D$ 为望远镜的口径, 有关这一公式的详细推导可参见光学书籍。从这一公式很容易看出望远镜对于波长较短的蓝光的分辨率较高。

2、为什么射电天文学家可以在白天观测, 而光学天文学家(大多数时候)却被限制在夜间进行观测?

**解答** 对于恒星(除太阳以外)等暗弱天体的光学观测只能在夜晚进行是因为白天地球大气散射强烈的太阳光, 将其他天体淹没掉了。而由于射电波段的波长比光学波段要长得多, 在大气中不会被散射, 因此在白天也可以观测。

3、为什么对某些用途来说, 山顶上的中等口径望远镜比在接近地球的低轨飞船上的望远镜还好?

**解答** 这是由于一般的低轨道飞船(包括哈勃空间望远镜)的轨道周期都很短, 在一个轨道周期中有一段时间观测目标要被地球挡住, 因此飞船上的望远镜无法对一个天体进行长时间的连续观测; 而对于地面上的望远镜, 则有可能对待测天体进行整夜的连续观测。

4、是什么原因使得哈勃空间望远镜能够观测到比地面上所能研究的更暗的天体?

**解答** 由于哈勃空间望远镜位于地球大气层外, 不受大气消光(地球大气对星光的吸收和散射)和大气扰动的影响, 所以能够观测到更暗的天体。

6、牛郎星(天鹰 $\alpha$ )的视差是 $0.198''$ 角秒, 自行是每年 $0.658''$ /年, 视向速度是每秒 $-26$ 千米, 视亮度为4.83等。请问牛郎星在什么时候与太阳的距离最小? 最小距离是多少? 在最小距离时它的视亮度是多少等?

**解答** 先计算牛郎星现在的距离:

$$D = 1/0.198'' = 5.05 \text{ pc}$$

已知牛郎星的自行率为 $0.658''/年$ , 可算出它每年( $3.15 \times 10^7$ s)在切线方向运动的距离为:

$$5.05 \text{ pc} \times 0.658'' = 3.32 \text{ AU} = 4.97 \times 10^8 \text{ km}$$

据此可再求出牛郎星的切向速度:

$$V_t = 4.97 \times 10^8 \text{ km}/3.15 \times 10^7 \text{ s} = 15.78 \text{ km/s}$$

这时再解直角三角形便可求出牛郎星距地球的最近距离为 $2.62$ pc, 要到达这一最近距离, 牛郎星还要再运行 $4.32$ pc, 需要 $1.39 \times 10^5$ 年。

| 水星        |     |     | 金星        |     |     |
|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| 日期        | 东大距 | 西大距 | 日期        | 东大距 | 西大距 |
| 8-Jan-89  | E   |     | 15-Jun-83 | E   |     |
| 18-Feb-89 |     | W   | 4-Nov-83  |     | W   |
| 30-Apr-89 | E   |     | 21-Jan-85 | E   |     |
| 18-Jun-89 |     | W   | 12-Jun-85 |     | W   |
| 28-Aug-89 | E   |     | 26-Aug-86 | E   |     |
| 10-Oct-89 |     | W   | 15-Jan-87 |     | W   |
| 22-Dec-89 | E   |     | 2-Apr-88  | E   |     |
| 1-Feb-90  |     | W   | 22-Aug-88 |     | W   |
| 13-Apr-90 | E   |     | 8-Nov-89  | E   |     |
| 31-May-90 |     | W   | 30-Mar-90 |     | W   |
| 11-Aug-90 | E   |     |           |     |     |
| 24-Sep-90 |     | W   |           |     |     |
| 5-Dec-90  | E   |     |           |     |     |

最后我们计算牛郎星距离我们2.62pc时的视亮度：

$$m_1 = 0.89 - 2.5 \lg(5.05/2.62)^2 = -0.53 \text{ 等}$$

7、最近在夏威夷的莫纳克亚山上，10米凯克望远镜开始工作，在那里星像的直径可以达到0.3角秒。你能否估计一下用这架望远镜进行目视观测时的极限星等。

**解答** 人眼的瞳孔的最大直径约为7毫米，极限星等约为6等，根据前面介绍的星等的知识，我们利用公式 $m_1 - m_2 = -2.5 \lg(F_1/F_2)$ ，可以估算凯克望远镜的目视极限星等：

$$m_1 = 6 + 2.5 \lg(10000/7)^2 = 21.8 \text{ 等}$$

## 实测试题

国际天文奥赛组委会 供稿/李鉴 翻译、解答

已提供了一张画有地球轨道的图(图从略编者)。请根据上表给出的水星、金星大距数据，估算出水星、金星的轨道半径(天文单位)，并添加在给出的图上。

**解答** 从表中的数据我们可以算出水星、金星的会合周期，也就是两次东大距或两次西大距之间的时间间隔。对水星(以东大距日期为例)，表中给出的两次东大距之间的时间间隔并不均匀，这是因为水星的轨道比较扁(偏心率达0.206，金星轨道的偏心率仅为0.0068)，近似计算它的轨道半径时(即假设其轨道为圆轨道)，需要将所算出的会合周期取平均值，其结果为 $p_1 = 115.7$ 天。同样，对金星，计算出的会合周期平均值为： $p_2 = 583.9$ 天。根据两颗行星的会合周期计算公式：

$$1/T_1 - 1/T_2 = 1/P$$

其中 $T_1$  为离太阳较近的那颗行星的公转周期， $T_2$  为离太阳较远的那颗行星的公转周期。可以求出水星、金星的公转周期分别为：87.9天、224.7天。

然后利用开普勒第三定律： $a^3/T^2 = 1$ ，其中 $a$ 以AU为单位， $T$ 以回归年为单位(即365.2422天)，即可求出水星、金星的轨道半径，结果分别为：0.387 AU和0.73 AU。

## 观测试题

(不计入总分)

1、在1996年11月2日星期六的什么时间，你能看到金星？

2、当时它离太阳的角距离为多少？

# 1997年第二届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/姜晓军 翻译、解答

### 低年组

1、两颗恒星具有相同的绝对星等，一颗比另一颗要远上一千倍。两颗星的视星等相差多少？哪个星更大？

**解答** 两颗星的绝对星等相同，表示它们在相同距离处的亮度是相同的，它们的距离相差1000倍，也就是说它们的视亮度相差 $1000^2$ 倍，代入公式 $m_1 - m_2 = -2.5 \lg(F_1/F_2)$ ，可得 $m_1 - m_2 = 15$ ，即它们的目视星等相差15等，较暗的星的目视星等的数值大。

2、1990年7月22日5时在索罗维兹岛(东经34度5分、北纬65度1分)发生了日全食，此时坐在月球上的一位观测者在观看地球时会看到什么？画个图来说明你的答案。

**解答** 观测者会看到在Solovetz群岛附近有一个黑斑(月球的本影)其周围为灰色(月球的半影)，并可以看到这个黑斑在移动。

3、火星上的一天只比地球的一天长2.5%，火星的轨道周期是687天，请估算火星上恒星日与平太阳日的长度差。

**解答** 要解答这道题，首先要搞清楚恒星日和平太阳日的概念。恒星日是以春分点为基本参考点，春分点连续两次经过子午圈的时间间隔为一个恒星日。而平太阳日是指平太阳(即假想的沿黄道以真太阳的平均视运动速度匀速运动的太阳)连续两次经过子午圈的时间间隔。

火星上一天的长度为 $1 + 0.025 = 1.025$ ；火星上一年为 $687/1.025 = 670$ 火星日。火星上的平太阳日与火星的恒星日，在一个火星年里差一个火星日，即火星平太阳日比火星恒星日长 $1/670 = 0.00149$ 日=0.0358小时，即2.15分钟。所以，火星的恒星日比它的平太阳日每天约短2分多钟。

4、1997年10月4日是第一颗人造卫星发射40周年纪念日，此时金星距离东大距不远，其坐标大致为 $\alpha = 15^{\text{h}}20^{\text{m}}$ ， $\delta = 22^{\circ}$ 。利用这些数据，估计在1957年10月4日发射第一颗人造卫星当日金星的坐标和与太阳的相对位置。金星的公转周期为0.61521回归年。

**解答** 对于地内行星(水星和金星)，它们连续两次东

大距之间的时间间隔称为一个会合周期( $P$ )，表达式为：

$$1/P = 1/T - 1/E$$

式中 $T$ 为地内行星的公转周期， $E$ 为地球的公转周期，即一个恒星年。注意以上的定义和表达式只对地内行星适用，对于地外行星，请读者参阅参考书。

我们先计算金星的会合周期：

$$1/P = 1/0.61521 - 1/1 \Rightarrow P = 1.5988 \text{ 年}$$

我们发现本题中的时间间隔(40年)可以大致被金星的会合周期1.5988年整除( $40/1.5988 = 25.0188$ )，故40年前，即1957年10月4日金星仍在东大距附近，其坐标大致为： $\alpha = 15^{\text{h}}20^{\text{m}}$ ， $\delta = 22^{\circ}$ ，在太阳的东面，距离太阳约45°。

5、假设一位观测者坐在天狼星的一个行星上，在那里的“天空”上哪个天体更亮一些：是我们的太阳还是大熊座中的恒星？

**解答** 天狼星的赤经 $\alpha = 6^{\text{h}}44^{\text{m}}$ ，赤纬 $\delta = -16^{\circ}42'$ ，大熊座中最亮的是北斗七星(视星等约为0~3等)，它们的赤经为 $11\sim14^{\text{h}}$ ，赤纬为 $49^{\circ}\sim61^{\circ}$ 。从地球上看，天狼星与北斗七星之间的角距离近乎 $90^{\circ}$ (略大一些，大约100度左右)，也就是说北斗七星与天狼星之间的距离比太阳与天狼星之间的距离更大。因此在天狼星的卫星上看，北斗七星要比从地球上看到的更暗，不过太阳本身的绝对星等只有4.8等左右，在天狼星上看起来也应很暗弱。

为了知道究竟哪个更亮，我们只能代入各自的距离、绝对星等进行计算。天狼星离我们只有大约8.6光年，而北斗七星离我们的距离远比它大，约为80~120光年，因此可知北斗星离天狼星的距离大致也为80~120光年，可见在天狼星上看北斗，在地球上看到的亮度差不多，也在0~3等之间。代入太阳的数据，根据 $m - M = 5 \lg r - 5$ 可以求出在天狼星的行星上看，太阳的视星等大约为：1.9等，要比北斗七星中的最亮星暗。

(李鉴)

6、我们将太阳的视圆面覆盖住天顶定义为太阳位于天顶，哪里能够更频繁地看到这种天象？基多(纬度为 $0^{\circ}$ )，还是圣保罗(纬度为 $-23.5^{\circ}$ )？并作解释。

**解答** 在圣保罗(纬度为 $-23.5^{\circ}$ )能够更频繁地看到太阳位于天顶。

这是因为太阳的视角直径为 $32'$ ，它覆盖天顶的范围可以有 $32'$ 的纬度变化范围，虽然太阳每年只有一段时间(冬至——12月23日前后)位于圣保罗的天顶，而有两段时间(春

分和秋分前后)位于甚多的天顶, 太阳在冬至点附近赤纬移动 $32'$ , 大约需要六、七天, 而在春分、秋分日前后, 太阳的赤纬一天多就变化 $32'$ 。所以, 在一年中圣保罗在正午能够看到太阳在天顶的日数更多。

## 高年组

1、如果一颗恒星以很高的速度飞离我们, 那么此时它的连续谱与静止时相比是更热还是更冷?为什么?

**解答** 由于多普勒效应, 当天体远离我们时, 我们会观测到它的谱线向波长较长的红端移动, 即谱线红移; 反之当天空向我们靠近时, 它的谱线会向蓝端移动。另外一个天体的温度越高, 它的颜色就越蓝。根据本题中的已知条件, 当一颗恒星以很高的速度飞离我们时, 它的连续谱会明显地红移, 因此会显得比静止时的温度低。

2、与低年组相同

3、在星球大战中一个疯狂的文明将一颗恒星剖为两半(没有改变其密度及有效温度), 这对该星的星等有何影响?与原来的恒星相比, 被剖开的双星的星等是多少?

**解答** 被剖开后的子星的体积是原来的 $1/2$ , 表面积为原来的 $0.630$ 倍, 即其亮度为原来的 $0.630$ 倍。代入公式 $m_1 - m_2 = -2.5 \lg(F_1/F_2)$ , 可得单颗子星的星等比原来的恒星暗 $0.50$ 等, 而剖开后的双星系统的星等比原来的恒星亮 $0.25$ 等。

4~5、与低年组相同

6、是什么限制了特殊天体物理台(SAO)的6米BTA望远镜的分辨本领?计算并解释你的结论。

**解答** 望远镜的分辨角 $\delta = 1.22\lambda/D$ , 式中 $\lambda$ 为天体入射光的波长,  $D$ 为望远镜的口径, 当 $\lambda$ 与 $D$ 取相同的单位时,  $\delta$ 的单位为弧度。若将 $\delta$ 的单位改为角秒, 因为 $1\text{弧度} = 206265\text{角秒}$ , 并取观测波长为人眼最敏感的波长,  $\lambda = 555\text{nm}$ , 则:

$$\delta'' = 140/D, (\text{D的单位为毫米})$$

由此我们可以方便地计算出6米望远镜的理论分辨角

$$\delta'' = 140/D = 140/6000 = 0.023''$$

这只是理论计算的结果, 实际观测中由于大气的扰动, 以及望远镜本身的缺陷, 大型望远镜的实际分辨角能够达到 $0.3''$ 、 $0.5''$ 已属难得。

和太阳的光谱来估计两颗恒星的速度, 并估计地球绕太阳运动的速度。

## 观测试题

每个参加者必须指出下述天空区域中的所有星座(有一部分天空被树木遮挡了):

1、东北 2、南 3、北

## 实测试题

简述: 这是关于多普勒效应的问题, 用两颗恒星的光谱

# 1998年第三届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/姜晓军 翻译、解答

### 低年组

1、在月球上太阳和地球哪个更常见？

**解答** 由于长期潮汐作用的影响，导致月球的自转周期与绕地球运动的公转周期相同，都是27.32天。因而在月面上有一半的地方永远可以见到地球(我们习惯上将其称为月球的正面)，而在另一半地区却永远见不到地球。月球在太阳系内的运动包括自转，绕地球的公转和与地球一起绕太阳的公转，由于月球的自转，月面上的任意一点大约有一半的时间能够见到太阳。在月球的正面看地球比看到太阳更常见，而在月球背面却永远见不到地球。

2、在一种新的邮政服务中使用巨型大炮将邮件由英格兰射往新西兰，请你估计邮件的飞行时间。

**解答** 我们知道地球的周长大约是40000千米，而英格兰与新西兰在地球上遥遥相对，距离大约为20000千米；根据地球的质量和平均半径以及活力公式，可以计算出地球的环绕速度(也称第一宇宙速度，即当一个物体沿圆形轨道绕地球运动时的速度)为7.9千米/秒，这也是邮件能否返回地球的临界速度，但如果邮件的速度大大低于7.9千米/秒，它的射程又无法到达目的地。据此我们可以估计出邮件的飞行时间接近但是一定比 $20000/7.9 = 2532$ 秒(42.2分钟)略长些。

3、已知春分点的赤道坐标为0小时和0度，求北黄极的坐标。

**解答** 根据天文常识可知黄赤交角为23.5度，可推算出北黄极的赤道坐标为：赤经=18小时；赤纬= $90^\circ - 23.5^\circ = 66.5^\circ$ 。

4、假设太阳突然塌缩为一个黑洞，地球的轨道周期将受到怎样的影响？

**解答** 太阳的晚年归宿是白矮星而不是黑洞。本题是假设太阳塌缩为一个黑洞，问地球的轨道周期是否改变。由于太阳是球对称的天体，它假如塌缩为黑洞，其引力不变，所以地球的轨道周期不变。

5、我们能否用肉眼分辨出月球上的Mare Crisium?它的

直径为520千米。

**解答** 先计算Mare Crisium的张角，由于地月距离约为380000千米，故Mare Crisium的张角为：

$$\arcsin(520/380000) = 0.078^\circ = 282''$$

再计算肉眼的分辨本领，人眼的瞳孔通常的最小分辨角为 $60''$ ，即大于 $60''$ 的角度就能分辨，所以Mare Crisium的张角能分辨开。

6、在椭圆星系M32(仙女座大星云的一个伴星系)中约有2亿5千万颗恒星，这个星系的视星等为9等，如果所有恒星的亮度相同，这个星系中单颗恒星的视星等是多少？

**解答** 将题目中的已知条件代入我们已经多次使用过的公式 $m_1 - m_2 = -2.5 \lg(F_1/F_2)$ ：

$$m_1 = m_2 - 2.5 \lg \frac{F_1}{F_2} = 9 + 2.5 \lg(2.5 \times 10^8) = 27.5$$

### 高年组

1、是否可能在月面上观测到如下景象：日食、流星、彗星、极光、彩虹、夜光云和人造卫星？

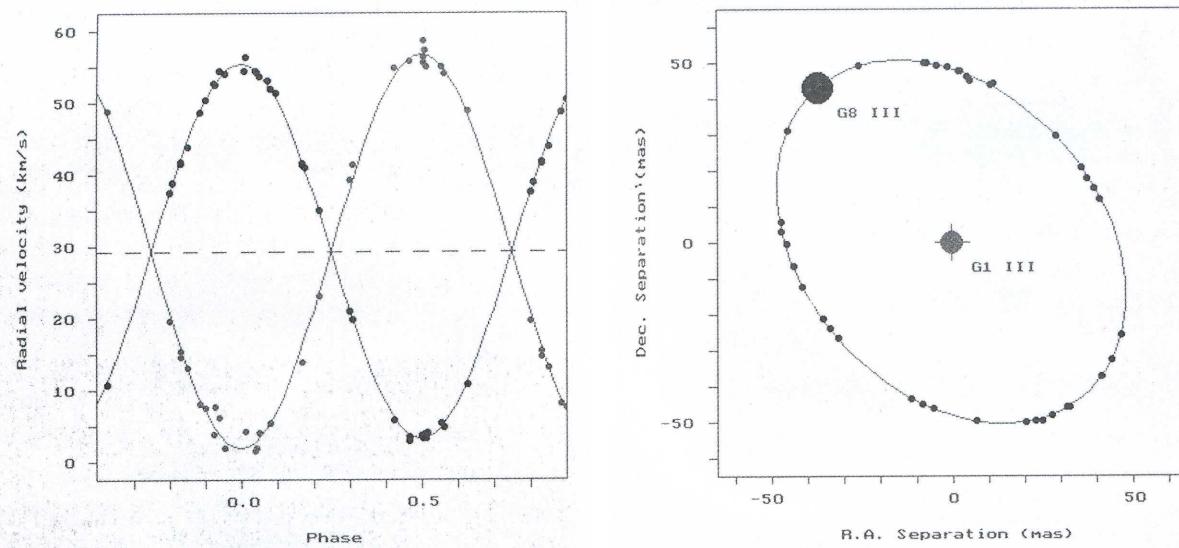
**解答** 由于月球没有大气，因而无法观测到流星、极光、彩虹、夜光云，而日食和人造卫星是可以看到的。

2、造父变星不但存在于银河系，也存在于其他星系，为什么周光关系最初是在麦哲伦星云中发现的？

**解答** 造父变星是一种高光度的周期性脉动变星，典型星为仙王座δ星(中文名为造父一)。造父变星的光度和光变周期之间存在着密切的关系，称为周光关系。利用周光关系可以测量造父变星及其所在的星系离我们的距离。由于大、小麦哲伦星云都距离我们十分遥远，我们可以认为在它们内部的造父变星与我们的距离是近似相等的，因此才可以排除距离对判断造父变星光度的影响，发现周光关系。而其他更遥远星系中的造父变星，视星等更暗，要比大、小麦哲伦云中的更难观测到。

3、由于存在着岁差，春分点在天球上缓慢地运动(每年 $50''$ )，春分点是沿着赤道运动还是沿着黄道运动？

**解答** 在外力的作用下，地球的自转轴在空间并不保持固定的方向，而是在不断的变化着，地轴的长期运动



称为岁差，而短周期性运动则称为章动。牛顿最早指出了产生岁差的主要原因是太阳和月球对地球赤道隆起部分的吸引。在太阳和月球的引力作用下，地球的自转轴绕着与黄道面垂直的轴旋转，在空间绘出一个圆锥面，绕行一周约需26000年。在天球上天极绕黄极描绘出一个半径约为23.5度(黄赤交角)的小圆，即春分点沿黄道每26000年旋转一周。

4、一颗人造卫星在圆形赤道轨道上沿地球自转方向以6.9千米/秒的速度运动，求它对应于赤道上任意固定点的周期。

**解答**

地球赤道周长约40000千米，自转一周24小时，赤道上的自转速度为0.46千米/秒。卫星与地球自转的方向相同，所以卫星相对地球赤道上的固定速度为 $(6.9 - 0.46)$ 千米/秒，因此卫星对应于赤道上任意固定点的周期为：

$$40000 / (6.9 - 0.46) = 103.5 \text{ 分钟}$$

5~6、同低年组

## 实测试题

国际天文奥赛组委会 供稿/李鉴 翻译、解答

1、五车二(御夫 $\alpha$ )双星的质量。俄罗斯特殊天体物理台的6米望远镜是少数几个可以进行目视双星的斑点干涉观测的仪器之一，由此可以直接测量恒星的质量。请你使用我们的观测数据来估计五车二双星的质量。五车二是非常近的目视双星，本页的右图显示的是由多年的观测而得到的子星B的相对轨道，单位为毫角秒(mas)。子星A的位置用十字标记。两子星的视向速度曲线显示在左图中，峰值在右边的为子星A，峰值在左边的为子星B。五车二的视差是0.077角

秒，双星的公转周期是104天。

1)考虑一下该系统的三维模型，特别是轨道偏心率和轨道平面与视线方向的倾角。

2)用开普勒第三定律估计两个子星的质量。

3)考虑一下在你的估计中可能出现的误差及其原因。

**解答**

1)根据左图可以看出，两颗子星的视向速度曲线都是正弦曲线，这说明它们的绕转轨道均为正圆，即两颗子星围绕着它们的质心做圆轨道运动，周期都是104天。根据右图可以求出这个双星的轨道平面与视线方向的夹角： $i = \arccos(\text{短轴}/\text{长轴}) = \arccos(85 \text{ mas}/114 \text{ mas}) = 42^\circ$ (或 $138^\circ$ ，视角度起量方向而定)。

2)根据开普勒第三定律： $G/4\pi^2 \cdot (m_1 + m_2) = a^3/T^2$ ，可以求出两星的质量和，对于圆轨道双星， $a$ 为两星间距。如果 $a$ 以天文单位(AU)为单位， $T$ 以回归年为单位， $m$ 以太阳质量为单位，上式化为：

$$a^3/T^2 = (m_1 + m_2)/m_\odot$$

可以从右图量出两颗星的角距离约为 $\beta = 57 \text{ mas}$ ，两星到地球的距离为：

$$d = 1/0.077 \approx 13 \text{ pc} = 2681445 \text{ AU}$$

所以两星的间距为：

$$\begin{aligned} a &= d \times \sin \beta = 2681445 \text{ AU} \times \sin(57 \times 10^{-3} \text{ 角秒}) \\ &= 2681445 \times 2.76 \times 10^{-7} \text{ AU} = 0.74 \text{ AU} \end{aligned}$$

两星的质量和为：

$$m_1 + m_2 = a^3/T^2 = 0.74^3/(104/365.2422)^2 = 5m_\odot \quad \dots\dots (1)$$

两星的质量之比可以根据左图求出，图中视向速度曲线的振幅即为子星的公转速度(的一个分量)。根据圆轨道运动



规律 $v = 2\pi r/T$ 和 $m_1 \times r_1 = m_2 \times r_2$  ( $r_1$  和 $r_2$  分别为两子星到质心的距离), 可以推导出:

$$\frac{m_1}{m_2} = v_2/v_1 = (26 \text{ km/s})/(27 \text{ km/s}) = 0.963 \quad \dots \dots (2)$$

联立(1)、(2)可得 $m_1 = 2.45m_\odot$ ,  $m_2 = 2.55m_\odot$ 。

3)可能的误差来源: a、测量误差; b、视向速度曲线不一定严格为正弦曲线, 由a导致的误差大约为 $\pm 0.04m_\odot$ 。

注: 本题中五车二的视差(即距离)其实不必作为已知条件给出, 可以根据其他已知条件计算出来。根据左图可以读出两颗子星的视向速度曲线的振幅(记为 $v'$ )分别为 $27 \text{ km/s}$ 和 $26 \text{ km/s}$ , 不过这个值需要进行轨道平面倾角改正, 真正的视向速度为:

$$v = v'/\sin i$$

可以求出 $v_1 = 40.35 \text{ km/s}$ ,  $v_2 = 38.86 \text{ km/s}$ 。再据圆轨道运动规律 $r = v \cdot T/2\pi$ , 可求出两子星到质心的距离分别为:

$$\begin{aligned} r_1 &= 57704643 \text{ km} = 0.38 \text{ AU} \\ r_2 &= 55573790 \text{ km} = 0.37 \text{ AU} \end{aligned}$$

因此两星的间距:

$$a = r_1 + r_2 = 0.75 \text{ AU}$$

再从右图中量出它们的角距离( $57 \text{ mas}$ ), 就能求出它们到地球的距离, 约为 $13.16 \text{ 秒差距}$ ( $0.076 \text{ 角秒}$ )。

2、星系的质量。侧向旋涡星系很适合于进行质量的测定。I.D.Karachentsev教授和他的同事们编制了这类星系的表并用光谱方法测出了它们的质量。下面给出了在天龙座的一个名为FGC 1908的星系的光谱, 光谱是在1997年3月4日用6米望远镜的主焦点上的光谱仪获得的。如图所示, 光谱仪的狭缝是沿着星系的主轴方向的。穿过光谱的竖线是夜天光的发射线, 其他发射线是属于星系的, 这些谱线的实验室波长也在图中标出。在特殊天体物理台确定该星系的质量时, 哈勃常数取为 $H_0 = 74 \text{ km/s/Mpc}$ 。

现请你来估计该星系的质量。已知 $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{18} \text{ cm}$ , 太阳质量是 $2 \times 10^{33} \text{ g}$ , 引力常数为 $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dyn/cm}^2/\text{g}^2$ 。

- 1)解释一下为什么星系的二维光谱看起来是这样的。
- 2)估计FGC 1908的质量, 并与银河系的质量比较一下。
- 3)考虑一下在你的估计中的误差来源。

### 解答

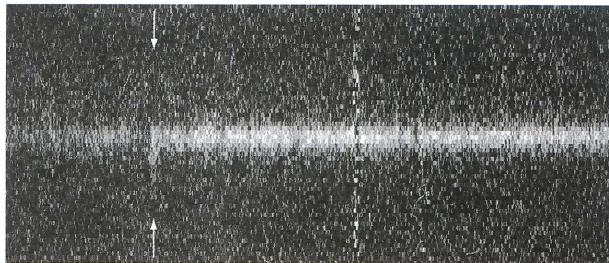
注: 由于没有原始图片, 我们在这里只能提供本题的解题思路。

1)所谓光谱, 就是天体辐射流量按波长的分布图, 一般我们所见的光谱为处理好之后的一维光谱, 横轴为波长, 纵轴为辐射流量。一维光谱只能从波长上进行区分, 根据光栅方程:

$$d \cdot \sin \theta = \pm k\lambda$$

其中 $d$ 为光栅常数,  $\theta$ 为衍射角,  $k$ 为衍射级次,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。可以知道, 对一定的衍射级次 $k$ (注意当 $k=0$ 时, 所有波

长的光都能满足光栅方程, 所以0级并不能产生色散, 实际拍摄光谱时, 需要取其他级次), 波长 $\lambda$ 增加时, 衍射角 $\theta$ 也变大, 所以不同波长的光的主极大位置并不相同, 于是就会形成光谱。但是如果仅仅按照波长对光谱进行区分, 对于衍射级次和波长的乘积数值相等的谱线就会发生重叠。天文上拍摄光谱时常用的光栅采用的一般是高衍射级次( $k$ 值较大时, 色散也较高), 以增加光谱的分辨率, 所以必须分开由于光谱级次所产生的谱线重叠, 需要在衍射级次上再进行一次“色散”, 这样在波长、级次上两次色散后所获得的光谱就称为二维光谱。



上图是欧洲南方天文台(ESO)所拍摄的一个极其遥远的南天星系的二维光谱(局部), 图中一条条短竖的亮线就是星系中的发射线, 亮度越高谱线强度越强, 白色箭头指示的是莱曼 $\alpha$ 线。

2)通过光谱分析星系质量的大致方法为: 分别拍摄星系边缘和星系中心的光谱, 选定一条谱线, 量出星系边缘和中心处该谱线的波长差, 进而求出边缘物质相对中心的红移 $z = \Delta\lambda/\lambda$ 。再根据多普勒效应( $v = cz$ ,  $z \ll 1$ 时)求出星系边缘物质的绕转速度, 然后利用开普勒第三定律求出它的轨道半径之内的质量, 这就是星系的大致质量。

## 观测试题

1、光学和射电波段下的太阳。用“中学望远镜”来查看和画出太阳视圆面上可见到的各种细节, 按基点来定太阳上的方向。将你所画的图与前几天RATAN-600获得的太阳一维射电图进行比对, 证认其中的细节。射电观测是在中午进行的, 波束是垂直的并包含了整个太阳。

### 2、“星星切片机”

“……望远镜就是星星切片机的圣名, 因为它只做切片的活, 看你的意愿一颗星成了两三个, 就象你手掌中的水银珠, 用手指轻轻一按……”

——罗伯特·福罗斯特《星星切片机》

用“中学望远镜”来查看天空并将数个( $> 5$ )双星分为子星。注意子星的亮度和颜色, 解释一下观测到的子星的亮度与颜色的关系(填写下表):

| 天体 | 主星颜色 | 伴星颜色 | 观测事实的解释 |
|----|------|------|---------|
|    |      |      |         |

# 1999年第四届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/姜晓军 翻译、解答

### 低年组

1、从地球上看，月球的视直径为 $31'$ ，在口径 $40\text{cm}$ ，焦距 $254\text{cm}$ 的望远镜的焦平面上所成月像的直径是多少？画图解释你的计算。

**解答** 对于焦距为 $F$ (单位为mm)的望远镜，其焦平面上的线尺寸 $l$ 与对应的天空张角 $\alpha$ 之间的关系为：

$$l = F \times \tan \alpha$$

当 $\alpha$ 较小时， $\tan \alpha = \alpha$ ， $l = F \times \alpha$ ，当 $F$ 取毫米作单位，并将 $\alpha$ 由弧度(rad)换算为角秒： $\alpha(\text{rad}) = 206265\alpha(')$ ，可得到望远镜的底片比例尺 $S$ (即在望远镜焦平面处每毫米对应于天球上的角秒数)为：

$$S = \alpha/l = 206265/F ('/\text{mm})$$

可见望远镜的底片比例尺与其口径大小无关，仅仅取决于它的焦距。

因此焦距 $254\text{cm}$ 的望远镜的底片比例尺为 $81.2''/\text{mm}$ ，所拍摄的则月亮像为 $31'/(81.2''/\text{mm}) = 22.9 \text{ mm}$ 。

2、在焦距 $125\text{cm}$ 的望远镜的焦平面上安装了一台光度计，你能否观测星团中亮度为：a、5等；b、10等；c、15等的恒星？已知一颗相同光谱型的8等星的计数为4000计数/秒。光度计的白噪声(仪器噪声)为500计数/秒，计数的上限为20000计数/秒。解释你的计算。

**解答** 此题在天文观测的信号与噪声的概念方面有误，但详细讨论不在此次解答的范围之内，在此我们忽略相关概念问题，需要了解的读者可以参考相关的书籍。

由于已知待测星和8等恒星的光谱型相同，所以我们认为它们的计数率与星等仍然符合公式： $m_1 - m_2 = -2.5 \lg(F_1/F_2)$ ，如果不考虑光子统计噪声，代入公式我们马上可以算出对于5等的恒星，计数率为63396个/秒，根据星等的定义，当星等差是5时，亮度比为100，此时就不必再花费时间代入上面的公式计算，而直接可得10等星为634个/秒；15等星为6.34个/秒。通过以上的计算可知，5等星和10等星可以观测，而对于15等的恒星，其计数率远小于仪器噪声，故无法得到有用的观测资料。

### 高年组

1、一颗恒星的辐射峰值是在 $2000\text{\AA}$ (记为A星)，另一颗的辐射峰值是在 $10000\text{\AA}$ (记为B星)，哪一颗在 $2000\text{\AA}$ 处有更多的辐射？哪一颗在 $10000\text{\AA}$ 处有更多的辐射？两颗星的总辐射的比值是多少？假设两星都是黑体。

**解答** 对黑体辐射(可以参考《天文爱好者》2009年第4期“天文学上的佯谬”，杨大卫著)，在任何频率上较热的黑体都比较冷的黑体发出更多辐射，而且满足维恩位移定律：

$$\lambda_{max} \times T = 0.29 \text{ cm} \cdot \text{K}$$

其中 $\lambda_{max}$ 为黑体辐射谱的峰值波长，单位为cm， $T$ 为黑体的温度，单位为K。因此

$$T_A = 0.29 \text{ cm} \cdot \text{K}/2000 \text{\AA} = 14500 \text{ K}$$

$$T_B = 0.29 \text{ cm} \cdot \text{K}/10000 \text{\AA} = 2900 \text{ K}$$

显然在 $2000\text{\AA}$ 处和 $10000\text{\AA}$ 处，都是A星辐射更强。

对于恒星，它所发出的辐射称为“光度”，即恒星每秒钟内发出的总能量，也就是总功率，光度 $L$ 的单位为J/s。根据斯特藩-玻尔兹曼公式，一个黑体在单位时间、单位面积上发出的总能量 $E$ 正比于温度的4次方： $E = \sigma T^4$ ，其中的比例常数 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ 。所以对于一颗半径为 $R$ 的球状恒星，它的光度为：

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4$$

恒星一般不是严格的黑体，因此上式中的 $T$ 代表的是恒星的有效温度。可以求出两星的光度比为：

$$\frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^4 = 625 \cdot \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2$$

(李鉴)

2、Simferopol大学的工程师们描述了旧军舰的一种新用途：利用它们的材料制造极小的黑洞。请估算重5000吨的军舰形成黑洞后的直径，什么物体具有相同量级的尺寸？描述可见光在这个黑洞附近的传播。

**解答** 一个非旋转黑洞的视界半径 $r$ 与其质量 $M$ 有如下关系：

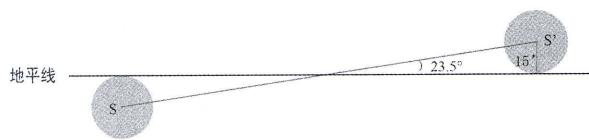
$$r = 2GM/c^2$$

其中 $G$ 为万有引力常数， $c$ 为真空中的光速，等于 $300000\text{km/s}$ ，将已知数据代入上式，得 $r = 7.44 \times 10^{-21} \text{ m}$ 。所以形成黑洞后的直径为 $14.9 \times 10^{-21} \text{ m}$ 。这是一个很小的尺度，大大小于经典的电子半径( $2.82 \times 10^{-5} \text{ m}$ )。

## 高年组和低年组

3、在地球上的什么地方和什么时候能观测到时间最长的日出？并估计其日出的时间长度。

**解答** 在南、北两极的春分和秋分可以见到持续时间最长的日出。在北极，从秋分日到春分日，历经长达半年的黑夜之后才看到日出；在南极，从春分日到秋分日，半年的黑夜之后才看到日出。



我们以北极的春分为例来求日出持续的时间。如上图所示，忽略大气消光和大气折射，在北极点，地平圈就是赤道，黄道与地平圈的夹角等于黄赤交角 $23.5^\circ$ ，在春分日前后，太阳位于地平与黄道的交点(春分点)附近。太阳每年沿着黄道运行一周，运动速度为 $v = 360^\circ / 365.2422 \text{ 天} = 0.986^\circ / \text{天}$ ，在春分日前后不长的几天时间里，它走过的距离不大，所走的路径可视为直线。

太阳的视直径约为 $30'$ ，日出的持续时间就是日心从地面之下 $-15'$ 运行到地面之上 $15'$ 所经历的时间：

$$t = SS'/v = 2 \times 15' / \sin 23.5^\circ / 0.986^\circ / \text{天} = 1.3 \text{ 天}$$

(李鉴)

4、在全天肉眼可以看见的星有6000颗，估计一下其中有多少是拱极星(即永不落的星)：

- 1) 在离开北极1度的地方。
- 2) 在赤道以北1度的地方。

注：球面积的计算公式是： $S = 4\pi R^2$

**解答** 除了球表面积的公式，我们需要用到球冠的计算公式： $S' = \pi(h^2 + R^2)$ 。先计算球的表面积： $S = 4\pi$  平方弧度 = 41253 平方度。

1) 恒显圈为赤纬大于 $+1^\circ$ 的球冠， $h = R - R \times \sin 1^\circ = 0.9825R$ ，代入球冠的计算公式，得 $S' = 20445$  平方度，在假设全天肉眼可见的6000颗星是均匀分布的情况下，求得位于恒显圈中的星数为：

$$6000 \times S'/S = 2965 \text{ 颗}$$

2) 恒显圈为赤纬大于 $+89^\circ$ 的球冠，我们可以近似利用 $S = \pi a^2$  来计算其表面积，式中 $a = 1^\circ$ ，则 $S'' = \pi$  平方度，假设全天肉眼可见的6000颗星是均匀分布的，则位于恒显圈中的星数为：

$$6000 \times S''/S = 0.46 \text{ 颗}$$

5、一艘飞船在日落的同时从靠近地球赤道的人造卫星发射基地出发，它的驾驶员希望连续观测太阳位于地平线上的

情景。飞船的运动速度应为多少？详细解释飞船的运动。

### 解答

地球的平均半径为6378千米，我们可以算出在赤道上的自转速度为 $0.46 \text{ 千米/秒} = 1669.76 \text{ 千米/小时}$ 。由于地球是在自西向东自转，因此飞船要以 $1669.76 \text{ 千米/小时}$ 的速度自西向东运动(假定飞船距地面的距离与地球半径相比可以忽略不计)，才能抵消地球自转的影响，使驾驶员能连续观测太阳位于地平线上的情景。

6、假设在处于赤道的某地观测到一次日全食，此时太阳正在天顶，而且月球的影子也是沿赤道运动的，请计算影子相对于观测者的速度。

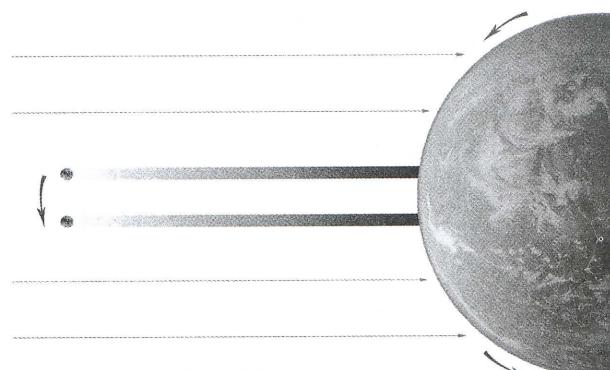
### 解答

如下图所示，图中平面代表赤道面，月亮的影锥以矩形代替。日全食的持续时间最多只有7分多钟，这段时间里太阳的运动可以忽略，只需考虑赤道上的观测者随地球自转的运动以及月亮的公转运动。在全食发生的某一给定时刻，月影在地表移动的速度等于月亮的公转线速度：

$$v_M = d \times \omega_M = \frac{384000 \text{ km} \times 360^\circ}{27.32 \text{ 天}} = 1.022 \text{ km/s}$$

赤道观测者的速度为：

$$v_E = \omega_E \cdot R_E = 6378 \text{ km} \cdot 360^\circ / \text{天} = 0.464 \text{ km/s}$$



月影的移动方向与地球自转一样，都是至西向东，所以月影相对于观测者的速度为：

$$V = v_M - v_E = 0.558 \text{ km/s}$$

(李鉴)

## 实测试题

国际天文奥赛组委会 供稿 / 李鉴 翻译、解答

7、写出今夜40厘米望远镜的观测计划。你在今夜将观测表中(见下页)的哪些星？你可以使用所有的观测时间(从20时

| 待观测星           | V(mag) | $\alpha$       | $\delta$ (J1950.0) |
|----------------|--------|----------------|--------------------|
| 1 $\eta$ Aql   | 3.5    | $19^h 49^m .9$ | $0^\circ 3'$       |
| 2 $\beta$ Per  | 2.1    | 3 04.9         | 40 46              |
| 3 X Cyg        | 14.2   | 19 48.6        | 32 47              |
| 4 R Aqr        | 12.4   | 23 41.2        | -15 34             |
| 5 $\alpha$ Ori | 1.3    | 5 52.4         | 7 24               |
| 6 RW Vir       | 6.7    | 12 04.7        | -6 29              |

月出时间: 21:17:26      月相: 0.77  
0时的恒星时:  $s_0 = 0:31:04$       当地的区时LT=UT+3  
天文台坐标:  $\lambda = 2^h 16^m$ ,  $\phi = 44^\circ 43'$

到5时30分)。写出观测次序。

(注: 考试时间为1996年9月29日)

解答

制定观测计划要遵循几个原则: 1、首先观测快要落山的天体; 2)尽量在天体接近天顶(子午圈)时观测它, 这样可以将大气消光、折射、视宁度等效应带来的负面影响降至最低; 3)月出之前观测较暗的天体, 月亮升起后观测较亮的天体, 并且尽可能观测离月亮的角距离较远的天体。

我们来分析有没有天体是不可能被观测到的。观测开始的时刻是当地的区时(LT)晚上20点, 地方平时为:

$$T = 20^h - 3^h + 2^h 16^m = 19^h 16^m$$

地方恒星时约为:

$$s = T + s_0 = 19^h 47^m$$

观测结束时的地方恒星时约为 $5^h 20^m$ , 根据:

$$s = \alpha + t$$

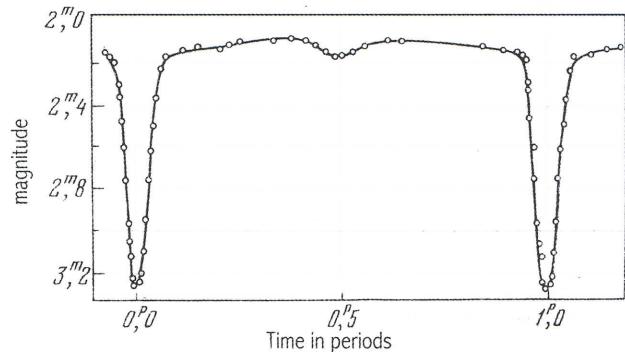
其中 $s$ 为观测时的地方恒星时,  $\alpha$ 为天体的赤经,  $t$ 为天体的时角, 以子午圈(即南北圈)为起点、自东向西起量, 其值为0~24小时(记住, 春分点的时角就是恒星时), 对赤纬 $< 0$ 并且赤经在 $10^h 20^m \sim 13^h 16^m$ (估计值, 误差只有几分钟)内的天体在整个观测时段都位于地平线以下, 所以RW Vir无法观测。

一共要观测5个目标, 时间为9.5小时, 平均每个目标约2小时。观测开始时, 地方恒星时 $s = 19^h 47^m$ ,  $\eta$  Aql和X Cyg这时几乎都处于上中天,  $\eta$  Aql的纬度更低, 将比X Cyg更早落山, 但由于21: 17月亮升起后会不利于观测较暗的天体, 所以应该先观测X Cyg, 然后观测 $\eta$  Aql, 接着观测R Aqr, 然后是 $\beta$  Per, 最后观测 $\alpha$  Ori。

8、右上图是食双星的光变曲线。估计双星的半径比 $R/r$ , 假设是中心食, 并且伴星更暗。

解答

主星与伴星半径分别记为 $r_1$ 、 $r_2$ 。两星没有相互遮掩时, 观测到的总亮度为两星的亮度和:  $F_0 = F_1 + F_2$ , 总视星等为 $m_0 = 2.1$ 等(从图上量出)。主星掩伴星时,  $F_{12} = F_1$ , 对应图中星等的小幅下降, 总视星等



为 $m_{12} = 2.2$ 等。伴星掩主星时:

$$F_{21} = F_2 + F_1 - (r_2/r_1)^2 \times F_1$$

对应图中的星等大幅下降, 总视星等为 $m_{21} = 3.25$ 等。根据 $m \sim -2.5 \lg F$ , 有:

$$m_{12} - m_0 = -2.5 \lg \frac{F_{12}}{F_0} = -2.5 \lg \frac{F_1}{(F_1 + F_2)}$$

$$m_{21} - m_{12} = -2.5 \lg \frac{F_2 + F_1 - (r_2/r_1)^2 \times F_1}{F_1}$$

代入数据、联立以上二式, 可以求得:  $r_2/r_1 = 0.85$ 。

注: 由于恒星的亮度不仅与半径有关, 还与它的有效温度相关, 因此不能简单地认为 $F$ 仅与 $r^2$ 成正比。

## 观测试题

9.1、将月亮和木星的距离以度来表示, 并说明你是如何得到结果的。

9.2、找出秋季夜空中最亮的五颗星, 并说出其名字。哪一颗最亮?

9.3、定出从新月到今天的天数。

# 2000年第五届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/李鉴 翻译、解答

### 低年组

1、日历。在中世纪使用最广泛的是儒略历。目前多数国家都使用格里高利历，二者相差13天：即目前对同一个日子，儒略历比格里高利历落后13天。两种历法上一次日期相同的情况发生在公元3世纪。计算在哪一个世纪，这种差别为1年，例如，格里高利历的10月22日会与儒略历中的10月22日再次相同？

**解答** 根据常识，每四个世纪，儒略历就会比格里高利历落后3天。二者要相差一年（365天），须经历：

$$365 \times 4/3 = 487\text{个世纪}$$

（不考虑闰年与非闰年的区别。）下一次它们相同将会发生在 $487+3=490$ 世纪。当然再过 $487 \times n$ 个世纪（n为整数），它们也将一致，所以今后二者日期相同的现象将出现在：

$$N = 3 + 487 \times n \text{ 世纪}$$

2、两颗恒星有相同的视星等和光谱型。其中一颗是另一颗的两倍远。这两颗星的半径比为多少？

**解答** 光谱型相同的恒星，有效温度也相等（回忆一下恒星的光谱分类）。两星的距离之比 $d_1/d_2 = 2$ ，根据 $m \sim -2.5 \lg F$ ,  $M \sim -2.5 \lg L$ , 这里 $m$ 、 $M$ 、 $F$ 、 $L$ 分别代表天体的视星等、绝对星等、亮度、光度，以及 $m - M = 5 \lg d - 5$ ，可知：

$$M_2 - M_1 = -2.5 \lg \frac{L_2}{L_1} = 5 \lg \frac{d_1}{d_2} = 5 \cdot \lg 2 = 1.5$$

根据斯特藩-玻尔兹曼定律 $L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$ ，可以求出：  
 $R_2/R_1 = \sqrt{L_2/L_1} = 0.5$ 。

### 高年组

1、观测到一个类星体中一条发射谱线的波长为 $15000\text{\AA}$ ，它的实验室波长为 $3000\text{\AA}$ 。估计：

- 1) 这个类星体的退行速度有多大？
- 2) 利用哈勃定律（假设它仍适用），求类星体的距离。哈勃常数取为 $H = 75 \text{ km/s/Mpc}$ 。

两问的答案的误差为30%。

**解答** 1) 这颗类星体的红移为： $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0 = 4$ ，需要用相对论红移公式：

$$z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1$$

可以求出它的退行速度为： $v = 0.923c = 27.7 \times 10^4 \text{ km/s}$   
2) 根据哈勃定律 $v = H_0 \times d$ ，可知类星体的距离为：

$$d = v/H_0 = 3.7 \times 10^9 \text{ pc} = 120 \text{ 亿光年}$$

2、俄罗斯联邦的科米共和国的年轻科学家们几天前发现了一个类似食双星的新天体。但是这个天体的光变周期并不稳定：它的视星等通常为24.32等，每隔7~11秒，它就变暗至24.52等，维持0.2~0.3秒后又恢复初始亮度。经过研究发现这个“天体”实际上是一群绝对黑色的猫的眼睛，它们坐在太阳系中一个小型的绝对黑色物体上，正在望向太阳。而且其中一只猫还在眨眼睛。计算这群猫的数量。画一张图解释你的答案。假设所有的猫的大小都一样。

**解答** 尽管猫本身也有一定的温度，会发出红外辐射，但与它们的眼睛反射的太阳光的亮度相比可以忽略不计。以 $n$ 表示猫的数量，当所有猫都睁着眼睛时，它们的眼睛反射太阳光形成的“光源”的星等为： $m_1 = 24.32$ 等，当其中一只猫闭上眼睛时，总星等下降为： $m_2 = 24.52$ 等，设每只猫眼反射太阳光后发出的辐射的亮度为 $F$ ，则：

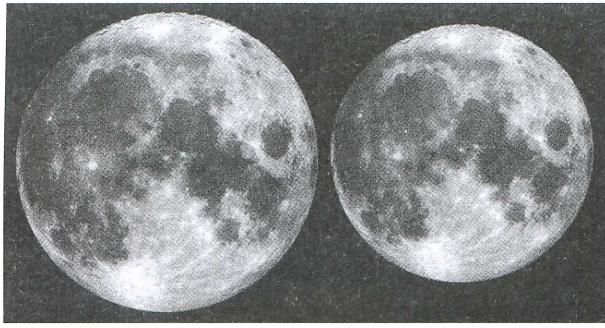
$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg(n \cdot F) + 2.5 \lg[(n - 1) \cdot F]$$

代入数据可以求出， $n = 6$ 只。

### 低年组和高年组

3、同一台望远镜、同一个相机拍摄了两张月亮的照片（望远镜放置在地球上）。第一张照片是月亮在近地点附近拍摄的，第二张是月亮在远地点附近拍摄的。通过这些条件计算月亮公转轨道的偏心率。并且估算这两张照片拍摄时刻的最短时间间隔。

**解答** 设月球轨道偏心率为 $e$ ，半长径为 $a$ ，月球半



径为 $r$ , 则在近地点和远地点所见的月亮视直径分别为: $r/[a(1-e)]$ 、 $r/[a(1+e)]$ , 二者之比的数值可以从给出的照片量出, 约为1.17, 即:

$$(1+e)/(1-e) = 1.17$$

可以求出 $e = 0.078$ 。

朔望月的平均长度为 $T_1 = 29.53$ 天, 近点月的长度 $T_2 = 27.554$ 天。两次拍摄的时间间隔必定等于朔望月的整数倍( $n_1 \times T_1$ ), 而且等于近点月的( $n_2/2 + 0.5$ )倍,  $n_1$ 、 $n_2$ 均为正整数:

$$n_1 \times T_1 = (n_2/2 + 0.5) \times T_2$$

即:  $n_1 = 0.46654(n_2 + 1)$ , 计算可知:  $n_2 = 14$ 时,  $n_1 = 6.998 \approx 7$ , 即两次拍摄的最短时间间隔为:

$$t = n_1 \times T_1 = 206.71 \text{ 天}$$

也就是7个朔望月, 7.5个近点月。

4、宇宙飞船里的一名宇航员在海拔100km的高度飞跃月面的冷海(Mare Frigoris)区域。另一个位于月球表面的宇航员则在冷海上行走, 这时这里是白天(被太阳所照耀着)。飞船里的宇航员能用一个放大倍数为20倍的双筒望远镜看到月面上的宇航员吗? 考虑所有的可能性。

**解答** 首先考虑分辨率问题, 设宇航员的身高为 $h$ 米, 月面上的宇航员对飞船上观测者的张角最大为:

$$\alpha/2 = \arctan \frac{h/2}{100000}$$

假设 $h = 1.8$ 米, 则 $\alpha = 3.7''$ , 在双筒镜中看来, 他的角大小为:  $\beta = 20 \times \alpha = 74'' > \theta = 1'$ ,  $\theta$ 为人眼的极限分辨率, 即用双筒镜可以把月面宇航员分辨出来。

其次, 考虑月面宇航员的亮度。可以对比满月的星等求出宇航员的星等。对满月, 地球上的观测者看到的亮度为:

$$F_M \sim \alpha_M \cdot 2\pi \cdot R_M^2 \times \left(\frac{1}{d_{E-M}}\right)^2 \times \left(\frac{1}{d_{S-M}}\right)^2$$

其中 $\alpha_M$ 为月亮的表面反照率,  $R_M$ 为月亮的半径,  $d_{E-M}$ 为地球-月亮之间的距离,  $d_{S-M}$ 为太阳-月亮的距离。

对月面宇航员, 飞船宇航员观测到他的亮度为:

$$F_A \sim \alpha_A \cdot A_A \cdot \left(\frac{1}{d_{A-A}}\right)^2 \times \left(\frac{1}{d_{S-M}}\right)^2$$

其中 $\alpha_A$ 为宇航服的表面反照率,  $A_A$ 为宇航服的反射面积,  $d_{A-A}$ 为两个宇航员之间的距离。

月面的平均反照率为7%, 假设宇航员宇航服的反光率为100%, 宇航服的反光面积约为0.9平方米。代入数据可以求出:

$$m_A - m_M = -2.5 \lg \frac{F_A}{F_M} \approx -2.5^m$$

满月的视星等 $m_M = -12.6$ 等, 所以地面宇航员的视星等约为-15等。但是满月在飞船上的宇航员看来亮度大约为-30等, 亮度太高, 因此他无法用肉眼区分出只有-15等的月面宇航员。另外, 如果他直接用双筒望远镜观测, 将灼伤眼睛。

综上所述, 飞船上的宇航员不能用双筒镜看到月面宇航员。

6、一台口径1.2米的施密特望远镜, 视场为 $6^\circ \times 6^\circ$ 。估算如果要覆盖全天, 你需要拍摄多少张照片(请给出最大和最小值)? 解释你的结果。要达到这个目的, 你的望远镜应该放置在哪里?

**解答**

全天一共有 $4\pi$  平方弧度, 也就是:  $4\pi \times (57.3^\circ)^2 = 41238$  平方度, 望远镜的视场为36平方度, 要想拍摄全天, 至少需要拍:

$$N = 41238/36 = 1145.5 \sim 1146 \text{ 张照片}$$

但由于天球是球形的, 而望远镜视场为矩形, 所以必有一些照片在衔接处有重叠。

考虑最简单的拍摄策略, 从天赤道附近开始拍摄, 拍完天赤道区域(一条 $360^\circ \times 6^\circ$ 的环带, 记为0环带), 共拍摄 $360^\circ/6^\circ = 60$ 张。然后拍摄更高纬度处的环带(依次记为1、2……15, 共15个), 这些环带的半径(小圆)分别为:

$$r_1 = \cos(3^\circ + 3^\circ), r_2 = \cos(3^\circ + 6^\circ + 3^\circ)$$

$$r_3 = \cos(3^\circ + 2 \times 6^\circ + 3^\circ), \dots$$

通式为:

$$r_n = \cos(n \times 6^\circ)$$

第n条环带需要拍摄的照片数为:

$$N_n = [2\pi \times r_n/6^\circ] = [2\pi \times r_n/0.105], n = 1, 2 \dots 15$$

[ ]表示取整后加1, 拍摄半边天球所需的总照片数为:

$$N = \sum N_n = \sum_{n=1}^{15} [2\pi \times \cos(n \times 6^\circ)/0.105] = 550$$

根据对称性可以求出全天需要拍摄的照片总数为:

$$N' = 550 + 550 + 60 = 1160$$

因此要想拍摄全天, 需要拍摄1146~1160张照片, 望远镜应该放置在赤道上。

# 2002年第七届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题（部分）

国际天文奥赛组委会 供稿/杨轶 解答

### 高年组和低年组

1、大约公元前1100年，中国天文学家在夏至日和冬至日测量了太阳的最大高度，夏至日得到 $h_1 = 79^\circ 7'$ ，冬至日得到 $h_2 = 31^\circ 19'$ 。在两种情况下，太阳处在天顶的南边。求出观测者所在地的地理纬度，同时计算黄道与赤道在那时的交角。

**解答** 夏至日和冬至日太阳均位于天顶南边，说明测量地点在北回归线以北。夏至日正午太阳高度 $h_1 =$ 天赤道与地平夹角+黄赤交角=79度07分；冬至日正午太阳高度 $h_2 =$ 天赤道与地平夹角-黄赤交角=31度19分。

两式相加，得到：天赤道与地平夹角=55度13分。

两式相减，得到：当时的黄赤交角=23度54分。

而北天极高度=90°-天赤道与地平夹角=当地地理纬度，因此观测者所在地的地理纬度=90度-55度13分=34度47分。

3、我们接收到来自地外文明的一个信息，你的任务是破译它。这个信息是：

1000110001001  
1001001001001  
1001111001001  
1001001001001  
1001001000110

这是全部信息，不是它的一部分。

**解答** 这道题与天文无关，更像一道脑筋急转弯。如果我们把0用空格代替，把1用m代替，可以得到：

m mm m m  
m m m m m  
m mmmm m m  
m m m m m  
m m m mm

字符排列成一个图形，组成的字母为IAU，也就是国际天文学联合会（International Astronomy Union）的缩写。

注：原题中没有把字符按照13列5行排列，而是连在一起，破译的难度更大。可以从以下思路考虑，地外文明给我们发送的信息应该不会是地球人使用的二进制，因为我们无法明白1和0分别代表什么意思，这些信息最有可能是一幅图像。仔细分析这段信息，能发现它包含65个数字，65只能

分解为 $5 \times 13$ ，所以我们可以尝试一下把数据流按照5行13列和13行5列进行排列，结果就是IAU或IAV。当然外星人不可能懂英语，更不会知道地球上还有IAU存在。

(李鉴)

4、把自己想象成一只北极熊，2002年全年都待在北极。试算，当太阳在地平线上最高点时黄道以下的天空有多大？在何时（一天内）黄道下的这块天空会再出现一次？试画一张北极熊在北极的图来解释说明。

提示：在北极，太阳的地平高度最大为23.5度（黄赤交角的数值），发生在夏至日。黄道与地平面总是成23.5度的夹角。

**解答** 太阳在夏至日的时候，在北极看来，有最大地平高度。此时“黄道以下的天空有多大”就是黄道与地平线所围的面积的大小，也就是球的表面积的 $23.5/360$ 。球的表面积：

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \times 1\text{rad}^2 = 4\pi \times \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)^2 \approx 41253 \text{ 平方度}$$

因此黄道以下天空的面积为：

$$S' = S \times \frac{23.5^\circ}{360^\circ} \approx 2693 \text{ 平方度}$$

同年冬至日，太阳黄经改变了180度，且位于地平线以下最低处时，这块天空还会再出现一次。

5、试估计火星与地球大冲时的轨道速度 $V_g$ 。地球的轨道速度 $V_1 = 29.8$ 千米/秒，地球和火星的轨道偏心率分别为 $e_1 = 0.017$ 和 $e_2 = 0.093$ ，太阳到火星的平均距离为 $a_2 = 1.524$ 天文单位。

**解答** 根据活力积分的结果，动能与势能之和为常量：

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = -\frac{\mu m}{2a}$$

得到活力公式：

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

此处 $\mu = G(M+m)$ ， $r$ 为向径，此处可取为标量， $a$ 为轨道半长径， $v$ 为一个天体相对另一天体的速度。火星轨道半长径取 $a_2 = 1.524$ AU，则火星大冲时，位于与地球同侧的近日点，距太阳 $r_2 = a_2(1 - e_2) \approx 1.382$ AU。对地球轨道速度的

---

讨论，近似取圆轨道。地球和火星对于太阳，有：

$$v_1^2 = \frac{\mu}{r}, v_2^2 = \mu \left( \frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2} \right)$$

代入  $a_2$ 、 $r_2$ ，两式相除，取  $r = 1\text{AU}$ ，有

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = 0.791$$

这样，可算出火星大冲时的轨道速度  $v_g = v_2 \approx 26.5$  千米/秒。

6、用一架中等大小的望远镜有可能从主小行星带中记录到5千米大小的小行星，那么用同样的望远镜和同样的方法能记录到Kuiper带上多大的小行星？

有关小行主星带和Kuiper带的所有必须的参数应该记住。考虑天体的位置关系分别与火星和冥王星类似。

解答

Kuiper带大概的范围大概是距太阳30到55个天文单位，小行星带大概的范围是1.9到4.2个天文单位。估算时不妨以距太阳  $a_1 = 2.7\text{AU}$  处的主带小行星来讨论。对于Kuiper带天体，不妨取距太阳  $a_2 = 45\text{AU}$  处的小天体来讨论。

小行星靠反射太阳光而被我们看到，因此可以通过比较二者经太阳光照射后反射到地球处的光流量来讨论此问题。到达  $a_1 = 2.7\text{AU}$  和  $a_2 = 45\text{AU}$  的太阳光流量之比为：

$$\frac{S_1}{S_2} = \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \left( \frac{45}{2.7} \right)^2 \approx 278$$

在地球上观测，如果只让望远镜记录背离太阳方向的小行星（即冲日时的小行星，此时它最亮），从两处返回到地球处的光流量之比为：

$$\frac{R_1}{R_2} = \left( \frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} \right)^2 = \left( \frac{44}{1.7} \right)^2 \approx 670$$

因此，同样大小的主带与柯伊伯带小行星反射到地球的光流量之比为：

$$\frac{S_1}{S_2} \times \frac{R_1}{R_2} = 186260$$

设它们的反照率相同，对同等视亮度的主带与柯伊伯带小行星，可知它们的反光面积之比为186260。因此它们的半径之比为： $\sqrt{186260} \approx 432$ ，也就是说，可以用这台望远镜记录到Kuiper带直径  $5\text{ km} \times 432 \approx 2160\text{ km}$  的天体。

# 2003年第八届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/朱进 翻译/刘学富 译解

### 低年组

1. 今天是1957年10月4日世界第一颗人造卫星“Sputnik I”（“宇宙之耳”，前苏联造）成功发射、标志“太空时代”开始的46周年纪念日，这个卫星的大小与篮球相当，是直径580mm、质量为83.6kg、表面厚度2mm的精制铝合金板。俄语中的“Sputnik”意思是“伴侣”的意思（即天文意义上的“卫星”）。这颗卫星的轨道是椭圆轨道，发射之后，它在近地点距离地球表面227km，在远地点时为945km。它一直在轨飞行，直到1958年1月4日。使用必要的图和计算来估计，当时用肉眼是否能观测到这颗卫星？

**解答** 本题题干所给的信息太少，不足以求出卫星的视星等。让我们先来比较一下由肉眼观测来自远地点的“宇宙之耳”卫星的光流量和来自月球的光流量：以W表示太阳的光流量， $\alpha_s$  表示观测天体的反照率。

由月球到达观测者的流量为：

$$I_M = W\alpha_M S_M / (2\pi R_{M-O}^2)$$

由卫星到达观测者的流量为：

$$I_I = W\alpha_I S_I / (4\pi R_{I-O}^2)$$

式中 $S_M$ 和 $S_I$ 分别表示月亮和卫星的反光面积，正比于各自直径( $d_M$ 和 $d_I$ )的平方， $R_{M-O}$ 与 $R_{I-O}$ 为月亮和卫星到地球的距离。在解题中我们不考虑散射和随机的辐射与镜子的散射，也没有必要推算在 $2\pi R_{M-O}^2$ 和 $4\pi R_{I-O}^2$ 之间的2与4的差异，这是由于月球只有一面向着观测者。

由于卫星表面是高精度的铝合金，所以我们可以假设 $\alpha_I = 1$ ，因此有：

$$\frac{I_M}{I_I} = \alpha_M \frac{S_M}{S_I} \frac{4\pi R_{I-O}^2}{2\pi R_{M-O}^2} = 2\alpha_M \left(\frac{d_M}{d_I}\right)^2 \left(\frac{R_{I-O}}{R_{M-O}}\right)^2$$

考虑到卫星在近地点时最亮，并由行星资料表选用必须的数据用来计算：(月球的反照率 $\alpha_M = 0.07$ )，可得：

$$\frac{I_M}{I_I} = 0.14 \cdot \left(\frac{3475000}{0.58}\right)^2 \left(\frac{2.27 \cdot 10^5}{3.72 \cdot 10^8}\right)^2 = 1.87 \cdot 10^6$$

因为：

$$m_M - m_I = -2.5 \lg \frac{I_M}{I_I} - 2.5 \lg (1.87 \cdot 10^6) = -15.7$$

所以月亮与卫星的星等差为15.7等。

已知满月的视星等为-12.7等，因此卫星的星等为 $m_I = 15.7 - 12.7 = 3.0$ 等。人的眼睛可以看到6等的天体，卫星Sputnik I在天顶时是3等，该卫星可以直接用肉眼看到。

2. 恒星天文学家们为了获得有关宇宙结构的信息在夜间使用光学望远镜观测，如果有可能把他们到目前为止所收集的所有能量都用来使一个普通游泳池( $50 \times 20 \times 2 \text{ m}^3$ )的水的温度升高，以数量级的精度估计水的温度可上升多少度？水的热容量是 $4200 \text{ J/(kg K)}$ 。太阳的辐射常数等于 $1.37 \text{ kW/m}^2$ 。

**解答** 大望远镜仅仅在20世纪才有，5米口径的望远镜等于100个50厘米望远镜的工作面，到20世纪末只有12个超过5米的大望远镜建成。

我们假定所有天文望远镜的总面积是 $1000 \text{ m}^2$ ，观测了30年，每年365天，每天夜晚观测8小时的时间，这大约有 $3 \times 10^8$ 秒。通常天文学家不观测亮的天体，特别是用大望远镜更是如此。我们估算中假定观测上限平均星等是1等星（应当知道观测手段包括：研究人员直接用眼睛观测，或用照相底片，也可以用CCD探测器来获得宇宙结构的知识，这对于理解和解题是重要的）。

太阳的视星等是-26.8等，太阳辐射常数为 $1.37 \text{ kW/m}^2$ ，可知1等星的辐射流量是 $10^{-27.8/2.5} \times 1.37 \text{ kW/m}^2 \approx 10^{-8} \text{ W/m}^2$ 。所以， $1000 \text{ m}^2$ 的接收面积，在 $3 \times 10^8$ 秒内收集到一个1等星的辐射能量的数量级是3000J。这个能量仅仅够加热一杯茶水，使它升温几度。但实际上，仅有十分之一的能量是可以利用的，由于照相底片和现代的CCD效率仍然是低的，可探测的只有这能量的百分之几，所以更确切地说，这能量也就使一杯水的温度升高十分之一度。

体积为 $50 \times 20 \times 2 \text{ m}^3$ 的游泳池水的质量是 $2 \times 10^6 \text{ kg}$ ，相当于 $10^7$ 个玻璃杯的水，所以估计游泳池水的温度能升高不到 $10^{-8}$ 度。

用以解题的假设参量有：所有天文专业望远镜的总面积是 $1000 \text{ m}^2$ ；观测的累积时间大约 $3 \times 10^8$ 秒；通常天文学家不观测亮天体，最亮的天体平均约为1等。太阳的视星等为-26.8等，太阳的辐射流量已知，而且，由于CCD的观测效率低，有效能量不会超过接收总能量的10%。

3. 上一届天文奥赛题中提到北极熊，北极熊依然坐在

北极，但是今年出现了一个新来的企鹅坐在南极。最近，在极夜结束后，企鹅观测到了日出。问在这时北极熊看到了什么？画出当企鹅在地平线上正好看到半个日面的瞬间北极熊看到的情况。假设地球是球体，答案应通过画一个包含北极熊在北极的图来进行解释；图中应有必要的尺寸或角度的大小。自己回忆一下有关这两种动物的必要信息。

**解答**

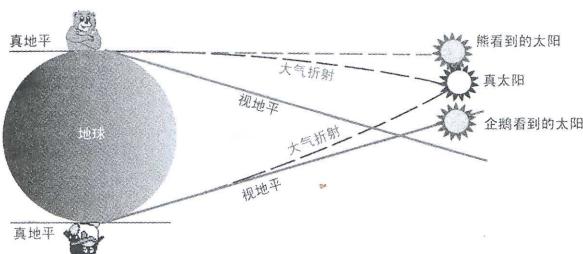
如果按照完全对称的情况，北极白熊在这个时候应当观测到日落，但是如果你回答：“白熊观测到日落”，这是不正确的。几天之后才会看到日落，这里必须考虑两种情况：第一，对于任意观测者，由于眼睛离地表有一定的高度，他所看到的地平线（视地平）实际上要低于真正的地平线（数学地平）。比如一个人站在平坦的地面上，她看到的视地平要比数学地平低 $2.5'$ ，这可由以下方法计算出来：设 $R$ 是地球半径， $h$ 为眼睛离地球表面的垂直高度（取为 $1.6\text{m}$ ），视地平比数学地平低的角度为 $\theta = \arccos[R/(R+h)]$ ，由于 $\theta$ 很小且 $h$ 远小于 $R$ ，因此：

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}} \text{ 弧度} = 2.5'$$

企鹅的大小是不同的，我们可以取帝企鹅的尺度，它的眼睛高度大约在地球表面一米高，视地平比数学地平大约低 $2'$ ，上面提及的白熊是坐在那儿，他的眼睛水平高度也是一米，视地平大约也低 $2'$ 。如果白熊是站在那，他的眼睛的水平高度就是2米，因而视地平大约低 $3'$ 。这意味着，如果企鹅看到太阳中心在地平圈上的时候，在北极，这时太阳中心已经在地平圈（数学地平）上 $2'$ 了。坐着的白熊看到太阳已在地平圈以上 $4'$ ，亦即太阳视半径的四分之一已在地平之上了。视地平低于数学地平的问题在解题时应当考虑。

第二，地球大气对光有折射作用，折射的数值大小取决于天气情况，在地平方向大气折射角平均为 $35'$ 。所以，在南极当太阳的视面中心在南极的地平圈（数学地平）上的时候，在北极太阳仍然没有开始下落。事实上，南极的大气折射角是 $35'$ ，而北极大约是 $25'$ （不是 $35'$ ，由于这时太阳不是在地平圈上，而是在高于地平圈之上）。大气折射问题在本题中是主要考虑因素。

结论：北极坐着的白熊看到的太阳高度为 $4' + 35' + 25' = 64'$ ，即大约 $1^\circ$ ，示意图如下所示。



4. 今年8月28日 $17^h 56^m$ UT发生了火星大冲，下一次大冲发生在2018年，计算那次大冲的具体日期，解题过程中只能使用提供的“行星数据表”中的数据。

**解答**

令 $T_E$  和 $T_M$  分别表示地球与火星公转的恒星

周期，利用火星的会合周期公式 $1/T_S = 1/T_E - 1/T_M$ ，可求得会合周期为：

$$T_S = T_E \times \frac{T_M}{T_M - T_E} = 779.95 \text{ 天}$$

即火星每相隔780天发生一次冲。

下次大冲的计算如下：如果是在2018年8月28日发生大冲的话，间隔大约 $15 \times 365 + 4 = 5479$  日，约为7个会合周期。这意味着2018年的大冲是在7个火星会合周期（即5459.65天）之后发生，因此其确切日期应该在2018年8月28日之前， $5479 - 7 \times 779.95 = 19.35$ 天，即在8月28日前19.35天，所以答案应该是2018年8月9日。

5. 近来某些流行报刊的作者，由于缺少轰动新闻，散布流言说美国人没在月球上登陆，阿波罗计划是20世纪最大的故弄玄虚。他们给出了一些例证。比如，为了产生引力很弱的感觉，可以在好莱坞使用不同走片速度的胶卷，拍摄一个人的运动和跳跃的镜头。

请计算一下，在地球上摄影棚里，拍电影的时候需要使用什么速度的胶片拍摄（每秒多少帧）才能使得以标准速度（电视中每秒25帧）放映和观看时给人一种印象：事件是在月球上发生的感觉。

**解答**

在月球上的自由落体比在地球上落得慢。根据“行星资料表”可以知道在地球和在月球上的重力加速度。由于 $h \sim g \cdot t^2$ ，因此有 $t \sim 1/\sqrt{g}$ ，即自由落体的时间与重力加速度的平方根成反比，地球与月亮的重力加速度平方根之比为：

$$\sqrt{g_E/g_M} = \sqrt{9.81/1.62} = 2.46$$

因此，所有在月球上的运动过程比在地球上的运动过程慢2.46倍，在地球摄影棚里拍电影的时候需要使用胶片拍摄的速度比拍摄电视中的标准速度要快2.46倍，即：

$$V_E = V_M \times 2.46 = 25 \times 2.46 = 61.5 \text{ 帧}/\text{秒}$$

6. 在北方国家的一个神话故事里，人们请鹿神告诉他们天上有多少颗星星。鹿神用了几个星期的时间数星星，发现天空上共有252707颗恒星。已知人们在全天夜空用肉眼直接观测，可以看到6000颗星。由此可以得到结论：鹿神的眼睛比人眼的瞳孔大。问鹿神眼睛瞳孔的直径有多大？

假设恒星在天空均匀分布，鹿神和人眼睛视网膜的灵敏度是一样的。

**解答**

这个试题的目的是使学生了解增加观测者眼睛瞳孔直径，可以达到观测更多星的效果。由于人们在全天用肉眼可以看到6000颗星，而鹿神可以看到252707颗星，所以鹿神比人眼能看到的星多 $252707/6000 \approx 42.12$ 倍。如果恒星在天空是均匀分布的，这表明：对于鹿神，可见宇宙部分的范围（体积）是人眼观测到的宇宙部分的范围（体积）的 $42.12 \approx 3.48^3$ （或 $42.12 \approx 42.875 = 3.5^3$ ）倍。这意味着，鹿神看到的宇宙直径 $d_1$ 是人眼看到的宇宙直径 $d_2$ 的3.5倍（严格来讲，不同亮度的恒星，应当分别考虑然后取和，但是这将得到同样的结果）。



根据视星等 $m$ 和绝对星等 $M$ 之间的关系： $m - M = 5 \lg r - 5$ （式中 $r$ 为天体到地球的距离，以秒差距为单位），很容易算出鹿神的极限星等 $(m_1)$ 和人类极限星等 $(m_2)$ 的关系为：

$$m_1 - m_2 = 5 \lg(d_1/d_2) \text{ 等} \quad \dots \dots (1)$$

另一方面，根据目视星等的定义 $m \sim -2.5 \lg F$ ，可知： $m_1 - m_2 = -2.5 \lg(F_1/F_2)$ ，其中 $F_1$ 和 $F_2$ 分别为鹿神与人眼接收到的星光流量，与接收面积成正比，也就是与两者瞳孔大小的平方成正比。亦即：

$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg(F_1/F_2) = -2.5 \lg(R_1/R_2)^2 \quad \dots \dots (2)$$

联立两式可知，若人眼的瞳孔直径 $R_2$ 是6mm，则鹿神的瞳孔直径 $R_1$ 是：

$$R_1 = 6 \text{ mm} \times d_1/d_2 = 6 \text{ mm} \times 3.5 = 20 \text{ mm}$$

## 高年组

第1~3题及“行星数据表”与低年级相同

4. 火星大冲发生在今年8月28日世界时 $17^h 56^m$ ，下一次大冲将发生在2018年夏天。有人没听明白这件事，把2018年不是当成一次大冲，而是当成了一次普通的冲。假设这个行星叫“火星2号”，求出它的轨道参数，并估计它在平均冲日的位置时，地球上观测到的它的视星等。假设“火星2号”的轨道为圆轨道，它的物理特性与火星相同。

**解答** 如果“火星2号”下一次冲将发生在2018年夏天，这意味着它的会合周期近似是 $T_S = 2018 - 2003 = 15$ 年，所以“火星2号”的轨道周期可以由公式： $1/T_S = 1/T_E - 1/T_{M2}$ 求出，此处 $T_E$ 是地球的恒星年， $T_E = 365.26$ 天=1年。代入公式后可求出“火星2号”的公转周期 $T_{M2}$ 为：

$$T_{M2} = T_E \times \frac{T_S}{T_S - T_E} = 1.07 \text{ 年}$$

利用开普勒第三定律，可求出“火星2号”的半长轴 $a_{M2}$ 与地球轨道半长轴之比为： $(a_{M2}/a_E)^3 = (T_{M2}/T_E)^2$ ，即：

$$a_{M2}^3 = a_E^3 \times (T_{M2}/T_E)^2$$

代入 $a_E = 1$  AU（天文单位），所以：

$$a_{M2} = a_E \times \left( \frac{T_S}{T_S - T_E} \right)^{2/3} = 1.047 \text{ AU}$$

火星冲日时，与地球的平均距离为0.524 AU，最亮视星等约为-2.0等。可以认为“火星2号”的绝对星等与火星相等，因此它的视星等为：

$$m = -2.0 - 2.5 \lg \left( \frac{0.524}{0.047} \right)^2 = -7.2 \text{ 等}$$

5. 一位天文学家每天都在相同的地方恒星时进行观测，而且总是注意到太阳正好在数学地平上。问观测是在何地、何时进行的？答案必须包括解释和详细的图与可能的坐标等。

**解答** 由题意可知，观测的地方恒星时是固定的，观测天体在黄道上的坐标也是固定的。由于太阳的周年视运动沿着黄道进行，并且日出和日落的时刻都是在数学地平圈上，这只有在北极圈和南极圈地区才有可能。

在什么时间呢？这是容易求出来的。我们注意到在北极圈，6月22日的子夜时刻，地方恒星时为 $18^h$ ；在12月22日的中午时刻，地方恒星时也是 $18^h$ ；同理可知，在南极圈在6月22日的中午时刻，地方恒星时为 $6^h$ ，在12月22日子夜，也是地方恒星时 $6^h$ 。

所以，答案是只有在北极圈（地理纬度为 $+66.5^\circ$ ）地区，在地方恒星时 $18^h$ 或者在南极圈（地理纬度为 $-66.5^\circ$ ），地方恒星时 $6^h$ 的时候，天文学家总是观测到太阳在地平圈上。（注意，这里不考虑大气折射，所说的地平圈是指数学地平，不是看到的视地平；不考虑视地平比数学地平低的问题，即不同于上题中的白熊与企鹅的情况。）

6. 古希腊人早就已经知道地球的大小与恒星的距离相比小得多。比如，在一个神话中提到火与锻冶之神赫斐斯塔司，有一次不小心把他的铁砧掉了，铁砧花了整整九天才砸到地面。请估计一下按照古希腊人所描述的“天的高度”，并把它跟你所知道的天体的距离进行比较。（任何题目都可使用“行星数据表”中的数据）

**解答** 铁砧在九天后才砸到地面上，显然“天”相当高，由于铁砧的加速度不是常数，不能用 $h = (1/2)gt^2$ 公式。铁砧必然是遵循以地球为中心的椭圆轨道，地球是这个椭圆轨道的焦点，而且赫斐斯塔丢掉铁砧的地方是轨道的远地点附近，这椭圆也必然是很扁的。由此我们可以认为铁砧的9天运动几乎是沿着一个简化的椭圆轨道（ $e = 1$ ）从远地点落到地球表面上的。显然，完成一周的轨道运动要大于 $2t = 18$ 天。

我们比较一下月球绕地球的公转周期（ $T_M = 27.3$ 天）；估计我们简化的椭圆轨道半长轴的数量级与地球到月球的距离相似（ $a_M = 384000$  km）。即使不计算，我们也可以回答“天空的高度”高到可以与到月球的距离相比拟，地球的大小可以忽略。我们这里的“天空的高度” $h = 2a$ （ $a$ 是椭圆轨道的半长轴）。根据开普勒第三定律，比较铁砧的轨道与月球的轨道得到如下结果：

$$\left( \frac{0.5h}{a_M} \right)^3 = \left( \frac{2t}{T_M} \right)^2$$

所以：

$$h = 2a_M \times \left( \frac{2t}{T_M} \right)^{2/3} = 1.52a_M \approx 600000 \text{ km}$$

# 2004年第九届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/朱进、李鉴 翻译、译解

### 低年组

1、星系间的距离。在室女座星系团中，星系的密度为每立方兆秒差距 ( $Mpc^3$ ) 30个星系。请估算此星系团中星系间的距离。

**解答** 据题意可知，星系团中单个星系的平均体积为： $1/30 \text{ 立方兆秒差距 } (Mpc^3)$ ，因此单个星系的平均大小为： $(1/30)^{1/3} Mpc \approx 0.322 Mpc$ ，这也就是所要求的星系平均距离。

2、彗星。在一次日食观测中，观测者们在靠近日面的白羊座发现了一颗彗星。随后的研究表明，发现时该彗星位于轨道的远日点（到太阳的距离为  $A=8.85 AU$ ），它在近日点时离太阳的距离为  $P=1.63 AU$ 。请问它最近一次过近日点时，该彗星是否能被地球上的观测者看到？那时它位于哪个星座？答案应通过必要的公式和数值计算加以解释。

**解答** 请注意，远日点到太阳的距离  $A$  并不是彗星的半长径，半长径应为：

$$a = (A + P)/2 = 5.24 AU$$

根据开普勒第三定律  $a^3/T^2 = 1$ （周期  $T$  以年为单位，半长径  $a$  以天文单位  $AU$  为单位），代入以上数值，可得周期  $T = 12$  年。发现时彗星位于远日点，所以此后该彗星第一次过近日点应该是 6 年之后，这时地球的位置与发现该彗星时完全相同，而彗星的黄经则和它刚被发现时相差 180 度。因此，这时彗星可以被地球上的观测者看到，它的黄经与白羊座相差 180 度，应该位于天秤座。

3、掩星。金星在大距时中心掩过一颗恒星。请计算掩星的持续时间。金星和地球的轨道可视为圆轨道。

**解答** 首先要知道，金星大距时，它相对于恒星背景运动的角速率与太阳在黄道上运动的角速率相等，即：

$$\omega_{\text{金}} = \omega_{\text{日}} = 2\pi/T = 360^\circ/365 \text{ 天} = 0.986^\circ/\text{天}$$

大距时，金星与地球的距离为： $l = \sqrt{r_{\text{地}}^2 - r_{\text{金}}^2} = 103.4$  百万千米，这时从地球上看，金星直径为：

$$d \approx 2r_{\text{金}}/l = 1.17 \times 10^{-4} (\text{rad}) = 24.1''$$

因此，掩星过程的持续时间为：

$$t = d/\omega_{\text{金}} = 9.8 \text{ 分钟}$$

4、月球。昨天的观测考试中有些时候天空没有云，你应该看见过月亮。假想在同一时间有个学生在“猫峰”（克里米亚天体物理台的观测站之一）上观测月亮，使用的折射望远镜物镜直径为  $D = 8$  厘米，焦距  $F = 304.8$  厘米。在物镜的焦面上有一个照相底片。

请按照实际尺寸画出照相底片冲洗出来之后所显示的月面图像（需包含主要细节）。你的图中“上”的方向应与照相底片上“上”的方向一致，并应写出得到正确结果所需的所有计算步骤。（考试时间为 2004 年 10 月 4 日）

**解答** 10 月 3 日是下弦月，月龄约为 19。在照相底片上应该呈现一个倒置的弦月图像，考虑到底片上的像是反相，因此我们画出的月亮图上月海应为白色、月陆应为暗黑色。月亮的视直径约为 31 角分，根据底片比例尺公式  $\alpha = 206265/F$  角秒/毫米（ $F$  为物镜焦距，以毫米为单位），可知月亮像的大小应为：

$$d = 31 \times 60 \times 3048/206265 \approx 27.5 \text{ mm}$$

5、太空中的猫。正好在 47 年以前，1957 年 10 月 4 日，第一颗人造地球卫星 “Sputnik I” 发射升空。不久，动物开始进入太空。最早是苏联的狗，然后是美国的猴……法国政府也曾计划把猫送入太空，不是简单的一两只，而是一组共 5 只猫！你可以从附图上看到法国太空猫小组的照片（5 位正式机组成员和一名替补，此图从略—编者）。

在其中一项实验中，这些猫被从法国埃菲尔铁塔上射来的一束强光照亮，对实验数据进行了分析。替补猫离埃菲尔铁塔 10 千米远，实验表明，被这束强光照射时，它的每只眼睛亮度与一颗 7 等恒星相若（从埃菲尔铁塔上看）。

若卫星位于巴黎上空 250 千米的高度，请近似计算卫星上的机组猫所有猫眼和起来的总视星等是多少，并大致估算从最远多大的距离处机组猫成员可以判定来自替补猫的双眼的反光不是一颗简单的单星而是双星？设所有机组猫和替补猫彼此完全相同，埃菲尔铁塔的高度  $h = 300$  米。

**解答** 从铁塔上射出的强光 ( $F_0$ ) 到达猫眼时，猫眼接受到的光流量 ( $F_1$ ) 与猫离铁塔的距离 ( $R$ ) 成平方反比： $F_1/F_0 \sim R^{-2}$ ，从猫眼反射回铁塔的光流量  $F_2$  也与  $R$  成平方反比： $F_2/F_1 \sim R^{-2}$ ，因此  $F_2/F_0 \sim R^{-4}$ 。替补猫每只眼睛反射回铁塔的光流量为  $F_{2\text{替}}$ ，5 只机组猫反射回来的总光流量为  $10 \cdot F_{2\text{机}}$ ，根据视星等定义  $m \sim -2.5 \lg F$ ，可知替补猫单

眼和机组猫（将五只猫作为一个整体）的视星等之差为：

$$m_{\text{替}} - m_{\text{机}} = -2.5 \lg \frac{F_2^{\text{替}}}{10 \cdot F_2^{\text{机}}}$$

其中  $F_2^{\text{替}} \sim R_{\text{替}}^{-4}$ ,  $F_2^{\text{机}} \sim R_{\text{机}}^{-4}$ , 根据已知条件, 将  $R_{\text{替}} = 10$  千米、 $R_{\text{机}} = 250$  千米代入上式, 可得:  $m_{\text{机}} = 18.5$  等。

记猫眼瞳孔直径为  $D$  毫米, 两眼之间的距离为  $r$  米。则猫眼的分辨率为:  $\delta = 140/D$  角秒, 在距离为  $d$  米处猫两眼的张角为:

$$\beta = r/d \text{ 弧度} = 180 \times \frac{r}{\pi \cdot d} \text{ 度}$$

设  $D = 4$  毫米, 代入上面的关系式有:  $\delta = 140/4 = 35$  角秒。

假设  $r = 0.05$  米, 当替补猫的两眼张角  $\beta = \delta = 35$  角秒时:

$$d = 180 \times \frac{r}{\pi \cdot \beta} \approx 295 \text{ m}$$

因此, 在离替补猫 295 米以内的地方, 机组猫能分辨出替补猫的眼睛是两个。

**注:** 考虑到  $D$  和  $r$  可能有不同的估计值, 答案在 200 到 500 米之间都算正确。

6. 日食。在历史事件的重建中, 经常要计算过去的日食发生的时间和地点。然而, 如果假定地球过去的自转速率恒等于目前的自转速率, 那么按照模型计算出的日食发生地点与过去实际发生的地点并不一致, 因为实际上地球自转速率是连续减慢的。

请问在哪个世纪这样的日食实际上是发生在巴黎 ( $\lambda = 0$  度,  $\phi = 45$  度) 而不是克里米亚 ( $\lambda = +34$  度,  $\phi = 45$  度)? 已知由于地球自转减慢, 日长每 100 年增加 0.0016 秒。

### 解答

解答本题的关键在于正确理解“由于地球自转减慢, 日长每 100 年增加 0.0016 秒”这句话。因为地球自转减慢是连续的, 不能简单地认为 21 世纪每天 (包括第一天) 的日长都为 24 小时, 而 20 世纪每天 (包括最后一天) 的日长都为 (24 小时 - 0.0016 秒)。这句话应该理解为: 地球自转减慢是一个匀减速过程, 100 年以后的那一天的日长要比今天增加 0.0016 秒。依据这个思路, 很容易就能求出地球自转减慢的加速度为:

$$a = \frac{0.0016 \text{ s}}{1 \text{ 天} \cdot 100 \text{ 年}} = \frac{0.0016}{86400} \cdot \frac{365.24}{100} = 6.76 \times 10^{-8} \text{ 天/年}^2$$

第一种情况: 若根据地球恒速自转模型计算出在距今为  $t$  的某个时刻克里米亚发生了日食, 但实际情况是由于地球过去自转较快, 日食发生时克里米亚已经转出了日食带, 而地理位置更偏“西”的巴黎正好落在了日食带。也就是说在这段时间内地球自转共减慢了:

$$\Delta t = (34^\circ - 0^\circ) \times 1 \text{ 天} / 360^\circ = 0.094 \text{ 天}$$

根据匀加速度运动公式  $\Delta t = at^2/2$ , 有:

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta t}{a}} = \sqrt{\frac{0.188 \text{ 天}}{6.76 \times 10^{-8} \text{ 天/年}^2}} \approx 1670 \text{ 年}$$

即日食发生的时间是公元 334 年 (2004 年 ~ 1670 年), 为公元 4 世纪。

第二种情况: 在距今为  $t$  的某个时刻在法国发生了日食, 但是根据地球恒速自转模型计算时由于没有考虑自转减速效应, 认为法国转出了日食带而地理位置更偏“西”的克里米亚进入日食带, 这种情况下, 法国的赤经应记为 360 度。在这段时间地球自转共减慢:

$$\Delta t = (360^\circ - 34^\circ) \times 1 \text{ 天} / 360^\circ = 0.906 \text{ 天}$$

因此有:

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta t}{a}} = \sqrt{\frac{1.812 \text{ 天}}{6.76 \times 10^{-8} \text{ 天/年}^2}} \approx 5180 \text{ 年}$$

即日食发生的时间是公元前 3176 年, 也就是公元前 32 世纪。

## 高年组

1. 星系间的距离。在室女星系团中大约有 100 个星系, 该星系团覆盖了大约  $6^\circ \times 6^\circ$  的天区, 距离地球 15 兆秒差距。求此星系团中星系间的平均距离。

### 解答

$6^\circ$  约为 0.1 弧度, 根据已知条件可知: 室女星系团的线大小为  $15 \times 0.1 = 1.5$  Mpc, 因此它的体积为  $1.5^3 \approx 3.4$  Mpc<sup>3</sup>, 其中包含 100 个星系, 所以每个星系的平均体积为:  $0.034 \text{ Mpc}^3$ , 平均大小为:

$$\sqrt[3]{0.034} \text{ Mpc} \approx 0.32 \text{ Mpc}$$

此即星系团里星系间的平均距离。

**注:** 本题所给数据并不十分精确, 因此解题过程中只保留了两位有效数字。答案为 0.3 Mpc 和  $1/3$  Mpc 也是对的。

2~3. 类彗星体。在一次日食观测中, 观测者们在靠近日面的白羊座发现了两个类彗星体, 它们相距  $\alpha = 9$  角秒。进一步研究表明, 这两个彗星体的运动轨道完全相同。在发现时它们位于轨道的远日点 (与太阳的距离  $A = 8.85$  AU), 近日点离太阳的距离为  $P = 1.63$  AU。

1) 请问它们最近一次过近日点时, 是否能被地球上的观测者看到? 那时它们在哪个星座? 答案应通过必要的公式和数值计算加以解释

2) 那时从地球上看到它们之间的角距离  $\beta$  为多少?

### 解答

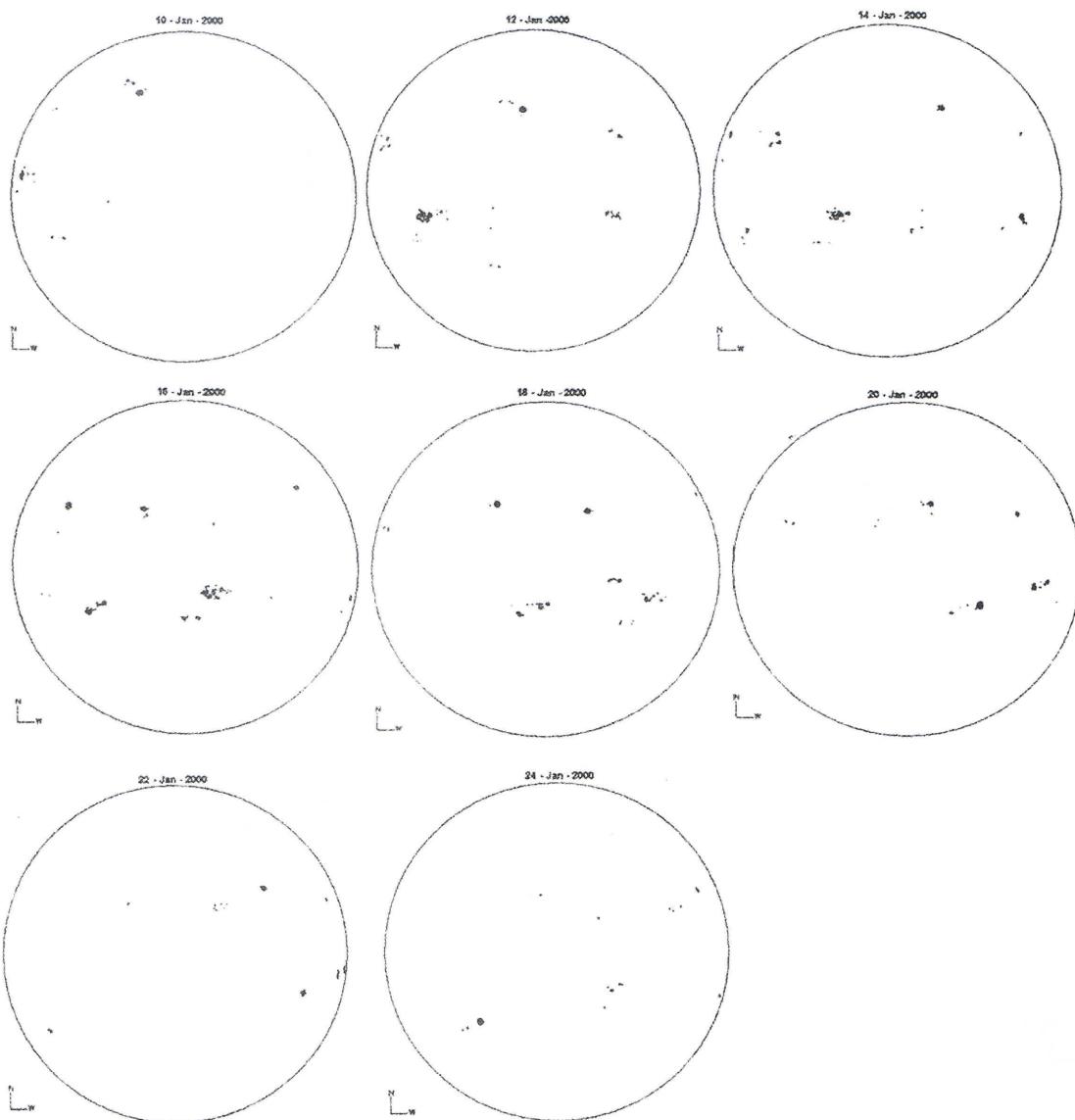
1) 请注意, 远日点到太阳的距离  $A$  并不是彗星的半长径, 半长径应为:

$$a = (A + P)/2 = 5.24 \text{ AU}$$

根据开普勒第三定律  $a^3/T^2 = 1$  (周期  $T$  以年为单位, 半长径  $a$  以天文单位 AU 为单位), 代入以上数值, 可得周期  $T = 12$  年。

发现时彗星位于远日点, 所以此后该彗星第一次过近日点应该是 6 年之后, 这时地球的位置与发现该彗星时完全相

| 序号    | 日期 | 儒略日 | 数值  |     | 沃尔夫数W |
|-------|----|-----|-----|-----|-------|
|       |    |     | 个数f | 群数g |       |
| 1     |    |     |     |     |       |
| 2     |    |     |     |     |       |
| ..... |    |     |     |     |       |



| 日期         | 儒略日     | 数值 |    | 沃尔夫数W |
|------------|---------|----|----|-------|
|            |         | 群数 | 点数 |       |
| 10.01.2000 | 2451554 | 25 | 5  | 75    |
| 12.01.2000 | 2451556 | 54 | 9  | 144   |
| 14.01.2000 | 2451558 | 40 | 12 | 160   |
| 16.01.2000 | 2451560 | 48 | 11 | 158   |
| 18.01.2000 | 2451562 | 38 | 9  | 128   |
| 20.01.2000 | 2451564 | 20 | 7  | 90    |
| 22.01.2000 | 2451566 | 14 | 7  | 84    |
| 24.01.2000 | 2451568 | 16 | 7  | 86    |

同，而彗星的黄经则和它刚被发现时相差180度。因此，这时彗星可以被地球上的观测者看到，它的黄经与白羊座相差180度，应该位于天秤座。

2) 两个类彗星体的运动轨迹完全相同意味着，在一段时间之后，其中一个类彗星体会完全重复另一个类彗星体的位置。因此它们之间的距离 $L$ 正比于它们的速度，设类彗星体在远日点和近日点的运动速度和它们的间距分别为 $V_A$ 、 $V_P$ 和 $L_A$ 、 $L_P$ ，根据开普勒第二定律，在远日点和近日点有：

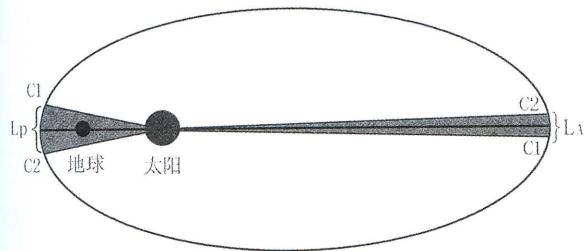
$$V_A \cdot \Delta t \times A = V_P \cdot \Delta t \times P$$

其中 $\Delta t$ 为一小段时间间隔：

$$\Delta t = L_A / V_A = L_P / V_P$$

因此有：

$$L_A \times A = L_P \times P$$



在发现时两个类彗星体靠近日面，因此从地球上看到，它们之间的角距离为（如上图所示）：

$$\alpha = \frac{L_A}{A+1}, \quad \beta = \frac{L_P}{P-1}$$

代入已知数据可得：

$$\beta = \frac{L_P}{P-1} = L_A \frac{A/P}{P-1} = \alpha \frac{A}{P} \cdot \frac{A+1}{P-1} \approx 12.7'$$

第4、5、6题与低年组相同。

## 实测试题

国际天文奥赛组委会 供稿/朱进 翻译/李鉴 解答

### 低年组

7. 你拿到的是从2000年1月10日到24日某些天的太阳黑子图。对每一天，定出当天日面上可见的太阳黑子群数 $g$ 和每群中的黑子个数 $f$ ，并用这些数据求出沃尔夫数，将结果填入表格。通过得到的结果作图画出沃尔夫数随时间的变化情况。注意：今天（指考试当天，即2004年10月6日）的儒略日

数是2453285。图、表见上页。

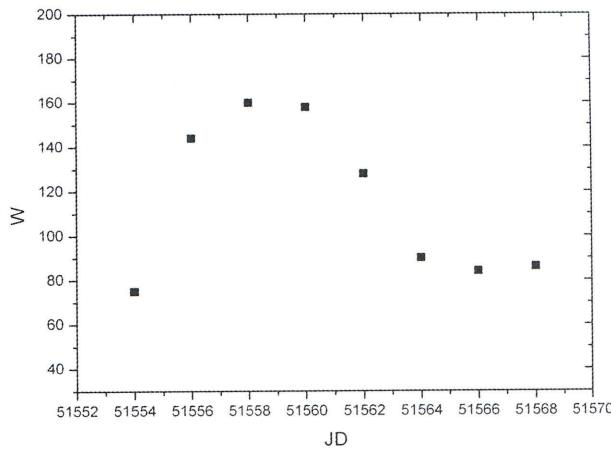
**解答** 儒略日是连续的记日方法，考虑到2000年是闰年（366天），很容易计算出2000年10月1日的儒略日数是2451554。

计算太阳黑子沃尔夫数的公式为：

$$W = k \times (10g + f)$$

其中 $g$ 为黑子群数， $f$ 是每群中的黑子数， $k$ 是定标常数，这里可取为1。

根据太阳黑子图，数出每天的黑子群数 $g$ 和每群中的黑子数，最后得到的结果如上页的下表所示。所得到的黑子数随时间变化图如下，横坐标为儒略日，纵坐标为沃尔夫数。



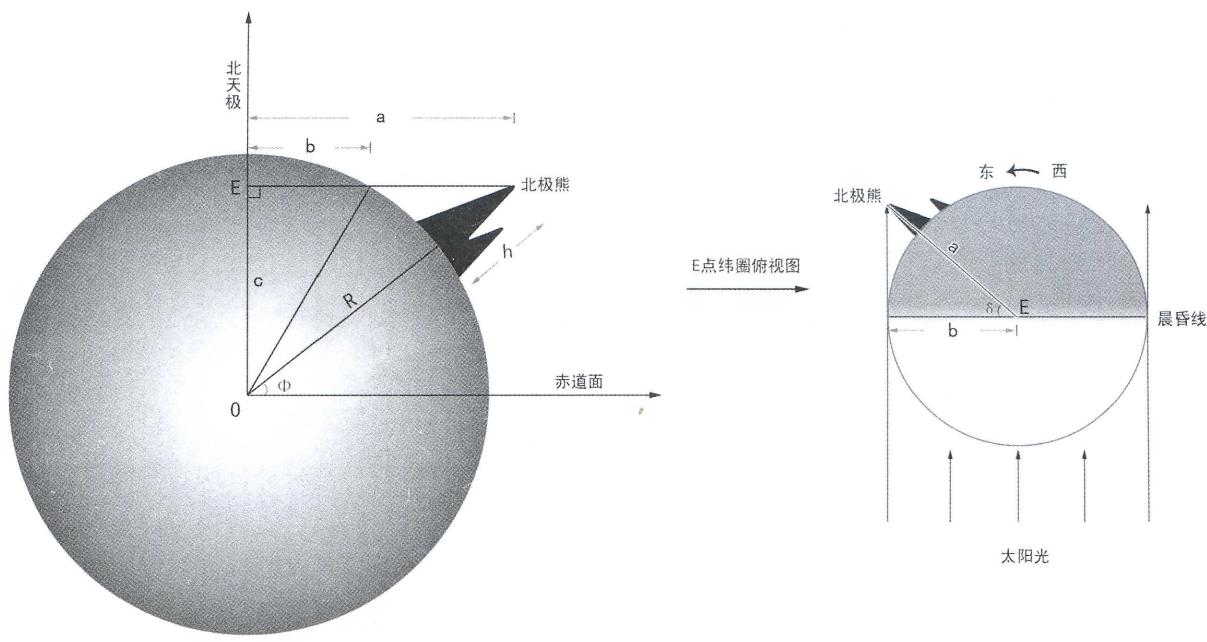
8. 日出。在第七届和第八届国际天文奥赛试题中出现过的北极熊和企鹅决定互相见个面。为此，它们在第九届国际天文奥赛开始之前的几天提前抵达克里米亚，并且决定在秋分那天观看日出。企鹅说：“我应该去克里米亚的最东点，那里可以比其他地方先看到日出。”北极熊说：“不对，我才应该最先看到日出，因为我会爬到克里米亚的最高峰Roman-Kosh峰顶去看。”

请问谁说的是对的？它能早多少分钟或秒钟看到日出？用一个表格列出你能找到或想到的用于解题的所有数据。

答案中必须包括有北极熊在Roman-Cosh峰顶以及企鹅在Kerch海峡岸边的图像的一张图，图中必须有必要的线性（长度）和角度的尺寸。假设地球是球体，自己回忆有关北极熊和企鹅的必要信息。

|               |                          |
|---------------|--------------------------|
| 地球半径          | R=6371千米                 |
| Roman-Cosh峰海拔 | h=1545米                  |
| Roman-Cosh峰经度 | $\lambda_0=34^\circ 21'$ |
| Roman-Cosh峰纬度 | $\phi_B=44^\circ 36'$    |
| 克里米亚最东点经度     | $\lambda_P=36^\circ 40'$ |
| 克里米亚最东点纬度     | $\phi_P=45^\circ 26'$    |
| 北极熊高度         | $h_B=2$ 米                |
| 企鹅高度          | $h_P=1$ 米                |

**解答** 解题的数据表格见上表。克里米亚最东



点的经度与Roman-Cosh峰相差2度19分，因此这里的地方时比Roman-Cosh峰早9分16秒，也就是说，企鹅在这里要比Roman-Cosh峰那里地平面上的人早9分16秒看到日出。

秋分时太阳在赤道上。如上图所示，北极熊所在位置高出地平面 $h$ 米，处于以E点为中心的纬圈上。以 $\phi$ 表示Roman-Cosh峰所在处的地理纬度，根据左图可知：

$$b = \sqrt{R^2 - c^2}, \quad a = (R + h) \cos \phi, \quad c = (R + h) \sin \phi$$

由于北极熊在Roman-Cosh山上，海拔比地平面高， $\phi$ 处的地平线还没有转到晨昏线处时，北极熊已经看到了日出。地球自转所需转动角度的大小为：

$$\delta = \arccos(b/a) \approx 1^\circ 46'$$

地球每分钟自转15角分， $1^\circ 46'$ 需要转动7分04秒，所以北极熊可以比在地平面上的人早7分04秒看到日出。但是和企鹅相比，它看到的日出时间要晚：

$$\Delta t = 9^m 16^s - 7^m 04^s = 2^m 12^s$$

## 高年组

7. 恒星。你有一张包含天空中的亮星的部分数据的表格（见下页的中表）。

7.1) 利用这些数据对每颗恒星计算：绝对星等 ( $M$ )，恒星与太阳的距离在银道面上的投影 ( $R$ )，将结果填入下页的上表中，在表中按照绝对星等递减的次序排列恒星。

7.2) 对于 $R$ 小于等于50光年的恒星，在答题纸上以一厘米等于十光年的比例尺画出这些最近的恒星投影在银道面上的位置。根据绝对星等 $M$ 决定所画的恒星的大小（参考表格下方的图）。银经0度的方向应该画在水平方向朝右，标记恒

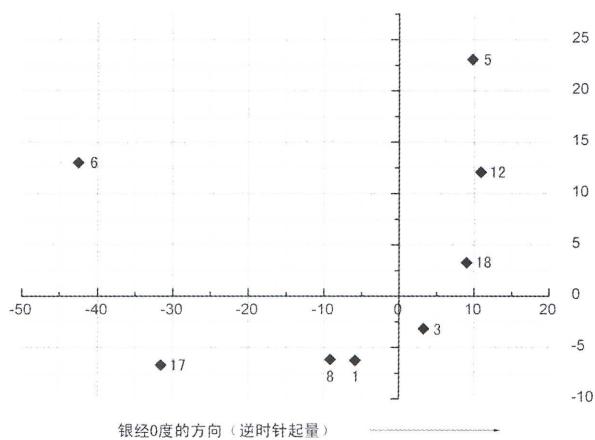
星时使用原题所给的表格中恒星的序号。

### 解答

1) 绝对星等可以很容易地根据 $m - M = 5 \lg r - 5$ （式中 $r$ 为天体到地球的距离，以秒差距为单位）算出，到太阳的距离在银道面上的投影距离可以根据 $R = r \times \cos b$ 求出，这里的 $b$ 是银纬。表格如上页下表所示（按序号排列）。

2) 我们常用的银道坐标系是日心银道坐标系，即以太阳为中心，并且以银河系的盘面（银道面）为基准的坐标系。银纬和银经分别以 $b$ 和 $l$ 标示，银纬从银盘向南北起量，范围为 $0^\circ \sim \pm 90^\circ$ ，银经则由银心的方向（即人马座方向）自西向东起量，由 $0^\circ \sim 360^\circ$ 。

我们根据所给出的银经和求出的投影距离，在直角坐标系中画出即可，示意图如下（未按比例），横纵坐标的单位均为光年，原点为太阳。



| 序号    | 恒星名称 | 绝对星等 (M) | 恒星与太阳的距离在银道面上的投影 (R) |
|-------|------|----------|----------------------|
| 1     |      |          |                      |
| 2     |      |          |                      |
| ..... |      |          |                      |

| No | 恒星名称         | 视差(角秒) | 视星等   | 银经(度) | 银纬(度) |
|----|--------------|--------|-------|-------|-------|
| No | Star         | P      | M     | L     | b     |
| 1  | $\alpha$ CMa | 0.376  | -1.46 | 227   | -9    |
| 2  | $\alpha$ Car | 0.018  | -0.72 | 261   | -25   |
| 3  | $\alpha$ Cen | 0.715  | -0.27 | 316   | +1    |
| 4  | $\alpha$ Boo | 0.009  | -0.04 | 15    | +69   |
| 5  | $\alpha$ Lvr | 0.123  | +0.03 | 67    | +19   |
| 6  | $\alpha$ Aur | 0.073  | +0.08 | 163   | +5    |
| 7  | $\beta$ Ori  | 0.003  | +0.12 | 209   | -25   |
| 8  | $\alpha$ CMi | 0.288  | +0.38 | 214   | +13   |
| 9  | $\alpha$ Eri | 0.032  | +0.46 | 291   | -59   |
| 10 | $\alpha$ Ori | 0.005  | +0.50 | 200   | -9    |
| 11 | $\beta$ Cen  | 0.016  | +0.61 | 312   | +1    |
| 12 | $\alpha$ Aql | 0.198  | +0.77 | 48    | -9    |
| 13 | $\alpha$ Tau | 0.048  | +0.85 | 181   | -20   |
| 14 | $\alpha$ Cru | 0.008  | +0.87 | 300   | 0     |
| 15 | $\alpha$ Sco | 0.019  | +0.96 | 352   | +15   |
| 16 | $\alpha$ Vir | 0.021  | +0.98 | 316   | +51   |
| 17 | $\beta$ Gem  | 0.093  | +1.14 | 192   | +23   |
| 18 | $\alpha$ PsA | 0.144  | +1.16 | 20    | +65   |
| 19 | $\alpha$ Cyg | 0.004  | +1.25 | 84    | +2    |
| 20 | $\beta$ Cru  | 0.007  | +1.25 | 302   | +3    |
| 21 | $\alpha$ LeO | 0.039  | +1.35 | 226   | +49   |

| 恒星名称 |              | 绝对星等  | 银道面投影距离 (ly) | 恒星名称 |              | 绝对星等  | 银道面投影距离 (ly) |
|------|--------------|-------|--------------|------|--------------|-------|--------------|
| No   | Star         | M     | R            | No   | Star         | M     | R            |
| 1    | $\alpha$ CMa | 1.42  | 8.56         | 12   | $\alpha$ Aql | 2.25  | 16.26        |
| 2    | $\alpha$ Car | -4.44 | 164.14       | 13   | $\alpha$ Tau | -0.74 | 63.82        |
| 3    | $\alpha$ Cen | 4     | 4.56         | 14   | $\alpha$ Cru | -4.61 | 407.5        |
| 4    | $\alpha$ Boo | -5.27 | 129.84       | 15   | $\alpha$ Sco | -2.65 | 165.73       |
| 5    | $\alpha$ Lvr | 0.48  | 25.06        | 16   | $\alpha$ Vir | -2.41 | 97.7         |
| 6    | $\alpha$ Aur | -0.6  | 44.49        | 17   | $\beta$ Gem  | 0.98  | 32.27        |
| 7    | $\beta$ Ori  | -7.49 | 984.87       | 18   | $\alpha$ PsA | 1.95  | 9.57         |
| 8    | $\alpha$ CMi | 2.68  | 11.03        | 19   | $\alpha$ Cyg | -5.74 | 814.5        |
| 9    | $\alpha$ Eri | -2.01 | 52.48        | 20   | $\beta$ Cru  | -4.52 | 465.08       |
| 10   | $\alpha$ Ori | -6.01 | 643.97       | 21   | $\alpha$ LeO | -0.69 | 54.84        |
| 11   | $\beta$ Cen  | -3.37 | 203.72       |      |              |       |              |

# 2005年第十一届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/朱进 翻译/王青 译解

### 低年组和高年组

1、熊。北极熊（在第七、八、九届国际天文奥林匹克竞赛的文本之中它已经跟我们见过面了）已经从克里米亚回到了北极，并决定观测一次日落。计算这次日落持续的时间。解答中必须包括一张有北极熊在北极的图像的画面；在画面中应该有必要的尺寸或者角度的大小。假设地球为球形。自己回想一下有关北极熊的必要的信息。另外，北极熊能否不离开北极而延长对日落的观测？能延长多长时间？

解答

在北极点上，日落一年之中只发生一次，就是在接近秋分的时候。在北极点上的观测者可以看到，黄道与地平圈的夹角为 $23.5^{\circ}$ 。日落时，太阳向地平圈下降的角距离为它的视直径，即 $32$ 角分。在此期间，太阳在黄道上运动的距离为： $\phi = 32' / \sin 23.5^{\circ}$ ，则日落的时间为 $t = \phi/v$ 。此处 $v$ 为太阳在黄道上的运动速度： $v = 360^{\circ}/365.25$ 天。通过计算得出：

$$t = \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} / \frac{360^{\circ}}{365.25 \text{ 天}} / \sin 23.5^{\circ} = 32.5 \text{ 小时}$$

显然，要观测这样一次日落，北极熊要在北极点转上 $490$ 度！

若要使日落时间延长，可以利用降低物理地平的方法。如果熊在日落开始时趴在冰面上，在日落过程中逐渐站起，日落结束时用后腿直立，那么视地平就会降低一些。这种情况下，太阳下降的路程将会相应增加，计算过程如下：

$$\Delta\phi = \arccos \frac{R}{R+h} \approx \frac{\sqrt{(R+h)^2 - R^2}}{R} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

$R$ 是地球半径， $h$ 是视线距地球表面的距离，对于熊来说， $h$ 约为 $2$ 米。经计算，地平圈下降约为 $3$ 角分，日落延长的时间约为 $3$ 小时。

2、太阳。古代有关宇宙的模型之一，是太阳系以绕自己的轴转动的地球为中心，恒星不绕着地球转动。月亮和太阳绕着地球做轨道运动。水星和金星绕着太阳做轨道运动。火星、木星和土星绕着一些看不见的、绕着地球做轨道运动的天体运动。假设在这个模型中关于地月系统的解释是正确的，而且太阳的质量与地月系的质量相比可以忽略不计。用两种不同的解题方法求出在该模型中地球和太阳之间的距离。

解答

题目中要求使用两种解法。不论怎样，我们都要使用开普勒第三定律。我们可以将模型中太阳环绕地球的周期( $365.25$ 天)与地月系的运动周期( $27.37$ 天)相比较，在这里中心天体是地球。第二种方法可以将模型中的太阳运动(中心天体质量为地球加月球)与实际中的太阳系相比(中心天体是太阳)。这两种方法的结果是一致的。

下面以方法一为例。根据开普勒第三定律： $a^3/T^2 = G/4\pi^2 \cdot (m_1+m_2)$ ，当半长径 $a$ 取为月亮的轨道半径(记为 $a_{月}$ )， $T$ 取为 $1$ 个恒星月( $27.3$ 天)， $m$ 以地月系的质量和为单位时，开普勒定律可以改写为： $a_{月}^3/T_{月}^2 = 1$ 。在这个宇宙模型中，太阳的绕地运动也满足同样的定律：

$$a_{日}^3/T_{日}^2 = (m_{地} + m_{日})/(m_{地} + m_{月})$$

太阳的质量可以忽略，代入回归年的数值( $365.2422$ )，可以求出日地距离为： $a_{日} = 5.6a_{月}$ 。

3、仙女座星云。希望你对仙女座星云(M31,NGC224)是熟悉的。它的恒星星等 $m = 4.4^m$ ，它到我们的距离是 $1.7\text{Mpc}$ 。如果要让它跟满月一样亮，我们需要运动到离它多远的距离上？在这种情况下这个天体(大致的)张角是多少？

解答

我们知道，满月的亮度约为 $-12.7$ 等。要使星云看起来这么亮，我们必须离它更近一些。仙女星云的实际视亮度为 $4.4$ 等，我们要使它变亮 $17.1$ 个星等。根据距离模数公式 $m - M = 5 \lg r - 5$ ，在这种情况下，星云与我们的距离只有 $270\text{pc}$ 。目前，星云的张角为 $2\sim 3$ 度，可以估出其实际直径约为 $3500\text{pc}$ 。

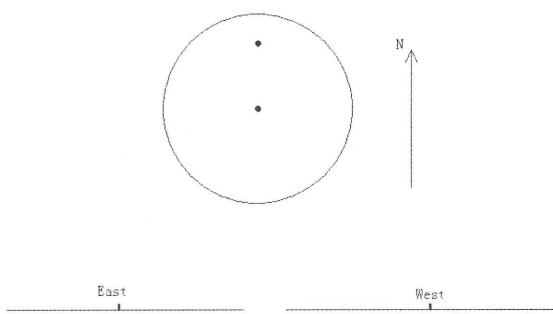
如果我们真的移动到距离星云只有 $270\text{pc}$ ，那么我们就会在它的内部了！我们看到的将是和银河系群星一样的星空，而不会有满月那么亮，因此对于此时角直径的提问是无意义的。应回答这种情况“不可能”。

4、太阳黑子。在冬至那天，我们在南美洲的厄瓜多尔的首都基多(西经 $78$ 度，南纬 $0$ 度)观测太阳。看到的图像如下页左上图所示，在太阳上有两个黑子。同时，在阿拉斯加(西经 $173$ 度，北纬 $60$ 度)是日出之后几分钟，而在纳米比亚首都温得和克(东经 $17$ 度，南纬 $23$ 度)是日落之前几分钟。

这些黑子在阿拉斯加和温得和克能不能看得到？画出在阿拉斯加和温得和克观测到的太阳的图像。

解答

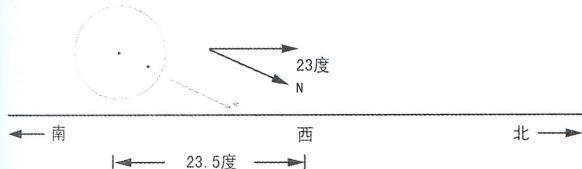
分析题目所给的图，可以知道，在基多太阳正好位于子午线上，也就是说它处在上中天，时间是当地时间 $12$ 点。经度在它西边 $95$ 度的阿拉斯加，此时的地方时应为早上 $5$ 点 $40$ 分，这里的纬度为北纬 $60$ 度，此时太阳还没有升



起，所以原题关于阿拉斯加看到日出的表述有误，这里还是黑夜，看不到太阳。

经度为东经17度的温得和克，位于基多以东95度，当地的地方时为18点20分，这里地处南半球，北半球的冬至正是这里白昼最长的一天，所以这里的太阳还没有落山，不过此时它的地平高度还比较高（5°左右），离落山还有大约20分钟，并不是处于日落之前几分钟。

题目的原意是希望我们画出一个快要落山的太阳的像，在此不妨假定温得和克此刻所见的太阳确实快要落山，那么它应该位于西南方地平线处，而且两个黑子指向正北方，黑子所在的“经线”与地平线所成的夹角，大致等于这里的地理纬度。所见的图片如下（未按比例）。



（李鉴）

（高年组）4、北极星。众所周知，北极星在地平圈之上的高度在数值上等于观测地点的地理纬度，它的方向就是正北方。然而使用上面的规则会产生误差。请求出用北极星指示方位时得到的地理纬度的最大偏差（ $\Delta\phi$ ）以及正北方向的最大偏差（ $\Delta\beta$ ）。观测在北京附近的兴隆观测站进行。北极星的赤纬是 $89^{\circ}10'$ 。北京的大致地理纬度为 $\phi = 40^{\circ}$ 。

**解答** 我们知道，北极点的高度与观测地的地理纬度相等。但要根据北极星测定北方就会出现误差，这是由于北极星距北极点约 $50'$ 。南北与东西方向上的最大误差分别为：

$$\Delta\phi = \Delta\delta = 50', \Delta\beta = \Delta\delta / \cos\phi$$

这是由于，东西方向上的最大误差出现时不是在天球大圆弧上量出的，而是在平行天赤道的纬圈上，要将这个距离换算到大圆上。兴隆的纬度为40度，因此东西方向误差为 $1^{\circ}05'$ 。

（低年组）5、星团。天文学家发现了一颗“星”，它在赫罗图上的位置大约比相应的主序上的恒星的位置高8个星等。假设这颗“星”是许多相似的恒星组成的星团，估算该星团中恒星的数目。

**解答** 应用星等关系：星等相差5等，亮度相差一百倍。由于假设星团由相同的恒星组成，所以星团内恒星数为：

$$N = 100^{8/5} = 1585 \approx 1600$$

由于题目条件都是大约数值，因此结果中约等是很重要的。

（高年组）5、星团。天文学家发现了一颗光谱型为A0的“星”，它在赫罗图上的位置大约为-7~-8等！（比主序高得多）。假设这颗“星”是许多相似的恒星组成的星团，估算该星团中恒星的数目。

**解答** 根据星等的定义： $M \sim -2.5 \lg L$ ，星等相差5等，亮度相差100倍。光谱型为A0的单个恒星，其绝对星等 $M_1$ 大致为0等： $M_1 \sim -2.5 \lg L = 0$ ，而根据题干，星团的绝对星等为-7~-8等：

$$M_2 \sim -2.5 \lg(N \cdot L) = -2.5 \lg N = -7 \sim -8$$

其中N为星团中恒星的数目，上限用-8等计算，下限用-7等计算。恒星的数目为： $N \approx 600 \sim 1600$ 颗。

（李鉴）

（低年组）6、地球凌日。2005年11月7日将发生火星冲日。此时火星距地球0.47天文单位，从地球上看从地球上看非常接近黄道（在黄道南 $27'$ ）。为此，火星空间局筹划了有宇航员参与的近火星空间计划，目的是观测地球经过太阳圆面的中心。为减少费用，空间计划将遵循最理想的途径——在离火星最近的距离上观测凌日。在地球凌日的中间时刻，从飞船上观看，火星位于哪个星座？

**解答** 由于凌日发生时，火星位于黄道之南，要能看到凌日，飞船必须在火星之北。此时宇航员看到的火星位于正南方，即在南黄极附近、剑鱼座内，靠近大麦哲伦星云。

（高年组）6、地球凌日。2005年11月7日将发生火星冲日。此时火星距地球0.47天文单位，从地球上看非常接近黄道（在黄道南 $27'$ ）。为此，火星空间局筹划了有宇航员参与的近火星空间计划，目的是观测地球经过太阳圆面（至少要经过太阳的边缘）并探测地球大气层。请求出这个太空站环绕火星的最短轨道周期。

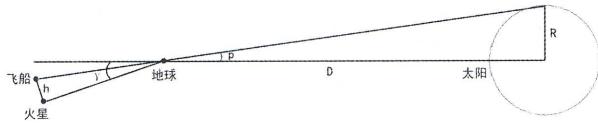
**解答** 由于火星在黄道以南，所以飞船与火星的张角必须大于等于火星与黄道面夹角与太阳角半径之差。与太阳相比，地球直径可忽略不计，下页左上图中D是日地距离，R为太阳半径，p为从地球上测的太阳角直径，L为地球与火星的距离， $\gamma$ 是火星与黄道面的夹角。由此可求h：

$$h = L \times \sin(\gamma - p) = 0.0015 \text{ AU} = 224000 \text{ km}$$

若要使飞船轨道最节省能量，则这个距离就是飞船与火星的最远距离，最近距离不能小于火星半径r。那么这个最经济的轨道的半长径：

$$a = \frac{r + h}{2} = 114000 \text{ km}$$

| $Z_m$ | $R$  | $Z_m$ | $R$   | $Z_m$ | $R$   | $Z_m$  | $R$    |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 0°    | 0''  | 50°   | 70''  | 82°   | 394'' | 87°    | 863''  |
| 10°   | 10'' | 60°   | 101'' | 83°   | 444'' | 88°    | 1103'' |
| 20°   | 21'' | 70°   | 159'' | 84°   | 509'' | 89°    | 1481'' |
| 30°   | 34'' | 80°   | 319'' | 85°   | 593'' | 89°31' | 1760'' |
| 40°   | 49'' | 81°   | 353'' | 86°   | 706'' | 90°    | 2123'' |



要计算轨道周期，我们可以利用开普勒第三定律。我们不妨将火星-飞船系统与地月系相比，其半长轴为地月系的0.296倍，火星质量为地球的0.107倍。通过计算可知，轨道周期约为13.5天。

## 实测试题

7、(低年组和高年组) 大气折射。天顶距( $Z$ )的定义是从天体到观测者的天顶的角距离(在天顶时 $Z = 0^\circ$ ，在地平时 $Z = 90^\circ$ )。大气折射效应会使天顶距的测量值( $Z_m$ )与实际的天顶距( $Z_t$ )相比有所减小，减小的值为 $R$ (以角秒为单位)。上表可以用于海平面处温度为 $10^\circ C$ 时的观测。

对于小于某个值 $Z_F$ 的天顶距 $Z_m$ ，一个近似公式是：

$$R = 60.25'' \cdot \frac{B}{760} \cdot \frac{273^\circ}{273^\circ + t^\circ} \cdot \tan Z_m \quad (1)$$

$B$ 是以毫米汞柱为单位的大气压， $t$ 是以 $^\circ C$ 为单位的温度。

7.1、找出可以在 $1''$ 精度上使用公式(1)的 $Z_m$ 值的范围，也就是说，找到 $Z_F$ 值。

7.2、当太阳在六月份位于天空中的最高点时，观测到它的中心的天顶距为 $16^\circ 34.4'$ 。请计算观测地点的纬度，精确到 $0.1'$ 。(在此精度下 $\varepsilon = 23^\circ 26.4'$ )

7.3、计算日落时当太阳的圆面刚刚消失在地平线以下时，太阳中心的真实天顶距 $Z_t$ ，精确到 $0.1'$ (温度 $t = 10^\circ C$ )。

7.4、使用以上信息进行必要的计算，并在另页的图上画出当太阳位于地平线以上“正好下落到最低点时”太阳看上去的形状。网格图上的每个单元相当于 $2'$ 。注意你在这里所使用的信息和计算的方法。

对于所有的计算，当不受大气折射影响时太阳的角直径为 $32.0'$ 。

解答

1) 通过对题目所给的公式带入数据计算，我们可以发现：这个公式在 $Z_m \leq 70^\circ$ 时适用；而在 $Z_m = 80^\circ$ 时，偏差几乎达到了 $10''$ 。因此答案是： $Z_m \leq 70^\circ$ 。

2) 根据大气消光的定义：

$$Z_t = Z_m + R(Z_m), R(Z_m) \approx 0.3', Z_t = 16^\circ 34.7'$$

对于太阳来说，它在六月上中天时，我们的观测地点位于北半球，那么可以用到以下式子： $Z_t = \phi - \varepsilon$ ，可以求出纬度：

$$\phi = Z_t + \varepsilon = 16^\circ 34.7' + 23^\circ 26.4' = 40^\circ 01.1' N$$

3) 由第一问可知：我们在解答这一问时应使用表格中的数据，而不能用公式。在地平线附近， $Z_m = 90^\circ$ ， $R = 2123'' \approx 90^\circ 35.4'$ ， $Z_t = 90^\circ 35.4'$ 。因此，当我们看到日落结束时，太阳的上边缘已经在地平圈以下 $35.4'$ 了。此时日心的天顶距为： $Z = 90^\circ 35.4' + 16' = 90^\circ 51.4'$ 。

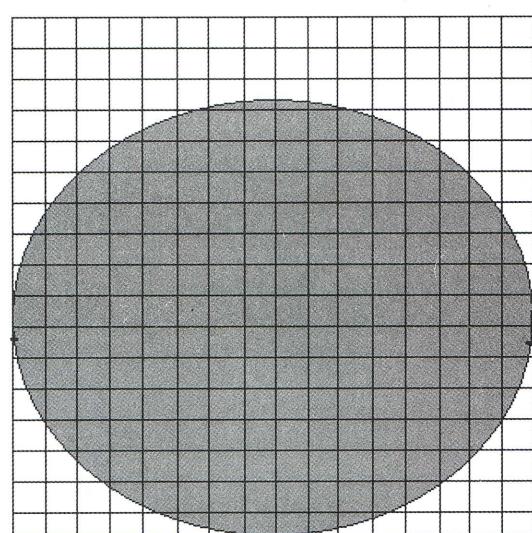
4) 我们现在把日面的最高和最低点定义为A和B，当日面下边缘开始落下地平时： $Z_{mB} = 90^\circ + 2123'' \approx 90^\circ 35.4'$ ，此时A点的天顶距为： $Z_{tA} = Z_{tB} - 32' = 90^\circ 03.4'$ ，通过内插法可以求出：

$$R(89^\circ 33.5') \approx 29.9', Z_{mA} = 89^\circ 33.5'$$

相应地，日心的天顶距为：

$$Z_{to} = Z_{tB} - 16' = 90^\circ 19.4', Z_{mo} = 89^\circ 46.9'$$

此时，太阳看起来是扁的，形状大约为 $32' \times 26.5'$ ，并且上半部分( $13.4'$ )比下半部分( $13.1'$ )大。如下图所示。

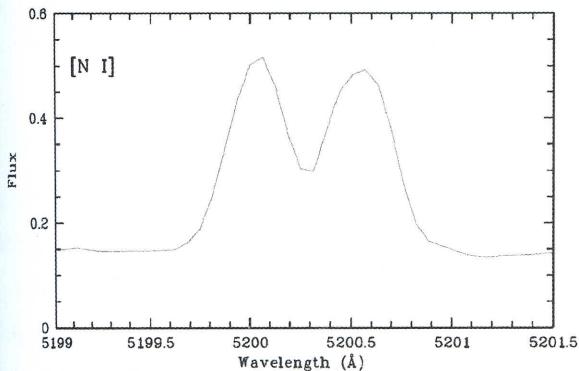
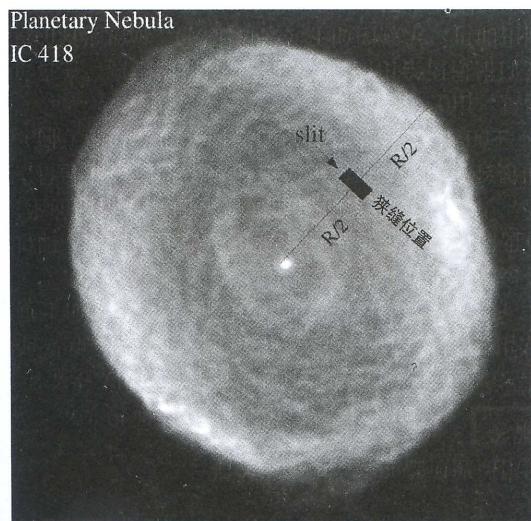


(姜晓军)

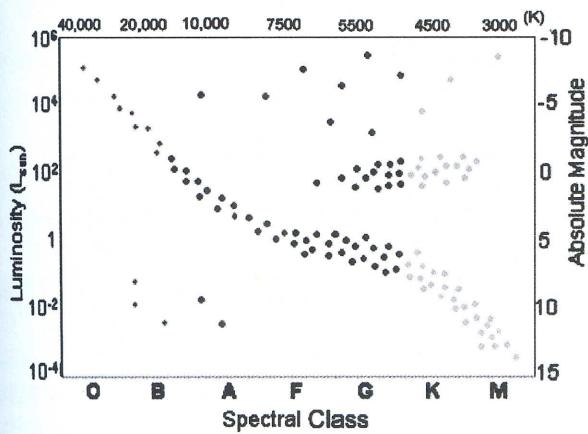
8、(高年组) 行星状星云。行星状星云是一种从中心恒星抛出来的气体壳层。我们通过一台摄谱仪的狭缝观测圆形的行星状星云IC 418，狭缝位于星云半径的大概一半的



位置，如下图一所示。下图二（流量—波长图）给出观测到的[N I]发射线，其实验室波长为 $\lambda = 5200.26\text{Å}$ 。它很明显存在双峰。



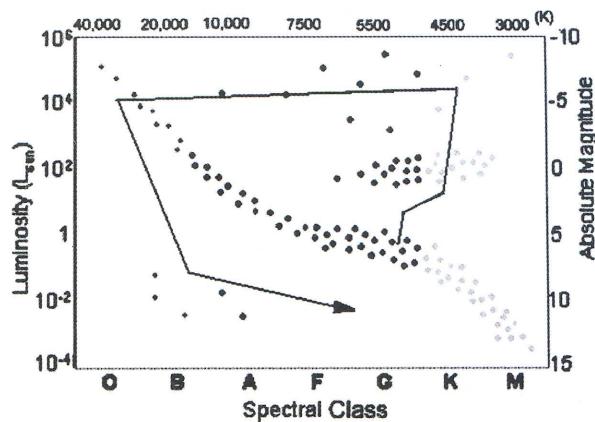
8.1、在赫罗图（见下图）上从主序开始画出可以从主序演化到行星状星云的恒星的演化轨迹。并标出该恒星位于我们观测到的行星状星云阶段的位置。



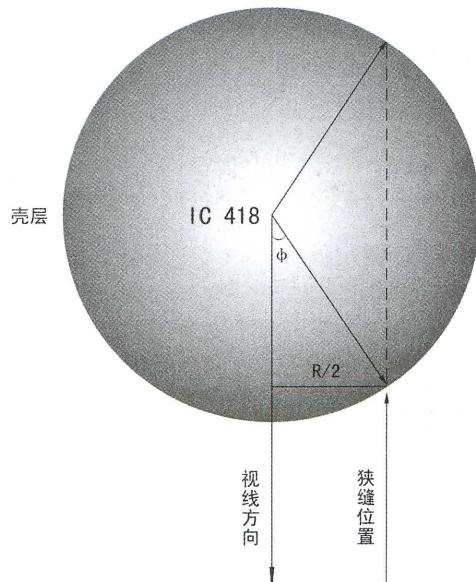
8.2、假设IC 418直径为 $\alpha = 12''$ ，距离为 $L = 330\text{pc}$ ，计算它的年龄（此即“动力学年龄”）。

解答

8.1) 恒星演化图如下：



8.2) 计算星云的年龄：行星状星云一般都是银河系内的天体，它们自身相对于太阳的空间运动速度一般都比较小，所以拍摄的光谱的红移也非常小。从题中给出的光谱也可以看出，双峰是由于行星状星云朝向和背向我们的壳层膨胀造成的，朝向我们运动的星云壳层使得光谱蓝移，形成波长较短的那个峰（左峰），背向我们运动的星云壳层使得光谱红移，形成波长较长的那个峰（右峰），而它们之间的那个波长值，反映的是IC 418自身的[N I]发射线的波长，它几乎正好等于[N I]线的实验室波长，说明IC 418本身的红移很小。不过在解题时，我们并不需要求出它的红移。注意，在这里也不可以用哈勃定律来求IC 418的红移和视向速度，哈勃定律适用于距离很远的河外星系，对银河系内天体并不适用。



如上图所示，两个波峰的峰值波长之差与壳层膨胀速度可以根据多普勒红移公式 $v = c \times z = c \times \Delta\lambda/\lambda$ 联系起来：

$$2v \times \cos \phi = c \times (\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda$$

其中 $\lambda_1 - \lambda_2$ 为两个波峰的波长差，约为 $0.53\text{Å}$ ，容易求出 $\phi = 30^\circ$ ，因此有：

$$v = \frac{1}{2} \times c \times \frac{\Delta\lambda/\lambda}{\cos \phi} = \frac{3 \times 10^8 \times 0.53}{5200.26 \times 1.732} \approx 17.6 \text{ km/s}$$

这个行星状星云的直径是：

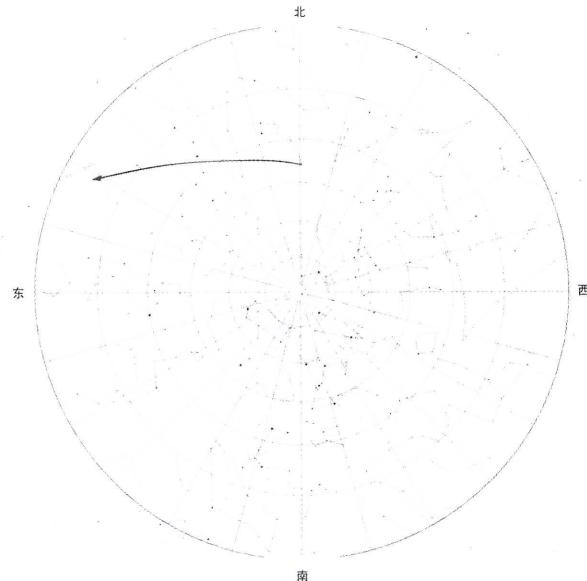
$$D = \alpha \cdot L = 330 \text{ pc} \times 12'' = 5.95 \times 10^{11} \text{ km}$$

因此它的动力学年龄为：

$$T = \frac{R}{v} = \frac{D}{2v} = \frac{5.95 \times 10^{11}}{35} = 1.7 \times 10^{10} \text{ s} \approx 540 \text{ 年}$$

行星状星云虽然很漂亮，但相比于其他天体而言，年龄都很短暂，最长也只有2~3万年。

(李鉴)



8、(低年组) 神舟六号。位于武强(东经116度，北纬38度)的观测者于2005年10月14日北京时间04: 54看到中国的神舟六号飞船出现在北极星(大熊座α)附近(见上图)。已知飞船的轨道周期为91.2分钟。

(1)假设飞船运行轨道为圆轨道。对于同时刻看到飞船的位于锡林浩特(东经116度，北纬43.9度)的观测者，飞船位于哪个星座(或哪颗恒星附近)？

(2)如果天气晴朗的话，下次什么时间在以上两地的观测者肯定能够同时看到飞船？

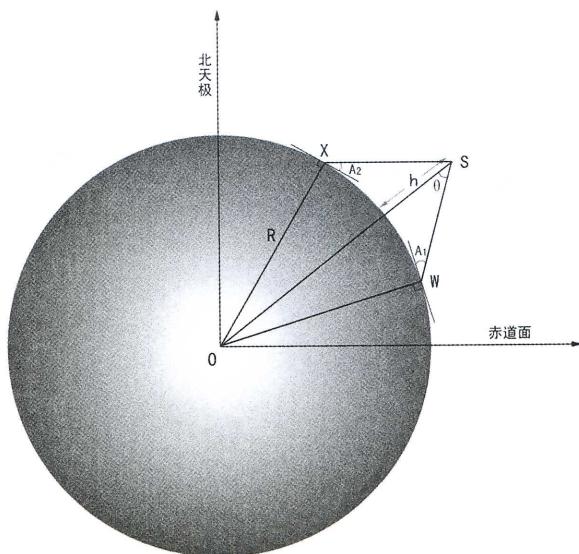
**解答**

1) 我们用地平坐标系来解这道题。首先，通过与月亮的公转类比，很容易利用开普勒定律求得飞船与地面间的距离。根据开普勒第三定律： $a^3/T^2 = G/4\pi^2 \cdot (m_1+m_2)$ ，当半长径a取为月亮的轨道半径(记为 $a_{月}$ )，T取为1个恒星月(27.3天)， $m$ 以地球的质量为单位时(月亮的质量相比于地球可以忽略)，开普勒定律可以改写为： $a^3/T^2 = 1$ 。对飞船、月亮分别应用上式： $a_{月}^3/T_{月}^2 = a_{船}^3/T_{船}^2$ ，代入数据可以求出： $a_{船} \approx 6689 \text{ km}$ ，因此它离地面的高度为：

$$h = a_{船} - R = 6689 - 6378 = 311 \text{ km}$$

在武强，飞船在北极星附近出现，它的地平高度为： $A_1 = 38^\circ$ ，方位角为 $0^\circ$  (北点起算)。

两个观测地点经度相同，因此可知在锡林浩特观测时飞



船出现在正南方。此时飞船与地球的位置关系如上图：S代表飞船，W代表武强，X代表锡林浩特。由于地球表面是弯曲的，我们若把WX视作直线是不准确的，下面用正弦定理和余弦定理求解：

$$\frac{R+h}{\sin(90^\circ + A_1)} = \frac{R}{\sin \theta}$$

代入数据可以求出 $\theta = 48.7^\circ$ 。 $\angle SOW = \phi_1 = 90^\circ - A_1 - \theta = 3.3^\circ$ ， $\angle SOX = \phi_2 = 43.9^\circ - 38^\circ - 3.3^\circ = 2.6^\circ$ ，根据余弦定理可以求出：

$$SX^2 = R^2 + (R+h)^2 - 2R \times (R+h) \times \cos \phi_2$$

解得 $SX = 429 \text{ km}$ 。

对三角形SOX再次应用正弦定理：

$$\frac{SX}{\sin \phi_2} = \frac{R+h}{\sin(90^\circ + A_2)}$$

其中 $A_2$ 为在锡林浩特观测到的飞船的地平高度，解得： $A_2 = 45^\circ$ 。因此在锡林浩特看到飞船赤纬是：

$$\delta = A_2 - 90^\circ - 43.9^\circ = -1.1^\circ$$

考虑到飞船此时在正南方，对比给出的星图可以知道，此时飞船在猎户座。

2) 这一问可以通过求飞船轨道周期和地球自转周期的最小公倍数来求解。地球自转一周是23小时56分(恒星日)，飞船轨道周期为91.2分，它的16倍约为24.3小时，与恒星日长短差不多。因此，在大约一天之后，也就是2005年10月15日05:13，又可从两地同时看到飞船。此时，飞船与地球的相对位置与第一次观测时几乎相同。

(朱进)

# 2006年第十一届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论题目

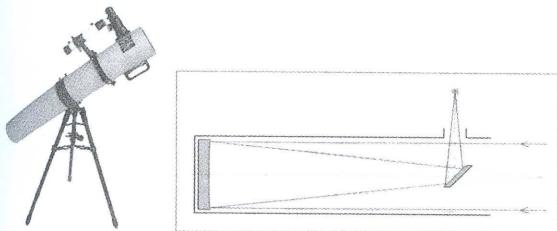
国际天文奥赛组委会 供稿/朱进 翻译/李鉴 译解

### 低年组和高年组

1、望远镜。在观测考试里你会用到一台主镜口径 $D = 125\text{mm}$ , 焦距 $F = 1025\text{mm}$ , 以及三个焦距分别为 $f_1 = 12\text{mm}$ 、 $f_2 = 25\text{mm}$ 、 $f_3 = 38\text{mm}$ 的目镜的简单牛顿系统望远镜。求出需要相应地移动各目镜(1、2、3)多少距离(在中下的竖直方向上的 $\Delta x_1$ 、 $\Delta x_2$ 、 $\Delta x_3$ )才可以把望远镜从观测天体重新调整到观测一只坐在离你的距离 $L = 50\text{m}$ 的猴子。你的回答需要同时有公式和数值。哪只目镜是最适合观测这只猴子的?为什么?

高年组附加部分:

如前所述 $L = 50\text{m}$ , 但现在猴子以 $v = 3\text{m/s}$ 的速度直接向你跑过来(想抢东西吃)。对于最合适的目的, 求出其移动的速率(以 $\text{mm/s}$ 为单位), 以调整望远镜使猴子保持在焦点上。



解答

据薄透镜成像公式:

$$1/u + 1/d = 1/F$$

其中 $u$ 为物距、 $d$ 为像距、 $F$ 为望远镜物镜焦距。拍摄天体时,  $u$ 为无穷大,  $d_1 = F = 1025\text{毫米}$ ; 拍摄猴子时,  $u = 50000\text{毫米}$ , 可算出 $d_2 = 1046.5\text{毫米}$ 。即 $d_2 - d_1 = 1046.5 - 1025 = 21.5\text{毫米}$ 。观测猴子时, 物镜所成的像比观测天体时远了 $21.5\text{毫米}$ , 因此目镜必须往后移动 $21.5\text{毫米}$ 才能正确聚焦, 这个距离与目镜的焦距无关。

猴子的高度约为 $50\text{厘米}$ , 在 $50\text{米}$ 的远处, 它的张角为: $0.5/50\text{弧度} = 0.57\text{度}$ 。三只目镜的放大率分别为:  $F/f_1 =$

$1025/12 = 85.4$ 倍;  $F/f_2 = 1025/25 = 41$ 倍;  $F/f_3 = 1025/38 = 27$ 倍。在望远镜里看, 猴子的视大小分别为:  $48.7\text{度}$ 、 $23.4\text{度}$ 、 $15.4\text{度}$ 。

牛顿式反射望远镜视场一般很小, 所以用这三个目镜都看不到整个的猴子, 相比较而言,  $38\text{毫米}$ 的目镜效果更好。

高年组附加部分:

根据透镜成像公式可知:

$$d = u \times \frac{f}{u-f} = f + \frac{f^2}{u-f}$$

两边同时对时间求导, 可得:

$$\frac{d(d)}{dt} = -v \times \frac{f^2}{(u-f)^2}$$

代入 $v = -du/dt = 3\text{ m/s}$ (负号表示猴子的运动方向是朝向物镜的)、 $u=50\text{米}$ 、 $f=1025\text{毫米}$ , 可知目镜的移动速度约为:

$$v' = d(d)/dt = 1.3\text{ mm/s}$$

需要说明的是, 这个速度不是固定不变的, 实际上:

$$v' = 3.152/(48.975 - 3t)^2$$

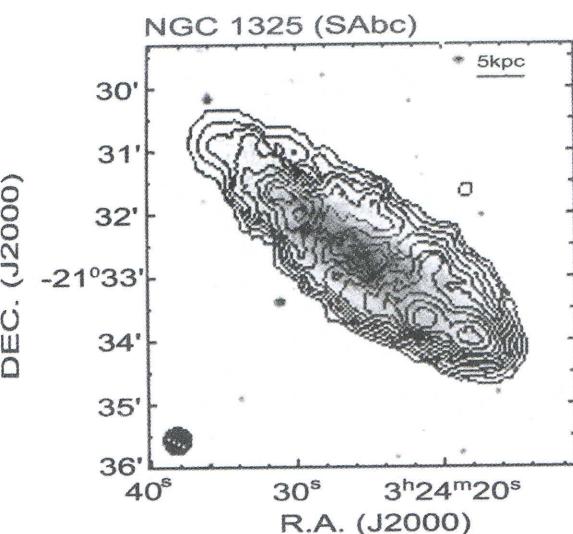
随着猴子的临近, 目镜的移动速度应该越来越快。

2、假星。白熊(已经在第7、8、9、10届国际天文奥赛中遇到过了)决定把一台望远镜接一个胶片照相机来拍星座照片。使用的曝光时间是5分钟量级。他的朋友企鹅正好特别爱开玩笑, 带了一个照相的闪光灯。企鹅打算在白熊拍接近地平的星座时捉弄白熊, 在他的星空图像里多“放”一颗星。企鹅坐在白熊的望远镜拍照的地方(当然, 相对地远离望远镜—距离 $2.5\text{千米}$ ), 在曝光期间朝着相机闪了一下(发出一个光脉冲)。

估算在白熊的图像里假星的星等。需考虑闪光灯脉冲的参数。使用闪光灯对于(离闪光灯和相机都是) $1.5\text{米}$ 距离拍摄物体的摄影条件(底片的感光度、光圈)应该跟在日光下使用大约 $1/1000\text{秒}$ 的曝光时间对同一物体拍照是一样的。解答时必须包括一幅有望远镜、熊和企鹅图像的图。

解答

设企鹅所用的闪光灯在 $1.5\text{米}$ 远处的等效星等为 $m$ 等。根据提示: 夜晚对 $1.5\text{米}$ 远处的物体拍照时使用闪光灯, 和在日光下用 $1/1000\text{秒}$ 的曝光时间相当, 也就是说闪光



脉冲的亮度相当于太阳在1/1000秒里发出的光的亮度，即闪光灯在 $r_1 = 1.5$ 米处发出一个闪光时，释放的总能量为：

$$F = 4\pi r_1^2 \times \frac{E_{\odot}}{1000} \text{ J}$$

注意 $E_{\odot}$ 的单位是 $\text{J/m}^2/\text{s}$ 。

白熊拍照时，企鹅在 $r_2 = 2500$ 米远处发出同样的闪光，释放的总能量同样为 $F$ ，白熊的曝光时间 $t_2 = 5$ 分钟=300秒，所以底片上接收到的闪光灯的亮度为：

$$E_2 = \frac{F}{4\pi r_2^2} \cdot \frac{1}{t_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \times \frac{E_{\odot}}{300000}$$

根据视星等的定义： $m \propto -2.5 \lg E$ ，设白熊拍到的“新星”的视星等为 $m_2$ ，则：

$$m_2 - m_{\odot} = -2.5 \lg \frac{r_1^2}{300000 \cdot r_2^2} = 29.8^m$$

其中太阳的视星等 $m_{\odot} = -26.8$ 等，所以 $m_2 = 3$ 等。想想白熊用什么方式拍摄(固定还是跟踪)时，在洗出照片后能很容易发现这是一颗假星？

3、极昼和极夜。对于当太阳有可能位于孟买的天顶时，求出极昼地区和极夜地区的边界。HBCSE的经度和纬度是 $\lambda = 72^{\circ}56'$ ， $\phi = 19^{\circ}03'$ 。考虑尽可能多的影响因素。

**解答**

太阳出现在孟买的天顶时，日面中心的赤纬为 $\delta_{\odot} = \phi = 19^{\circ}03'$ ，据此容易求出极昼和极夜的地方的纬度：分别是北纬 $70^{\circ}57'$ 以北和南纬 $70^{\circ}57'$ 以南。根据题目要求，这里需要考虑两个因素：大气折射和太阳的视大小。

我们记得大气折射在地平附近的折射角是 $\Delta = 35'$ 。大气折射的公式为： $z_{(\text{真天顶距})} = z'_{(\text{视天顶距})} + \Delta$ ，即大气折射使得太阳在地平面附近的视地平高度比真地平高度高 $35'$ ，再考虑到太阳的视半径为 $16'$ ，在极昼的地方看来，太阳的下边缘应该永远在地平面上，两个效应加起来，极昼地区的纬度

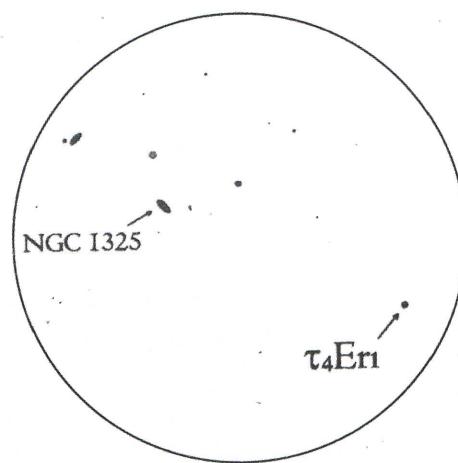
应该再往南延伸 $51'$ ，即达到北纬 $70^{\circ}06'$ ；极夜地区的纬度也应该再往南延伸 $51'$ ，即达到南纬 $71^{\circ}48'$ 。

4、星系。左图以等强度图的形式给出了旋涡星系NGC 1325的盘里的气体氢的分布。等强度图是重叠到星系的光学图像上的。假设星系的盘是接近圆形的。

求出星系的角直径。由于星系的张角相对于地球的观察者很小，可以用平面几何作为近似，以kpc(千秒差距)为单位计算星系的直径和到星系的距离。求出星系平面相对天空平面的倾角。

#### 高年组附加部分

下图给出了NGC 1325附近直径2度的天图。从地球向该区域发出了波长 $\lambda = 20\text{cm}$ 的无线电信号，以希望260年以后恒星 $\tau_4\text{Eri}$ 系统中的地外文明可以收到。NGC 1325的科学家也认为 $\tau_4\text{Eri}$ 系统存在智慧生命。要区分信号是来自太阳系而不是 $\tau_4\text{Eri}$ ，NGC 1325的外星人需要拥有多大口径的射电望远镜？



**解答**

从等强度图中可以量出星系NGC 1325在赤经方向的分布宽度约为21秒(注意赤经通常用时、分、秒表示的)，换算成度、分、秒表示即为： $a = 15 \times 21 \text{ 秒} = 315''$ 。同样量得赤经方向的宽度约为： $b = 260''$ 。

需要注意的是，我们用赤道坐标系表示天体的空间位置时，所用的赤经、赤纬坐标都是在天球的大圆上标度的，当要计算天体的角大小时。天体在赤经方向的空间宽度通常都是小圆，换算的时候要考虑到赤纬修正，一般所用的赤纬值选天体中心的赤纬值即可。修正后，NGC 1325在赤经方向的实际分布宽度为：

$$a' = a \times \cos(-21^{\circ}33') = 293''$$

根据图中标出的比例尺( $45'' \sim 5 \text{ kpc}$ )，在平面几何近似下，可以求出星系盘面的直径为：

$$L = \sqrt{a'^2 + b^2} = 391'' \sim 43.4 \text{ kpc}$$



它对地球的张角为 $391''$ , 可以求得其距离:

$$d = 43.4 \times \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{3600}{391''} = 23 \text{ Mpc}$$

高年组附加部分:

$\tau$  Eri 的距离为 260 光年(约 80 秒差距, 即 80 pc), 与 NGC 1325 的角距离约为  $1^\circ 09'$ (0.02 弧度), 设在 NGC 1325 上看到的地球与  $\tau$  Eri 的夹角为  $\alpha$  弧度, 根据正弦定理:

$$\frac{23 \times 10^6}{\sin(\pi - 0.02 - \alpha)} = \frac{80}{\sin \alpha}$$

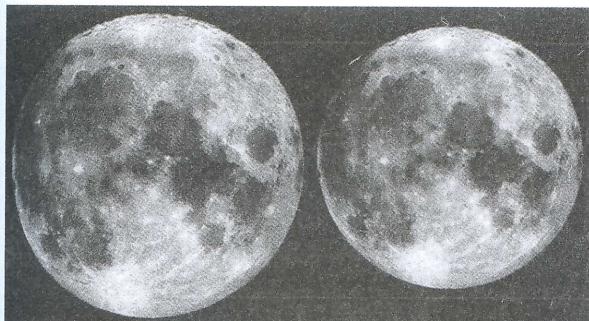
$\alpha$  为小量, 所以  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin(\pi - 0.02 - \alpha) \approx 0.02 + \alpha$ , 可以求得  $\alpha \approx 7 \times 10^{-8}$  弧度。

要分辨这么小的角度, 根据  $\theta = 1.22\lambda/D$ , 可知:

$$D = \frac{1.22\lambda}{\theta} \approx 3500 \text{ km}$$

这么大的望远镜, 在地球上不可能制造出来。

5、月球卫星。有两张用月球卫星上同一个相机拍的月球照片。第一张照片是在卫星在近月点附近时拍的, 第二张是在远月点附近拍的。估算两张照片拍摄时刻之间最小的时间间隔。



高年组附加部分:

要求估算这颗卫星绕月球的可能的最大轨道周期。考虑月球绕地球是圆轨道。

解答

卫星拍摄的月球照片和我们在地球上看到的完全一样, 并考虑到月球一直以相同的一面对着地球, 因此可知卫星拍摄照片时, 一定位于地球与月球之间, 而且拍摄时间正好是满月。设卫星轨道的偏心率为  $e$ , 半长径为  $l_0$ , 近月点时与月球的距离为:  $L_1 = l_0 \cdot (1 - e)$ , 远月点时的距离为:  $L_2 = l_0 \cdot (1 + e)$ 。

月球的直径记为  $D$ , 近月点和远月点时所拍照片的角直径分别为:

$$d_1 = \frac{D}{L_1}, \quad d_2 = \frac{D}{L_2}$$

于是有:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{1+e}{1-e} = 1.15$$

拍摄照片时卫星并不正好位于近月点和远月点, 所以:

$$e \approx \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \approx 0.07$$

这里必须用约等于。考虑到月球卫星的轨道并不是很稳定, 所以从一个近月点满月到远月点满月的时间间隔约为半年(可参考第5届国际奥赛第3题)。

高年组附加部分:

在地月系统中, 地球引力是主宰, 要想月球卫星稳定地绕月运行, 它离月球的距离必须在地-月之间的第一拉格朗日点内(即地球与月球引力达到平衡的点), 设这点离月心的距离为  $x$ , 这点绕地球的运行角速度与月球相同, 均为  $\omega$ , 则位于该点的天体的运动规律为:

$$\frac{GM}{(R-x)^2} - \frac{Gm}{x^2} = \omega^2 \cdot (R-x)$$

$M$  和  $m$  分别为地球和月球的质量,  $R$  为地月距离, 考虑到  $x \ll R$ , 上式第一项可写为:

$$\frac{GM}{(R-x)^2} = \frac{GM}{R^2} + \frac{2GMx}{R^3}$$

上式化为:

$$\frac{GM}{R^2} + \frac{2GMx}{R^3} - \frac{Gm}{x^2} = \omega^2 \cdot (R-x)$$

根据月球绕地球的动力学方程:

$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 \cdot R$$

可知:  $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ , 代入上式可求得:

$$x = \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \times R = 61500 \text{ km}$$

月球卫星的远月距离  $L_2$  必须小于  $x$ , 所以近月距离:

$$L_1 = \frac{L_2}{1.15} \leq 53300 \text{ km}$$

所以卫星的轨道半长径最大为:

$$a = \frac{L_1 + L_2}{2} = 57400 \text{ km}$$

根据开普勒第三定律可求出对应的(最长)轨道周期为:

$$T = 2\pi \times \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \approx 14.3$$

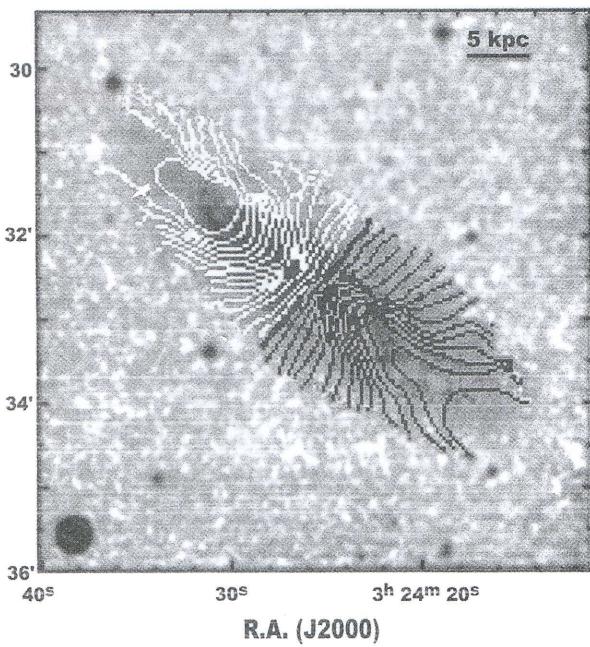
从上述估算可知, 绕月卫星的轨道周期要小于 14 天。

## 实测试题

国际天文奥赛组委会 供稿/朱进 翻译/李鉴 解答

### 低年组

6.NGC 1325。在理论部分的第4题中你回答了有关NGC 1325的问题。你已估算出该星系的倾角为70度，其角直径大约为6.5°，相当于物理直径约43kpc(千秒差距)。该星系于2001年5月被印度的GMRT射电望远镜所观测，以使用星系中气体氢的21cm波段研究其自转曲线轮廓。下图以等强度图的形式给出了气体自转速度的分布。图像叠加在该星系的一个光学图像(不是GMRT拍的)上。



该星系中心在远离我们。由于星系的自转，星系一侧的退行速度跟星系另一侧的相比会显得稍微慢一些。在上图中，白色的等强度线表示比平均速度慢的速度，而黑色的等强度线则表示比平均速度快。等强度线画出了星系平面上(即不考虑倾角的影响)每相差10km/s的速度变化。

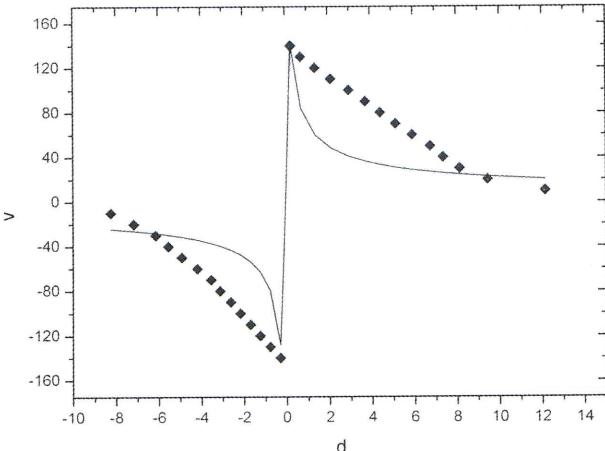
6.1)画出星系的旋转曲线(自转速度与以角秒arcsec为单位的离星系中心的距离的关系)。

6.2)由画出的旋转曲线(rotation curve)，假设圆运动，估算星系的总质量( $M_S$ 为单位)。

解答

1)根据开普勒第三定律，越靠近星系中心，恒星(或气团)的公转速度越快。由给出的速度等强度图，可以知道最靠近星系中心的白线所代表的速度为140km/s，最远离星系中心的白线所代表的速度为10km/s(一共14条等强度线，每相邻的两条相差10km/s)，黑线与此类似。沿着星系的轴线方向读出等强度线到星系中心的距离，即可画出它的旋转曲线，如下图所示。图中的实线代表满足开普勒第三定律的曲线。横坐标为气团到星系中心的距离，以kpc为单位，纵坐标为它的环绕速度(km/s)。

注：由于提供的等强度图不太清晰，这里画出的旋转曲线图误差也比较大。



2)从等强度图上可以看出，在星系的边缘，物质的环绕速度大约为10km/s，根据 $T = 2\pi a/v$ 及开普勒第三定律：

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} \cdot (m_1 + m_2) = \frac{M}{M_S}$$

代入 $v \approx 10 \text{ km/s} = 2.1 \text{ AU/year}$ ,  $a = 14 \text{ kpc} = 2.9 \times 10^9 \text{ AU}$ (从图上量出)，可以求出星系质量：

$$M = a \times v^2 / (4\pi^2) = 3.2 \times 10^8 M_S$$

注：天文学家给出的NGC 1325的质量为 $3.14 \times 10^9 M_S$ ，比我们给出的值要大一个量级，原因是估计的星系最外侧物质的半长轴偏小。不过就数量级而言，计算的结果还是有意义的。

7.GMRT天线。下页左栏上表中给出了每个GMRT天线相对于中心天线A14的相对位置坐标。A14的纬度和经度为 $\lambda = 74^\circ 03' 01''$ ,  $\phi = 19^\circ 05' 36''$ 。

1)画出GMRT天线系统的分布图。需要标出该图的中心方型区域(上次访问GMRT所看到的1km×1km(千米)的区域)，把天线标在原点，并画出中心方型区域以外的所有天线。在坐标绘图纸上靠近各天线的位置写出天线的编号。

2)来自遥远天体的射电波的平行波束被GMRT天线系统接收。根据信号源相对于天线阵的倾角不同，信号到达不同天线的时间会有略微的不同。现在假定在9月23日正午用A01、A10、A14、A30四个天线观测太阳。假设地球是平坦的，计算信号到达A01天线以及其中离A01最远的天线的时间延迟差。

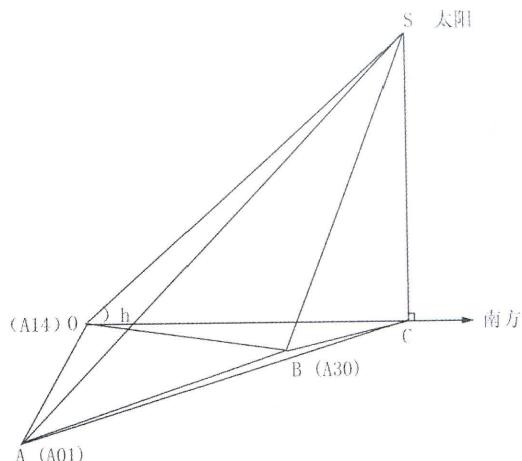
解答

1)GMRT的天线分布图如下页左下图所示，图中每点代表一个天线，所谓的方形区域就是图中心1千米×1千米的区域。这个阵列的构型与著名的Y字形美国甚大阵VLA相似，不过阵列的规模要逊上一筹。

2)9月23号是秋分日，太阳的赤纬为零，正午时分太阳的地平高度为：

$$h = 90^\circ - \phi + \delta = 90^\circ - 19^\circ 05' 36'' = 70^\circ 54' 24''$$

四个天线中离A01最远的是A30，如果假设地面是平坦的，天线与太阳之间的几何关系如下图所示。



题目要求的就是光线经过SA与SB的时间差。容易看出：  
 $OC = OS \times \cos h$ ,  $AC = \sqrt{(OC + 9405.97)^2 + 11245.6^2}$ ,  
 $BC = \sqrt{(OC - 14097.4)^2 + 369.05^2}$ ,  $SA = \sqrt{AC^2 + SC^2}$ ,  
 $SB = \sqrt{BC^2 + SC^2}$ , 代入OS(即日地距离,  $1.5 \times 10^{11}$ 米)与h的值可以求出:  $SA - SB \approx 8$  km, 因此A01比A30晚接收到太阳信号:

$$\Delta t = (SA - SB)/c = 8 \text{ (km)}/c \approx 2.7 \times 10^{-5} \text{ s}$$

## 高年组

6. 恒星监测。在孟买对一颗亮星整夜进行监测。使用14寸望远镜，在三个波段(B、V、R)。假设观测波长对于观测恒星可以近似为有效波长450nm, 550nm和700nm。随着夜晚时间的不同，恒星在不同的天顶距被观测，因此星光穿过不同厚度的地球大气。由此，由地球大气产生的消光(extinction)也在发生变化。该消光在恒星最接近天顶时最小，当恒星升起或落下的时候最大。下页上表中给出了实际数据。第二列的大气质量给出的是以天顶距为零时大气质量为1所归一化处理后的有效(等效)大气质量。星等值的精度准确到0.05等。

6.1 画出适当的曲线图，求出当没有地球大气影响时该恒星在三个波段上的视星等。

6.2 依巴谷卫星测得该恒星的视差为0.0076角秒。在另外给出的赫罗图(见下图)上标出该星的位置。

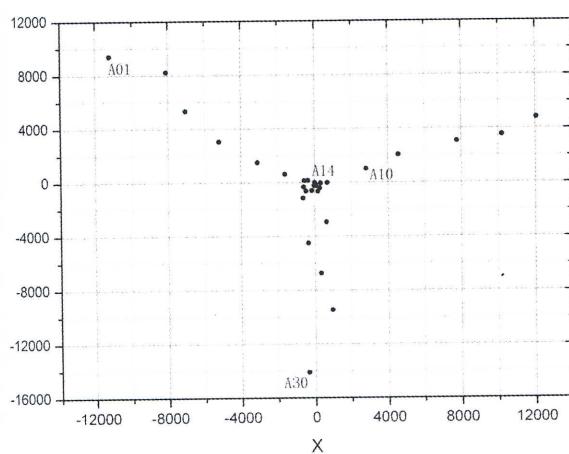
6.3 色指数可以由恒星温度来校准。一个经验公式(适用于该恒星所在的赫罗图区域)为：

$$B - V = -3.68 \log T + 14.55$$

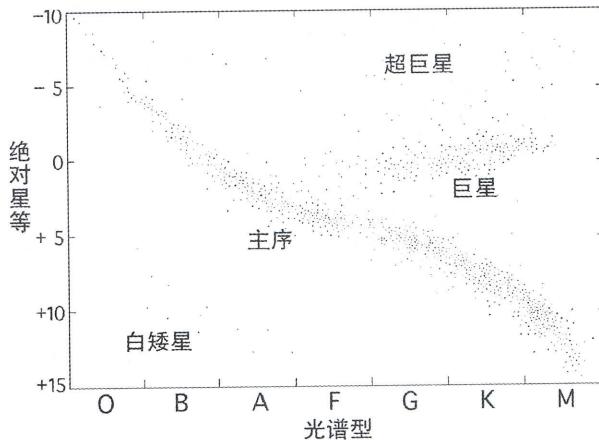
(其中T为绝对温度)。估算恒星的温度。

6.4 如果该恒星位于猎户座(Orion)，在该星座的四颗最亮的恒星中它最可能是哪一颗？写出该星的拉丁名(需要用罗马字母写，只要星名能被区分，有点拼写错误没关系)。或BAYER星名，比如( $\alpha$ Uma)

6.5 在孟买，假设消光按 $\lambda^{-\alpha}$ (其中 $\lambda$ 为波长)变化。由给



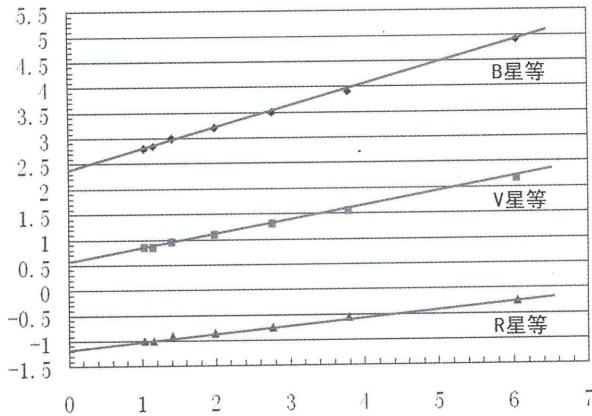
| 天顶距(°) | 大气质量  | B星等  | V星等  | R星等   |
|--------|-------|------|------|-------|
| 15     | 1.035 | 2.80 | 0.85 | -1.00 |
| 30     | 1.154 | 2.85 | 0.85 | -1.00 |
| 45     | 1.412 | 3.00 | 0.95 | -0.90 |
| 60     | 1.991 | 3.20 | 1.10 | -0.85 |
| 69     | 2.762 | 3.50 | 1.30 | -0.75 |
| 75     | 3.785 | 3.90 | 1.55 | -0.55 |
| 81     | 6.053 | 4.90 | 2.15 | -0.25 |



出的数据，求出参数 $\alpha$ 。

解答

1)考虑到大气消光与星光经过的大气路径的长短相关，而路径的长短代表的就是大气质量的大小，所以大气质量和观测的视星等之间应该有比较简单的线性关系。根据上表中所给数据，以“大气质量”为横坐标，以B、V、R星等为纵坐标做出二维平面图，如下图所示。可以看出，星等与大气质量线性相关，目测做出对观测点数据拟合较好的直线，尽量让直线均匀穿过数据点。



大气消光的公式为：

$$m(z) = m_0 + K \cdot F(z)$$

式中 $m(z)$ 为天体在天顶距 $z$ 处的大气内星等； $m_0$ 为天体的大气外星等， $K$ 为消光因子； $F(z)$ 即为大气质量(为天顶距等

于 $z$ 的方向上大气光学厚度和天顶方向大气光学厚度之比)。 $m_0$ 实际上就是图中各直线在Y轴上的截距， $K$ 就是斜率。从图中可以读出当没有地球大气影响时(即 $F(z)=0$ 时)，B、V、R波段的星等分别为：2.38等、0.55等、-1.20等。 $K_B$ 、 $K_V$ 、 $K_R$ 的值分别为：6.4、3.6、2.4。

2)根据V星等和视差，利用 $m - M = 5 \lg r - 5$ 即可求出这颗恒星的绝对星等： $M \approx -5.05$ 等。只需知道它的温度(根据第三问求得)就能找到它在赫罗图中的位置。

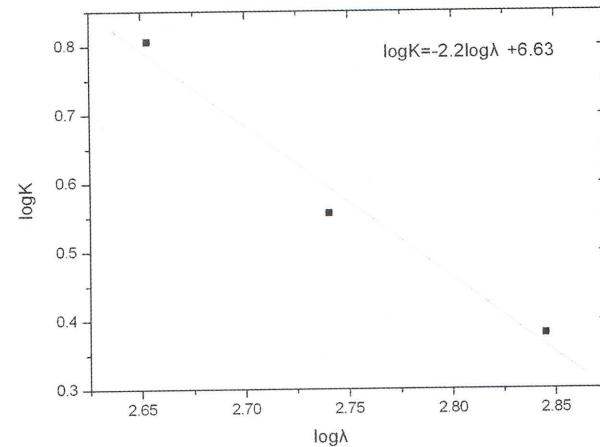
3)根据题目所给公式可以求出恒星的温度为： $T \approx 2860K$ 。可以大致判断出这是一颗M型星，结合 $M \approx -5.05$ 等，可知它是一颗红超巨星。应位于赫罗图的右上角。

4)如果它属于猎户座四颗最亮的恒星之一，则最有可能是参宿四。

5)根据题干信息：消光量 $K \cdot F(z)$ 正比于 $\lambda^{-\alpha}$ ，即 $\log K \propto -\alpha \log \lambda$ ，把 $K$ 和 $\lambda$ 列于下表：

| 波长 $\lambda$ (纳米) | $\log \lambda$ | 消光系数 $K$ | $\log K$ |
|-------------------|----------------|----------|----------|
| 450               | 2.65321        | 6.4      | 0.80618  |
| 550               | 2.74036        | 3.6      | 0.5563   |
| 700               | 2.8451         | 2.4      | 0.38021  |

作出 $\log K \sim \log \lambda$ 图像，应近似为线性关系：



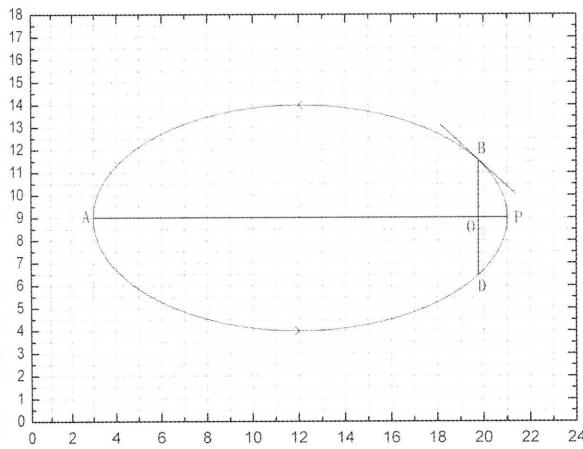
经过拟合后得出：

$$\log K = -2.2 \log \lambda + 6.63$$

所以 $\alpha = 2.2$ 。注：由于数据点较少，也可以分别计算 $\alpha$ 后再取平均值，所得结果和作图法一样。请注意，本例中 $K \sim \lambda$ 的数据太少，求出的 $\alpha$ 误差较大，实际上 $\alpha$ 的值应为4左右。



7. 射电脉冲双星。射电脉冲星是一颗由它的磁极辐射射电波束的高速自转的中子星。在地球上它们被观测到是一系列视脉冲周期(apparent pulse period)为 $P_t$ 的脉冲。当脉冲星是一个双星系统的一员时，这个周期不同于脉冲星的真实脉冲周期(true pulse period)( $P_0$ )。2004年，印度的GMRT射电望远镜对脉冲星0514-40进行了研究。该脉冲星的真实脉冲周期是 $P_0=4.990575$  ms(毫秒)。



已给你了一个偏心率为0.866的脉冲星的椭圆轨道的图(见上图)，对于脉冲星0514-40而言，其轨道偏心率非常接近这个值。曲线上的箭头表明脉冲星在轨道上绕焦点O逆时针方向运动。AP和BD互相垂直；AP是椭圆的长轴。

下表中给出了作为以轨道周期为时间单位的 $t/T \sim P_t$ 数据( $T = 18.35$ 天)。假定观测者位于脉冲星的轨道平面上。

| $t/T$    | $P_t$ (ms) | $t/T$    | $P_t$ (ms) |
|----------|------------|----------|------------|
| 0.136661 | 4.990905   | 0.211722 | 4.991053   |
| 0.268267 | 4.991236   | 0.343782 | 4.991742   |
| 0.37353  | 4.992284   | 0.376936 | 4.992207   |
| 0.384599 | 4.990415   | 0.386994 | 4.989791   |
| 0.406418 | 4.989308   | 0.410888 | 4.989361   |
| 0.415199 | 4.989412   | 0.452397 | 4.989698   |
| 0.465116 | 4.98977    | 0.503379 | 4.989925   |
| 0.671385 | 4.990276   | 0.774999 | 4.990418   |
| 0.986004 | 4.99068    |          |            |

7.1)画出这组数据的曲线图(以合适的比例)。

7.2)如果轨道是圆轨道的话，数据曲线的形状不会跟你刚画出来的曲线一样。简略画出对于圆轨道的情况数据曲线的形状。

7.3)取A点的速度 $V_A$ 作为单位速度，计算在B、P、D三点的横向速度(脉冲星在任一点G的横向速度 $U_G$ 是其垂直于OG方向上的速度分量的大小)。

7.4)在提供给你的轨道图上，画出了曲线在B点的切线。使用这个轨道图或用其它方法，以同样的速度单位求出在B、P和D三点的总速度(相应的， $V_B$ 、 $V_P$ 和 $V_D$ )。

7.5)由 $t/T \sim P_t$ 数值曲线的形状，推断出观测者(observer)是靠近(located close to)长轴(major axis)还是靠

近短轴(located close to minor axis)，以及在哪一侧(side)。

7.6)假定平行于长轴的速度分量在B点和D点达到最大。在你画的数据曲线上标出A、B、P和D所对应的点。

7.7)在同一个绘图纸上，大致画出假如观测者位于与7.5的轴垂直的轴上， $P_t \sim t/T$ 曲线。

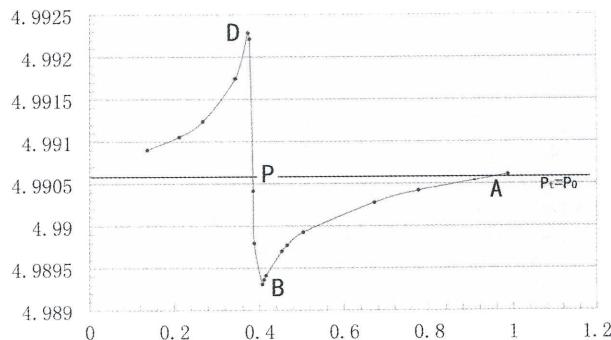
7.8)由轨道图上，估算沿DPB弧段运动所需时间占整个轨道周期的比例。由你画的图估算同样的数值。

7.9)在你画的数据曲线图上画出 $P_t = P_0$ 的直线。量出在你画的数据曲线之下，该直线以上部分和以下部分的面积，并用它对于长轴以光秒(light seconds)为单位进行估算。

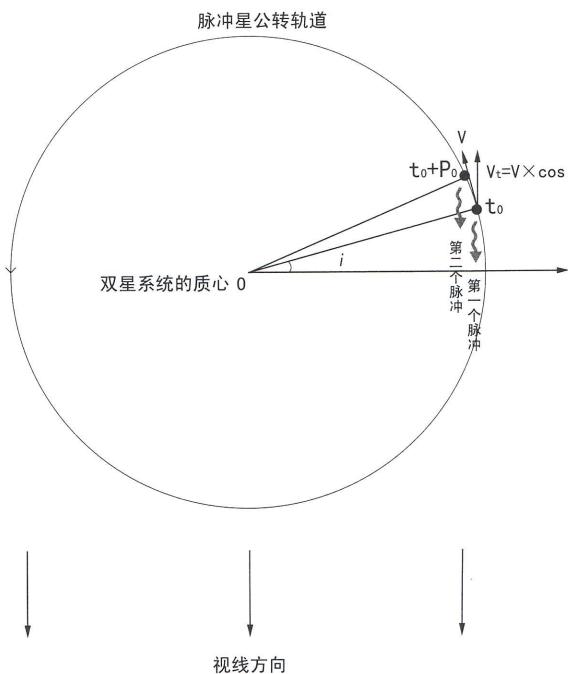
### 解答

这道题目作为考试题，难度有些过大，难以在短时间内做出，但不失为一道非常好的练习题，我们建议参加奥赛的同学们仔细求解，体会其中的物理思想以及所涉及到的众多知识点。

1) 所求曲线如下图所示，纵坐标为 $P_t$ ，横坐标为 $t/T$ 。



2) 以 $P_0$ 表示脉冲星的真实脉冲周期。如果脉冲星的轨道是正圆，假设其公转速度为 $V$ ，轨道周期为 $T$ ，如下图所示。



假设 $t_0$ 时刻，脉冲星发射一个脉冲，第二个脉冲的发射时刻应为 $t_0 + P_0$ ，但是地球上看到这两个脉冲的间隔将是 $P_t$ ，

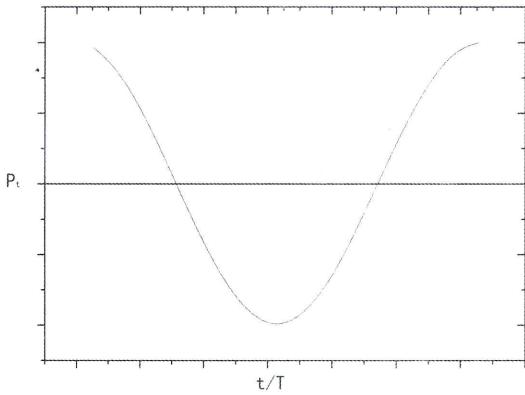
在 $t_0 \rightarrow t_0 + P_0$ 这段时间内，脉冲星因公转走过了一段距离，在视线方向的投影距离为：

$$b = V_t \times P_0 = V \cdot \cos i \times P_0$$

$V_t$ 为脉冲星公转速度的视向分量，即视向速度， $C$ 为光速。由于 $P_0$ 极小，这段时间内可以忽略 $i$ 的变化。所以地球上观测到的脉冲周期为：

$$P_t = P_0 + \frac{b}{C} = P_0 + V \cdot \cos i \times \frac{P_0}{C}$$

这个等式中只有角 $i$ 是随时间变化的，变化曲线为余弦，所以 $P_t \sim t$ 的曲线也应该为余弦曲线，大致如下图所示。



3)椭圆的极坐标方程为：

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos \beta}$$

易知 $r_A = a(1 + e)$ ,  $r_P = a(1 - e)$ , 据开普勒第二定律可知：

$$V_P = V_A \times \frac{1+e}{1-e} = 14V_A$$

这也就是P点的横向速度。B和D的横向速度 $V_{B\perp}$ 和 $V_{D\perp}$ 可用开普勒第二定律求出。在B点， $\Delta t$ 时间内扫过的面积为：

$$\frac{1}{2} \times V_{B\perp} \times r_B \times \Delta t = \frac{1}{2} \times V_A \times r_A \times \Delta t$$

于是求出 $V_{B\perp} = V_A \times r_A / r_B$ , 其中 $r_B$ 为半通径的长： $a(1 - e^2)$ 。带入数据可知：

$$V_{B\perp} = \frac{1}{1-e} \times V_A \approx 7.5V_A$$

D点横向速度的大小和B点相同，方向相反。

4)P点的横向速度即为它的总速度，B点和D点的总速度则可用活力公式 $v^2 = \mu(2/r - 1/a)$ 求出，其中 $\mu = G(M + m)$ 、 $r$ 为脉冲星的矢径、 $a$ 为轨道半长径，于是：

$$\frac{V_A^2}{V_B^2} = \frac{(1-e)(1-e^2)}{(1+e)(1+e^2)} \approx 0.01$$

所以 $V_B \approx 10V_A$ 。D点总速度的大小和B点相等。也可以根据图中B点的切线的斜率(与水平线成大约45度角)，结合 $V_{B\perp}$ 求 $V_B$ ，结果基本一致。

5)由(2)可知：

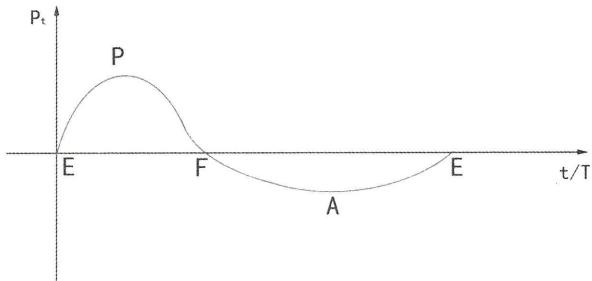
$$P_t = P_0 + b/C$$

其中 $b = V_t \times P_0$ 为脉冲星公转走过的距离在视线方向的投影( $b$ 随时间的变化直接导致 $P_t$ 随时间的变化)，因此 $P_t \sim t/T$ 的曲线图和 $b \sim t/T$ 曲线图的形状相似( $P_0$ 、 $C$ 均为常数，不改变曲线的形状)，也就是说 $P_t \sim t$ 曲线图表示的就是脉冲星在视线方向上的投影位置变化情况，从而推断出它的视向速度曲线的形状也和 $P_t \sim t$ 曲线一样。

从第一问中画出的 $P_t \sim t/T$ 图可以看出，脉冲星的视向速度在一个周期内，先是缓升然后是陡降，显然在观测者看来，此脉冲星的运动应是先过A点(视向速度为0，而且变化率较小)，缓缓达到最大值后，向P点运动，此后脉冲星越来越靠近焦点(即O点)，运动速度增加，很快就运行至P点，视向速度再次变为0，所以视向速度曲线会陡峭下降。据此可以看出，观测者应靠近长轴，并且在A点的左侧，与P正对。

6)A、B、P、D的位置如第一问中画出的 $P_t \sim t/T$ 图所示。在A、P点， $P_t$ 与 $P_0$ 相等，在B、D点，它们的差值最大(理由见第8问)。

7)如果观测者位于短轴方向，在A点和P点时，所看到的 $P_t$ 达到极大值，但由于 $V_A$ 小于 $V_P$ ，所以 $P_t(A)$ 要比 $P_t(P)$ 小。E、F分别为椭圆短轴的两个端点(E在下、F在上)，从E到P所需的时间比从F到A所需的时间短。曲线形状如下图所示。



8)根据题干给出的轨道图可以读出DPB弧段的面积并计算出椭圆的面积，容易求出它们的比值约为0.032，根据开普勒第二定律，这个比值就是题目要求的时间比。根据(1)中绘制的 $P_t \sim t/T$ 图，可以读出从D到B的时间约占整个周期的0.032。二者符合得非常好。

9) $P_t = P_0$ 的直线已在第一问中画出的 $P_t \sim t/T$ 图中给出，直线和曲线包围的上、下部分的面积需要从图中读出，在此设它们的和 $S'$ ，则：

$$S' = \sum_{\Delta t} [(P_t - P_0) \times \frac{\Delta t}{T}]$$

其单位为“毫秒”，它的物理意义是在某个时刻 $t$ (以 $T$ 为单位)，观测到的脉冲周期 $P_t$ 累计比真实脉冲周期 $P_0$ 大或小多少毫秒， $T$ 是脉冲星的轨道周期，以秒为单位(1585440秒)， $P_t$ 为在 $t \rightarrow t + \Delta t$ 这一小段时间里观测到的脉冲周期， $\Sigma$ 表示对

段较长时间(例如 $t = 0 \rightarrow T/2$ )内的 $P_t \times \Delta t/T$ 值进行求和。

据(5)可知, 观测者视线方向几乎平行于脉冲星的轨道长轴, 所以脉冲星在从A到P的 $T/2$ 时间里沿着视线方向走过的距离就是轨道长轴的长度, 即:

$$2a = \sum_{\Delta t} (v_t \times \Delta t), \quad \Delta t \in [t_A, t_P]$$

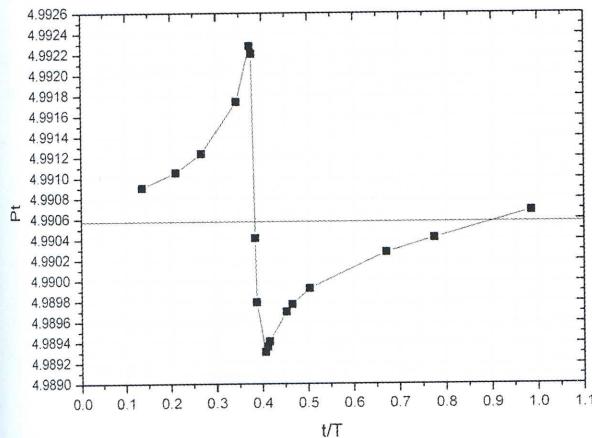
这里 $a$ 的单位为“光秒”,  $v_t$ 为 $t \rightarrow t + \Delta t$ 这段时间的视向速度( $\Delta t$ 很小, 这段时间里 $v_t$ 可视为常数), 单位为“光秒/秒”, 整个求和的时间范围为从 $t_A$ 到 $t_P$ , 正好是 $T/2$ ,  $\Delta t$ 的单位为秒。我们在第(2)问中已经求出了 $P_t$ 和 $v_t$ 的关系:  $P_t = P_0 + v_t \times P_0/C$ , 于是有:

$$v_t = (P_t - P_0) \times \frac{C}{P_0}$$

据此推出:

$$2a = \sum_{\Delta t} [(P_t - P_0) \times \frac{\Delta t}{T} \times C \times \frac{T}{P_0}] = C \times \frac{T}{P_0} \times S'$$

我们将(1)中的图重绘如下:



可以从图中数出曲线与直线之间包围的面积(即 $S'$ ), 在半个周期里, 所包含的面积约为45格, 每格代表的时间为 $0.0001 \times 0.05$  ms, 因此 $S' \approx 45 \times 0.0001 \times 0.05$  ms = 0.000225 ms。所以脉冲星的轨道半长径为:

$$a = \frac{1}{2} \cdot C \times \frac{T}{P_0} \times S' \approx 36 \text{ 光秒}$$

1AU≈8.3光分, 所以 $a \approx 0.072$  AU, 我们可以根据开普勒第三定律求出这个双星系统的质量和, 答案只有0.15倍太阳质量, 这个数值显然太小了。这也说明我们估算的 $a$ 偏小。可能有两方面的原因: 首先, 视线方向并不严格平行于长轴方向, 其次脉冲星的轨道面也并不正好与视线重合, 所以我们求出的 $a$ 只是真实半长轴的下限。

## 观测试题

8.在另外一张“答题表”中列出了夜空中的10颗亮星。

8.1)在表格上(见答题表), 对那些你现在能看见的恒星在它们所在行的最后一个格里标一个“×”。

8.2)用手电(touch beam)把这些能看见的星指给监考人员。

8.3)同样指出春分点(Vernal Equinox)在天上的位置。

9.请参照给你的星图。这个图按实际方向给出了你现在看到的一部分星空。图上标出了天王星(Uranus)个海王星(Neptune)的位置以及Ecliptic(黄道)。

9.1)这两颗行星都不容易用肉眼看到。请向监考人指出在天空中分别离这两颗行星最近的恒星。

9.2)估计天王星和海王星之间的角距离(把结果写到答题表里)。

10.给你了一台125mm口径的牛顿反射望远镜, 焦距是1025mm, 地平式, 三个目镜, 焦距分别为12, 25和38mm。

观测目标: 低年组为昴星团(Pleides), 高年组为天鹅β双星(Albireo)。选择合适的目镜, 把目标找到望远镜视场正中, 请监考人看。

(所有过程的总时间不能超过25分钟)。

# 2007年第十二届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/陈冬妮 翻译、译解

### 低年组

1、地球与月球。这张照片(见下图)是在一颗人造地球卫星上为地球和月球拍摄的合影。请估算在这颗人造卫星上的观测者看到的月球的视星等。



**解答** 设 $r_E$ 、 $R_E$ 、 $L_E$ 分别为从人造卫星上看到的地月的角直径、地球的线半径以及从卫星到地球的距离，同样，对于月球这三个量分别为 $r_M$ 、 $R_M$ 、 $L_M$ 。由公式

$$R_E = L_E \times \sin r_E \approx L_E \times r_E$$

$$R_M = L_M \times \sin r_M \approx L_M \times r_M$$

我们可以得到人造卫星到地球的距离与人造卫星到月球的距离比为：

$$\frac{L_E}{L_M} = \frac{R_E}{R_M} \times \frac{r_M}{r_E}$$

另外从图片上地球与月球极为相近的位置可以判断，在拍摄这张照片时，人造卫星、地球、月球三者应该近乎处在一条直线上，因此有 $L_M = L_{EM} + L_E$ ，其中 $L_{EM}$ 是地月之

间的距离，所以

$$L_M = \frac{L_{EM}}{1 - R_E/R_M} \times \frac{r_M}{r_E}$$

.....(a)

仍然从照片中可以得知，在人造卫星上的观测者此时看到的是满月，令 $m_0$ 为在地球上看到的满月的视星等，那么在人造卫星上看到的满月的视星等 $m$ 应该可以表示为

$$m = m_0 + 5 \lg \frac{L_M}{L_{EM}} = m_0 - 5 \lg \left[ \left( 1 - \frac{R_E}{R_M} \right) \times \frac{r_M}{r_E} \right]$$

.....(b)

用尺子在图片上测量出 $r_E$ 和 $r_M$ 的值， $R_E$ 和 $R_M$ 、 $m_0$ 、 $L_{EM}$ 的值可以从行星数据表中查到，将 $r_E/r_M \approx 6.15$ ， $L_{EM} = 384400\text{km}$ ， $R_E/R_M = D_E/D_M = 12756/3475 = 3.67$ ， $m_0 = -12.7^m$ 都代入公式(b)可以得到最终的结果： $m \approx -10.8^m$ 。

说明：在得到公式(a)并将相关数据代入后可以得到 $L_M \approx 2.5L_{EM}$ ，也可以根据经验公式即距离增大2.5(精确地说是2.512)倍，星等增大2等，得到 $m \approx -10.7^m$ 。

2、恒星轨道周期。请估算(至少是粗略估算)太阳系内天体可能的最短和最长的恒星轨道周期是多少？太阳系内天体也包括人造天体等。

### 解答

(1)最短周期：根据题意，太阳系内最短的恒星周期应该产生在这样的情况下：绕转某中心天体的“卫星”天体，在其绕转的圆轨道内，物质的平均密度最高。

$$T = 2\pi \cdot \frac{r}{V} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{GM/r}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^2 \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}}$$

我们知道太阳系内密度最高的天体应该是距离太阳很近的行星，即“类地行星”。从行星数据表中可以看出密度最高的是地球和水星。地球虽然密度比水星稍高一些，但由于地球表面有大气层，因此“卫星”不能紧贴地球表面绕行，而环绕水星的天体则能够紧贴水星表面运行。因此，在“卫星”天体的绕转圆轨道内，以水星为中心天体的平均密度比以地球为中心天体的要高一些，平均密度为 $5430\text{kg/m}^3$ ，

$$T_{\text{水星}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}} = 5100\text{s} = 85 \text{分钟}$$

说明：如果只考虑以太阳为绕转中心天体，答案为167分钟，会酌情给分。

(2)最长周期：根据题意，太阳系内最长的恒星周期应为绕转太阳的天体中，其可能的半长轴最长的天体的运转周期，由开普勒第三定律 $T = a^{3/2}$ ，其中 $T$ 以年为单位， $a$ 以天文单位为单位，近似取太阳到最近恒星距离的一半(大约120 000天文单位)作为半长轴，计算得 $T_{\text{最大}} = 40000000$ 年。

3、火星落山。请估算(至少是粗略估计)，当火星大冲时，在Simeiz(考试地)的Kashka山上观测，从火星盘面下缘与地平相切直到火星盘面完全消失在地平线下的整个过程(即火星落山)需要多长时间？

### 解答

从行星数据表中可以找到火星大冲时火星距地球的距离

$$S = a_M \cdot (1 - e_M) - a_E = 57.1 \text{ 百万km}$$

火星盘面的角直径为：

$$\alpha = \frac{D_M}{S} = \frac{6794}{5710000} = 1.19 \times 10^{-4} \text{ 弧度}$$

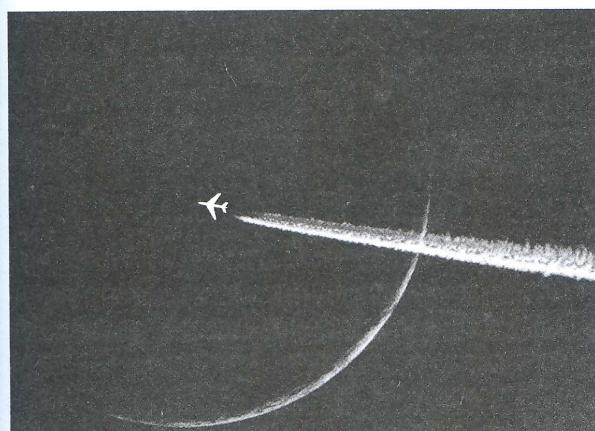
由于火星近乎位于黄道，这部分天空的运行角速度为：

$$\omega = 360 \times \frac{60 \text{ 角分}}{86164 \text{ 秒}} \approx 0.25 \text{ 角分/秒}$$

考虑到考试地Simeiz的地理纬度约为 $\phi = 45^\circ$ ，可计算得到火星落山的时间为：

$$\tau = \frac{\alpha}{\omega \cdot \sin \phi} \approx 2.3 \text{ 秒}$$

4、照片。照片上(见下图)拍摄的是以月球为背景的一架飞机，假定照片是在Simeiz(考试地)发生日食(或最接近发生日食)的某天拍摄的。(1)请估计日食是发生在拍摄照片多久之前或多久之后的？如果计算结果为之前，请用英文注明was；如果结果为之后，请用英文注明will be。(2)在Simeiz当地能看到这次日食吗？请用英文Yes、Maybe、No分别标明能够、也许、不能看到，并用图示和计算来解释你的结果。



### 解答

首先，从飞机尾部喷射的轨迹被照亮的状态可

以判断照片应当是在日出或日落时拍摄的。其次，可以看到月亮的右面是被照亮的部分，对于北半球而言，这意味着月亮正在落山，也就是说照片拍摄时间应当在日落时分，而且新月应该就在几天前，也就意味着日食应该是已经发生了，答案应为was。

从照片上可以量出月亮被照亮的部分与月球半径之比 $b/R \approx 2 \text{ mm}/52 \text{ mm} = 1/26$ ，相应的角度为：

$$\phi = \sqrt{2b/R} \approx 15.9^\circ$$

又考虑到月球相对太阳的角速度为：

$$360^\circ / 29.53 \text{ 天} \approx 12.2^\circ/\text{天}$$

所以可以估计从新月起到图片给出的月相所经历的时间大致为：

$$15.9^\circ / 12.2^\circ/\text{天} \approx 1.30 \text{ 天} \approx 31 \text{ 小时}$$

综合以上分析，日食一定发生在白天(daytime)，所以只要日食带能够覆盖Simeiz，那么日食发生时在Simeiz当地应该是已经看到过日食了。

5、外星人访问地球。外星生物决定要殖民地球。有两种飞船，一种是vituloids飞船，它的导航器要求北极星有时严格在天顶，北极星在殖民开始时的坐标为 $\alpha = 2^h 32^m$ ， $\delta = 89^\circ 16'$ 。另一种是crocodiloids飞船，它的导航器要求北极星有时严格在地平。假定这些导航器都安装在飞船的顶部，飞船只能垂直降落在地球上，而且要求导航器不能被其他飞船上的导航器直接看到。请估计可以在地面着陆的两种飞船的数量各为多少？假定地球是球体，飞船底部可以在地球表面(陆地和海洋)任意地方着陆。飞船的高度为 $h = 10\text{m}$ 。

### 解答

首先可以根据题目计算出在地球上着陆的两架飞船之间的最小距离。令 $R_E$ 为地球半径， $L$ 为从飞船顶部到可视地平的距离，由：

$$(R_E + h)^2 = R_E^2 + L^2$$

可以得到： $L = \sqrt{2R_E \cdot h} \approx 11.3 \text{ km}$ 。而两飞船间的最小距离 $D$ 应为： $D = 2L \approx 22.6 \text{ km}$ 。

对于vituloids飞船：

它们应该着陆在纬度刚好等于北极星赤纬的纬圈上，也就是 $\phi = 89^\circ 16'$ 。这条圆弧的长度：

$$S = 2\pi r \times \sin(90^\circ - \phi) \cdot R_E = 512 \text{ km}$$

所以能够着陆的飞船最大数目为：

$$N_V = [S/D] = 22 \quad ([\quad] \text{意为取整})$$

对于crocodiloids飞船：

它们应该着陆在赤道附近的一条带上，而不仅是一条圆弧上，着陆带的长度近似为地球赤道的长度： $A = 2\pi R_E = 40076 \text{ km}$ ，着陆带的宽度为： $B = 2\sin(90^\circ - \phi) \cdot R_E = 163.3 \text{ km}$ 。可以想像将飞船排列成三角形的网状阵列应该可

以使飞船的数目达到最大，有两种排列方法，一种可以排列：

$$([\frac{B}{\frac{\sqrt{3}}{2}D}] + 1) \times [A/D] = 9 \times 1774 = 15966 \text{ 架}$$

另一种可以排列：

$$([\frac{A}{\frac{\sqrt{3}}{2}D}] + 1) \times [B/D] = 8 \times 2048 = 16384 \text{ 架}$$

综上，最多可以排列16384架crocodilods飞船。

## 高年组

1、星系。某星系距离为 $L_1 = 3\text{Mpc}$ 时，其热星等(全部辐射)为 $m_1 = 6.88^m$ ，请计算当距离为 $L_2 = 3\text{Gpc}$ 时，该星系的热星等 $m_2$ 为多少？

解答 不考虑宇宙学红移，直接用公式 $m_2 = m_1 + 5\lg(L_2/L_1) = 21.88^m$ 只能给两分。

由于题目涉及的是宇宙距离，所以必须考虑红移(相对论效应)。

利用Hubble定律 $v = H \times L$ 可知距离为3Gpc的星系，其退行速度为 $v_2 = 210000 \text{ km/s}$ ，亦即真空光速的0.7倍，所以要考虑相对论效应，这里取哈勃常数 $H = 70 \text{ km/s/Mpc}$ 。

对于每个光子来说，其原始能量：

$$E_0 = h\nu_0 = hc/\lambda_0$$

当其穿越3Gpc的距离到达地球时，其能量为：

$$E_2 = h\nu_2 = hc/\lambda_2$$

因此： $E_2/E_0 = \lambda_0/\lambda_2$ ，星等差为： $\Delta m = -2.5\lg(E_2/E_0)$ ，按照经典理论：

$$\lambda_2 = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_2}{c}\right)$$

得到的结果为 $\Delta m = 0.58^m$ ，因此 $m_2 = 22.46^m$ 。按照狭义相对论：

$$\lambda_2 = \lambda_0 \cdot \sqrt{\frac{c+v_2}{c-v_2}}$$

得到的结果为 $\Delta m = 0.94^m$ ，因此 $m_2 = 22.82^m$ 。

按经典理论计算的结果扣1分。

2、太空帆。为了研究小行星带，发射了一架利用太阳能作为动力飞往那里的探测器。探测器上有一个能展开的帆，可以收集太阳能作为探测器的动力。该探测器的总重为 $m = 1\text{吨}$ 。探测器在绕太阳的圆轨道上运行，轨道半径为1AU。这时打开太空帆接收太阳能，在探测器绕日运行半周后抵达谷神星。请估算这个太空帆的面积 $S$ 和厚度 $d$ 。可以假定太空帆与镜面一样，小行星带到太阳的典型距离取2.8 AU，太阳的辐射功率为 $A = 1.37 \text{ kW/m}^2$ 。

### 解答

落在太空帆上的光子数目与探测器到太阳的距离成反比，且有 $F \sim 1/R^2$ ，因此可以认为探测器的轨道遵守开普勒定律，只是其“有效引力”要小一些，换句话说，就是探测器是运行在一个“有效质量”要小于真正太阳质量的中心天体的引力场里。轨道应为椭圆，近日点在地球轨道处，远日点在小行星带处。根据开普勒第二定律以及能量守恒定律，可以得到：

$$M_1 = M_0 \times \frac{1 + R_0/R_1}{2} \approx 0.679M_0$$

其中 $M_0$ 和 $M_1$ 为太阳的真正质量和“有效质量”， $R_0$ 和 $R_1$ 分别为探测器的近日点和远日点距离。因此对探测器的引力就改变了：

$$\frac{GM\Delta M}{GM_0} \approx \frac{1 - R_0/R_1}{2} \approx 0.321$$

下面就要求出能够达到这个有效引力所需要的光压强度：对于每个光子，其能量、动量的关系为 $p = E/c$ ，又因为太空帆是镜面一样的材料，因此每个光子单位时间的动量改变量为 $2\Delta p$ ，所以：

$$F_p = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \Delta E}{c \cdot \Delta t}$$

距离太阳为 $R$ 处，单位时间内落在太空帆上的光子总能量为：

$$\frac{\sum \Delta E}{\Delta t} = A \cdot (R_0/R)^2 \cdot S$$

从而有：

$$F_p = \frac{2A \cdot S \cdot (R_0/R)^2}{c} = \frac{(1 - R_0/R_1) \cdot GM_0 m}{2R^2}$$

得到：

$$S = \left(1 - \frac{R_0}{R_1}\right) \cdot \frac{GM_0}{R_0^2} \cdot \frac{mc}{4A}$$

其中 $GM_0 = 4\pi^2 R_0^3/T_0^2$ ， $T_0$ 即地球的恒星周期，代入数值得到： $S \approx 0.2 \text{ km}^2$ 。

再估计太空帆的厚度 $d$ ，根据题目，探测器的合理密度取值应为 $2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 到 $3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 之间，以铝为例， $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，而探测器的总质量为1吨，假定太空帆的质量为总质量的一半，则厚度为：

$$d = \frac{500 \text{ kg}}{2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 0.2 \text{ km}^2} \approx 0.9 \times 10^{-6} \text{ m}$$

现代技术可以达到这种水平，因此是合理的。

3、宇宙酒精。英国Jodrell Bank天文台的天文学家宣布，他们在太空深处发现直径为 $288 \times 10^9$ 英里(即 $463 \times 10^9$ 千米)的一片酒精分子云，可以帮助人们理解巨星是如何从原初气体中诞生的过程。一些国家甚至决定派探测队去那里品尝好酒——但在得知分子云距离我们实在太遥远，即使用最现代的飞行技术也要花费几百万年时间才能抵达后，所有的探

测热情都烟消云散了。

这块分子云的密度比星际气体要大，但与我们日常生活中的物质密度相比还是太小了，只有10个原子每立方毫米。请估计这块分子云的温度应为多少，才能保证在探测队抵达之前，分子云是稳定的，不会分解掉。假定酒精分子是乙醇，分子式为 $C_2H_5OH$ 。

**解答**

我们只能非常粗略地估计分子云的温度，当酒精分子的平均速度 $V_{av}$ 不超过分子云边缘处的第二宇宙速度 $V_{II}$ ，我们就认为分子云是稳定的。

酒精分子的分子量为 $\mu = 0.046 \text{ kg/mol}$ ,  $R$ 为气体常数,  $T$ 为绝对温度，那么有：

$$V_{av} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

因此： $3RT/\mu < 2GM/r$ ，而质量为：

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{n \cdot \mu}{N_A}$$

$n = 10$ 个原子/立方毫米， $N_A$ 为阿佛加德罗常数，代入数值得到： $T < 42.2\text{K}$ 。

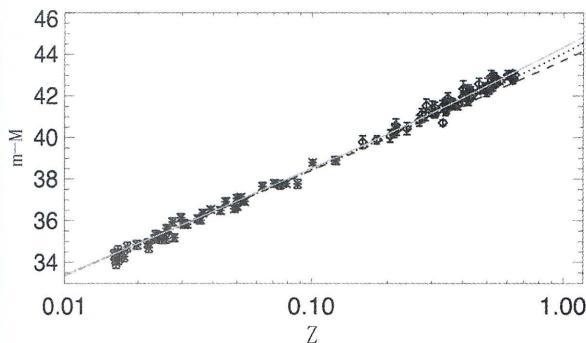
4、5题同低年组

## 实测试题

国际天文奥赛组委会 供稿/陈冬妮 翻译、译解

高年组

1、超新星。下图给你的Hubble图，以距离模数为纵坐标，红移 $z$ 为横坐标。如果有一颗距离为 $2.5 \times 10^3 \text{ Mpc}$ 的Ia型超新星，请计算它的视星等。已知所有的Ia型超新星的绝对星等均为 $M = -19.5$ 等。



**解答**

由Hubble定律 $V_r = Hr$ 可以推知SN Ia的退行速度大约为 $V_r = 180000 \text{ km/s}$ ，取 $H = 71 \text{ km/s/Mpc}$ ， $r = 2.5 \times 10^3 \text{ Mpc}$ ，由于 $V_r = 0.6c$ 已经与光速( $c$ )可比，因此要利

用狭义相对论来计算红移：

$$z = \sqrt{\frac{1 + V_r/c}{1 - V_r/c}} - 1 = 1$$

再由SN Ia的平均绝对星等 $M = -19.5$ 等，以及给出的Hubble图可以得到 $m - M = 44$ 等，所以 $m = 24.5$ 等

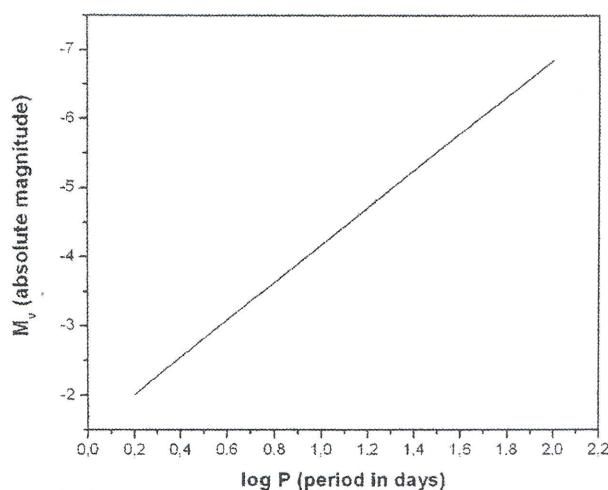
2、视向速度。假定有一颗造父变星，位于人马座(Sgr)和盾牌座(Sct)交界处。造父变星的平均视星等为6.2等。在9月下半月(从9月15日到9月30日)对该造父变星进行了连续16夜的 $H\alpha$ 线光谱观测，数据在表格中(见本栏下表)。第一列是观测时间，以天为单位，第二列是观测到的 $H\alpha$ 波长(实验室里 $H\alpha$ 的静止波长为 $\lambda=6562.8\text{埃}$ )。

请根据这些数据作图，以便从图中获得一些有关该造父变星的信息，并回答问题：1) 这颗造父变星能够被200万年前的地球人看到吗？答案必须用英文写明Yes或No。

2) 200万年前，该造父变星的视星等为多少？补充信息：要利用给你的造父变星周光关系图(见本栏下图)，图中给出的直线适用于该造父变星。

\*提示：星际消光以及200万年间可能发生的造父变星的光度变化，地球自转等因素不必考虑。

| 观测时间(天) | 观测波长(埃) | 观测时间(天) | 观测波长(埃) |
|---------|---------|---------|---------|
| 0.9     | 6565.1  | 1.8     | 6565.1  |
| 2.9     | 6564.6  | 3.9     | 6564.4  |
| 4.9     | 6564.9  | 5.8     | 6565.1  |
| 6.8     | 6564.8  | 7.8     | 6564.5  |
| 8.8     | 6564.5  | 8.9     | 6564.6  |
| 9.8     | 6565.0  | 10.8    | 6565.0  |
| 11.9    | 6564.6  | 12.8    | 6564.4  |
| 13.8    | 6564.4  | 14.8    | 6564.7  |
| 15.9    | 6565.1  |         |         |



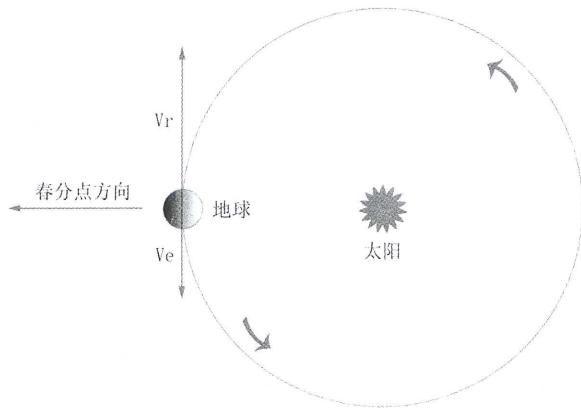
**解答**

(1) 利用表中的数据，先将 $H\alpha$ 线的红移转换成

造父变星相对于地球的视向速度 $V_r$ (忽略地球自转):

$$V_r = c \times z = c \times \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

由于我们是在地球上观测，所以得到的 $V_r$ 是包括了地球公转速度 $V_e$ 的。从题干知道该造父变星非常靠近黄道，并且观测是在9月接近秋分的时刻进行的，因此恒星与太阳的角距离大致相差90度， $V_e$ 与 $V_r$ 几乎在一条直线上，并且方向相反，如下图所示。

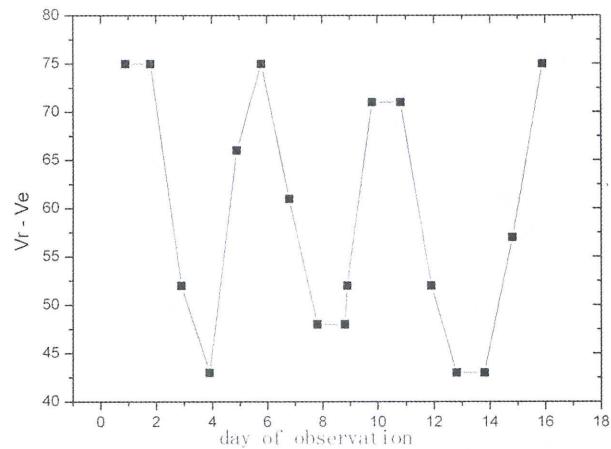


在实施观测的这16天里，可以认为地球的公转速度 $V_e$ 是个常量，其值为30km/s。改正地球公转效应后，造父变星的实际视向速度为 $V_r - V_e$ ，列于下表。

| 观测时间<br>(天) | 观测波长<br>(埃) | 视向速度<br>(km/s) | $V_r - V_e$<br>(km/s) |
|-------------|-------------|----------------|-----------------------|
| 0.9         | 6565.1      | 105            | 75                    |
| 1.8         | 6565.1      | 105            | 75                    |
| 2.9         | 6564.6      | 82             | 52                    |
| 3.9         | 6564.4      | 73             | 43                    |
| 4.9         | 6564.9      | 96             | 66                    |
| 5.8         | 6565.1      | 105            | 75                    |
| 6.8         | 6564.8      | 91             | 61                    |
| 7.8         | 6564.5      | 78             | 48                    |
| 8.8         | 6564.5      | 78             | 48                    |
| 8.9         | 6564.6      | 82             | 52                    |
| 9.8         | 6565.0      | 101            | 71                    |
| 10.8        | 6565.0      | 101            | 71                    |
| 11.9        | 6564.6      | 82             | 52                    |
| 12.8        | 6564.4      | 73             | 43                    |
| 13.8        | 6564.4      | 73             | 43                    |
| 14.8        | 6564.7      | 87             | 57                    |
| 15.9        | 6565.1      | 105            | 75                    |

以 $V_r - V_e$ 为纵坐标，时间为横坐标作图，见右栏上图。

首先我们可以从图中估计出造父变星的脉动周期大约为5天。然后利用给出的绝对星等—光变周期图，可以知道该造父变星的绝对星等为 $M_V \approx -3.3$ 等。利用星等距离公



式 $m - M_V = 5 \lg r - 5$ ，以及造父变星的平均视星等(6.2等)，可以得到造父变星的距离为 $r = 800$ pc。(忽略星际消光)

从上图估计出造父变星的平均视向速度(相对于太阳)为 $\langle V_r \rangle = 60$ km/s，因此该造父变星是在远离太阳。在两百万年间，该星以60km/s的速度共退行了100pc，也就是两百万年前这颗造父变星距离太阳大约为700pc，因此那时它的视星等为5.9等，勉强能够被人类看到。(忽略星际消光和两百万年间造父变星本身可能发生的绝对星等的变化)。

## 低年组

| N  | JD 244... (O) | JD 244... (C) | E | O-C |
|----|---------------|---------------|---|-----|
| 1  | 42551.0       |               | 0 | 0   |
| 2  | 42852.1       |               |   |     |
| 3  | 43155.8       |               |   |     |
| 4  | 44063.3       |               |   |     |
| 5  | 44365.5       |               |   |     |
| 6  | 44969.9       |               |   |     |
| 7  | 45273.9       |               |   |     |
| 8  | 45878.2       |               |   |     |
| 9  | 46181.8       |               |   |     |
| 10 | 46486.4       |               |   |     |
| 11 | 46791.2       |               |   |     |
| 12 | 47401.9       |               |   |     |
| 13 | 47706.2       |               |   |     |
| 14 | 48007.4       |               |   |     |
| 15 | 48308.1       |               |   |     |
| 16 | 48609.5       |               |   |     |
| 17 | 48909.4       |               |   |     |
| 18 | 49210.8       |               |   |     |
| 19 | 49811.8       |               |   |     |
| 20 | 50114.6       |               |   |     |
| 21 | 50414.5       |               |   |     |

1、O-C图。鲸鱼座的著名长周期变星蔚蓝增二(Mira Cetus)，其光变周期(脉动周期) $P$ 本身也会随时间变化。在很

长一段观测时间内，你会发现光变周期时长时短，甚至会发生突变，或者说光变周期是不规律的。除了光变周期P的长短会发生变化外，光变曲线的形状也会发生变化，这就导致在测量光度极大值的时刻时会有不规律的误差。

为了找出这种可能的光变周期P本身的变化，天文学家使用O-C图。O-C图可以给出观测到的(Observed)和计算出来的(Calculated)光度极大值的发生时刻之间的区别随时间(儒略日JD或周期数(cycle number))的变化规律。

理论光度极大值的发生时刻是采用线性公式 $T = T_0 + P \times E$ 计算出来的，其中 $T_0$ 是某个初始的光度极大时刻， $P$ 是假定的光变周期， $E$ 是从 $T_0$ 开始后经过的周期数。给你的数据表(表1，见上页右栏下表)中列出了观测数据，第一列是观测的序数(第几次观测)，第二列是对应的光度极大值发生的时刻，即O-C图中的O。时间以儒略日计算。假定该造父变星理论计算出的周期 $P$ 是302.0天。

1) 请将表1补充完整。

2) 以O-C(即观测到的光度极大值发生时刻减去理论计算值)为纵坐标，E为横坐标，画一张图。请选择合适的比例。

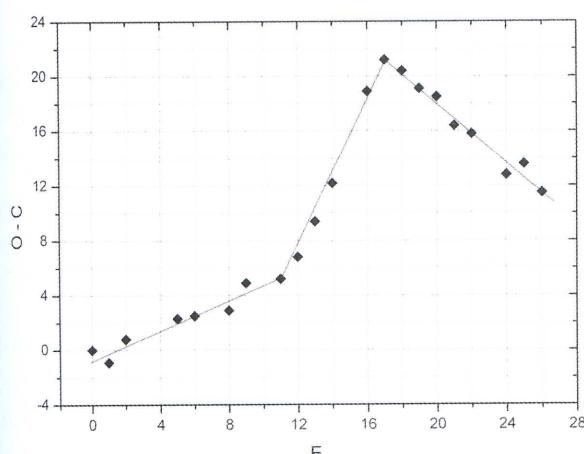
3) 利用你画好的O-C图，找到光变周期相对稳定的一段，并计算出该段时间光变周期的平均值 $\langle P \rangle$ 。注意：P变化稳定的时间区间可能有不只一个，如果有多个，请分别计算 $\langle P \rangle$ 并在答题纸上用清楚的数值表示。并将下表补充完整。表格的第一列是标明第几次出现P稳定的情况(NN)，第二列标明这段时间的长度，以儒略日为单位，第三列标明这段时间内的平均光变周期 $\langle P \rangle$ ，以儒略日为单位。

| E | $\Delta JD$ | $\langle P \rangle$ |
|---|-------------|---------------------|
|   |             |                     |
|   |             |                     |
|   |             |                     |
|   |             |                     |

### 解答

1) 由已知条件 $P = 302.0$ 天可以得到所有光度极大值时刻“O-C”的理论计算值，这样就可以完整地填写题目中的表。应该注意的是，不是所有的光度最大时刻都被观测到了，因此表格中E的值与表的行数不是一致的。

2) 利用填好的表格中的数据，我们可以得到纵坐标为O-C，横坐标为E的图。



| N  | JD 244... (O) | JD 244... (C) | E  | O-C  |
|----|---------------|---------------|----|------|
| 1  | 42551.0       | 42551.0       | 0  | 0    |
| 2  | 42852.1       | 42853         | 1  | -0.9 |
| 3  | 43155.8       | 43155         | 2  | 0.8  |
| 4  | 44063.3       | 44061         | 5  | 2.3  |
| 5  | 44365.5       | 44363         | 6  | 2.5  |
| 6  | 44969.9       | 44967         | 8  | 2.9  |
| 7  | 45273.9       | 45269         | 9  | 4.9  |
| 8  | 45878.2       | 45873         | 11 | 5.2  |
| 9  | 46181.8       | 46175         | 12 | 6.8  |
| 10 | 46486.4       | 46477         | 13 | 9.4  |
| 11 | 46791.2       | 46779         | 14 | 12.2 |
| 12 | 47401.9       | 47383         | 16 | 18.9 |
| 13 | 47706.2       | 47685         | 17 | 21.2 |
| 14 | 48007.4       | 47987         | 18 | 20.4 |
| 15 | 48308.1       | 48289         | 19 | 19.1 |
| 16 | 48609.5       | 48591         | 20 | 18.5 |
| 17 | 48909.4       | 48893         | 21 | 16.4 |
| 18 | 49210.8       | 49195         | 22 | 15.8 |
| 19 | 49811.8       | 49799         | 24 | 12.8 |
| 20 | 50114.6       | 50101         | 25 | 13.6 |
| 21 | 50414.5       | 50403         | 26 | 11.5 |

3) 从画好的O-C图上可以大致看出，数据点可以利用三条直线进行分段拟合，这表示有三个阶段该恒星的光变周期是相对稳定的，跳跃发生在 $E = 11$ 和 $E = 17$ 两处，这三个阶段分别为： $E = 0 \rightarrow 11$ 、 $E = 11 \rightarrow 17$ 、 $E = 17 \rightarrow 26$ 。怎么计算它们各自的平均光变周期呢？我们以 $E = 11 \rightarrow 17$ 为例进行分析。从O-C图上看出，这段时间O-C相对于E的直线的斜率为正值，也就是说理论假定的周期(记为 $P'$ )要比实际的观测周期( $P$ )短，以致O-C的差不断增大，整段时间一共经历了： $\Delta E = 17 - 11 = 6$ 个理论周期 $P'$ ，观测值累计比计算值大： $\Delta T = 21.2 - 5.2 = 16$ 天，所以实际周期应为：

$$P = P' + \frac{\Delta T}{\Delta E} = 302 + \frac{16}{6} = 304.67 \text{ 天}$$

其余的计算与此类似。也可以不按照 $\Delta T/\Delta E$ 而根据 $\Delta T/\Delta JD$ (儒略日之差)更精确地计算，二者差别不大。

| E     | $\Delta JD$     | $\langle P \rangle$ |
|-------|-----------------|---------------------|
| 0~11  | 0~45878.2       | 302.47              |
| 11~17 | 45878.2~47706.2 | 304.67              |
| 17~26 | 47706.2~50414.5 | 301.03              |

(李鉴)

2、视向速度。假定某造父变星的平均视星等为6.2等。对这颗造父变星进行了连续16夜的光谱观测，得到在不同观测时刻其视向速度的值。下表中第一列是观测时刻，以天为单位。第二列是观测到的视向速度值，日心参考系，

以km/s为单位。

根据表中给出的数据画一张图，以便获得关于该造父变星的有用信息，并回答问题：

| 观测时间(天) | 视向速度(km/s) |
|---------|------------|
| 0.9     | 75         |
| 1.8     | 74         |
| 2.9     | 51         |
| 3.9     | 45         |
| 4.9     | 67         |
| 5.8     | 75         |
| 6.8     | 63         |
| 7.8     | 46         |
| 8.8     | 47         |
| 8.9     | 50         |
| 9.8     | 70         |
| 10.8    | 70         |
| 11.9    | 53         |
| 12.8    | 42         |
| 13.8    | 42         |
| 14.8    | 58         |
| 15.9    | 75         |

1)这颗造父变星能给200万年前的地球人看到吗？答案必须用英文写明Yes或No，并用数值及公式解释你的答案。

2)200万年前，该造父变星的视星等为多少？补充信息：要利用给你的造父变星周光关系图(见高年组图)，图中给出的直线适用于该造父变星。

\*提示：星际消光以及200万年间可能发生的造父变星的光度变化，地球自转等因素不必考虑。

**解答** 利用表中给出的数据可以画出日心系的视向速度变化图，见高年组。

首先我们可以从图中估计出造父变星的脉动周期大约为5天。然后利用给出的绝对星等-光变周期图，可以知道该造父变星的绝对星等为 $M_V \approx -3.3$ 等。利用星等距离公式 $m - M_V = 5 \lg r - 5$ ，以及造父变星的平均视星等(6.2等)，可以得到造父变星的距离为 $r = 800\text{pc}$ 。(忽略星际消光)

从视向速度变化图中估计出造父变星的平均视向速度(相对于太阳)为 $\langle V_r \rangle = 60\text{km/s}$ ，因此该造父变星是在远离太阳。在两百万年间，该星以60km/s的速度共退行了100pc，也就是两百万年前这颗造父变星距离太阳大约为700pc，因此那时它的视星等为5.9等，勉强能够被人类看到。(忽略星际消光和两百万年间造父变星本身可能发生的绝对星等的变化)。

## 观测试题

1.1)请指出海豚座在天空的位置。

2)请估计在考试时，距离海豚座 $\varepsilon$ 星不超过24度的范围内

# 2008年第十三届国际天文奥林匹克竞赛试题

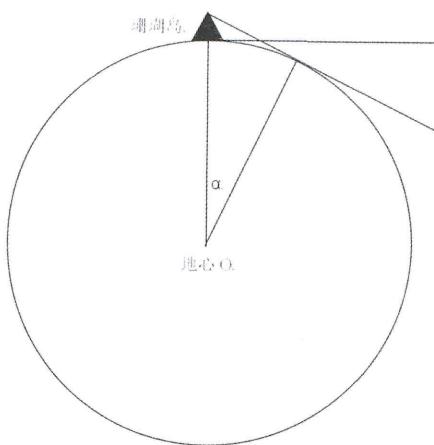
## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/李鉴 翻译、译解

1、(低年组)珊瑚岛。在地球赤道上有一个珊瑚岛,从它的最高点上看,北极星是永不下落的。求珊瑚岛的高度,忽略大气消光,其他效应必须考虑。

解答

北极星的赤道坐标为:  $2^h31^m48.7^s$ 、 $89^\circ15'51''$ , 在地球赤道上( $\phi = 0^\circ$ ), 它在下中天时的地平高度为:  $\phi - 90^\circ + \delta = -44'09''$ 。



在地平线附近, 大气折射角约为 $35'$ , 因此, 北极星下中天时的视地平高度为 $-44'09'' + 35' \approx -9'$ , 即要保证北极星永不下落, 珊瑚岛上观测者的视地平必须比赤道观测者的视地平低 $9'$ 。设珊瑚岛的海拔为 $h$ 米, 地球半径为 $R$ 米, 如上图所示,

$$\alpha = 9', \quad \cos \alpha = \frac{R}{R+h}$$

易于求出 $h \approx 22$ 米。

1、(高年组)恒星的核心温度。我们可以认为, 太阳的核心由完全电离的氢和氦混合而成, 氦所占的原子数比例为 $\alpha=0.08$ (意思是说, 氢原子与氦原子的数目比为92%: 8%)。太阳的核心的温度为1500万摄氏度, 密度为 $150\text{g}/\text{cm}^3$ 。假设有一颗碳星(100%由完全电离的碳组成), 它的参数与太阳相同(中心的压强、密度相同且质量相等)。求这颗碳星的核心的温度。氢、氦、碳的原子数和原子量分别为:  $Z_H=1$ ,  $A_H=1$ ;  $Z_{He}=2$ ,  $A_{He}=4$ ;  $Z_C=6$ ,  $A_C=12$ 。可以认为恒星核心是理想气体。

解答

根据题意, 太阳和碳星核心的气体由完全电离的氢、氦离子和碳离子以及相应的电子组成, 电子的数目等于离子中质子的数目(也就是原子数 $Z$ )。用 $n_H$ 、 $n_{He}$ 、 $n_C$ 分别代表氢离子、氦离子和碳离子的数目, 则与这些离子相对应的电子数目分别为:  $Z_H \cdot n_H$ 、 $Z_{He} \cdot n_{He}$ 、 $Z_C \cdot n_C$ 。恒星核心的压强等于各个离子的压强( $p_i$ )与电子的压强( $p_e$ )之和:  $p = p_i + p_e$ , 对理想气体有:  $p = nkT$ , 其中 $T$ 为气体温度,  $k$ 为玻尔兹曼常数 $1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ , 因此恒星核心的总压强可以表示为:  $p = (n_i + n_e)kT$ 。

对太阳核心有:

$$p_s = (n_H + Z_H \cdot n_H + n_{He} + Z_{He} \cdot n_{He}) \cdot kT_s \\ = [2(1 - \alpha) \cdot n_s + 3\alpha \cdot n_s] \cdot kT_s = (2 + \alpha) \cdot n_s \cdot kT_s$$

其中 $T_s$ 为太阳核心的温度,  $n_s = n_H + n_{He}$ , 为太阳核心的离子总数目。带入 $\alpha = 0.08$ 可知:

$$p_s = 2.08 \cdot n_s \cdot kT_s$$

同理, 对碳星核心有:

$$p_c = (n_c + Z_c \cdot n_c) \cdot kT_c = 7n_c \cdot kT_c$$

碳星和太阳核心的压强相等即:

$$p_s = p_c \Rightarrow 2.08 \cdot n_s \cdot kT_s = 7n_c \cdot kT_c$$

于是有:

$$T_c = 0.297(n_s/n_c) \cdot T_s$$

接下来需要求出太阳和碳星核心的离子数目比。据题意知二者的质量相等, 考虑到电子的质量与离子相比可以忽略, 因此有:

$$A_H \cdot n_H + A_{He} \cdot n_{He} = A_C \cdot n_C$$

上式左边为太阳核心的质量, 右边为碳星核心的质量。带入已知数据可以求出 $n_s = 9.23n_c$ , 因此:

$$T_c = 0.297 \cdot 9.23T_s = 2.74T_s \approx 4.1 \times 10^7 \text{ K}$$

2、(高年组和低年组)纯黑的猫。你或许已经注意到了在我们所住的公寓的右边有一群猫, 其中四只看上去是纯黑色的。估算一只黑猫的绝对星等为多少, 假设它是一个绝对黑体。

解答

我们可以把猫的绝对星等和太阳( $M_S =$

4.8等)做个比较。假设猫的表面积为 $s=0.15\text{ m}^2$ , 太阳的表面积为 $S=4\pi R^2=6.1\times 10^8\text{ m}^2$ ,  $s/S\approx 2.5\times 10^{-20}$ 。假设猫的温度为 $t=310\text{ K}$ , 太阳的表面有效温度约为 $T=5780\text{ K}$ , 因此

$$\left(\frac{t}{T}\right)^4 \approx 8.3 \times 10^{-6}$$

根据黑体辐射公式 $L=s\cdot\sigma\cdot T^4$ (其中s为黑体的表面积)有:

$$\frac{L_{cat}}{L_{sun}} = \frac{s}{S} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^4 \approx 2 \times 10^{-25}$$

又根据 $M=-2.5\lg L+C$ , 可知:  $M_{cat}-M_{sun}\approx 61.7$ 等, 因此黑猫的绝对星等 $M_{cat}\approx 66.5$ 等。

3、(高年组和低年组)大冲。我们知道对地球居民而言, 火星存在着大冲。大冲时它的星等可达-2.9等(例如2003年8月27日那次)。对其他星球的居民而言, 金星也具有大冲。对哪颗或哪几颗星球来说, 金星可能发生大冲? 求金星大冲时, 在这颗或这几颗行星上看到的它的视星等。

**解答**

显然, 太阳系的行星中, 只有在水星上才有可能看到金星大冲。我们可以通过对比地球上看到的火星大冲来求水星上看到的金星大冲时的视星等。

地球上接收到的火星的辐射流量为:

$$F_{Ma} \sim \alpha_{Ma} \cdot D_{Ma}^2 \cdot \left(\frac{1}{R_{E-Ma}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{R_{S-Ma}}\right)^2$$

其中 $\alpha_{Ma}$ 为火星的表面返照率,  $D_{Ma}$ 为火星的直径,  $R_{E-Ma}$ 为地球-火星之间的距离,  $R_{S-Ma}$ 为太阳-火星之间的距离。

同理, 在水星上接收到的金星的辐射流量为:

$$F_V \sim \alpha_V \cdot D_V^2 \cdot \left(\frac{1}{R_{Me-V}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{R_{S-V}}\right)^2$$

二者相比有:

$$\frac{F_V}{F_{Ma}} = \frac{\alpha_V}{\alpha_{Ma}} \cdot \left(\frac{D_V}{D_{Ma}}\right)^2 \cdot \frac{(R_{S-Ma} \cdot R_{E-Ma})^2}{(R_{S-V} \cdot R_{Me-V})^2}$$

用 $A_E$ 、 $A_V$ 、 $A_{Ma}$ 、 $A_{Me}$ 分别表示地球、金星、火星、水星的轨道半长径。地球与金星的轨道偏心率较小, 可以视为正圆, 而水星与火星轨道的偏心率不能忽略。因此, 在金星大冲时, 水星应位于近日点; 火星大冲时, 火星位于近日点。火星大冲时, 它离太阳的距离为:

$$R_{S-Ma} = (1 - e_{Ma})A_{Ma}$$

金星大冲时, 水星与太阳的距离为:

$$R_{S-Me} = R_{S-V} - R_{Me-V} = (1 + e_{Me})A_{Me}$$

流量比( $F_V/F_{Ma}$ )可以化为:

$$\frac{\alpha_V D_V^2}{\alpha_{Ma} D_{Ma}^2} \cdot \frac{[(1 - e_{Ma})^2 A_{Ma}^2 - (1 + e_{Me}) A_{Me} \cdot A_E]^2}{[(A_V - (1 + e_{Me}) A_{Me}) \cdot A_V]^2}$$



带入各行星的相关数据可以求出 $F_V/F_{Ma} \approx 134$ , 因此金星大冲与火星大冲时的星等差为

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{F_V}{F_{Ma}} \approx -5.3$$

火星大冲时的星等为-2.9等, 所以在水星上看到金星大冲时的星等为:

$$m = -2.9 - 5.3 = -8.2 \text{ 等}$$

4、(高年组和低年组)会跳的熊。20世纪之初, 我们在冰岛Spitsbergen的旅游指南上能看到这样的描述: “一只北极熊突然就跳了8米”。26世纪中叶, 为了让生物能在太阳系的遥远边缘定居, 生物学家们计划把Spitsbergen岛上的北极熊驱赶到柯伊伯带的冰质小行星上去。但是物理学家警告说, 有些弹跳力好的北极熊可能会成为柯伊伯带上的独立天体。请估计, 从物理学家的眼光看来, 在直径为多大的小行星上, 北极熊才可能舒适地定居? 你的答案应该是一个不等式。

**解答**

北极熊能在柯伊伯带冰质行星上舒适定居的条件是, 它奋力一跳后能回到该行星上, 而不是成为其“卫星”。根据题意, 在地球上, 北极熊能跳8米远或者8米高(尽管从常识上看这不太可能, 但由于题干本身即包含了一定的假设, 因此这种情况必须考虑)。

1)我们先来讨论第一种情况, 即北极熊在地球上能跳8米远。以 $v$ 表示北极熊的起跳速度,  $\alpha$ 表示它的起跳角度,  $L$ 表示跳的距离,  $t$ 表示跳起时离地的时间, 则:

$$L = v \cdot \cos \alpha \cdot t, \quad t = \frac{2v \cdot \sin \alpha}{g}$$

其中 $g$ 为地球表面的重力加速度。根据高中物理知识, 当 $\alpha=45^\circ$ 时, 做抛体运动的物体具有最大的水平位移(尽管北极熊起跳时的角度很难正好达到 $45^\circ$ , 但我们在此假设 $\alpha=45^\circ$ 也是合理的), 因此 $L=v^2/g$ , 北极熊的起跳速度为:

$$v = \sqrt{L \times g} \approx 9 \text{ m/s}$$

如果 $v$ 大于冰质小行星的第二宇宙速度 $v_i$ , 北极熊就将脱离行星。冰质行星的第二宇宙速度为

$$v_i = \sqrt{\frac{GM}{R^2}}$$

其中小行星的质量 $M=(4/3)\pi R^3 \cdot \rho$ , 因此:

$$v_i = D \sqrt{\frac{\pi G \rho}{3}}$$

$D$ 为小行星的直径

$$D = \frac{v_i}{\sqrt{\pi G \rho / 3}}$$

这里的 $\rho$ 就是冰的密度, 为 $900 \text{ kg/m}^3$ 。根据 $v < v_i$ 可以求出 $D > 35 \text{ km}$ 。

2)如果北极熊在地球上能跳8米高,那么它的起跳速度应为:

$$v = \sqrt{2g \cdot L} \approx 12.5 \text{m/s}$$

同样根据  $v < v_c$  可以求出  $D > 49 \text{km}$ 。

注: 这里假设北极熊在地球上和小行星上的起跳速度相等, 并不符合实际情况, 更加合理的假设是, 认为熊的起跳力在地球上和小行星上是相等的, 大家可以自己算算, 看结果与标准答案相差多少。另外, 如果这颗小行星质量过大, 导致其表面重力加速度超过地球的话, 北极熊同样也不能“舒适”地在此定居, 根据这个假设, 可以求出小行星的直径上限, 感兴趣的读者不妨一试, 把它与地球进行比较, 看看柯伊伯带内是不是有可能有那么大的天体。

5. (低年组)不同的理论。宇宙膨胀理论是当今最流行、接受度最广的现代宇宙模型。据说超过85%的天体物理学家对它深信不疑。但是, 仍然存在其他的宇宙学理论。其中之一认为宇宙并没有膨胀, 宇宙学红移不是由多普勒效应引起, 而是由于“光子变老”的缘故。即, 光子的能量按照  $E = E_0 \times 2^{-t/T_0}$  的规律衰减, 其中  $E_0$  为光子诞生时的初始能量,  $t$  为光子从诞生后所经历的时间,  $T_0$  是所谓“光子的半衰期”, 与原子物理中的半衰期概念类似。

请估算, 在“光子变老”模型中, 光子半衰期  $T_0$  应为多少时(以年为单位), 才能使它的计算结果与哈勃常数  $H_0 = 70 \text{km/s/Mpc}$  时的宇宙膨胀模型的结果相符。

### 解答

低年组可以不考虑相对论效应, 而且题干已给出哈勃常数, 高年组需要考虑到相对论效应, 并且给出合理的哈勃常数值。

假设宇宙诞生时辐射出一个光子, 经历  $t$  时间后, 光子的能量由  $E_0$  变为  $E = E_0 \times 2^{-t/T_0}$ 。

1)不考虑相对论效应。根据  $E = hc/\lambda$ , 可知

$$\lambda = \lambda_0 \times 2^{t/T_0}$$

这个光子的红移为:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 2^{t/T_0} - 1$$

(1)式就是“光子变老”理论对红移的解释。相应地, 根据宇宙膨胀理论, 光子的红移( $z$ )由宇宙膨胀引起, 并且宇宙膨胀满足哈勃定律:  $v = H_0 \cdot R$ , 其中  $R$  为天体到观测者的距离, 亦即  $t$  时刻后该光子所走过的路程  $ct$ , 带入  $v = cz$ (非相对论情况下退行速度与红移的关系,  $c$  为光速)有:

$$z = H_0 \cdot \frac{R}{c} = H_0 \cdot t$$

如果两个理论都与目前的观测结果一致, 那么对目前(即  $t$ =宇宙年龄时)而言, (1)、(2)应该等价, 联立(1)、(2)有:

$$2^{t/T_0} - 1 = H_0 \cdot t$$

.....(3)

注意(3)式仅在  $z \ll 1$  的情况下成立。宇宙年龄近似为  $1/H_0$ (实际上是 137.3 亿年), 把  $t = 1/H_0$  带入(3)式(此处注意, 当  $t = 1/H_0$  时, 由(2)式给出的红移  $z = 1$  已达非相对论情况下退行速度与红移关系的极限值, 尽管严格地讲, 当  $z > 0.1$  时,  $v = cz$  已不再适用), 可以求出:

$$T_0 = t = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{70} \text{s} \cdot \text{Mpc/km} \approx 1.4 \times 10^{10} \text{年}$$

5. (高年组)不同的理论。宇宙膨胀理论是当今最流行、接受度最广的现代宇宙模型。据说超过85%的天体物理学家对它深信不疑。但是, 仍然存在其他的宇宙学理论。其中之一认为宇宙并没有膨胀, 宇宙学红移不是由多普勒效应引起, 而是由于“光子变老”的缘故。即, 光子的能量按照  $E = E_0 \times 2^{-t/T_0}$  的规律衰减, 其中  $E_0$  为光子诞生时的初始能量,  $t$  为光子从诞生后所经历的时间,  $T_0$  是所谓“光子的半衰期”, 与原子物理中的半衰期概念类似。

请估算, 在“光子变老”模型中, 光子半衰期  $T_0$  应为多少时(以年为单位), 才能使它的计算结果与目前的天文观测相符。

### 解答

(高年组)考虑相对论效应, “光子变老”理论所得出的结果不变, 仍然为:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 2^{t/T_0} - 1$$

.....(1')

但宇宙膨胀理论中, 相对论性的红移公式为:

$$z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1$$

将哈勃定律  $v = H_0 \cdot R$  与  $R = ct$  带入上式, 可得:

$$z = \sqrt{\frac{1 + H_0 t}{1 - H_0 t}} - 1$$

.....(2')

联立(1')、(2')有:

$$\sqrt{\frac{1 + H_0 t}{1 - H_0 t}} = 2^{t/T_0}$$

.....(3')

这里不能用  $1/H_0$  来代表近似的宇宙年龄, 否则等式左边失去意义, 把宇宙年龄  $t = 137.3$  亿年带入(3')式, 可以求出:

$$T_0 \approx 5 \times 10^9 \text{年}$$

注: 以上是用初等数学的方法解答这道题, 在求解(3)和(3')式时需要带入特定的  $t$  值, 下面用高等数学中方法来更精确地求解(对参加天文奥赛的中学生不要求掌握, 仅

供参考)。

对 $E = E_0 \times 2^{-t/T_0}$ 微分, 可得:

$$dE = dt \cdot \frac{-\ln 2}{T_0} \cdot (E_0 \times 2^{-t/T_0}) = dt \cdot \frac{-\ln 2}{T_0} \cdot E$$

因此有:

$$\frac{dE}{E} = \frac{-\ln 2}{T_0} \cdot dt$$

又因为 $E = hc/\lambda$ ,  $dE/E = -d\lambda/\lambda$ ,  $d\lambda/\lambda$ 就是红移 $z$ , 可知:

$$z = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\ln 2}{T_0} \cdot dt \quad \dots \dots (1')$$

a、当 $z = d\lambda/\lambda \ll 1$ 时, 在膨胀宇宙模型中,  $z = v/c$ , 将哈勃定律 $v = H_0 \cdot R$ 与 $z = v/c$ 带入(1')式, 可得:

$$H_0 \cdot \frac{R}{c} = \ln 2 \cdot \frac{dt}{T_0} \quad \dots \dots (2')$$

光子诞生 $dt$ 时间后所经过的路程 $R = c \cdot dt$ , 把它带入(2')式得:

$$T_0 = \frac{\ln 2}{H_0} \approx 10 \times 10^9 \text{ 年}$$

b、当 $z$ 较大时(注意, 尽管 $d\lambda$ 是一个小量, 但 $z = d\lambda/\lambda$ 并不一定也是小量), 在膨胀宇宙模型中要用相对论性的红移公式为:  $z = \sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)} - 1$ , 再把哈勃定律 $v = H_0 \cdot R$ 以及 $R = c \cdot dt$ 带入(1')式, 于是有:

$$\frac{\ln 2}{T_0} \cdot dt = \sqrt{\frac{1 + H_0 \cdot dt}{1 - H_0 \cdot dt}} - 1 \quad \dots \dots (3')$$

可见, 根据(3')式也无法直接求出 $T_0$ 的准确值, 它只给出了 $T_0$ 和 $dt$ 的函数关系, 如果我们带入不同的 $dt$ 值, 就会得到不同的 $T_0$ (在这点上(3')与(3)和(3')式并没有本质区别), 这显然不符合“半衰期”的定义。造成这个结果的根本原因, 就在于“光子变老”理论与“宇宙膨胀”理论无法相洽, 二者必有一个是错误的。

## 实测试题

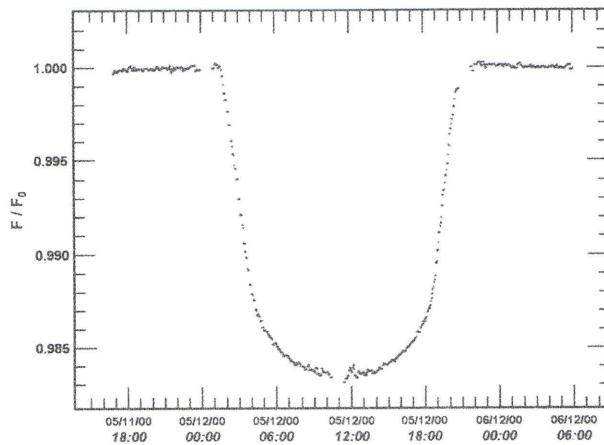
国际天文奥赛组委会 供稿/李鉴 翻译、解答

### 高年组

1、系外行星凌星。探测系外行星的最可靠方法之一, 就是观测行星凌恒星现象。当凌星发生时, 由于行星的遮挡在恒星之前, 恒星的辐射流量 $F$ 会从正常的 $F_0$ 暂时性地下降。

用这种方法发现的第一颗系外行星是HD209458b, 它是一颗环绕着类太阳恒星HD209458(质量为 $1.09 M_\odot$ )旋转的类木行星, 公转周期为3.5248天。下图是哈勃空间望远镜在2000年5月记录下的该恒星的光变曲线。假设行星轨道为正圆。

1)在答题纸上给出的光变曲线图上, 标出凌始外切(first contact, 以A表示)、凌始内切(second contact, 以B表示)、食甚(third contact, 以C表示)、凌终内切(fourth contact, 以D表示)、凌终外切(fifth contact, 以E表示)。



2)在另一张答题纸给出的图上画出(1)所对应的各个阶段的行星图(此图从略)。

3)填写各阶段发生时刻的表格(此表从略)。

4)(高年组)作为你的分析的总结, 补齐下表中缺失的数据。

| HD209458 planetary system data |                |
|--------------------------------|----------------|
| Stellar spectral class:        | G2 V           |
| Stellar radius R:              |                |
| Stellar mass M:                | $1.09 M_\odot$ |
| Orbital period P:              | 3.5248 days    |
| Planet-star distance a:        |                |
| Planetary radius r:            |                |
| Planetary mass m:              |                |

### 解答

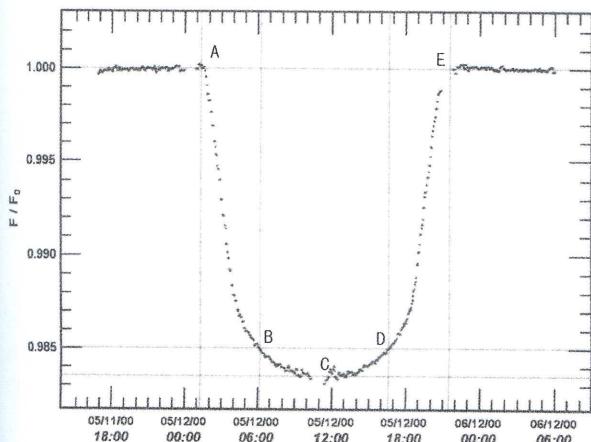
1、凌星各个阶段的发生时刻如下页左栏上图所示, A(凌始外切, 5月12日1点)、C(食甚, 5月12日11.5点)、E(凌终外切, 5月12日21.5点)都易于找出, B(凌始内切)和D(凌终内切)只能大概做个估计, 从B到D, 恒星亮度变化微弱, 大致为B发生在5月12日6点, D发生在5月12日17.5点。

2、3(从略)

4、(高年组)。恒星与行星的半径、质量分别记为 $R$ 、 $M$ 、 $r$ 、 $m$ , 它们之间的距离记为 $a$ 。根据光变曲线图可知, 食甚时刻, 恒星的亮度变为以前的0.983倍, 整个凌星过程的持续时间约为20.5小时(0.8542天)。

设恒星的光度为 $L$ , 食甚时刻的光度为:

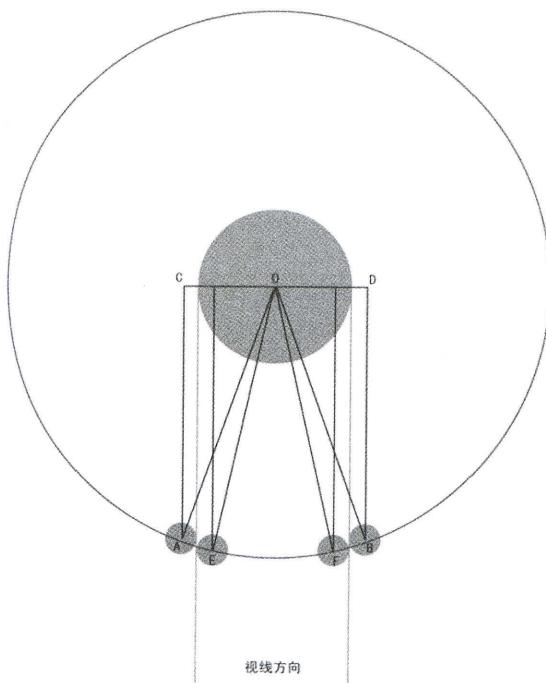
$$\frac{R^2 - r^2}{R^2} \times L$$



所以有：

$$L \times 0.983 = \frac{R^2 - r^2}{R^2} \times L \quad \dots \dots (1)$$

如下图所示，A、B分别代表凌始外切、凌终外切时刻行



星的中心：

$$\begin{aligned} \angle OBD &= \frac{1}{2} \angle AOB = \arcsin \frac{OD}{OB} \\ \angle AOB &= 360^\circ \times \frac{0.8542}{T} = 87.24^\circ \\ OD &= R + r, \quad OB = a \end{aligned}$$

因此有：

$$\frac{R+r}{a} = \sin \angle OBD = \sin 43.62^\circ = 0.69$$

行星质量相对于恒星可以忽略，据开普勒第三定律  $a^3/T^2 = GM/(4\pi^2)$ ，可知  $a = 0.0466 \text{ AU} = 7.0 \times 10^6 \text{ 千米}$ 。联立(1)、(2)可以求出：

$$R = 4.2 \times 10^6 \text{ km}, \quad r = 5.46 \times 10^5 \text{ km}$$

2、Roemer的实验。历史上首次利用天文观测推断光速的尝试，由丹麦天文学家Roemer完成于1675年。他多次观测木卫一被木星的影子掩食，并且注意到每两次掩食之间的时间间隔并不相等。他认为这是由于光速的有限性所致，在一年里的不同时间，地球位于公转轨道的不同地方，从木星反射过来的光线抵达地球所需的时间也不相同。Roemer根据实际观测到的掩食时刻与假设光速无限时计算出的预期时刻的差，估算出了光速。

| 日期         | $T_m$ ( : ) | $T_e$ ( : ) | 圈数 $N_r$ | $\Delta T$ |
|------------|-------------|-------------|----------|------------|
| 30/01/2004 | 00 55       | 00 55       |          |            |
| 14/02/2004 | 23 10       |             |          |            |
| 29/02/2004 | 02 57       |             |          |            |
| 17/03/2004 | 19 42       |             |          |            |
| 30/03/2004 | 05 03       |             |          |            |
| 16/04/2004 | 21 49       |             |          |            |
| 16/05/2004 | 23 56       |             |          |            |
| 17/06/2004 | 20 33       |             |          |            |
| 16/07/2007 | 04 12       |             |          |            |
| 17/08/2004 | 00 48       |             |          |            |
| 16/09/2004 | 02 55       |             |          |            |
| 30/09/2004 | 06 44       |             |          |            |
| 16/10/2004 | 05 00       |             |          |            |
| 30/10/2004 | 08 48       |             |          |            |
| 17/11/2004 | 01 32       |             |          |            |

木卫一的观测可在任意时刻进行。上表列出了2004年观测到的若干次木卫一被掩食的发生时刻  $T_m$ 。已知木卫一绕木星的公转周期为1.76979天。

1)完成表中缺失的数据，其中  $N_r$  为自第一次掩食开始，再次发生掩食时木卫一绕木星公转的圈数，第一次记为0圈， $T_e$  为掩食的预期时刻， $\Delta T = T_m - T_e$  为实际掩食时刻与预期时刻之差。

2)画图说明  $\Delta T$  与  $T_m$  的函数关系，并在图中标出：冲日(以O表示)、合日(以C表示)、方照(以Q表示)时木星的位置。

3)像Roemer所做的那样，根据这些数据估计光速的大小。

解答

1)预期时刻  $T_e$  之间的间隔必然为木卫一的公转周期的整数倍，完整观测表格如下页左栏表格所示。

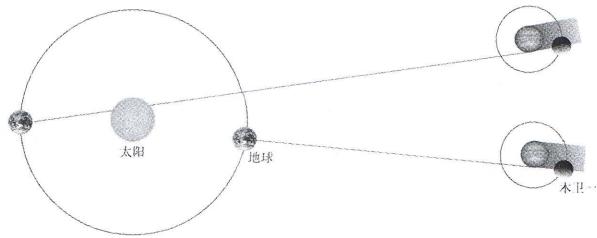
2、 $\Delta T$  与  $T_m$  的关系如下页左栏下图所示。横坐标为以2004年1月30日为起点的天数，纵坐标为  $\Delta T$ (即  $T_m - T_e$ )，它们之间的图像应为一个周期曲线，周期即为地球与木星的会合周期， $\Delta T$  取最大值时地球-木星距离最大(合日)，

$\Delta T$ 取最小值时地球-木星距离最小(冲日)。

3、如右栏上图所示,从地球上观测木星掩木卫一, $\Delta T$ 的差别是由于地球的绕日公转导致的:在合日时,木星反射的太阳光要比冲日时多走一个地球轨道直径(记为 $d$ )才能到达地球。木星冲日时(2004年3月10日左右),地球-木星距离最小,此时 $\Delta T$ 最小(记为 $\Delta T_1$ ,约为16.5分钟),木星合日时(2004年10月1日左右),地球-木星距离最大,此时 $\Delta T$ 最大(记为 $\Delta T_2$ ,约为-2.5分钟)。据此可以求出光速为:

$$C = \frac{d}{\Delta T_2 - \Delta T_1} \approx \frac{1.5 \times 2 \times 10^8}{19 \times 60} = 2.6 \times 10^5 \text{ km/s}$$

| 日期         | $T_m$ | $T_e$   | 圈数  | $\Delta T$ |
|------------|-------|---------|-----|------------|
| 30/01/2004 | 00 55 | 00 55   | 0   | 0          |
| 14/02/2004 | 23 10 | 23 11.5 | 9   | -1.5       |
| 29/02/2004 | 02 57 | 02 59.5 | 17  | -2.5       |
| 17/03/2004 | 19 42 | 19 44.4 | 27  | -2.4       |
| 30/03/2004 | 05 03 | 05 04   | 34  | -1         |
| 16/04/2004 | 21 49 | 21 49   | 44  | 0          |
| 16/05/2004 | 23 56 | 23 53.4 | 61  | 2.6        |
| 17/06/2004 | 20 33 | 20 26.3 | 79  | 6.7        |
| 16/07/2007 | 04 12 | 04 02   | 95  | 10         |
| 17/08/2004 | 00 48 | 00 35   | 113 | 13         |
| 16/09/2004 | 02 55 | 02 40   | 130 | 15         |
| 30/09/2004 | 06 44 | 06 27.7 | 138 | 16.3       |
| 16/10/2004 | 05 00 | 04 44   | 147 | 16         |
| 30/10/2004 | 08 48 | 08 32   | 155 | 16         |
| 17/11/2004 | 01 32 | 01 22   | 165 | 10         |



2、Roemer的实验。历史上首次利用天文观测推断光速的尝试,由丹麦天文学家Roemer完成于1675年。他多次观测木卫一被木星的影子掩食,并且注意到每两次掩食之间的时间间隔并不相等。他认为这是由于光速的有限性所致,在一年里的不同时间,地球位于公转轨道的不同地方,从木星反射过来的光线抵达地球所需的时间也不相同。Roemer根据实际观测到的掩食时刻与假设光速无限时计算出的预期时刻的差,估算出了光速。

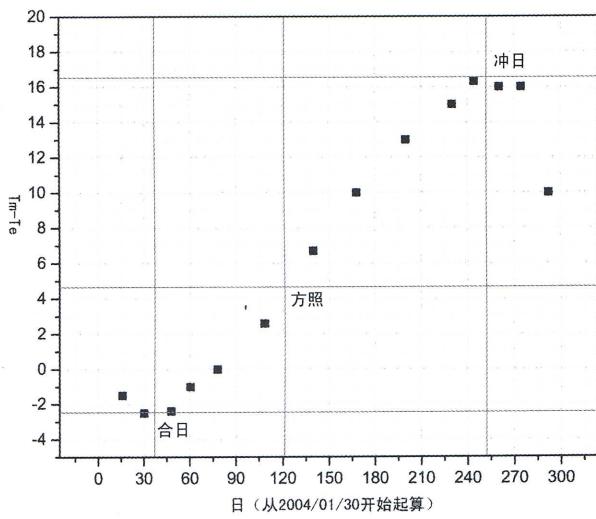
木卫一的观测可在任意时刻进行。下表列出了2004年观测到的若干次木卫一被掩食的发生时刻 $T_m$ ,其中 $N_r$ 为自第一次掩食开始,再次发生掩食时木卫一绕木星公转的圈数。已知木卫一绕木星的公转周期为1.76979天。

1)完成表中缺失的数据,其中 $T_e$ 为掩食的预期时刻, $\Delta T = T_m - T_e$ 为实际时刻与预期时刻之差。

2)画图说明 $\Delta T$ 与 $T_m$ 的函数关系,并在图中标出:冲日(以O表示)、合日(以C表示)、方照(以Q表示)时木星的位置。

3)像Roemer所做的那样,根据这些数据估计光速的大小。

| 日期         | $T_m$ | $T_e$ | 圈数 $N_r$ | $\Delta T$ |
|------------|-------|-------|----------|------------|
| 30/01/2004 | 00 55 | 00 55 | 0        |            |
| 14/02/2004 | 23 10 |       | 9        |            |
| 29/02/2004 | 02 57 |       | 17       |            |
| 17/03/2004 | 19 42 |       | 27       |            |
| 30/03/2004 | 05 03 |       | 34       |            |
| 16/04/2004 | 21 49 |       | 44       |            |
| 16/05/2004 | 23 56 |       | 61       |            |
| 17/06/2004 | 20 33 |       | 79       |            |
| 16/07/2007 | 04 12 |       | 95       |            |
| 17/08/2004 | 00 48 |       | 113      |            |
| 16/09/2004 | 02 55 |       | 130      |            |
| 30/09/2004 | 06 44 |       | 138      |            |
| 16/10/2004 | 05 00 |       | 147      |            |
| 30/10/2004 | 08 48 |       | 155      |            |
| 17/11/2004 | 01 32 |       | 165      |            |



### 解答

参见高年组答案。

## 低年组

1、系外行星凌星。与高年组第一题相同,只做前3问。

# 2009年第十四届国际天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

国际天文奥赛组委会 供稿/王燕平 翻译、译解

1、(高年组和低年组)天狼星。已知在中国的天空中最亮的恒星是天狼星。在地球上其他什么区域天狼星也是那里天上最亮的恒星？这些区域的边界的数据特征是什么？

提示：你只需考虑历史分类意义上的恒星，太阳、行星等不需要考虑在内。

**解答** 地球上所能看到的星空当中，天狼星是最亮的恒星(从历史分类的意义上讲，不包括太阳)。因此，在一级近似的情况下，天狼星在地球上所能看见它的区域都是最亮的恒星。天狼星的赤纬是 $\delta = -16^\circ 43'$ ，因此，以下地理区域能看到天狼星：整个南半球，以及北半球地理纬度低于 $73^\circ 17'N$ 的区域。

理论上，二级近似需要考虑大气折射(地平附近大气折射角为 $35'$ )。这时，天狼星在当地星空中可见的地理区域为： $73^\circ 52'N$ 以南的所有区域。但在这里，大气折射对我们要求的目标并没有什么影响，题目中写到了，考虑真实情况下的星空，而非理论情况下的。

第三级近似，考虑大气消光。显然，相比位于地平线附近的天狼星，织女或者大角星会更亮一些。粗略地估计，当织女星或者大角星看上去更亮时，天狼星大约位于 $\sim 5^\circ$ 的高度。因此，天狼星位于以下区域时是当地星空中最亮的恒星：北半球地理纬度 $68^\circ \sim 69^\circ$ 以南至整个南半球的区域。

2、(高年组和低年组)分子数。估计地球大气中的分子数。

**解答** 大气的压强等于整个地球单位表面积上的所有大气分子的重力。设所有的大气分子数目为 $N$ ，则大气压强 $P = N \cdot m \cdot g / S$ 。其中 $m$ 为大气中所有分子的平均质量， $S$ 为地球的表面积， $S = 4\pi R_E^2$ ，分子质量 $m = \mu / N_A$ ，其中 $N_A$ 为阿伏伽德罗常数。因而，

$$N = P \cdot 4\pi R_E^2 \cdot \frac{N_A}{\mu \cdot g}$$

地球大气中主要成分为 $N_2$ ( $\mu_{N_2} = 28g/mol$ )与 $O_2$ ( $\mu_{O_2} = 32g/mol$ )， $N_2$ 与 $O_2$ 的体积比近似为3: 1。因此 $\mu$ 的平均值为 $29g/mol$ 。代入计算得大气分子数大致为：

$$\frac{10^5 \cdot 12.6 \cdot (6.37 \cdot 10^6)^2 \cdot 6.022 \times 10^{23}}{2.9 \times 10^{-2} \cdot 9.8} = 1.08 \times 10^{44}$$

3、(低年组)眼睛的效率。请估计，在最理想的情况下，人眼能看见的星的最大星等的理论极限。考虑人眼的视网膜能够“记忆” $1/7$ 秒的图像。0等星每秒钟向我们发出 $10^{10}$ 个光子/平方米。

### 解答

为了探测到一颗恒星，人眼的视网膜需要不断地记录恒星的图像，也就是说，人眼需要每秒从恒星接收到至少7个光子。暗夜中，人眼的瞳孔直径为6mm，所以人眼接收的光度极限为： $7 \text{个光子} / (\pi d^2 / 4) \approx 250000 \text{个光子}/\text{平方米}$ ，相比于0等星来说，光度低 $10^{10} / 250000 = 40000$ 倍。因此得到：

$$\Delta m = m - 0 = -2.5 \lg(F/F_0) = 2.5 \lg 4000 \approx 11.5^m$$

也就是说，暗夜中人眼可见的理论极限星等为 $11.5^m$ 。当然，这不大现实，即使最清澈的夜晚，人眼也不可能看到暗于8等的星。

3、(高年组)Eris。如今在我们太阳系海外天体(海王星外天体)中最大的发现是矮行星Eris。如今Eris正位于它轨道上的远日点附近。请得出地球上看到Eris的视星等。下次大约何时Eris将会“大冲”？Eris“大冲”时，地球上看到Eris的星等为多少？

### 解答

我们这里所说的“大冲”指的是外行星位于近日点附近时的“冲”。(地球和某外行星与太阳在同一条直线上，这一天文现象称为“冲日”，简称“冲”。)

如今，Eris位于远日点附近。从Eris的轨道半长径的数据可以看出，显然Eris的周期的量级是以世纪记的，那么这个矮行星从现在的位置绕着太阳走半个周期，就将“大冲”。Eris的周期可由两种方法算得：

(1)根据行星数据表：

$$T_{Ed} = 204852 \text{天} / (365.25 \text{天}/\text{年}) = 560.85 \text{年} \approx 560 \text{年}$$

(2)根据开普勒第三定律： $(T_{Ed}/T_E)^2 = (A_{Ed}/A_E)^3$ ，统一用 $A$ 代表长轴， $T$ 为周期， $e$ 为偏心率， $\alpha$ 为反照率， $D$ 为天体直径， $R$ 为距离，角标E、Ed、Sa，S分别代表地球、Eris、土星和太阳：

$$T_{Ed} = T_E \cdot \sqrt{(A_{Ed}/A_E)^3} \approx 560 \text{ 年}$$

所以，Eris“大冲”将发生在 $T_{Ed}/2 \approx 280$ 年后。

至于地球上看到Eris的视星等的问题，有很多解答方法。其中主要的两种方法为：将Eris与其他行星做比较；用太阳总辐射功率计算。

这里我们用第一种方法，将Eris与土星进行比较。需要考虑以下几点：1、 $R_s$ ，到太阳的距离。照射到天体上的光的强度与 $R_s^2$ 成反比；2、 $D$ ，天体的大小(直径)。天体反射的光

的强度与 $D^2$ 成正比；3、 $\alpha$ ，反照率。天体反射的光的强度正比于 $\alpha$ ；4、 $R_E$ ，到观测者的距离。位于主带的小行星“冲”时距离地球1.8AU，位于柯伊伯带的小行星距离地球40AU。到达望远镜的光的强度反比于 $R_E^2$ 。

Eris到地球的光流量为：

$$F_{Ed} \sim \alpha_{Ed} \cdot D_{Ed}^2 \cdot \left(\frac{1}{R_{E-Ed}}\right)^2 \left(\frac{1}{R_{S-Ed}}\right)^2$$

土星到地球的光流量为：

$$F_{Sa} \sim \alpha_{Sa} \cdot D_{Sa}^2 \cdot \left(\frac{1}{R_{E-Sa}}\right)^2 \left(\frac{1}{R_{S-Sa}}\right)^2$$

二者的流量比为：

$$\frac{F_{Ed}}{F_{Sa}} \sim \frac{\alpha_{Ed}}{\alpha_{Sa}} \cdot \frac{D_{Ed}^2}{D_{Sa}^2} \cdot \frac{(R_{E-Sa}/R_{S-Sa})^2}{(R_{E-Ed}/R_{S-Ed})^2}$$

当前情况下，Eris位于远日点：

$$R_{S-Ed} = (1 + e)A_{Ed}$$

$$R_{E-Ed} = (1 + e_{Ed})A_{Ed} \pm A_E$$

由于我们不知道地球、太阳以及Eris的真实方位，也不知道Eris的轨道面倾角，这里用平均值：

$$R_{E-Ed} = (1 + e_{Ed})A_{Ed}$$

此时并不是“大冲”，这里不应用偏心率。代入 $R_{S-Sa} = A_{Sa}$ ， $R_{E-Sa} = A_{Sa} - A_E$ ，求得流量比( $F_{Ed}/F_{Sa}$ )为：

$$\frac{0.86}{0.68} \cdot \left(\frac{2600}{120536}\right)^2 \cdot \frac{(8.584/9.584)^2}{(1.434 \cdot 68.01)^2} \approx 4.4 \times 10^{-8}$$

因此，在Eris位于远日点时，Eris和土星的视星等的差为：

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{F_{Ed}}{F_{Sa}} \approx 18.4^m$$

Eris的星等为：

$$m_{Ed} = m_{Sa} + \Delta m = 0.7^m + 18.4^m \approx 19.1^m$$

根据观测得到的Eris星等的实际值为 $18.7^m \sim 18.8^m$ 。

Eris“大冲”时位于近日点附近。因此有 $R_{S-Ed} = (1 - e)A_{Ed}$ ， $R_{E-Ed} \approx (1 - e_{Ed})A_{Ed} - A_E$ ，这里用“ $\approx$ ”是因为我们不知道它的轨道面倾角。于是 $F_{Ed}/F_{Sa}$ 的数值为：

$$\frac{0.86}{0.68} \cdot \left(\frac{2600}{120536}\right)^2 \cdot \frac{(8.584/9.584)^2}{(0.566 \cdot 68.01 - 1)^2} \approx 1.91 \times 10^{-6}$$

二者的星等差为：

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{F_{Ed}}{F_{Sa}} \approx 14.3^m$$

因此Eris“大冲”时的星等为：

$$m_{Ed} = m_{Sa} + \Delta m = 0.7^m + 14.3^m \approx 15.0^m$$

4、(高年组和低年组)灾变。设想在2084年7月5号这一天，太阳的质量突然减少为原来的一半。计算地球绕这个新的太阳公转的周期是多少？

解答

考虑一级近似，如果中心天体的质量减少为初始值的一半，圆轨道会变为抛物线，地球沿抛物线运行将不再回来，此题的答案没有意义(周期等于无穷大)。

然而，7月5号的时候，地球位于远日点。它的速度小于在圆轨道上运行的速度。这种情况下，中心天体质量减少一半，地球的速度将会小于“抛物线轨道速度”，地球将会绕太阳沿扁长椭圆轨道运行。

首先，我们求出地球在远日点的速度 $V_{aph}$ 与圆轨道速度 $V_0$ 的关系。这里的圆轨道半径等于椭圆轨道半长轴。根据开普勒第二定律： $V_{per} \cdot R_{per} = V_{aph} \cdot R_{aph}$ ，和能量守恒定律：

$$\frac{V_{per}^2}{2} - \frac{GM}{R_{per}} = \frac{V_{aph}^2}{2} - \frac{GM}{R_{aph}}$$

以及： $R_{per} = a_0(1 - e)$ ， $R_{aph} = a_0(1 + e)$ ， $GM = V_0^2 \cdot R_0$ ，可以得出：

$$V_{per} = V_0 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, V_{aph} = V_0 \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

太阳质量减少为一半之后，地球新的轨道参数标记为：  
 $a_N$ : 轨道半长轴， $T_N$ : 公转周期， $e_N$ : 偏心率， $V_N$ : 在半径为 $a_N$ 的圆轨道上运行的速度。

这里还将用到以下三个关系式：

$R_{aph}$ ，原本是远日点距离，现在变为近日点距离：

$$a_0(1 + e) = R_{aph} = R_{per-N} = a_N(1 - e_N)$$

$V_{aph}$ ，原本是远日点速度，现在变为近日点速度：

$$V_{aph} = V_{per-N} = V_N \sqrt{\frac{1+e_N}{1-e_N}}$$

以及：

$$V_N = 2\pi \cdot a_N / T_N$$

解以上方程，将会得到一个简洁的表达式：

$$a_N = \frac{1+e}{2e} \cdot a_0$$

根据开普勒第三定律：

$$T_N = T_0 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(a_N/a_0)^3}$$

因此：

$$T_N = T_0 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{[(1+e)/2e]^3}$$

代入数值求得：

$$T_N = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(1.017/0.034)^3} \approx 230 \text{ 年}$$

注：用活力公式可以更简单地求解，需注意开普勒第三定律等式右边的数值。

5、(低年组)望远镜的镜子。有一片厚度为 $b=40\text{mm}$ 的玻璃圆片，需要用它制作(磨制)一个直径为 $D=500\text{mm}$ 的球面镜。那么用这个圆片制作出的直径为500mm的这片镜子的焦距 $F$ 是多少？

**解答** 显然, 镜面的中心需要磨掉的深度必须小于 $b=40\text{mm}$ 。令 $R$ 表示镜子的曲率半径, 根据勾股定律,  $R$ 的最小值通过以下公式算得:

$$R^2 = \frac{D^2}{4} + (R - b)^2, \quad 2Rb = b^2 + \frac{D^2}{4}, \quad R = \frac{D^2}{8b} + \frac{b}{2}$$

焦距 $F$ 与曲率半径的关系是 $R = 2F$ ，也就是说，对于中心厚度为0的镜片，

$$F = \frac{R}{2} = \frac{D^2}{16b} + \frac{b}{4} = \frac{500^2}{16 \cdot 40} + \frac{40}{4} \approx 401 \text{ mm}$$

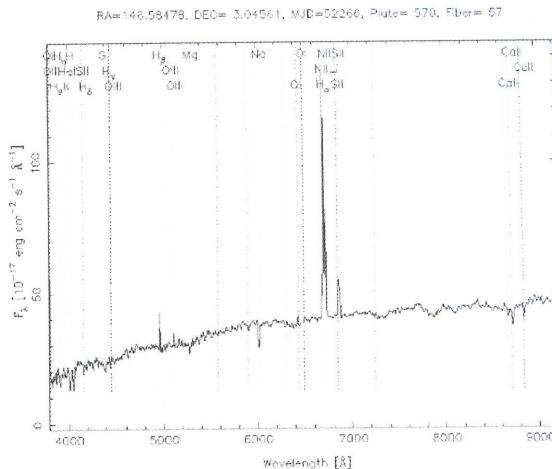
理论上，焦距可以从401mm到无穷大。

但是，中心镜面的厚度不可能为0，那么，我们考虑镜面厚度至少为2mm，那么这里用 $b^* = 38\text{mm}$ 代替 $b = 40\text{mm}$

$$F = \frac{R}{2} = \frac{D^2}{16b*} + \frac{b*}{4} = \frac{500^2}{16 \cdot 38} + \frac{38}{4} \approx 421 \text{ mm}$$

焦距的大小从421mm到无穷大。

5、(高年组)星系对。有一个著名的星系对，包含两个相互作用星系IC 563和IC 564。IC 563和IC 564的中心坐标分别为(赤经 $RA_1 = 146.58479^\circ$ , 赤纬 $DEC_1 = 3.04558^\circ$ )、(赤经 $RA_2 = 146.58783^\circ$ , 赤纬 $DEC_2 = 3.07137^\circ$ )。中国国家天文台天文学家用兴隆的2.16m望远镜进行观测，2009年获得了它们在R波段的图像，如下图所示。IC 563中心的光谱如右上图所示。



5.1、2009年他们只分配到两次观测时间，分别是四月和九月。问照片拍摄于哪个时间？(用英语写“Apr”或“Sep”)

5.2、在照片中标出IC 563和IC 564。

5.3、求照片中这两个星系的红移。它们的红移可视为相等。

5.4、中国国家天文台的天文学家们想要在下一年拍下IC 563/4的 $H\alpha$ 波段图像，用来搜寻星系中或者星系周围的恒星形成区。国家天文台有一系列的窄带 $H\alpha$ 透射滤光片，如下表所示(中心波长用速度的形式给出)，选出最适于观测的滤光片。

5.5、星系距离我们多少秒差距？两个星系间的投影距离为多少？

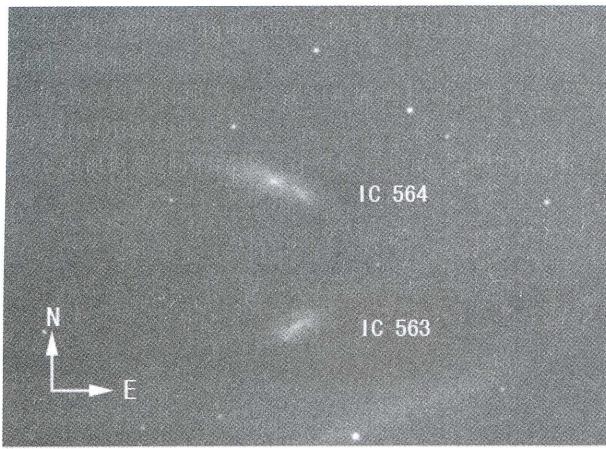
| 滤光片序号 | 最大(%)透射率 | H $\alpha$ 波段红移峰值(km/s) |
|-------|----------|-------------------------|
| C1    | 80       | 0                       |
| C2    | 78       | 2150                    |
| C3    | 89       | 3600                    |
| C4    | 78       | 6720                    |
| C5    | 82       | 9006                    |
| C6    | 81       | 11290                   |
| C7    | 87       | 13570                   |
| C8    | 78       | 15400                   |
| C9    | 84       | 18600                   |
| C10   | 84       | 20890                   |

解答

5.1、在四月和九月，太阳的赤经分别为：大约 $0.5^{\text{h}} \sim 2.5^{\text{h}}$ 和 $10.5^{\text{h}} \sim 12.5^{\text{h}}$ 。星系的赤经是 $\text{RA} \approx 147^{\circ} \sim 10^{\text{h}}$ 。九月份星系的视位置太接近太阳了，因此观测是在四月份。

5.2、根据两个星系的赤纬，容易得出，图中位于上方的那个星系是IC 564。如下页左栏上图所示。

5.3、从光谱图中量出的H $\alpha$ 发射线的波长是6700埃，根据数据表，H $\alpha$ 发射线的实验室波长是6563埃，星系的红移



是：

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{6700 - 6563}{6563} = 0.02$$

5.4、 $z \ll 1$ ，因此星系的退行速度 $v = cz = 6000 \text{ km/s}$ 。我们需要选择的是红移峰值接近 $6000 \text{ km/s}$ 的滤光片，最合适的是C4滤光片。

5.5、根据哈勃定律，星系的距离为：

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{6000 \text{ km/s}}{70 \text{ km/s/Mpc}} \approx 85 \text{ Mpc}$$

两个星系很接近，天球的曲率可忽略不计。两个星系的中心角距离为： $\alpha = \sqrt{RA^2 + DEC^2}$ ，其中： $RA = (RA_1 - RA_2) \times \cos(DEC_1) = 0.00303^\circ$ ， $DEC = (DEC_1 - DEC_2) = 0.02579^\circ$ ，因此 $\alpha = 0.02597^\circ = 93.5'$ ，两个星系间的投影距离为：

$$d = r \cdot \alpha = 85000000 \times 93.5/3600/57.3 = 38.5 \text{ kpc}$$

## 实测试题

国际天文奥赛组委会 供稿/李鉴 解答

6. (低年组)行星的运动。大多数时候，行星相对于背景恒星都是自西向东运动的。但有时候，它们会暂时改变运动方向，变成逆行。几周后，又变成顺行。今年在杭州观测到了一颗行星的视运动。表1给出了在观测那天，该行星在24小时内相对于背景恒星移动的角度(简写为ADRS)。观测日期用约化儒略日(约化儒略日=儒略日-2400000.5)表示。负号表示行星的相对运动方向为从东向西。

6.1)绘图分别求解行星的“留”(at stationary point, 简写为STP)和“冲”(at opposition, 简写为OPP)是哪天(约化儒略日)。精确到一天。

6.2)行星冲日那天，它在24小时内相对于背景恒星移动的角度(ADRS)为多少？

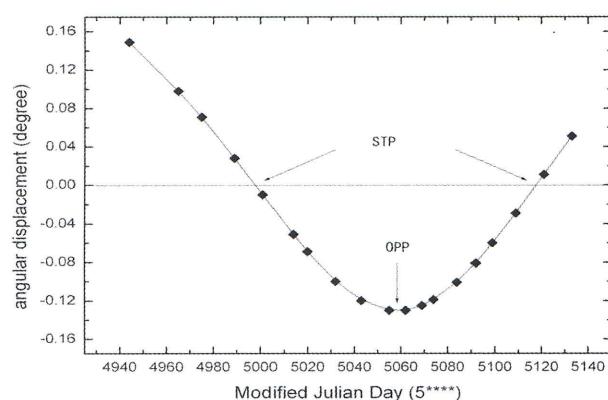
6.3)根据第2问的结论，计算该行星的公转轨道半径，以

| Modified Julian Day | ADRS (degrees/day)           |
|---------------------|------------------------------|
| 约化儒略日               | 24小时移动角( $^\circ/\text{天}$ ) |
| 54944               | 0.15                         |
| 54965               | 0.1                          |
| 54975               | 0.07                         |
| 54989               | 0.03                         |
| 55001               | -0.01                        |
| 55014               | -0.05                        |
| 55020               | -0.07                        |
| 55032               | -0.1                         |
| 55043               | -0.12                        |
| 55055               | -0.13                        |
| 55062               | -0.13                        |
| 55074               | -0.12                        |
| 55084               | -0.1                         |
| 55092               | -0.08                        |
| 55099               | -0.06                        |
| 55109               | -0.03                        |
| 55121               | 0.01                         |
| 55133               | 0.05                         |

天文单位(AU)为单位。假设地球和该行星的公转轨道都是正圆，并且该行星在黄道面上公转。

解答

1)以约化儒略日为横坐标、ADRS为纵坐标，绘成下图。



行星位于“留”的位置时，在地球上看上去相对于背景恒星的运动速度为0，即ADRS为0的时刻，行星“留”。容易从图中读出行星的两次留分别发生在MJD 54998 和MJD 55118日。

行星冲日发生在两次留之间，冲日时，它相对于背景恒星的运动速度最大，也就是图中曲线最凹的那一天，为MJD 55058日。

2)冲日那天的ADRS大约为 $\Delta = -0.132^\circ (\pm 0.002^\circ)$ 。

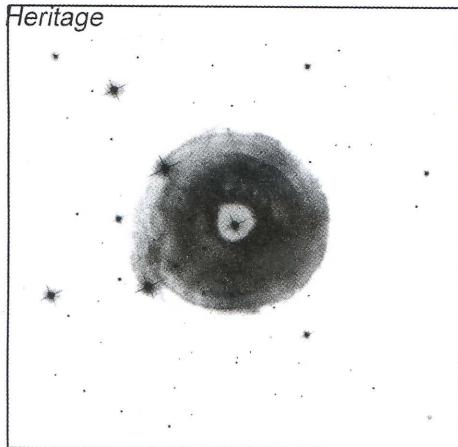
3)如下图所示，当行星冲日时有：

$$\frac{v_E - v_p}{a_p - a_E} \times t = \tan \Delta$$

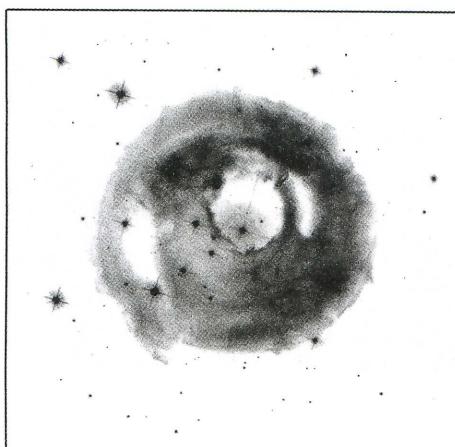
## V838 Mon Light Echo

HST ACS/WFC

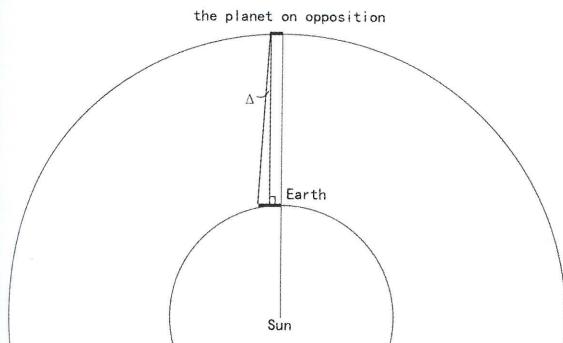
Hubble Heritage



May 20, 2002



September 2, 2002



其中 $v$ 和 $a$ 为轨道速度与半径,下标 $E$ 和 $p$ 分别代表地球、行星, $t$ 为冲日后的一小段时间间隔,本题中取为1天。 $\Delta = 0.132^\circ = 0.002304$ 弧度 $\ll 1$ 弧度,上式可简写为:

$$v_E - v_p = (a_p - a_E) \cdot \Delta / t$$

根据开普勒第三定律: $a_E^3/T_E^2 = a_p^3/T_p^2$ 和圆轨道运动定律:

$$v = 2\pi \cdot \frac{a}{T} \Rightarrow \frac{a_p}{a_E} = \frac{v_E^2}{v_p^2}$$

将 $a_E=1$  AU代入以上式子,可以得到:

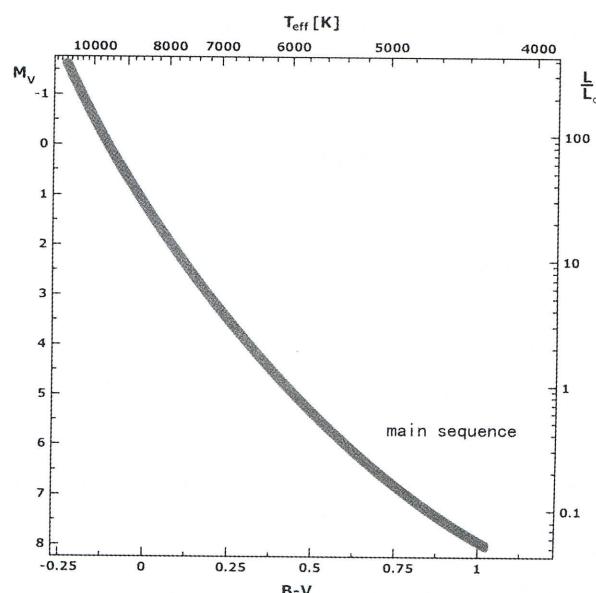
$$\left(\frac{v_p}{v_E} + 1\right) \cdot \Delta = \left(\frac{v_p}{v_E}\right)^2 \cdot v_E$$

将 $\Delta = 0.002304^\circ$ 、地球的公转速度 $v_E=0.0172$  AU/天代入上式,求得 $v_p = 0.439v_E$ , $a_p = 5.2$  AU ( $\pm 0.2$  AU)。这颗行星最有可能是木星。

6. (高年组)回光。一个突然增亮的天体(例如一颗新星)的初始闪光被它周围的星际尘埃(有的与该天体有关,有的没有)反射,形成回光(light echoes)。来自初始闪光的光

线首先到达观测者,由尘埃反射的回光很快开始到达。麒麟座V838是一颗变星,在2002年3月9日(约化儒略日52342)被观测到发生了一次猛烈的爆发。之后的几个月,哈勃空间望远镜捕捉到了它周围的星际尘埃反射的回光。上图显示的是哈勃拍摄的两张照片,图中的黑框代表的视场是 $97'' \times 97''$ 。

近来,天文学家发现麒麟座V838与在它附近的三颗主序星同属于一个疏散星团。下表列出了这三颗恒星的观测数据,其中V和B是V、B波段的视星等, $V_0$ 和 $B_0$ 是经过星际消光改正后的视星等。 $M_V$ 是V波段的绝对星等。已知这个疏散星团在V和B波段的星际消光分别为2.6等和3.44等。



6.1)根据所提供的赫罗图(见上图)和表中(见下页左栏上表)的数据,填写其中的空白。

6.2)上海天文台的一个天文学家提出了麒麟座V838的一个理论模型。他发现它爆发后的壳层膨胀速度是随时间变化

天文  
观  
下  
中  
阳  
太  
角

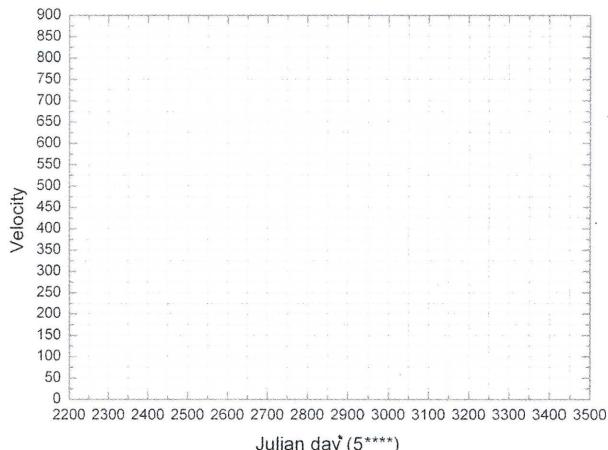
inclination of Saturn's ring (degree)

日  
轨  
圆  
取  
土  
星  
关  
例

| Number | Spectral type | V     | B     | $B_0 - V_0$ | $V_0$ | $M_v$ |
|--------|---------------|-------|-------|-------------|-------|-------|
| 编号     | 光谱型           |       |       |             |       |       |
| N1     | B6 V          | 16.02 | 16.73 | -0.15       |       |       |
| N2     | B4 V          | 15.00 | 15.63 | -0.19       |       |       |
| N3     | B3 V          | 14.79 | 15.41 | -0.205      |       |       |

的，变化情况列于下表。将其中的数据在下面的网格图中画出来，并且分别估算哈勃拍摄这两张照片时该恒星的壳层的角直径。

| 日期    | 速度(km/s) | 日期    | 速度(km/s) |
|-------|----------|-------|----------|
| 52351 | 800      | 52397 | 630      |
| 52421 | 560      | 52435 | 503      |
| 52467 | 432      | 52583 | 333      |
| 52676 | 305      | 52769 | 263      |
| 52825 | 227      | 52895 | 220      |
| 52988 | 200      | 53095 | 190      |
| 53174 | 180      | 53267 | 158      |
| 53351 | 150      |       |          |



6.3)根据哈勃的两张照片，估算产生最外围回光的尘埃球壳的半径(即该回光尘埃离V838中心的距离)。

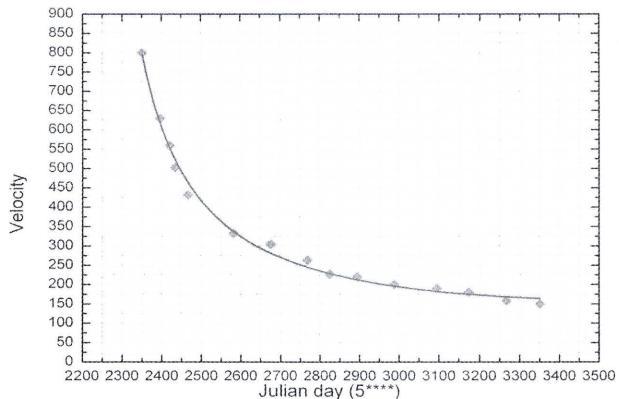
**解答** 1)恒星的内禀颜色为 $B_0 - V_0 = (B - A_B) - (V - A_V)$ ，绝对星等可以从给出的赫罗图上读出，完整表格如下：

| Number | Spectral type | V     | B     | $(B - V)_0$ | $V_0$ | $M_v$    |
|--------|---------------|-------|-------|-------------|-------|----------|
| N1     | B6 V          | 16.02 | 16.73 | -0.15       | 13.42 | -0.5±0.2 |
| N2     | B4 V          | 15.00 | 15.63 | -0.21       | 12.40 | -1.1±0.2 |
| N3     | B3 V          | 14.79 | 15.41 | -0.22       | 12.19 | -1.3±0.2 |

根据 $m - M = 5 \lg r - 5$ ，我们可以求出这三颗恒星的距离模数( $m - M$ )，然后求出它们的平均距离，也就是星团的距离： $d \approx 18 \text{ kly} (\pm 2 \text{ kly})$ 。

2)这一问的目的其实是为了提示学生，在照片中显示的

球壳不是V838的恒星包层，而是反射出回光的尘埃壳。



根据表中数据绘制的图形如上图所示，图中的实线是根据数据点做出的拟合曲线。图中的曲线与横坐标所包围的面积就是恒星壳层膨胀的尺度。图中每个矩形所代表的距离为：

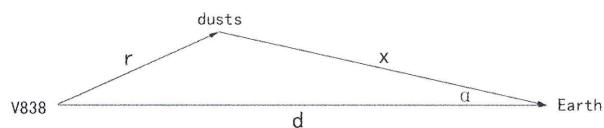
$$A = 25 \text{ km/s} \times 50 \text{ 天} = 1.08 \times 10^8 \text{ km} = 0.72 \text{ AU}$$

2002年5月20日、9月2日的儒略日分别为52414和52519，从图中可以数出从爆发开始，到2002年5月20日和9月2日，V838的壳层一共膨胀了大约32AU(25 AU)和78AU(56 AU)，因此这拍摄照片的这两个时刻，恒星壳层的角直径分别为：

$$\beta_1 = 2 \times 25 \text{ AU} / 18000 \text{ ly} \approx 0.01''$$

$$\beta_2 = 2 \times 56 \text{ AU} / 18000 \text{ ly} \approx 0.02''$$

3)恒星爆发的时刻(2002年3月9日)记为初始时刻，以 $t$ 表示最外层的回光被观测到的时刻。回光之所以会比爆发时的光线推迟到达观测者，是因为光速是有限的，而且回光所走过的距离比V838到地球的距离远，如下图所示。



从图中可以得到如下关系：

$$c \cdot t + d = r + x, r^2 = x^2 + d^2 - 2x \cdot d \cdot \cos \alpha$$

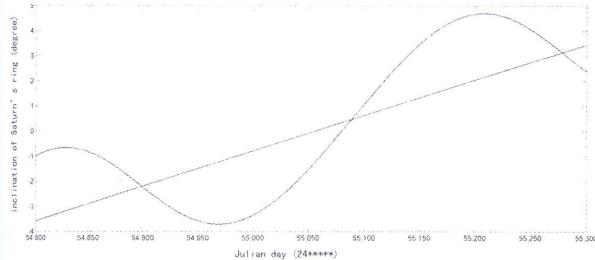
联立以上二式：

$$r = \frac{d(d + c \cdot t)(1 - \cos \alpha) + c^2 t^2 / 2}{d(1 - \cos \alpha) + c \cdot t}$$

这里的 $\alpha$ 是“哈勃”照片中产生最外层回光的尘埃壳的视半径， $c$ 是光速， $d$ 是V838的距离。可以算出： $2\alpha_1 = (21.9 - 12.0) / 22.4 \times 97'' = 42.9''$ ， $2\alpha_2 = (59.1 - 45.1) / 22.4 \times 97'' = 60.6''$ 。回光尘埃到V838的距离分别为9光年(5月20号)、7.5光年(9月2号)。

7. (低年组和高年组)土星春分(The Vernal Equinox Day of Saturn)。今年的某一天，土星迎来了自己的春分日。北京

天文馆的一个研究小组根据观测和计算，得到了土星盘面与观测者视线方向的夹角随时间变化的数据，结果画于图1（见下图），横坐标为儒略日，纵坐标为观测到的夹角的度数。其中的曲线为北京天文馆的观测结果，直线（几乎是直的）为太阳上的假想观测者的观测结果。二者的差别是由于地球在绕太阳公转以及土星的公转轨道面与地球的公转轨道面存在夹角（ $2^{\circ}29'$ ）所导致的。

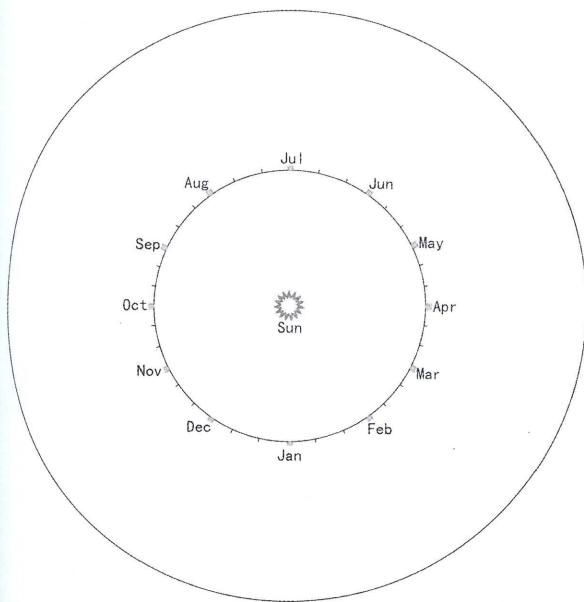


在2005年1月13日（儒略日Julian day 2453383），土星冲日。已知土星的公转周期为29.46年，它的赤道面与它的公转轨道面的夹角为 $26^{\circ}43'$ 。假设地球与土星的公转轨道均为正圆，土星的轨道半径为9.54天文单位(AU)。

7.1)根据图1，找出土星春分日是哪天，给出儒略日数的取整值，并在图上用“Spr”(春分)把这天标记出来。

7.2)根据图1，估算北京天文馆和太阳观测者所能看到的土星盘面的倾角最大分别为多少度？

7.3)在下面的轨道图上画出土星春分日那天，地球和土星所处的大概位置，并标示出地球、土星和太阳之间的角度关系。图中的内圆代表地球轨道，外圆代表土星轨道(未按比例)。Jan表示1月1日，Feb表示2月1日，依此类推。

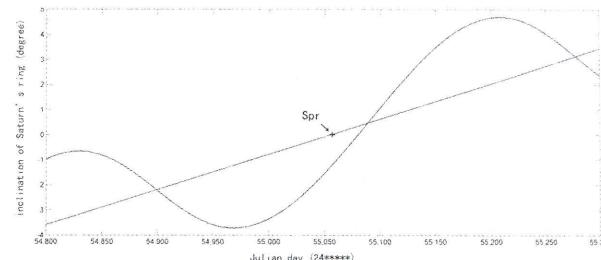


7.4)土星春分那天，地球与土星之间的距离为多少天文单位(AU)？忽略土星公转轨道的倾角。

7.5)(仅高年组)忽略土星的公转轨道倾角，估算在同一时刻观测，北京天文馆和太阳观测者看到的土星盘面的倾角之差最大为多少？

### 解答

1)在土星的春分日，太阳上的观测者将会看到土星盘面与视线方向呈 $0^{\circ}$ 角，即土星盘面完全消失。可以从图中找出这天是儒略日是2455055，相应的日期为2009年8月11日，如下图所示。



2)从图中可以量出，太阳观测者与北京天文馆在同一时刻观测土星时，他们所看到的土星盘面的倾角最大相差大约 $2.7^{\circ}$ 。对太阳观测者而言，他能看到的土星盘面的最大倾角等于土星的黄赤交角，即 $26.7^{\circ}$ (此时土星位于夏至或冬至日)，因此北京天文馆的研究人员看到的土星盘面的最大倾角应为：

$$\gamma = 26.7^{\circ} + 2.7^{\circ} = 29.4^{\circ}$$

注释：实际上，在过去的几十年里，当土星上为夏至日时，由于地球并不正好处于使所见的土星盘面倾角之差最大的位置，目前地球上看到的土星盘面倾角大概为 $28^{\circ}$ 。

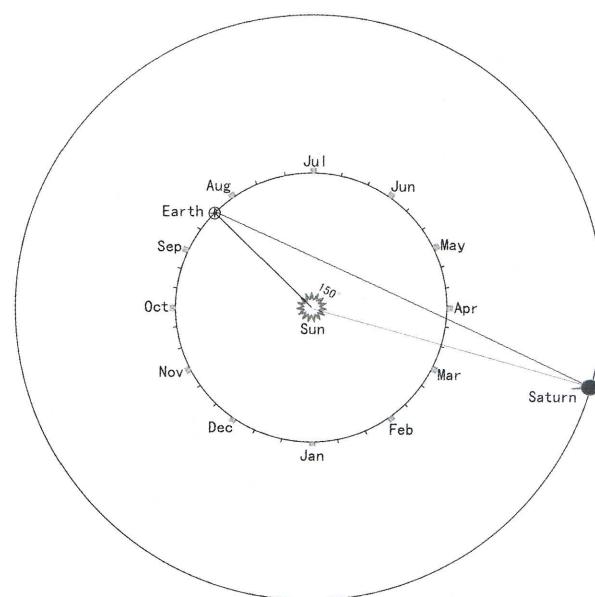
3)从2005年1月13日到2009年8月11日，土星公转的角度为：

$$\theta = (2455055 - 2453383) \times 360^{\circ}/T = 56^{\circ}$$

地球从1月13日到8月11日公转的角度为：

$$\lambda = 210 \times 360^{\circ}/365 = 207^{\circ}$$

因此2009年8月11日，地球-太阳-土星所构成的角度为： $207^{\circ} - 56^{\circ} \approx 150^{\circ}$ 。三者的关系如下图所示。



## 观测试题

国际天文奥赛组委会 供稿/李昕 翻译

4) 土星春分日, 土星离地球的距离可以从图2画出的三角形求出:

$$E\_Sa = \sqrt{E\_Su^2 + Su\_Sa^2 - 2E\_Su \cdot Su\_Sa \cdot \cos 150^\circ}$$

其值为10.4 AU。

5)(高年组)对太阳观测者而言, 所见到的土星盘面倾角(记为 $\eta$ )随时间变化的函数关系为:

$$\sin \eta = \sin \theta' \times \sin \alpha$$

这里的 $\theta'$ 是从土星春分日起量的土星公转的角度(方向为沿着土星公转方向, 即自西向东),  $\alpha$ 为土星的黄赤交角26.7°。

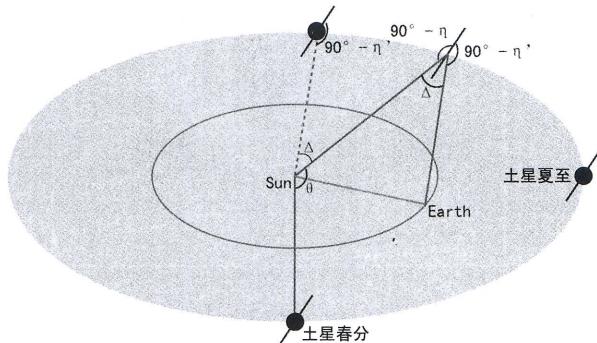
忽略土星轨道平面相对于黄道的倾角后, 在北京天文馆的观测者看来, 土星盘面与视线方向的倾角(记为 $\eta'$ )变化规律为(如下图所示):

$$\sin \eta' = \sin(\theta' + \Delta) \times \sin \alpha$$

其中 $\Delta$ 为在地球-太阳连线相对于土星的张角。在同一时刻观测, 当 $\Delta$ 达到最大值时, 二者所见的土星盘面倾角差别最大, 很容易求出:

$$\Delta_{max} = 1 \text{ AU}/9.54 \text{ AU} = 6^\circ$$

本题要求的是 $|\eta' - \eta|_{max}$ 。从对称性出发, 在 $\theta \sim$



$[0, 90^\circ]$ 之内时,  $|\eta' - \eta|_{max}$ 必定会出现一次。

在土星春分日:  $\theta = 0^\circ$ ,  $\eta = 0^\circ$ ,  $\eta' = 2.7^\circ$ ,  $|\eta' - \eta| = 2.7^\circ$ 。

在土星夏至日:  $\theta = 90^\circ$ ,  $\eta = \alpha = 26.7^\circ$ ,  $\eta' = 26.56^\circ$ ,  $|\eta' - \eta| = 0.14^\circ$ 。

根据三角函数的图像不难推断出 $(\eta' - \eta)$ 在 $\theta = 0 \sim 90^\circ$ 附近是单调递减的, 也就是说在 $\theta = 0$ 时,  $\eta' - \eta$ 取极大值, 所以:

$$|\eta' - \eta|_{max} = 2.7^\circ$$

这一情况发生在土星处于春分日, 同时地球-太阳的连线相对于土星的张角又达到最大时。结合第2问可以看出, 土星公转平面相对于黄道面的倾角对二者所见的盘面倾角的影响可以忽略不计。

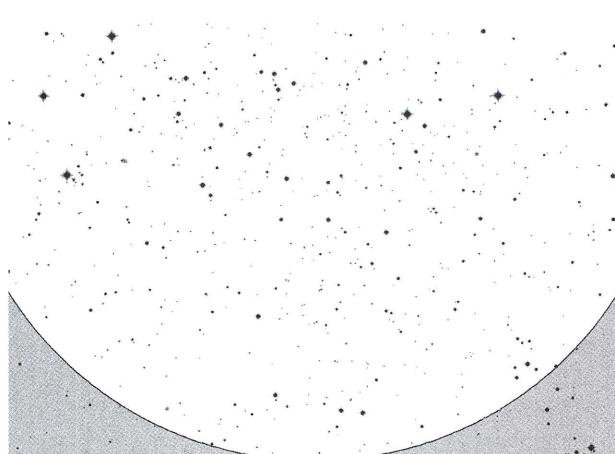
## 观测试题

1.1) 在星图1(见下图)上丢失了两颗亮星。把它们添加上去, 标记为“ $\times$ ”。

2) 在星图1上用一个小“O”标出今晚木星的大概位置, 并在旁边写明“Jupiter”。

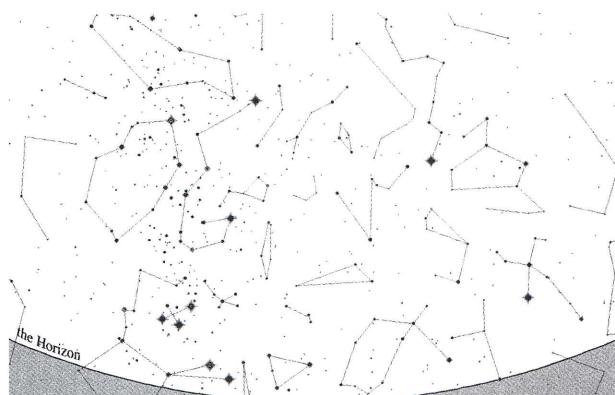
3) 在星图1所给出的视场里, 今天还能看到哪些行星? ( )

- A. 火星 B. 土星 C. 天王星 D. 海王星



2.1) 在地球上的什么地方, 能看到如下图所示的夜空? ( )

- A. 北半球 B. 南半球 C. 赤道区域 D. A和B都对



2) 在图上, 用“A、B、C、D”标出下列星座的位置

- A. 南十字座 B. 波江座 C. 船尾座 D. 船帆座

3) 在图上用圆圈(○)标出其中最亮的那颗星。

# 2005年第一届亚太天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

亚太天文奥赛组委会 供稿/朱进、王青 翻译

比赛地点：俄罗斯 伊尔库茨克

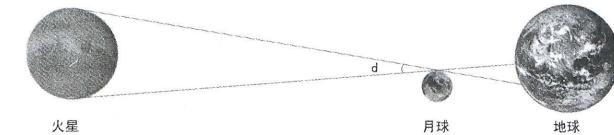
### 低年组

1、相切的掩星。在黎明时观测到正好相切的月掩火星。此时火星和月球正好位于天顶附近。找出能够观测到火星的一部分被掩的地面区域的宽度。

解答

月球和火星都十分接近黄道，正在升起的太阳同样如此。因此火星与太阳间的夹角约为 $90^\circ$ ，接近东方照点。在这种情况下，地球与火星间的距离可以这样计算：

$$D = \sqrt{a_M^2 - a_0^2} = 1.15 \text{ AU}$$



这里 $r$ 代表火星的半径。

从图中我们可以看到：火星部分被掩的掩星带的宽度等于从月球观测的火星角直径（以弧度为单位，与从地球上观测的角直径相等）乘以地月之间的距离（384400千米）。投影的角度不会影响结果，因为观测是在接近黄道处进行的。结果约等于15千米。

2、大气实验。地外生物（天蓝色的具有人类某些特征的种类）决定占领火星。但是火星没有大气。金星的情况正相反，其大气压力甚至达到90个地球大气压。没有多想，外星人决定从金星拿走全部大气并传送到火星。那火星上的大气压力会是多少？（当然，一段时间之后大气层还会消失，但这里问的是实验一做完的压力。）

解答

大气层的压力实际上等于它的总重量，在行星的球状表面平均分布。我们用下式表示： $P = Mg/S$ ，那么在金星和火星上的大气压强分别为：

$$P_V = \frac{M_V \cdot g_V}{4\pi R_V^2}, \quad P_M = \frac{M_M \cdot g_M}{4\pi R_M^2}$$

则两星球上压强的关系如下：

$$P_M = P_V \cdot (g_M/g_V) \cdot (D_V/D_M)^2$$

已知金星的大气压强等于90个地球大气压： $P_V = 9 \times 10^6 \text{ Pa}$ ， $g$ 、 $D$ 的相关数值可以在行星数据表中得到。那么实验中的火星大气压强为：

$$P_M = 9 \times 10^6 \text{ Pa} \cdot \frac{3.71}{8.87} \cdot \left(\frac{12.1}{6.8}\right)^2 \approx 1.2 \times 10^7 \text{ Pa}$$

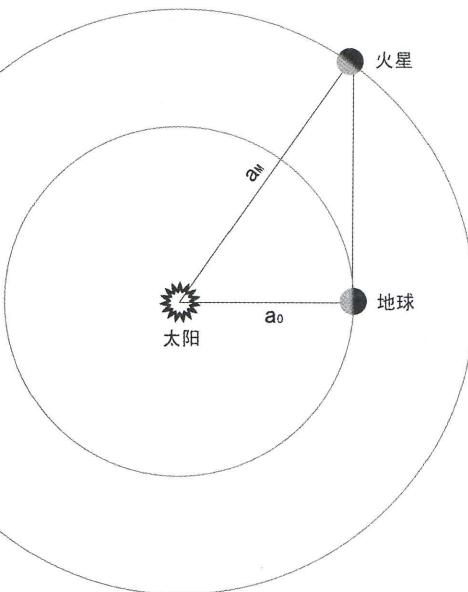
由此可以发现：压强的量级并没有改变。结果是120个地球大气压。

3、金星大距。金星对于地球上的观测者和火星上的观测者同时达到最大的东大距点。求出此时从地球观测，太阳和火星之间的角距离。从地球观测金星最大的距角为47度。画图解释你的答案。

解答

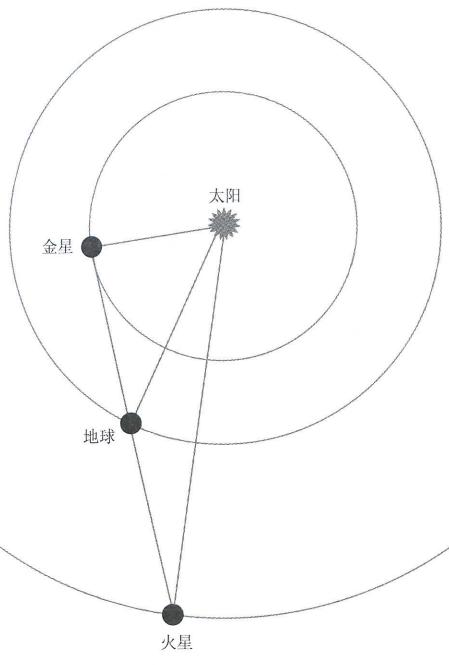
画图如下（见下页）。

由题意可知：从地球和火星上观察，金星都是东大距；



如图所示， $a_m$ 与 $a_0$ 分别是日火距和日地距离。 $a_m = 1.52 \text{ AU}$ ， $a_0 = 1 \text{ AU}$ 。此时火星的角直径为：

$$d = 2r/D = 3.95 \times 10^{-5} \text{ rad} = 8.1''$$



则地球和火星位于金星轨道的切线上（如图）。从地球上看：太阳与火星的角距离为： $180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$ ，火星在太阳以西 $133^\circ$ 。

4、格列佛。据说，格列佛访问过小人国和巨人国。考虑前者比格列佛小10倍，而后者比他大10倍。近似地估计对1) 小人、2) 巨人能看到多少恒星。假设小人和巨人视网膜的灵敏度与人眼的相同。

**解答** 本题的两问道理相同。矮人的眼睛比人类小10倍，瞳孔面积则小100倍。他们看到的最暗星比人类亮100倍，也就是只能看到1等或更亮的星，这样的星在我们的夜空中只有10~20颗。

巨人能看到的最暗星比我们暗100倍，也就是说能看到11等以上的星。他们看到的星的距离比我们远10倍，在体积尺度上是我们的1000倍。这导致了他们可以看到的星是我们的1000倍，数目约为6000000。

注意：第一问回答6颗是不正确的。由于有些恒星靠近太阳系，我们能看到的1等星要更多一些。

5、铁路。想象有人决定从地球修建一条巨长的铁路，更精确地说——用地球的全部物质做这条铁路的轨道（横向联接的轨枕可以用最近的行星际气体制造）。可以认为，两条单轨中每一条的横截面的面积是50平方厘米。

计算这条铁路的长度。并用“*Yes*”（是）或者“*No*”（不是）写出这些轨道是否可以延伸到：我们的邻居月球、火星、冥王星。这条铁路最远有可能到达什么天体？大致画出来（按图解方式）这一天体（这类天体）的样子。

**解答** 要求铁路的长度就要用体积除以截面积：

$$L = V_E / S = \frac{4\pi R^3}{3S} \approx \frac{10^{21} \text{ m}^3}{10^{-2} \text{ m}^2} = 10^{23} \text{ m}$$

这个长度已有 $10^7$ 光年了！已经可以到达河外星系，并且不是

最近的星系。（仙女座星系距我们 $2 \times 10^6$ 光年）

6、大小和质量。在下面给出的表上按照次序（从1到12）列出每个物体的大小和质量：仙女座大星系、中子星、电子、水星、第一颗人造卫星“史波尼克1号”、金星、冥王星、红矮星、黑猫、北极熊、太阳、质子。

| 物体          | 大小 | 质量 |
|-------------|----|----|
| 仙女座星系       |    |    |
| 中子星         |    |    |
| 电子          |    |    |
| 水星          |    |    |
| “Sputnik I” |    |    |
| 金星          |    |    |
| 冥王星         |    |    |
| 红矮星         |    |    |
| 黑猫          |    |    |
| 北极熊         |    |    |
| 太阳          |    |    |
| 质子          |    |    |

**解答** 表格如下：

| 物体          | 大小 | 质量 |
|-------------|----|----|
| 仙女座星系       | 12 | 12 |
| 中子星         | 6  | 11 |
| 电子          | 1  | 1  |
| 水星          | 8  | 7  |
| “Sputnik I” | 4  | 4  |
| 金星          | 9  | 8  |
| 冥王星         | 7  | 6  |
| 红矮星         | 10 | 9  |
| 黑猫          | 3  | 3  |
| 北极熊         | 5  | 5  |
| 太阳          | 11 | 10 |
| 质子          | 2  | 2  |

说明：冥王星的大小和质量均小于水星。中子星的质量达到太阳的3倍，但密度很大，其直径只有几千米。红矮星的质量和半径均小于太阳。第一颗人造卫星是直径为58厘米的球体，质量为83.6千克，位置在黑猫和北极熊之间。题目中的序号按从小到大排列。

## 高年组

第1、5、6题同低年组

2、潮汐消失。求出可以造成地球表面潮汐偶然消失的月球圆轨道的半径。这种“消失”的周期是多少？

**解答**

月球在任何距离上都可造成地球的潮汐，尽管其引力随着距离的增大而减小。但我们可以考虑太阳和月球造成的潮汐大小相同的情况。当月球处于上弦或下弦的相位时，日月潮汐相等。下面计算这种情况下的月球轨道：潮汐加速度 $a_T$ 等于地球距离月球（太阳）最近点与地心引力加速度之差：

$$a_T = \frac{Gm}{(d-R)^2} - \frac{Gm}{d^2}$$

$$\frac{Gm}{d^4 - 2d^3R + d^2R^2} \left( \frac{2dR - R^2}{d^4 - 2d^3R + d^2R^2} \right)$$

$$= \frac{2Rd}{d^3(d-2R)}$$

$$= \frac{2R}{d^3}$$

此处 $m$ 为月球质量， $d$ 为地月距离， $R$ 为地球半径。由于与地月距离相比地球的半径是小量，上式可简化为：

$$a_T = \frac{2GmR}{d^3}$$

日月潮汐相等时，下式成立：

$$\frac{2GmR}{d^3} = \frac{2GM}{D^3}$$

此处 $M$ 为太阳质量， $D$ 为日地距离：

$$d = D \cdot \sqrt[3]{m/M} \approx 498200 \text{ km}$$

利用开普勒第三定律可求出此时的月亮轨道周期为40.3天。这时的一个朔望周期是45.3天。则每过22.7天地球的潮汐消失一次。

3. 尘埃。在一个幻想故事中，太阳系的运行穿过了一个深度大约100天文单位的尘埃云。尘埃在云中均匀分布。由于云产生的光线吸收，从地球上看到满月的星等增加了一个星等。那么大行星土星在平均冲日位置的星等是多少？

**解答**

满月的亮度增加一个星等（也就是视亮度减弱2.512倍）是由于阳光在尘埃间穿过造成的；这段距离为日月距离加上日地距离，约为1.005AU。这意味着，光每经过1.005AU，亮度下降2.512倍，视星等增加1等。从太阳到土星距离为9.584AU，则在冲日时土星反射的阳光在尘埃间穿过的距离为18.168AU。亮度变化为：

$$2.512^{18.168/1.005} = 2.512^{18.08} \text{ 倍}$$

也就是说土星的视星等增加了18.08等。在正常情况下（没有尘埃），土星冲日时的视星等为0.7等，有尘埃时的视星等则变为 $0.7+18.1=18.8$ 等。此时土星很难看到，需用口径为2米以上的望远镜。

4. 外星人的光度计。在银河系一个遥远行星上的外星天文学家没有光谱设备，但他们有一台可以探测到一个天体的、等于20等恒星的亮度值的亮度变化的光度计。这台仪器在离我们太阳多远的距离上可以帮助发现太阳附近的任一颗大行星？

**解答**

这种情况下遥远的行星可以通过测量母恒星亮度变化探测，比如最大的行星（木星）掩食太阳的时刻。太阳直径约为木星的9.7倍，则掩食时刻太阳光被挡1%。如果

太阳的亮度为20等星的100倍（视星等为15等），远方的天文学家就可以发现木星。太阳的绝对星等约5等，这就要求外星人与太阳的距离不超过1000秒差距，并且位于木星轨道平面附近。

**实测试题**

亚太天文奥赛组委会 供稿/朱进 翻译/李鉴 解答

7.（高、低年组）变星。伊尔库茨克天文俱乐部的天文爱好者对恒星X进行了一个月的观测。遗憾的是，在这个月中只有16个晴夜，观测并不很规律。不过他们还是发现恒星的亮度是有变化的，具体见下表。

7.1. 画图，在图上画出观测结果。从这幅图中定出恒星亮度变化的周期。

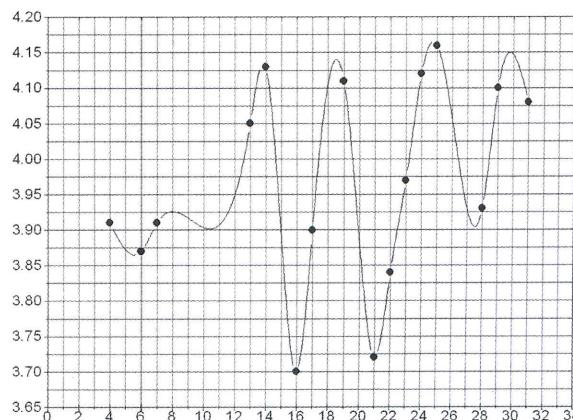
7.2. 定出光变周期。

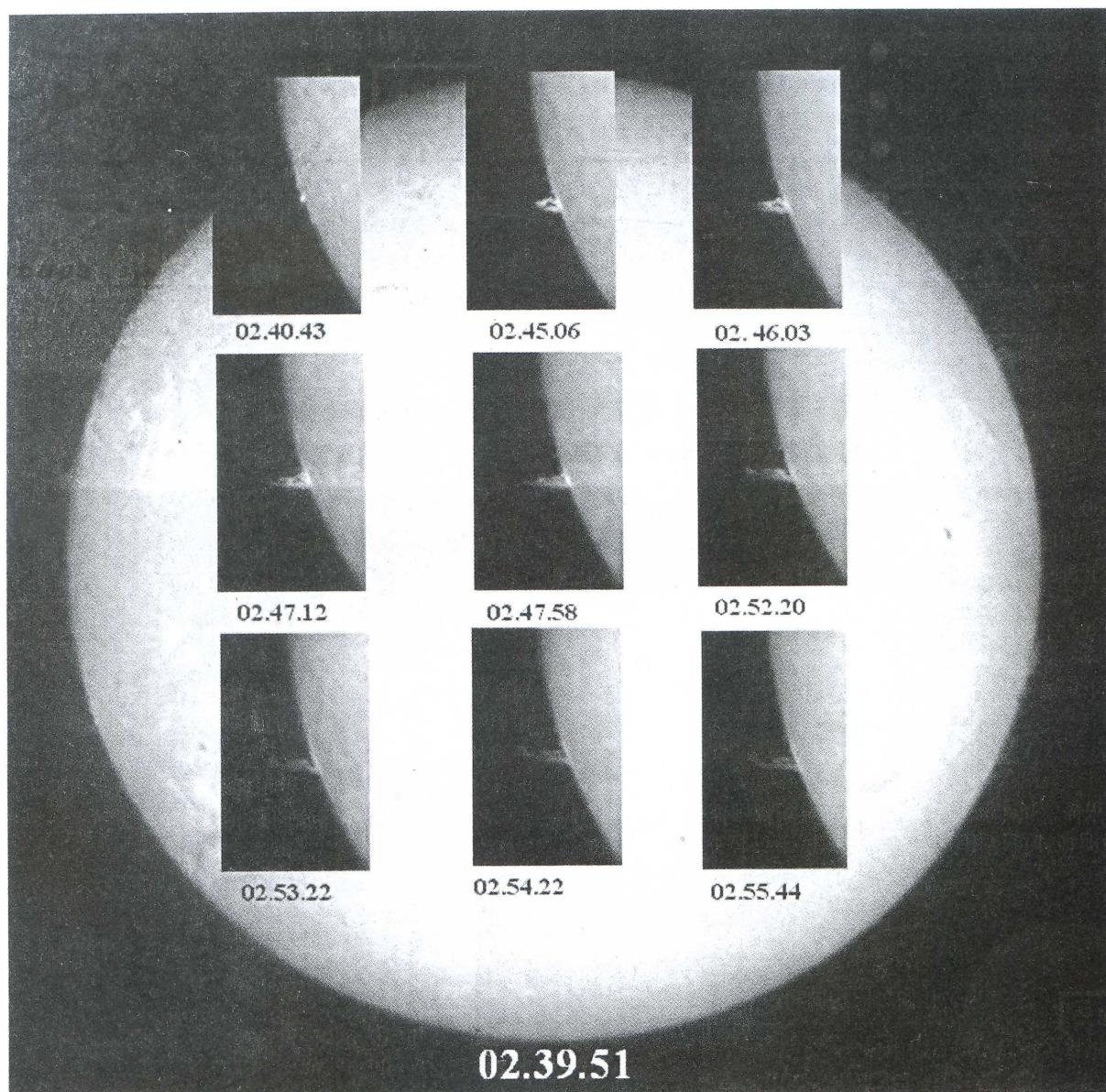
7.3. 以及变化幅度。

7.4. 如果恒星X的视差是0.006''，求出它的最大和最小的绝对星等。

| 日期 | 星等   | 日期 | 星等   |
|----|------|----|------|
| 4  | 3.91 | 21 | 3.72 |
| 6  | 3.87 | 22 | 3.84 |
| 7  | 3.91 | 23 | 3.97 |
| 13 | 4.05 | 24 | 4.12 |
| 14 | 4.13 | 25 | 4.16 |
| 16 | 3.70 | 28 | 3.93 |
| 17 | 3.90 | 29 | 4.10 |
| 19 | 4.11 | 31 | 4.08 |

**解答** 恒星X的光度变化如下图所示，由于观测资料不全，因此图中的拟合曲线（由电脑软件生成）不是真实的光变曲线。但从图中也可以看出，它的光变周期约为4.5天，光变幅度约为0.46等。





太阳的  $H_{\alpha}$  像  
Baikal 天体物理台摄于2000年07月29日

| No | 恒星    | m     | Sp | r(光年)  | r(秒差距) | M     | $L(L_{\odot}=1)$ |
|----|-------|-------|----|--------|--------|-------|------------------|
| 1  | 天狼A   | -1.46 | A1 | 8.67   | 2.66   | 1.42  | 22.5             |
| 2  | 天狼B   | 8.67  | A5 | 8.67   | 2.66   | 11.55 | 0.002            |
| 3  | 克鲁格60 | 9.85  | M3 | 12.877 | 3.95   | 11.88 | 0.0015           |
| 4  | 大角    | -0.06 | K  | 36     | 11.04  | -0.27 | 107              |
| 5  | 参宿四   | 0.92  | M2 | 652    | 200    | -5.59 | 14256            |
| 6  | 太阳    | -26.7 | G2 |        |        | 4.8   | 1                |

恒星X的最大视星等约为4.16等，最小视星等约为3.70等。根据 $m - M = 5 \lg r - 5$ 知，如果它的视差为0.006角秒（即167秒差距），那么最大（最暗）绝对星等为：-1.95等，最小（最亮）绝对星等为-2.41等。

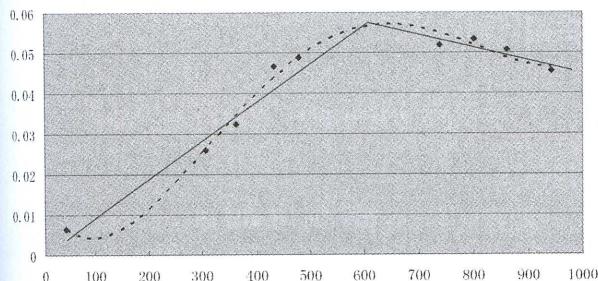
8、(低年组) 太阳临边耀斑。两天前我们访问了贝加尔天体物理台。那里的天文学家使用色球望远镜观测了2000年7月29日的太阳临边耀斑。上页的图中给出了一组十幅观测图像。画图表示图像中看到的耀斑结构的最高点的上升速度随时间的变化。计算太阳耀斑物质达到最大高度的时刻和高度。

**解答**

从题目所给图中可以量出耀斑相对于日面的高度，如下表所示。表中的时间以02点40分0秒为零点，单位为秒，耀斑高度以太阳直径为单位。

| 时间 (s) | 高度 ( $D_{\odot}$ ) | 时间 (s) | 高度 ( $D_{\odot}$ ) |
|--------|--------------------|--------|--------------------|
| 43     | 0.0065             | 306    | 0.026              |
| 363    | 0.032              | 432    | 0.047              |
| 478    | 0.049              | 740    | 0.052              |
| 802    | 0.053              | 862    | 0.051              |
| 944    | 0.045              |        |                    |

耀斑的时间—高度图如下图所示，横坐标单位为秒，纵坐标单位为太阳直径。图中的曲线是数学软件自动给出的，直线是根据数据点目测画出的，两直线的交点即为耀斑的最大高度，从图中可以读出时间约为610秒，根据我们取的时间零点，换算为时刻则是2点50分10秒；最大高度约为0.058倍太阳直径。



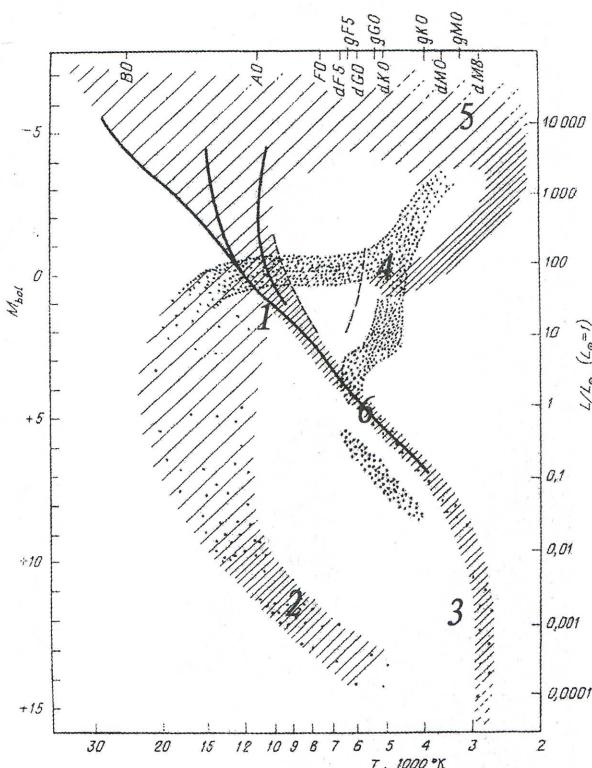
的数据可知：

$$M - M_{\odot} = 2.5 \lg(L_{\odot}/L)$$

易于求出恒星的光度：

$$L = 10^{(M_{\odot}-M)/2.5} \cdot L_{\odot}$$

这些恒星在光谱—光度图上的位置如下图所示：



8、(高年组) 恒星。在上页的表格中给出了几颗恒星(不同光谱型)的数据： $m$ -星等, Sp-光谱分类(型),  $r$ -以光年为单位的距离。填写表格的最后一列(答案已在原表中给出——编者)。

8.1. 写出需要使用的公式。

8.2. 计算 $M$  (绝对星等),  $L$  (光度), 并将结果填入表中。

8.3. 在“光谱——光度”图上，使用顺序编号(第1列的No)标出每颗恒星和太阳的位置。

**解答**

根据 $m - M = 5 \lg r - 5$ 容易求得各星的绝对星等，1秒差距约为3.26光年。 $M$ 正比于 $-2.5 \lg L$ ，根据太阳

# 2006年第二届亚太天文奥林匹克竞赛试题

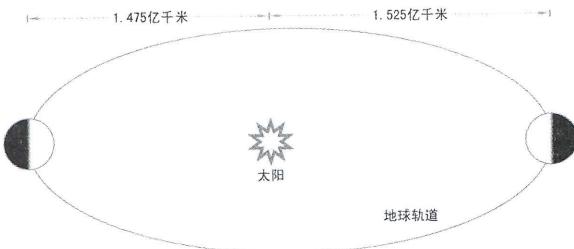
## 理论试题

亚太天文奥赛组委会 供稿/陈冬妮、王青 翻译

比赛地点：俄罗斯 符拉迪沃斯托克

### 低年组

1、符拉迪沃斯托克在哪里？在一本由俄罗斯天文作家M.V.Shevchenko编著的流行小册子上，你可以看到这样一幅图，图片解释了地球的公转轨道是椭圆。请在你的答题纸上重新画出这幅图，并在图中的地球上指出符拉迪沃斯托克的大致位置，现在正是符拉迪沃斯托克冬日的中午。请在答题纸上写出你这样选择的原因。



#### 解答

我们知道地球在1月初的时候经过近日点，在7月初的时候经过远日点。1月初北极地区是极夜，而7月初南极地区是极夜。因此，图中的地球南极在上，而不是像我们通常画的那样北极在上。所以俄罗斯的领土应该位于图中地球的底部。应该能够指出符拉迪沃斯托克在地球的底部，位于赤道以北，距赤道 $43^\circ$ ，也就是距离底部的北极 $47^\circ$ ，在地球上被太阳照亮的部分。

2、流星。在A处看到一颗流星的高度角是 $30^\circ$ ，其视星等为0等。在B处的天顶看到同一颗流星。请问在B处看到这颗流星的视星等是多少？可以忽略大气消光。

#### 解答

流星现象发生的高度大致为100km。这个距离相比于地球半径足够小，可以忽略地球的球形表面按平面处理。从流星到A的距离为其到B距离的两倍。因此在不考虑大气消光的情况下，B处看到的流星亮度为：

$$m = 0^m - 5 \lg 2 = -1.5^m$$

3、古怪的轨道。23世纪的子夜。观测最近在一个遥远的类太阳恒星系统中发现的一颗行星（恒星的视差为 $0.003200959''$ ）。观测发现，行星视运动的圆轨道半径恰好为 $0.003200959''$ ，然而恒星并不在行星圆轨道的中心，其距圆心的距离刚好为行星圆轨道半径的一半。在第一次提到这颗行星发现的报纸上有大胆的推测，这颗行星上可能有高级文明（技术和法律意义上的）存在，这种文明已经掌握了如何打破开普勒第一定律。

对此你有什么其他的解释吗？请计算这颗行星环绕恒星的周期。如果这颗行星的大小和质量都与地球近似相当，它适合人类居住吗？（只考虑人造建筑以外的行星区域）

#### 解答

行星的运动应是以类太阳恒星为其中一个焦点的椭圆轨道。但由于我们的视线方向与行星轨道有一个倾角，所以看到椭圆长轴和短轴的投影长度相同。这种情况当且仅当视线方向刚好与短轴方向垂直时才可能（其他情况看到的都是椭圆）。由于恒星的视差与轨道短轴严格相等，所以行星轨道的半短轴长为1 AU。再来看椭圆的偏心率 $e$ （椭圆中心到其焦点的距离与椭圆半长轴之比），按题意， $e = 0.5$ 。

根据椭圆的性质，椭圆上任意一点到其两焦点的距离之和为常数，我们可以构造直角三角形，三个顶点分别为椭圆的中心、其中的一个焦点和椭圆半短轴与椭圆的交点，在这个直角三角形中：

$$a^2 = b^2 + (a \cdot e)^2$$

由于 $e = 0.5$ ，所以有：

$$a = 2b/\sqrt{3} \approx 1.155b = 1.155 \text{ AU}$$

考虑到这颗恒星是类太阳恒星，利用开普勒第三定律，求得该行星的周期为：

$$(2/\sqrt{3})^{3/2} \approx 1.24 \text{ 年}$$

这颗行星是否适合居住？很可能不适合。事实上由于行星轨道的偏心率 $e = 0.5$ ，在近恒星点时行星距离恒星只有0.577AU，这比金星距离太阳还近；而在远日点时，恒星和行星的距离可以达到1.732AU，这比火星与太阳的距离还要远。

4、卫星。要发射一颗人造卫星，要求卫星在环绕地球的圆形极轨道运行，且保证地球上位于纬度和经度都为 $0^\circ$ 的地方，每个恒星日都能在天顶处刚好看到一次（不多也不少）卫星。请问卫星可能的公转周期是多少？请以 $X X^h X X^m$ 的形式表示周期，精度取至1分。

**解答**

看起来，卫星应该每天（这里都指恒星日，考虑相对于恒星的运动）绕地运行一周。这种情况下卫星每天都出现在同一地点上空。但事实上卫星每转过半个周期，就会在地球另一端再次穿越赤道，而这段时间内地球也转过半个周期，因此卫星仍在地球上同一点的上方出现。

因此，卫星应该在一个恒星日内绕地公转偶数圈，考虑到卫星公转周期的最小理论值（即卫星刚好贴着地球表面飞行）为：

$$2\pi\sqrt{R/g} \approx 84.5 \text{ 分钟}$$

因此卫星在一个恒星日内不可能超过17周。因此，卫星每天可以转 $N=2、4、6、8、10、12、14、16$ 周，对应的周期为 $23^h56^m/N$ ，精确到1分钟即为 $11^h58^m、5^h59^m、3^h59^m、3^h00^m、2^h24^m、2^h00^m、1^h43^m、1^h30^m$ 。

5、 $60^\circ$ 。本题取自第60届莫斯科天文奥林匹克竞赛。一位莫斯科的天文爱好者观测赤纬为 $60^\circ$ 的一颗恒星，使用的是放大倍率为60的望远镜，视场为 $1^\circ(60')$ 。由于望远镜的跟踪装置没有调整好，比要求的标准快了 $1/60$ 。请计算在不改正望远镜跟踪的条件下，这位观测者能在望远镜中看到这颗恒星的时间为多久？

**解答**

赤纬为 $60^\circ$ 的恒星在一天之内在天球上走过的小圆长度刚好是天球大圆的一半——即天赤道。也就是说一小时之内，这颗恒星移动的距离刚好是天赤道上恒星的一半，即 $7.5^\circ$ 。它需要8分钟的时间走过视场为 $1^\circ$ 的望远镜（所花时间是天赤道处恒星的两倍）。

由于望远镜的跟踪装置速度是恒星的 $61/60$ 倍，这将使得看起来恒星是相对于望远镜以地球自转速度的 $1/60$ 退行的。所以恒星走过望远镜视场直径所需时间为 $8 \times 60 = 480$ 分钟。也就是说这颗星在望远镜中几乎整夜可见。答案与望远镜的放大倍率无关。

6、 $N \times N \times N$ 。本题取自莫斯科天文奥林匹克竞赛。莫斯科天文奥林匹克竞赛每年都举办一次，第一次（I MAO）是在1947年举行的。我们假设接下来的这个题目每年都会在MAO上出现。

“大质量的球状星团半径为 $Npc$ ，其成员为 $N$ 百万个类太阳恒星。其中的一颗恒星在星团的边缘以速度 $N\text{km/s}$ 移动。请问这颗恒星是否能离开这个球状星团？”每年的题目中， $N$ 值为该年莫斯科奥林匹克竞赛的届数（1947年， $N = 1$ ，以此类推）。请计算哪些年份恒星能够离开星团？哪些年份恒星不能离开星团？

**解答**

球状星团的半径和质量分别可以写作：

$$R = N \times 3.09 \times 10^{16} \text{ m}, M = N \times 1.99 \times 10^{36} \text{ kg}$$

可以把球状星团视为球对称的，处在其边缘的物体，第二宇宙速度（抛物线）为：

$$v_{II} = \sqrt{2GM/R} = 9.27 \times 10^4 \text{ m/s} \approx 92.7 \text{ km/h}$$

上式对任意 $N$ 都成立，因此自第93届MAO开始恒星的速度都大于星团的第二宇宙速度，可以逃出。第93届MAO的举办年

份应该是2039年。从1947年到2038年，恒星的速度都不足以逃出星团的束缚。

**高年组**

1、人造乌苏里虎。假设有一只按照1:1的比例人造的乌苏里虎（参见APAO II的图标）正在轨道上飞行，其轨道是典型的人造卫星轨道。如果地面的望远镜要：

- a) 能够将虎认定是一颗人造卫星；
- b) 能够分辨出飞行的是一只虎而不是其他物体（比如说不是一头狮子）；

请计算望远镜要具备怎样的性能才能达到上述目的？

**解答**

a) 将人造虎与满月的反射光作对比，典型的人造卫星的高度为300~400km，大约比月球近1000倍。人造虎能反射太阳光的面积可以按 $1\text{m}^2$ 估计。再考虑到通常我们只能看到卫星的一半被太阳照亮，所以虎的反光面积为 $0.5\text{m}^2$ 。月球的反光面积为：

$$\pi R_{moon}^2 \approx 9.5 \times 10^{12} \text{ m}^2$$

二者的面积比为 $1.9 \times 10^{13}$ ，虎皮的反照率大约为0.5，月球的反照率为0.07，二者之比为0.14。

因此地球上看到的来自人造虎和满月的光强度之比为：

$$1000^2 / (1.9 \times 10^{13}) / 0.14 = 3.8 \times 10^{-7}$$

星等差为： $2.5 \lg(3.8 \times 10^{-7}) \approx -16.1^m$ ，所以地球上看到虎的亮度约为：

$$-14.7^m - (-16.1^m) = 1.4^m \approx 1.5^m$$

不需要望远镜就能够认出它。

b) 要认出这是一只虎而不是仅仅简单地看到，就需要辨认出像虎的斑纹、肌肉、爪子等细节，其特征尺度大约是几分米。这就对望远镜的分辨率提出了要求。即使用最大的地基望远镜（比方说BTA），其最好分辨率也只有半个角秒，对应在300~400km距离处的线尺度也是1m的量级，所以没办法用现有的地基光学望远镜分辨出那是虎而不是人造卫星或狮子。

2、费里诺思访问。假设名为“费里诺思”的外星人在他们的飞船上用望远镜观测我们。结果发现太阳的视星等为 $7^m$ ，观测到的有效温度为5777K（不是我们看到的5770K）。请问“费里诺思”人的飞船是正在驶向我们还是远离我们？（请画图说明你的答案，图中应用箭头指明方向，在无需翻译的条件下也可以理解）。如果飞船在远离我们，请计算他们是在多久之前到达过地球；如果飞船是驶向我们，请计算他们将在多久之后到达地球。

**解答**

根据公式 $\lambda_{max}T = const$ ，对非常小的变量 $\Delta T$ 和 $\Delta\lambda$ 有：

$$\Delta T/T = -\Delta\lambda/\lambda$$

所以费里诺思人观测到的更高的有效温度意味着更短的 $\lambda_{\max}$ 。根据多普勒效应，费里诺思人应该是正在接近我们，接近的速度为：

$$v/c = -\Delta\lambda/\lambda, \quad v = c \cdot \Delta T/T$$

由于他们看到的太阳视星等为 $7^m$ （太阳的绝对星等为 $4.7^m$ ），当前他们距太阳系的距离满足： $m = M - 5 + 5 \lg D$ 。所以 $D=28.8\text{pc}$ 。所需时间为：

$$\tau = \frac{D}{v} = \frac{D \cdot T}{c \cdot \Delta T} \approx 77 \text{ 千年}$$

即7万7千年。

### 3~4、同低年组

5、星系60。本题取自第60届莫斯科天文奥林匹克竞赛。从地球上看到红移为 $1/60$ 的旋涡星系是一条长度为2角分的窄带。星系边缘处的径向速度与星系中心处径向速度的差为 $60\text{km/s}$ 。请估算星系的质量，以太阳质量为单位。

**解答** 已知星系的视向速度是光速的 $1/60$ ，即 $5000\text{km/s}$ ，根据哈勃定律，取哈勃常数 $H_0 = 65\text{km/s/Mpc}$ ，可以计算得到该星系的距离为 $77\text{Mpc}$ 。由于观测到的星系是侧向的，在地球上看到其半径的张角为 $1'$ ，所以星系的实际半径约为 $22\text{kpc}$ 。因为只是估算星系的质量，所以可以假定对于星系外部的区域，星系的所有质量都集中在中心一点处，在星系边缘的恒星按圆轨道运行。星系边缘恒星的轨道速度为 $60\text{km/s}$ ，因此星系的质量为：

$$M = \frac{v^2 R}{G} \approx 4 \times 10^{40} \text{ kg} \approx 2 \times 10^{10} M_{\odot}$$

6、飞向柯伊伯带。考虑一艘在黄道面内绕地球作低圆轨道飞行的行星际飞船。请问在不作额外轨道修正的条件下，飞船的速度至少要增加多少才能够飞向柯伊伯带？估算此次飞行的时间 $\tau$ 。

**解答** 柯伊伯带位于太阳系外边缘，距离太阳大约 $d=100\text{AU}$ 。要到达那里，飞船的日心速度必须达到抛物线速度，这个速度在地球的位置大约是 $42.1\text{km/s}$ 。但地球本身的轨道速度为 $29.8\text{km/s}$ ，所以飞船的最小地心速度 $u$ 为 $12.3\text{km/s}$ 。这是在逃离地球引力后的速度，在这之前，飞船的速度还必须不小于 $v_3$ ：

$$v_3 = \sqrt{u^2 + v_2^2} = 16.6 \text{ km/s}$$

$v_2$ 是地球表面的抛物线速度（ $11.2\text{km/s}$ ）。绕地在圆轨道上运行的飞船速度 $v_1=7.9\text{km/s}$ ，所以最小的速度增加值为：

$$\Delta v = v_3 - v_1 = 8.7 \text{ km/s}$$

飞到柯伊伯带的时间可以认为等于半长径为 $d/2$ 的天体绕日运行周期的一半，即：

$$\tau = T/2 = \sqrt{(d/2)^3/2}$$

得到 $\tau \approx 180$ 年。

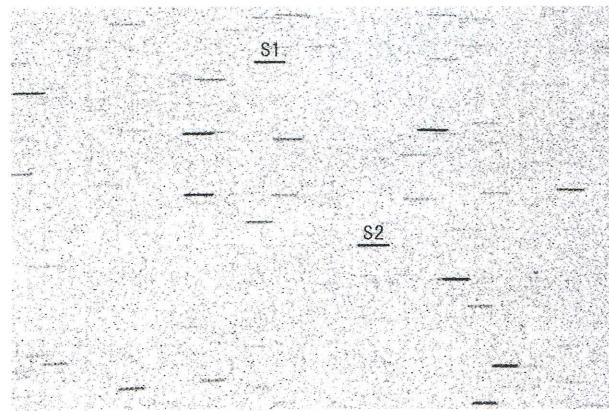
## 实测试题

亚太天文奥赛组委会 供稿/王青 翻译

### 低年组

7、地球同步轨道卫星。地球同步轨道卫星监控站建在我们两天前访问的乌苏里天文台。这张南部天区的反转片使用数码相机拍摄（见图）。曝光时间为10秒，望远镜的跟踪装置没有开启。

- 7.1、估算照片上天区的大小（用角度表示）
- 7.2、估算宇宙空间中卫星 $S_1$ 与 $S_2$ 之间的实际距离。
- 7.3、估算这部分天区的地平高度。



**解答** 由于所拍照片上有地球同步轨道卫星，因此拍摄的天区应在赤道附近。这个区域内的恒星每天走过 $360^\circ$ 。在照片上每个同步轨道卫星都有其轨迹，但由于其相对于天空非常小的运动，卫星的轨迹每天只有几分。

7.1、在赤道附近10秒钟的星迹对应的角距离为： $10 \times 15 = 150 \text{ arc sec} = 2.5 \text{ arc min}$ 。通过测量照片上卫星轨迹的窄线可以对底片的尺度定标。 $2.5 \text{ arcmin}$ 在纸上对应的长度是 $9\text{mm}$ 。因为底片的大小为 $120 \times 180\text{mm}$ ，所以底片的拍摄天区的实际大小为：

$$2.5 \times (120 \times 180)/9 = 33' \times 50'$$

7.2、天空中两颗卫星的最小距离应为 $S_1$ 和 $S_2$ 之间的角距离 $\alpha$ 乘以到二者的距离 $L$ ，这种情况发生在两颗卫星在拍摄的时候位于相同的位置（广义上说，这个距离值在一天之内是有变化的）。所以可能的距离为 $\alpha L$ 或更长，如下页的图所示。

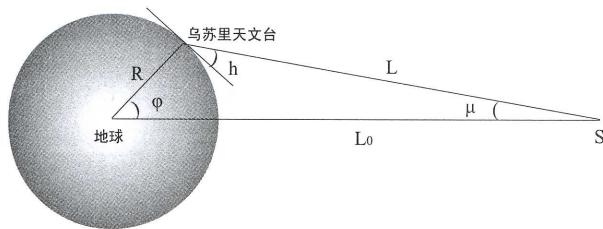
从纸上可以量出 $\alpha = 61\text{mm}$ ，对应的角距离为：

$$2.5 \times 61/9 = 17 \text{ arc min} = 4.9 \times 10^{-3} \text{ 弧度}$$

距离 $L$ 可以根据地球同步轨道卫星按下图估算出来：

$$L \approx L_0 - R \cos \phi$$

其中： $L_0 = \sqrt[3]{GM(T/2\pi)^2} = 42150 \text{ km}$ ，是地球同步轨道卫星的地心距离， $R$ 为地球半径（ $6370\text{km}$ ）， $\phi$ 为乌苏里天



- 木卫一 Io 1818km  
 木卫二 Europa 1560km  
 木卫三 Ganymede 2634km  
 木卫四 Callisto 2409km

## 高年组

文台的地理纬度（由于天文台大致位于符拉迪沃斯托克以北200km处，其纬度大约为45°），或者更精确地计算 $L$ ：

$$L = \sqrt{(L_0 - R \cos \phi)^2 + (R \sin \phi)^2} \approx 37900 \text{ km}$$

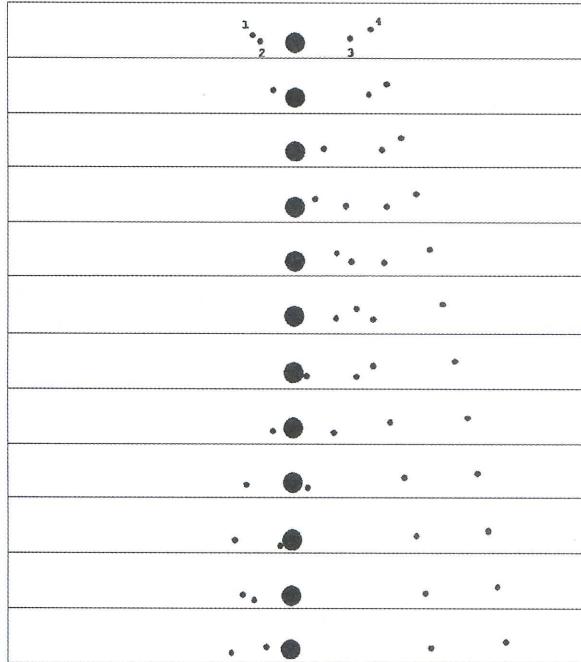
所以最小距离应为：

$$D = 37900 \text{ km} \times 4.9 \times 10^{-3} \text{ 弧度} \approx 185 \text{ km}$$

所以两卫星间的实际距离为185km或更远。

7.3、由图可知卫星的天顶距为 $z = \phi + \mu$ ，地平高度为 $h = 90^\circ - z$ ，所以：

$$h = 90^\circ - \phi - \mu = 45^\circ - \arctan \frac{R \sin \phi}{L_0 - R \cos \phi} = 38^\circ$$



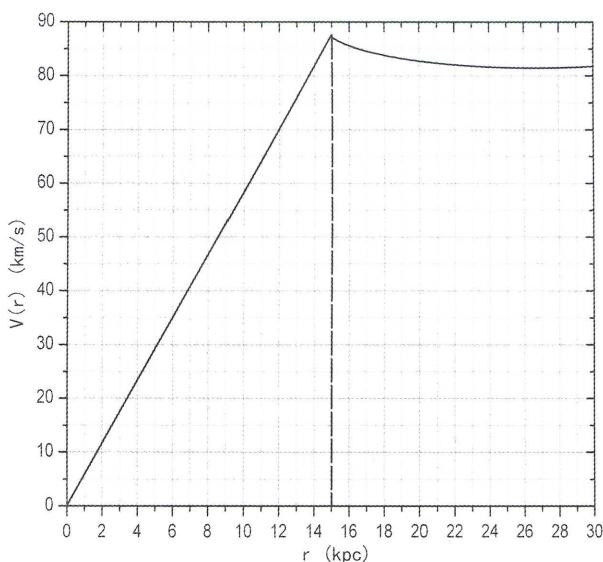
8、木星的卫星。4个小时内拍摄了12张木星和它的四个伽利略卫星（见上图）。其中第一张照片上的卫星已经标明号码。请辨认其他照片上卫星的顺序，并将相应的号码在每一张图的旁边标出。将卫星按照半长轴的升序排列（从最短到最长）。请写出各卫星的拉丁文名字，使用罗马字母，只要名字可以辨认，拼写错误忽略不计。

### 解答

答案需另作图，四颗伽利略卫星：

### 7、同低年组

8、速度曲线。这张图表（见下图）给出一个旋涡星系的速度曲线，速度曲线给出的信息是距星系中心不同距离处天体的切向速度即环绕运动的速度。请在你的答题纸上画出 $M_r$ 与 $r$ 的关系图，即用 $M_r$ 的值表示在半径为 $r$ 的球内的物质质量。假设星系中的物质密度呈球对称分布。



### 解答概要

可以从 $v_r^2/r = GM_r/r^2$  得到 $M_r = v_r^2 \cdot r/G$ ，从题目给出的图表中找到数据，求得几个 $M_r$ 和 $r$ 的值。然后画出要求的图。

# 2007年第三届亚太天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

亚太奥赛组委会 供稿/张子平、李鉴、陈冬妮 翻译

比赛地点：中国 厦门

### 低年组

1、超新星。有一星等为21.04等的星系，在其中发现了一颗超新星，超新星爆发后，星系的总星等（现在包括那颗超新星）为20.64等。问超新星极亮时的视星等为多少？

**解答** 设超新星极亮时的视星等为 $m_{SN}$ ，星系的星等为 $M_G$ ，总星等为 $m_t$ ，根据 $m \sim -2.5 \lg F$ 知：

$$m_t - M_G = -2.5 \lg \frac{F_t}{F_G} = -0.4^m$$

其中：

$$F_t = F_G + F_{SN}$$

可以求出： $m_{SN} - M_G \approx 0.88$ 等，所以 $m_{SN} = 21.92$ 等。

2、熊观测者。假设有一位生活在北极的观测者，例如一只北极熊，在前几届的奥赛中曾出现过。问在一年中，这位观测者有几天时间能用肉眼看到北极星？一天也就是24小时，假定天气总是晴朗的。请画一张包括熊观测者在内的图。

**解答** 假设熊的眼睛灵敏度与人眼相同。北极星的星等为2等左右，根据晨昏蒙影的一般经验，设当太阳在地平线之下 $h^\circ$ 的时候，人们可以看到2等星。（注意，这里的 $h^\circ$ 只是个近似值，在本题中重要的不是它的准确数值，而是要有这个概念——编者。）在北极点，地平圈与天赤道重合，天体的地平高度等于它的赤纬。本问题就转化为求太阳赤纬从 $-h^\circ$ 到 $0^\circ$ 的天数，也就是半年减去太阳赤纬在 $0^\circ$ ~ $-h^\circ$ 之间的天数的两倍：

$$t = T/2 - 2 \times t'$$

其中 $T$ 为回归年， $t'$ 为太阳赤纬在 $0^\circ$ ~ $-h^\circ$ 之间的天数。

太阳在黄道上每天运行大约 $0.986^\circ$ ，黄赤交角 $\varepsilon = 23.5^\circ$ 。根据常识， $h$ 是一个较小的度数，因此太阳赤纬从 $-h^\circ$ 变为 $0^\circ$ 大约需要经历：

$$t' = \frac{h^\circ / \sin \varepsilon}{0.986^\circ / \text{天}}$$

假定 $h = 7^\circ$ ，代入数据可以求出：

$$t' = \frac{7^\circ / \sin \varepsilon}{0.986^\circ / \text{天}} \approx 17.8 \text{ 天}, t = 183 - 2t' \approx 147 \text{ 天}$$

考虑到 $h$ 的不确定性，答案在135~150天之内都算正确。

3、月亮和猫。在这张用望远镜按照相机拍摄的照片中，有一只猫坐在树上。请问为了保持一直能看到猫和树枝位于月面此处，在垂直于视线的方向上移动望远镜（视线方向就是猫和望远镜的连线方向），望远镜的移动速度应为多少？另外，为什么猫以头下尾上的姿势坐在树上？



**解答** 猫和树枝是固定不动的，因此我们首先要计算出月亮相对于猫的移动角速度，月亮自西向东绕地球（或猫）公转一周所需时间为27.3天，同时由于地球自西向东自转，使得月亮相对于猫自东向西转动，速度为 $360^\circ / \text{天}$ ，因此月亮相对于猫的总角速度方向为自东向西，大小为：

$$\omega = \frac{360^\circ}{24 \text{ 小时}} - \frac{360^\circ}{27.3 \text{ 天}} \approx 7 \times 10^{-5} \text{ 弧度/秒}$$

为使望远镜看到猫、树枝与月亮的相对位置不变，它应该自西向东移动，相对于猫的角速度的大小要与 $\omega$ 保持一致，因此望远镜移动的线速度大小为： $v = \omega \times d$ ，其中 $d$ 为猫到望远镜的距离。

根据提供的照片可以量出猫的视大小约为月亮（约为 $32'$ ）的 $1/7$ ，设猫的实际大小为 $h$ 厘米，可以求出它离望远镜的距离为：

$$d = \frac{h}{\sin(32'/7)}$$

假设 $h = 35$ 厘米，则望远镜的移动速度为：

$$v = \omega \times d = \frac{\omega \times h}{\sin(32'/7)} \approx 0.018 \text{ m/s} = 1.8 \text{ cm/s}$$

许多天文望远镜都成倒像，因此猫实际上是正坐在树枝上的。

4、视差。我们所处的银河系区域中，恒星间的平均距离约为5光年。假设有一颗卫星能在 $\pm 0.01$ 角秒的精度内测量恒星的视差。问用这颗卫星能测量出多少颗恒星的视差？

**解答**

卫星能测量的最远恒星为：

$$d = 1/0.01 \text{ pc} = 326 \text{ 光年}$$

恒星的间距 $a=5$ 光年，因此这个距离之内的恒星数目大约为：

$$N = \frac{4}{3} \cdot \pi \left(\frac{d}{a}\right)^3 = 1.16 \times 10^6 \text{ 颗}$$

5、接近恒星。当天文学家从海平面爬上高度为1千米的山峰时，他与恒星间的距离变小了，并且会得到更好的成像质量，看到更暗的星。假设一颗刚好位于天顶的恒星，其视星等为2等，距离地球 $10\text{pc}$ ，请计算由于天文学家爬上1千米的高峰而引起的这颗恒星的视星等变化值。假定天文学家在海平面和高山上都使用的是极其精确的光度测量仪器。

**解答**

1千米相对于 $10\text{pc}$ 完全可以忽略不计，可以推断由于1千米的距离变化而导致的恒星视星等变化可以忽略（只有大约 $7 \times 10^{-15}$ 等）。因此导致星等发生变化的主要原因是大气消光。设在地面观测，天顶处的大气消光效应能够导致恒星的亮度降低 $a\%$ ，大气的厚度为 $h$ 千米，则爬上1千米的山峰后，恒星的亮度降低：

$$\Delta F = \frac{a\%}{h} \times (h - 1) \times F_0$$

这里的 $F_0$ 为恒星在大气层之外的亮度。

为了得到数值解，我们假设 $h=8$ 千米， $a\% = 30\%$ ，则： $\Delta F \approx 26\% \times F_0$ ，因此在地面和1千米高的山峰处，测得的恒星流量差为：

$$F_{\text{地}} - F_{\text{山}} = (1 - 30\%)F_0 - (1 - 26\%)F_0 = -0.04F_0$$

所测量到的星等差为：

$$\Delta m = m_{\text{地}} - m_{\text{山}} = -2.5 \lg \frac{F_{\text{地}}}{F_{\text{山}}} = 0.06$$

即在山顶测量的星等比地面亮大约0.06等。

注：在国际天文奥赛中会经常碰到对某些参数难以给出

准确估计值的题目，我们在解题时，最好先推导出公式，然后再代入自己给出的估计值进行计算，这样即使估计值误差较大，但公式正确，仍然能得到较高的分数。

6、引力暴胀。假设明天在我们所在的银河系区域，引力常数 $G$ 突然减小了 $5\%$ （ $G=0.95G_0$ ），那么地球的绕日轨道会变成什么样？请计算地球的新轨道参数（半长轴、偏心率和恒星周期）。假定地球的实际轨道（引力常数未变小前）是圆轨道，即偏心率为0。

**解答**

1) 地球轨道将变成椭圆（没有逃逸出去，请自己验算），此刻的地球所在处将成为新轨道的近日点。

2) 二体问题可以方便地利用活力公式解决，活力公式是反映天体的位置、速度和轨道半长径之间关系的公式：

$$v^2 = G(M + m) \cdot (2/r - 1/a)$$

式中 $v$ 和 $r$ 为一个天体相对于另一个天体的速度和距离； $G$ 为万有引力常数， $M$ 和 $m$ 分别为两个天体的质量； $a$ 为常数，在椭圆轨道中表示半长径，圆形轨道中表示半径。

引力暴胀以后，对近地点的地球有：

$$v_0 = \sqrt{\frac{G_0 M}{r}}, r = 1 \text{ AU}$$

这里 $v_0$ 为近日点的地球速度， $M$ 为太阳质量， $r$ 为近日距。设地球新轨道的半长径为 $a$ ，应用活力公式有（忽略地球质量）： $v_0^2 = GM \cdot (2/r - 1/a)$ ，解得：

$$a = \frac{G}{2G - G_0} \text{ AU} = 1.056 \text{ AU}$$

近日距 $r = a(1 - e)$ ，因此新轨道的偏心率为：

$$e = 1 - \frac{r}{a} = 0.053$$

根据开普勒第三定律可以求出新轨道的周期：

$$\frac{a_0^3}{T_0^2} = \frac{G_0 M}{4\pi^2}, \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

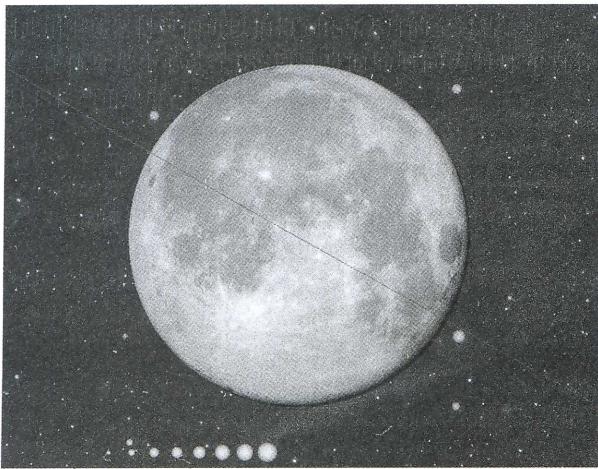
两式相比得：

$$T = 1.12 T_0 = 1.12 \text{ 年}$$

## 高年组

第1、2、5、6题同低年组

3、国际空间站凌月。使用Calsky (<http://www.calsky.com>) 网站，可以查询到国际空间站（ISS）等人造天体凌日、凌月、掩亮星的相关信息。以下为一次ISS凌月的相关信息和凌月中心线上ISS划过月面区域的示意图。有这些作为依据，我们就可以在预定地点和时间使用望远镜和照相机等设备拍摄到这次ISS凌月了。



信息：ISS最大角直径：34.9角秒，实际大小： $73.0 \times 44.5 \times 27.5 \text{ mm}^3$ ；凌月时的方位角：118.4度（东南偏南），地平高度：38.8度，距离：531.1千米（在地影中），移动角速度46.6角分/s。

如果我们来到掩食带中心线上某处，使用口径为200毫米、焦距为2000毫米的望远镜，接上某品牌数码单反相机拍摄，请问：

1) 该品牌数码相机采用高灵敏度、高分辨率、大型单片式CMOS图像感应器，尺寸为 $22.5 \times 15.0$ 毫米，有效像素820万，我们在取景时能拍下整个月亮吗？为什么？请用必要的数值计算来解释。

2) 相机有每秒5张的高速连拍功能，打开该功能，并且在曝光时间符合要求的情况下，我们最多能拍到几张ISS凌月的图像？

3) 由于ISS的移动速度比较快，我们拍摄时需要考虑它会在照片上拖线，如果我么使用相机M档、1/2500秒的曝光时间，ISS同一位置会在照片中拖线多少个像素？

4) 由于疏忽，我们没有携带为望远镜电跟供电的电源，因此我们只能在没有跟踪的情况下观测，假如我们使用的是1/1000秒的曝光时间，这是否会对我们的观测产生影响？请计算说明。

解答

1) 底片比例尺：

$$\alpha = 206265''/F \approx 103''/\text{mm}$$

CMOS感应器上较短边为15.0mm，对应天空中角距离：

$$15 \text{ mm} \times 103''/\text{mm} = 1545'' = 25.75' < 30'$$

所以不能拍下整个月亮。

2) 感应器长边为22.5mm，对应天空中角距离：

$$22.5 \text{ mm} \times 103''/\text{mm} = 2317.5'' = 38.625' > 30'$$

因此用上述器材我们可以拍摄到ISS凌月的全过程。

在掩食带中心线上ISS划过月面的时间为月球角直径除以ISS移动角速度：

$$t = 30'/46.6('/\text{s}) = 0.64 \text{ s}$$

因为该品牌数码单反相机最快连拍速度为每秒5张(0.2秒一张)，假设可以达到这个理论值，在凌月的0.64秒内可包含3个0.2秒，因此最多能拍到4张ISS凌月图像。

3) 先要根据CMOS的尺寸和像素信息，计算CMOS上每毫米对应多少像素： $22.5 \text{ mm} \times 15.0 \text{ mm} = 337.5 \text{ mm}^2$ ， $\sqrt{8200000/337.5} = 155.87 \text{ pix/mm}$ ，因此，天空中每角秒对应CMOS上的像素数为：

$$\rho = 155.87 \text{ pix/mm} \div 103''/\text{mm} = 1.5 \text{ pix}''/''$$

ISS的移动速度为： $\omega = 46.6'/\text{s} \times 60 = 2796''/\text{s}$ ，所以ISS每秒移动的像素数：

$$m = \omega \times \rho = 2796''/\text{s} \times 1.5 \text{ pix}''/'' = 4194 \text{ pix/s}$$

曝光时间为1/2500秒，一共移动：

$$p = m \times 1/2500 = 4194/2500 = 1.67 \text{ pix} \approx 2 \text{ pix}$$

所以在拍摄的照片上，ISS每个相同位置拖线2像素。

4) 周日视运动导致月球每小时在天空中自东向西移动15°，但每小时又逆向天空背景运动大约30'。因此月球视运动的角速度为：

$$\omega = 15^\circ 30' / 3600 \text{ s} = 14.5''/\text{s}$$

ISS凌月的时间内月球移动：

$$\Delta = \omega \times t \times \rho = 14.5''/\text{s} \times 1.5 \text{ pix}''/'' \times 0.64 \text{ s} = 14 \text{ pix}$$

但每张照片的曝光时间只有1/1000s，这段时间内月球移动的像素为：

$$\Delta' = \omega \cdot t' \cdot \rho = 14.5''/\text{s} \cdot 1.5 \text{ pix}''/'' \cdot 1/1000 \text{ s} \approx 0.02 \text{ pix}$$

可以忽略，不会对我们的观测产生影响。

4、白矮星。一颗白矮星的质量为太阳质量的一半，其表面温度为太阳表面温度的2倍，绝对星等为12等（太阳的绝对星等为4.7等），请估算白矮星的密度。

解答

白矮星的光度为：

$$L = 10^{-0.4 \times (12 - 4.7)} L_\odot \approx 1/830 L_\odot$$

白矮星和太阳都可视为黑体，它们的光度与温度服从斯特藩-玻尔兹曼定律：

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

因此它们的密度：

$$\rho = \frac{M}{V} \sim \frac{M}{R^3} \sim \frac{M \cdot T^6}{L^{3/2}}$$

将白矮星的密度和太阳( $\rho_\odot = 1410 \text{ kg/m}^3$ ,  $T_\odot \approx 6000 \text{ K}$ )相比，可以求出其密度为：

$$\rho = \rho_\odot \cdot \frac{M}{M_\odot} \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^6 \cdot \left(\frac{L_\odot}{L}\right)^{3/2} \approx 1.1 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$$

## 实测试题

亚太天文奥赛组委会 供稿/李鉴、杨轶 翻译、解答

(高年组和低年组)

7. Ia型超新星。天文学家们经常用Ia型超新星来测定遥远星系的距离。2004年，天文学家在旋涡星系NGC6928中发现了一颗超新星SN 2004eo，并对它进行了长达一年多的跟踪观测，他们将它的视星等变化情况列于下表中。

| 观测日期(日/月/年) | 视星等   |
|-------------|-------|
| 19/09/04    | 16.78 |
| 20/09/04    | 16.51 |
| 26/09/04    | 15.56 |
| 28/09/04    | 15.44 |
| 07/10/04    | 15.47 |
| 15/10/04    | 16.02 |
| 23/10/04    | 16.51 |
| 30/10/04    | 16.96 |
| 08/11/04    | 17.42 |
| 18/11/04    | 17.72 |
| 28/11/04    | 17.93 |
| 14/12/04    | 18.35 |

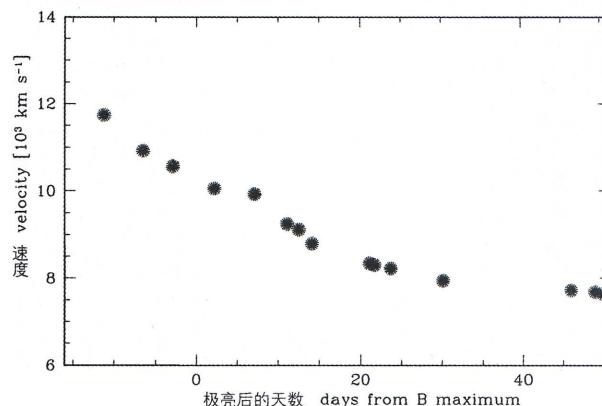
1) 求SN 2004eo爆发后达到极亮的时间，以及极亮时的视星等。

2) Ia型超新星在极亮时的绝对星等几乎都一样，因此它们是非常合适的“标准烛光”，是测量遥远星系的距离的极好观测对象。一名研究生在下表中列出了一些Ia超新星的观测数据，请据此尽可能准确地求出SN 2004eo的距离，并将结果填入表中的空格里。由于疏忽，他在表中混入了一颗II型超新星，把它找出来，并用数值计算说明理由。

| 超新星    | 距离Mpc | 极亮时的视星等 |
|--------|-------|---------|
| 1997cw | 58.2  | 14.6    |
| 1998ab | 98.2  | 15.7    |
| 1999X  | 114.5 | 16.0    |
| 2000cn | 95.5  | 15.6    |
| 2001ba | 134.1 | 16.4    |
| 2002bo | 21.8  | 12.4    |
| 2003du | 38.7  | 13.7    |
| 2004eo |       |         |
| 2005cs | 8.4   | 14.4    |

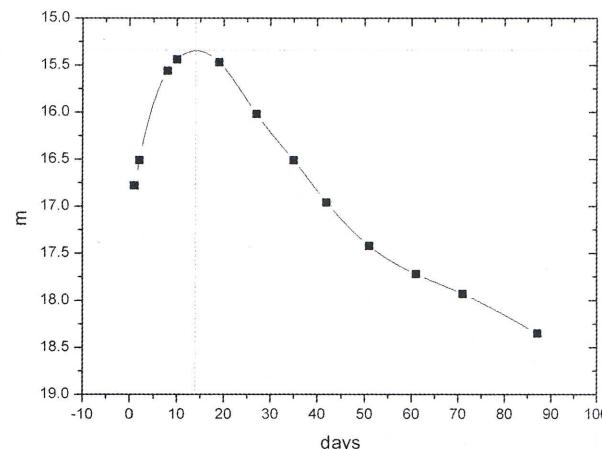
3) 天文学家在不同时间拍摄了SN 2004eo的光谱，他们根据其壳层中硅元素(Si)的吸收谱线得到了壳层的膨胀速率的变化情况，如下图所示，横坐标是B波段星等极亮后的天数。他们发现在超新星极亮前的第11天，壳层的膨胀速率

最大。估算从这时起一直到亮度达到极大的这段时间里，超新星的壳层膨胀了多少千米？



解答

1) 画出超新星的光变曲线如下，横坐标为自2004年9月19日起的天数，曲线为拟合结果。可以从图中读出超新星亮度极大的时间为2004年10月2日，极大视星等为15.3等。



2) 我们可以求出这些超新星的距离模数，然后求出平均值作为标准值，再求2004eo的距离。如下页第一个表所示。计算可知Ia超新星极亮时的绝对星等为：-19.26等，2004eo的距离为：81.7 Mpc。

从极亮时的视星等可以看出，2005cs不是Ia型超新星。

3) 从给出的图中可以看出，超新星的壳层膨胀速度最大为11800km/s，达到极亮时约为10000km/s，这期间速度几乎是匀速递减的，因此总共膨胀的距离为：

$$s = \frac{11800 + 10000}{2} \times 11 \times 24 \times 3600 \text{ km} \approx 1.04 \times 10^{10} \text{ km}$$

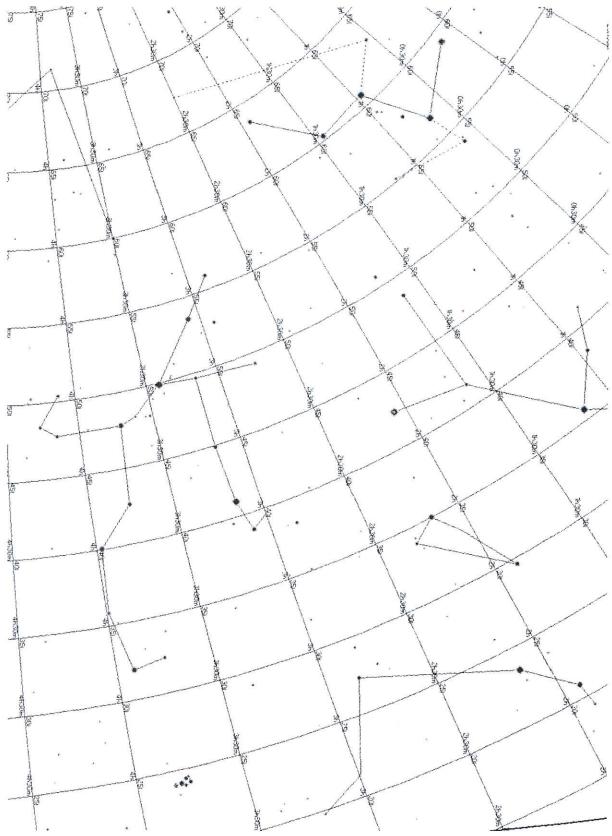
8、想必你一定对17P/Holmes彗星不陌生，你甚至还观测过它。短时间内的增亮使它成为近期我们关注的焦点。它两次过近日点的时间间隔为6.88年。在2007年五月它经过了近日点(见下页的第三个表格)。

1) 请利用下页第二个表格提供的数据在给出的星图(见后页左栏上图)上画出17P/Holmes从2007年9月27日

| 超新星    | 距离Mpc | 极亮时的视星等 | 极亮时的绝对星等 |
|--------|-------|---------|----------|
| 1997cw | 58.2  | 14.6    | -19.22   |
| 1998ab | 98.2  | 15.7    | -19.26   |
| 1999X  | 114.5 | 16.0    | -19.29   |
| 2000cn | 95.5  | 15.6    | -19.30   |
| 2001ba | 134.1 | 16.4    | -19.24   |
| 2002bo | 21.8  | 12.4    | -19.29   |
| 2003du | 38.7  | 13.7    | -19.24   |
| 2004eo | 81.7  | 15.3    | -19.26   |
| 2005cs | 8.4   | 14.4    | -15.22   |

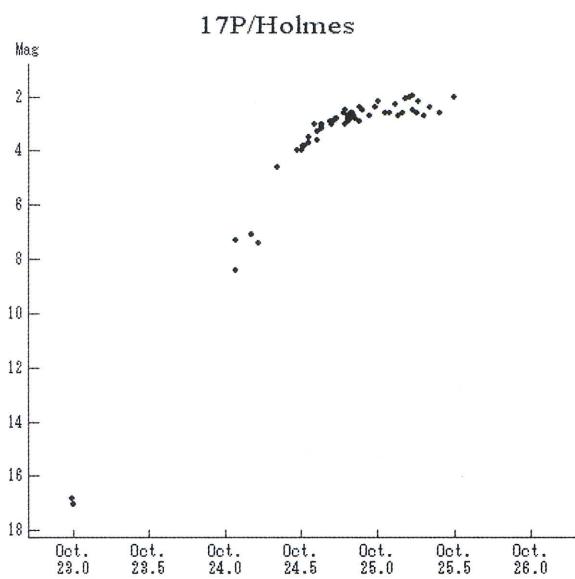
| 日期         | 赤经(历元2000) h m | 赤纬(°)    | 黄纬(°) | 日心距r(AU) |
|------------|----------------|----------|-------|----------|
| 2007 09 27 | 04 01.48       | +46 22.6 | 1.756 | 2.337    |
| 2007 10 02 | 04 02.37       | +47 14.2 | 1.728 | 2.355    |
| 2007 10 07 | 04 02.22       | +48 01.8 | 1.702 | 2.373    |
| 2007 10 12 | 04 01.00       | +48 44.8 | 1.678 | 2.391    |
| 2007 10 17 | 03 58.71       | +49 22.2 | 1.659 | 2.41     |
| 2007 10 22 | 03 55.40       | +49 53.1 | 1.642 | 2.428    |
| 2007 10 27 | 03 51.17       | +50 16.6 | 1.63  | 2.447    |
| 2007 11 01 | 03 46.14       | +50 31.9 | 1.623 | 2.467    |
| 2007 11 06 | 03 40.50       | +50 38.3 | 1.62  | 2.486    |
| 2007 11 11 | 03 34.47       | +50 35.4 | 1.623 | 2.506    |
| 2007 11 16 | 03 28.31       | +50 23.1 | 1.631 | 2.526    |
| 2007 11 21 | 03 22.27       | +50 02.1 | 1.646 | 2.546    |
| 2007 11 26 | 03 16.60       | +49 33.0 | 1.666 | 2.567    |
| 2007 12 01 | 03 11.49       | +48 57.0 | 1.692 | 2.587    |
| 2007 12 06 | 03 07.09       | +48 15.5 | 1.724 | 2.608    |
| 2007 12 11 | 03 03.53       | +47 29.9 | 1.761 | 2.628    |
| 2007 12 16 | 03 00.88       | +46 41.7 | 1.805 | 2.649    |
| 2007 12 21 | 02 59.17       | +45 52.3 | 1.854 | 2.67     |
| 2007 12 26 | 02 58.38       | +45 02.9 | 1.908 | 2.692    |
| 2007 12 31 | 02 58.47       | +44 14.5 | 1.967 | 2.713    |
| 2008 01 05 | 02 59.41       | +43 28.0 | 2.03  | 2.734    |
| 2008 01 10 | 03 01.13       | +42 43.8 | 2.097 | 2.755    |
| 2008 01 15 | 03 03.59       | +42 02.5 | 2.168 | 2.777    |
| 2008 01 20 | 03 06.71       | +41 24.3 | 2.242 | 2.798    |
| 2008 01 25 | 03 10.44       | +40 49.2 | 2.319 | 2.82     |
| 2008 01 30 | 03 14.71       | +40 17.3 | 2.399 | 2.842    |
| 2008 02 04 | 03 19.47       | +39 48.4 | 2.48  | 2.863    |

| 日期         | 赤经(J2000)   | 赤纬         | 黄纬     | 日心距      |
|------------|---|------------|--------|----------|
| 2007 05 04 | 00 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 52.2 <sup>s</sup> | +07°54'03" | 2.772° | 2.053 AU |



至2008年2月4日走过的轨迹。

2) 下图给出了17P在很短时间里的光变曲线 (或许我们可以认为它出人意料的增亮是由于生活在木星卫星上的外星人制造的爆炸导致的)。为了测量这个突然增加的亮度, 请从图中选择相应的数据, 以给出这颗彗星的极大光度与极小光度的最准确比值。请在图上画出相应的线条以说明你的估算过程。



3) (低年组) 彗星的远日距是多少? 太阳系的8颗行星中有哪些可能影响到17P/Holmes的轨道运动? 用一张表解释

你的结论, 将每颗行星可能对彗星产生的影响列于其中。如果有可能有影响, 标上YES, 否则标上NO。

3) (高年组) 如果有一颗假17P/Holmes, 与17P/Holmes有相同的半长径 ( $a$ ) 和偏心率 ( $e$ ), 且无论何时观测, 它的黄纬总是 $0^\circ$ 。在2007年11月21日晚我们观测假17P/Holmes, 此时它的黄经和17P/Holmes的黄经相等。请估算此时假17P/Holmes与地球的距离。

已知: (a) 假17P和17P同时过近日点; (b) 你可以用到以下公式:  $\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha$ ,  $\cos \beta \sin \lambda = \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha$ , 其中  $\lambda$  为天体的黄经,  $\beta$  为天体的黄纬,  $\alpha$  为天体赤经,  $\delta$  为天体赤纬,  $\varepsilon$  为黄赤交角。

### 解答

1) 根据给出的表中的赤经、赤纬数据, 在星图上画出路径即可。

2) 可以从所给的彗星光变曲线图中选取Oct.25.0到Oct.25.5区间的点, 求其平均值作为最亮时的光度, 取Oct.23.0附近的两个点取平均值作为最暗时的光度。由图中量出各值为:  $M_{max} = 2.6$ ,  $M_{min} = 16.9$ , 由:

$$M_{max} - M_{min} = -2.5 \lg \frac{L_{max}}{L_{min}}$$

可得:

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} = 10^{5.7} \approx 500000$$

3) (低年组) 由开普勒定律  $a^3/T^2=1$ ,  $T = 6.68$  年, 可以算出17P的轨道半长径为:  $a = 3.617$  AU。从本题所给的第二个表可知, 它的近日距为  $r = 2.053$  AU, 因此轨道偏心率为:

$$e = 1 - r/a = 0.4324$$

远日距为:

$$r' = a(1 + e) = 5.181 \text{ AU}$$

也可以按下式求:

$$r' = 2a - r = 5.181 \text{ AU}$$

根据行星数据表中的数据, 按照行星轨道半径来判断是否可能对17P的公转轨道产生影响。只要行星与彗星可能靠得很近, 就有可能对它的轨道产生影响。

| 行星  | 轨道半径 (AU) | 是否影响 |
|-----|-----------|------|
| 水星  | 0.38      | 无    |
| 金星  | 0.72      | 无    |
| 地球  | 1.0       | 无    |
| 火星  | 1.5       | 有    |
| 木星  | 5.2       | 有    |
| 土星  | 9.54      | 无    |
| 天王星 | 19.2      | 无    |
| 海王星 | 30        | 无    |

4) (高年组) 由开普勒定律  $a^3/T^2 = 1$ ,  $T=6.68$  年, 可

以算出真假17P的轨道半长径都是3.617AU。从第一个表中可知11月21晚真17P的赤经、赤纬值为 $3^h 22.7^m$ 、 $50^\circ 02.1'$ ，利用已知公式并取黄赤交角 $\varepsilon = 23^\circ 26' = 23.43^\circ$ ，可以得到真17P的黄经为： $\lambda = 58.07^\circ$ ，这也就是假17P当时的黄经。

由于真假17P同时过近日点且轨道半长径和偏心率相同，因此在同一时刻，二者与太阳的距离( $r$ )也相同。由第一个表查得11月21日： $r=2.546$  AU。

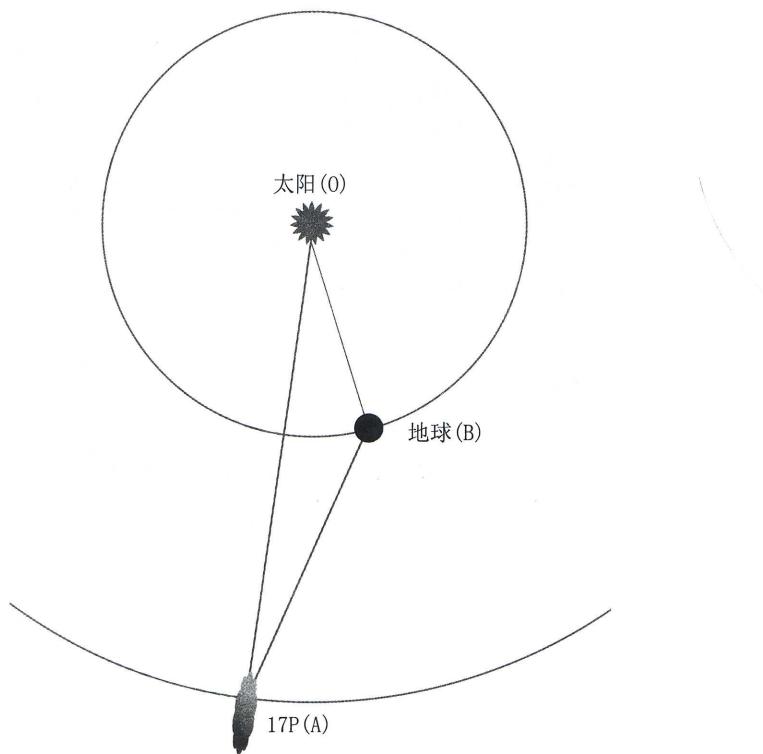
11月21日，太阳的黄经近似为：

$$\lambda_{\odot} = 360^\circ - \Delta t_{3月22-11月2日} \times 360^\circ / 365.2422 = 239.75^\circ$$

如下图所示，B表示地球，A表示假17P。在三角形AOB中：

$$\angle ABO = \lambda_{\odot} - \lambda = 239.75^\circ - 58.07^\circ = 181.67^\circ$$

$OA = 2.546$  AU,  $OB = 1$  AU, 解三角形AOB, 可得 $AB = 1.546$  AU。



# 2009年第五届亚太天文奥林匹克竞赛试题

## 理论试题

亚太天文奥赛组委会 供稿/李鉴 翻译/王燕平 译解

比赛地点：韩国 光州

### 低年组

1、大气折射。地平附近的大气折射角为 $35'$ ，求，在北极点冰层之上的北极熊，达到多大的高度时，能看到全部的赤道？答案必须包括一张冰面上的北极熊图片，并标出必要的尺寸和角度。

解答

在北极冰层上的北极熊，在到达高度为 $H$ 的某一点时，能够看到全部的赤道。如果没有大气折射，这样的点是不存在的。在考虑折射的情况下：

$$R = (H + R) \tan 35'$$

其中 $R$ 为地球半径。因此：

$$H = \frac{R}{1/\tan 35' - 1} \approx 97.2R = 620000 \text{ km}$$

2、晨昏蒙影。“昏影”（evening twilight）指的是太阳完全落山，但它的中心仍在地平线下 $6^\circ$ 之内的这段时间。估计在北极生活的北极熊所见到的“昏影”持续时间。在什么日子，北极熊能看到昏影现象？答案必须包括一张北极熊在北极的图片，并标出必要的尺寸和角度。

解答

地平附近的大气折射角为 $35'$ 。人们看到太阳完全落山时，它的中心实际已低于地平线 $35' + 16' = 51'$ 。昏影指的是太阳已完全落山但它的中心仍在地平线下 $6^\circ$ 以内。昏影持续的时间，就是太阳高度在 $-51'$ 到 $-6^\circ$ 之间的时间。对于赤道以及大部分非极区，日出日落每天都在发生，但对于北极来说，一年大约持续半年极昼半年极夜，与其说晨光和昏影，不如用“春”和“秋”取代“晨”和“昏”。

在北极，太阳中心的地平高度等于太阳的赤纬。太阳赤纬变化的速度，取决于两个因素：太阳沿着黄道运行的速度，太阳沿黄道运行路线与地平所成的角度。太阳沿着黄道运行的速度为 $360^\circ / 365.25 \text{ 天} = 0.986^\circ \text{ 天}$ 。

当在北极看到昏影时，太阳运行的路线与地平所成的角度近似等于黄赤交角 $\varepsilon$ 。因此，太阳赤纬的变化速度等于：

$$0.986^\circ \times \sin \varepsilon = 0.392^\circ / \text{天}$$

$6^\circ - 51' = 5^\circ 09'$ ，所以昏影的持续时间为： $5^\circ 09' / 0.392^\circ / \text{天} = 13.14 \text{ 天} \approx 13 \text{ 天}$ 。

因此，在北极能观测到昏影的时间段为：秋分之后 $51' / 0.392^\circ / \text{天} \approx 2 \text{ 天}$ ，到 $6^\circ / 0.392^\circ / \text{天} \approx 15 \text{ 天}$ ，也就是9月25日～10月8日。

3、日历。在中世纪使用最广泛的是儒略历。目前多数国家都使用格里高利历，二者相差13天：即在20和21世纪，对同一个日子，儒略历比格里高利历落后13天。两种历法上一次日期相同的情况发生在公元3世纪。

计算在哪一个世纪，这种差别会导致季节反转？也就是说，例如，目前格里高利历中的10月9号会成为儒略历中的4月9号？请考虑所有的可能性。

解答

根据常识，每四个世纪，儒略历就会比格里高利历落后3天。10月9号与4月9号的差别为： $30+31+30+31+31+30=183$ 天。格里高利历和儒略历要想相差如此之多，需要 $183 \times 4/3 = 244$ 个世纪。因此，要想发生季节反转这种情况，将会是 $3 + 244 = 247$ 世纪的事。

但这并不是唯一的可能，并不是只有183天的差别会导致季节反转。 $183 + 365 \times N$ （ $N$ 为整数）也会，相应地，儒略历与格里高利历的差别为：

$$(183 + 365 \cdot N) \times 4/3 = 244 + 486.66 \cdot N \text{ 世纪}$$

所以，要想发生季节反转，将会发生在 $247 + 486.66 \cdot N$ 世纪。

4、卫星。在8月1日，俄罗斯远东时间夏令时12点（世界时+11:00），在Ussurijsk（北纬44度，东经132度，第二届APAO曾参观过这里的天文台）上空看到一颗人造卫星，同一天，中国的乌鲁木齐（北纬44度，东经87度）在北京时间12点（东八区）也看到了这颗卫星。

在哪个地区（或者是小镇或者是天文台），将会比乌鲁木齐晚3小时看到卫星？哪个地区会晚4.5小时看到卫星？他们看到卫星时的当地时间和日期是多少？考虑所有的可能性。已提供一张粗略的时区图，覆盖了北纬75度～南纬45度的区域（此图从略——编者）。

解答

乌鲁木齐和Ussurijsk的经度之差为45度，等于地球在3小时内的自转角度，而卫星经过这两个地方的时间差也是3小时，因此卫星的绕转周期必定能被3整除。只有两种可能：3小时和1.5小时，因为地球卫星的绕转周期不可能小于84分钟（1.4小时，可以根据开普勒第三定律与逃逸速度推出）。

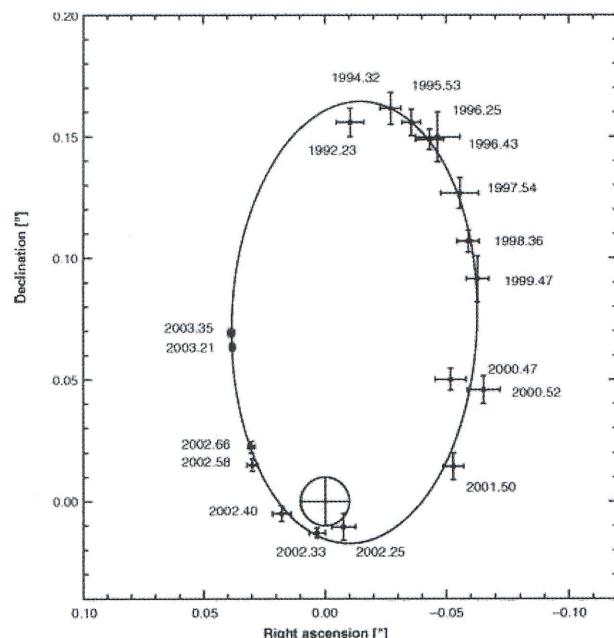
卫星周期为3小时时：世界时7:00，它将位于北纬44度、东经42度处的上空，当地时间为8月1日上午10点；世界时8:

30, 它将位于南纬44度、西经260.5度处的上空, 当地时间为8月1日上午9:30。

卫星周期为1.5小时: 世界时7: 00, 它将位于北纬44度、东经42度处的上空, 当地时间为8月1日上午10点; 世界时8: 30, 它将位于北纬44度、东经19.5度处的上空, 当地时间为7月31日晚上21: 30。

注: 这颗卫星不一定是极轨卫星, 感兴趣的同学不妨计算一下它的轨道面与地球自转轴的可能夹角。

5、人马座A\*。下图是一颗恒星围绕一个天体公转的轨道, 该天体用⊕表示, 它离太阳大约8kpc远。横轴是赤经, 纵轴是赤纬, 轨道上的数值是观测的日期, 已按十进制归算成了年。轨道长轴与视线方向的夹角为45度。



- 1) 在轨道上标出“近星点”(perihelion)的大概位置。
- 2) 确定恒星的轨道周期, 以年为单位, 精确到小数点后一位。

3) 确定中心天体的质量, 以太阳质量为单位。

**解答** 1) 因为轨道有倾角, 所以近星点不在椭圆主轴上, 而是在大约2002.33那一点。

2) 远星点位于从近星点沿着Sgr A\*对称的方向。从近星点画一条线经过Sgr A\*的区域和椭圆中心, 这条线将与1995.6yr那一点相交。所以2002.3年与1995.6年之间的间隔就是轨道周期的一半。因此, 恒星的轨道周期为 $T = 2 \cdot (2002.3 - 1995.6) = 13.4$ 年。

3) 我们需要用开普勒第三定律推导天体的质量。已知轨道周期, 只需算出恒星椭圆轨道半长径 $a$ 的数值即可。从图中测得椭圆长轴( $2a$ )的长度为97mm。图中, 0.1秒对应55mm。因此,  $2a \times \cos 45^\circ = 0.176''$ , 其中乘以 $\cos 45^\circ$ 是为了修正轨道平面的倾角。

假设太阳距离这个天体8kpc远, 轨道长轴的长度为:

$$2a = 0.176'' / \cos 45^\circ \times 8\text{kpc} \times (\text{AU}/\text{pc} \times 1'')$$

可以求出轨道半长轴为:  $a = 1000\text{AU}$ 。



根据开普勒第三定律, 易于求出半人马A\*的质量为 $5.7 \times 10^6 M_{\odot}$ 。

6、日环食。观测到一次日环食, 太阳的角直径 $d_s = 32'13''$ , 月亮的角直径 $d_M = 31'49''$ , 请问太阳可见环状部分的星等为多少? 忽略临边昏暗效应, 即认为太阳圆面的亮度处处相同。

**解答**

让我们先来计算一下, 日环食发生时, 发光的亮环与整个日面面积的比例:

$$s_1/s_0 \approx 1/40$$

考虑到整个盘面的亮度是常数, 光流量的减少也是相同的。因此:

$$\Delta m = -2.5 \lg(1/40) = -4$$

环食时太阳视圆面的星等为:  $-26.8 + 4 = -22.8$ 等。

## 高年组

1、引力红移。由于光子的引力势能减少而导致的波长变化 $z = \Delta\lambda/\lambda$ , 称为引力红移。估算, 在无穷远处观测, 韩国光州(即本次考试所在地)的街灯所发出的光线的引力红移是多少? 退行(或接近)速度为多少的天体, 其宇宙学红移或多普勒红移能与上面求出的引力红移大小相等?

**解答**

根据经典理论, 光子的能量 $E = mc^2$ , 其中 $m$ 为光子质量,  $c$ 为光速。一个光子的引力势能减少量为

$$\Delta E = -\frac{GMm}{R}$$

其中 $G$ 为引力常量,  $M$ 为地球质量,  $R$ 为地球半径。

据光的量子理论,  $E = h\nu = hc/\lambda$ , 当红移很小时,

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta E}{E}$$

所以在无穷远处观测, 光州的街灯所发出的光线的引力红移为:

$$z = -\frac{\Delta E}{E} = \frac{GMm/R}{mc^2} = \frac{GM}{Rc^2} = 6.9 \times 10^{-10}$$

一个退行的天体要产生如此大小的红移, 则它的退行速度是:

$$v = c \cdot z = 6.9 \times 10^{-10} \times 3 \times 10^8 = 20.7 \text{ cm/s}$$

注: 这个答案没有考虑太阳的引力影响, 而实际上, 太阳所导致的引力红移为:

$$\frac{z_{\odot}}{z_{\oplus}} = \frac{M_{\odot}R_{\oplus}}{M_{\oplus}d_{\odot-\oplus}} = 3.3 \times 10^5 \times 4.2 \times 10^{-5} = 13.8$$

即 $z_{\odot} = 13.8z_{\oplus}$ , 不可忽略。

另外, 还有许多学生发现退行速度 $v$ 只有20.7 cm/s, 于

是就认为“situation is impossible”（这种情况不可能发生），而事实上，这里推导的公式仅仅在红移很小的情况下适用，这个结果不仅自洽，而且是合理的，例如一些邻近的恒星，视向速度完全可以只有几十厘米/秒的量级（尽管它不是宇宙学红移）。反之，如果求出的 $z$ 和 $v$ 很大，这个红移公式反而不适用了。

3、晨昏蒙影。晨昏蒙影是指太阳已经完全落下或还没有升起，但它的中心距离地平线不超过 $\zeta^\circ$ 的这段时间。人们通常定义 $\zeta = 6^\circ$ 为民用晨昏蒙影， $\zeta = 12^\circ$ 为自然晨昏蒙影， $\zeta = 18^\circ$ 为天文晨昏蒙影。但北极熊决定介绍两种新的晨昏蒙影， $\zeta = 45'$ 和 $\zeta = 1^\circ 30'$ 。对生活在赤道的鳄鱼和生活在北极点的北极熊（在之前的大气折射题目中曾出现过），分别计算这两种晨昏蒙影会持续多久？在什么日子里，北极熊会看到它所定义的“昏影”？答案必须包括一张鳄鱼在赤道上和北极熊在北极点的图片，并标出必要的尺寸和角度。

**解答** “晨昏蒙影”是指太阳已经完全落下或者还没有升起，但它的中心距离地平线不超过 $\zeta$ 的时间段。北极熊定义的新的晨昏蒙影， $\zeta = 45'$ 和 $\zeta = 1^\circ 30'$ 。

考虑到大气折射在地平附近为 $35'$ ，而且太阳的视半径为 $16'$ ， $\zeta = 45'$ 这个定义是没有意义的，因为无论在北极还是赤道，当太阳的中心低于地平 $45'$ 的时候，太阳还没有落山（或者已经升起了，太阳完全落山时其中心的地平高度为 $-51'$ ）。应在答卷上写明：situation is impossible。

$\zeta = 1^\circ 30'$ 时，曙昏影是可能的。这种新的曙昏影持续的时间是当太阳中心的地平高度为 $-51'$ 到 $-1^\circ 30'$ 这段范围内时（运行的角度为 $1^\circ 30' - 51' = 39'$ ）。

在赤道地区，日出和日落每天发生，且太阳以垂直地平的方向落下，因此太阳周日运动的角速度为 $360^\circ/\text{天} = 1^\circ/\text{4分钟}$ ，因此新的昏影持续的时间是：

$$39' / (1^\circ / 4\text{m}) = 2^m 36^s$$

然而，在北极的情况是不同的，一年大约持续半年极昼半年极夜，与其说晨光和昏影，不如用“春”和“秋”取代“晨”和“昏”。在北极，太阳中心的地平高度等于太阳的赤纬。昏影持续的时间，就是太阳高度在 $-51'$ 到 $-1^\circ 30'$ 之间的时间。太阳赤纬变化的速度，取决于两个因素：太阳沿着黄道运行的速度，太阳沿黄道运行路线与地平所成的角度。太阳沿着黄道运行的速度为 $0.986^\circ/\text{天}$ 。

当在北极看到昏影时，太阳运行的路线与地平所成的角度近似等于黄赤交角 $\varepsilon$ ，太阳赤纬的变化速度为 $0.392^\circ/\text{天}$ ，昏影的持续时间为 $39'/0.392^\circ/\text{天} = 1.66\text{天} \approx 1\text{天}16\text{小时}$ 。因此，在北极能观测到昏影的时间段为：秋分之后 $51'/0.392^\circ = 2.2\text{天} \approx 2\text{天}$ ，到 $1^\circ 30'/0.392^\circ = 3.83\text{天} \approx 4\text{天}$ 。秋分近似为9月23日，所以在北极能观测到昏影的时间段近似为9月25日至9月27日。

3~5、同低年组。

6、日环食。第一问同低年组。如果所有的行星仅被这样一个日环而不是一个完整的太阳所照耀，那么地球上的温度将会是多少？此时的地球将与太阳系中的什么天体类似？

### 解答

1) 同低年组。

2) 温度由地球接收到的光辐射与自身辐射出去能量的平衡决定。根据斯特藩波尔兹曼定律，绝对温度为 $T$ 的黑体单位面积在单位时间内向空间各方向辐射出的总能量为 $\sigma T^4$ 。入射的能量减少了40倍，即：

$$E_1 = \frac{E_0}{40}, T_1^4 = \frac{T_0^4}{40}, T_1 = \frac{T_0}{2.5} \approx 116 \text{ K}$$

很容易算得，这样的温度很可能发生在太阳系中距离太阳 $2.5^2 \text{ AU} \approx 6 \text{ AU}$ 远的天体上，此时的地球与太阳系中的小行星或者木星的卫星类似。

## 实测试题

亚太天文奥赛组委会 供稿/李鉴 翻译、解答

### 低年组

1、造父变星。在韩国的Sobek山天文台，我们用一架口径60cm的望远镜观测到了一颗造父变星在V波段的视星等变化。观测到的星等 $m_v$ 和相应的儒略日列于下表中。

| $m_v$ | JD    | $m_v$ | JD    |
|-------|-------|-------|-------|
| 4.74  | 405.3 | 4.95  | 408.7 |
| 5.05  | 409.9 | 5.28  | 411.6 |
| 5.66  | 414.2 | 6.00  | 415.9 |
| 6.09  | 416.6 | 5.99  | 420.4 |
| 5.20  | 423.4 | 4.73  | 425.6 |
| 4.83  | 429.8 | 4.88  | 431.0 |
| 5.20  | 434.0 | 5.43  | 435.6 |
| 5.48  | 436.4 | 5.80  | 438.2 |
| 6.15  | 440.7 | 6.13  | 443.3 |
| 5.54  | 444.9 | 5.05  | 447.0 |

1) 以儒略日为x轴，画出该星的光变曲线（即视星等随时间的变化曲线）。

2) 确定出它的光变周期。

3) 以“相位”(phase)为横坐标，画出光变曲线。相位即从光变开始到某个光变时刻所经历的时间，在一个光变周期中所占的比例。

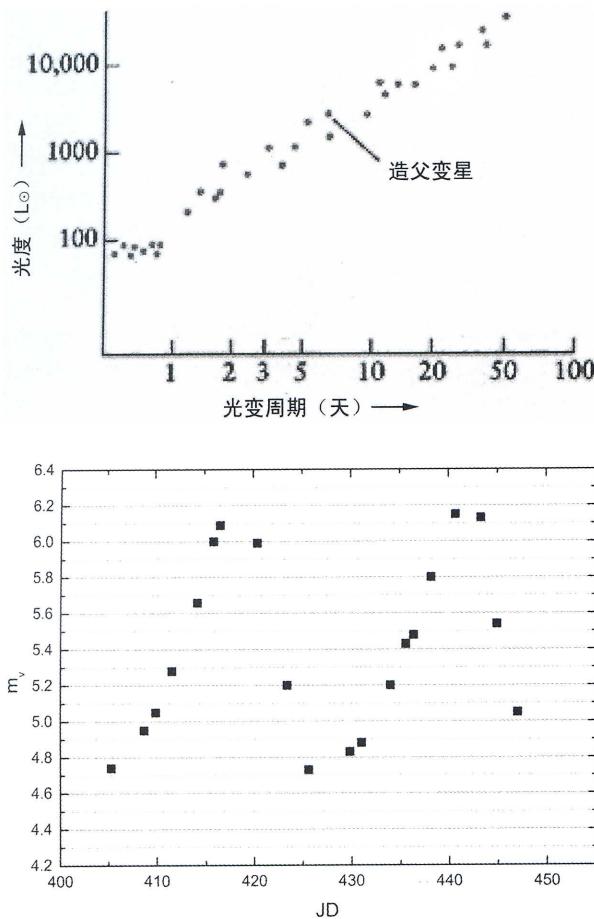
4) 根据所给出的造父变星周光关系图（下页左上图），确定这颗变星的光度。图中所给的光度是以太阳光度为单位的。

5) 已知太阳的绝对星等 $M = 4.7$ 等，求该变星的距离。忽略星际消光。

### 解答

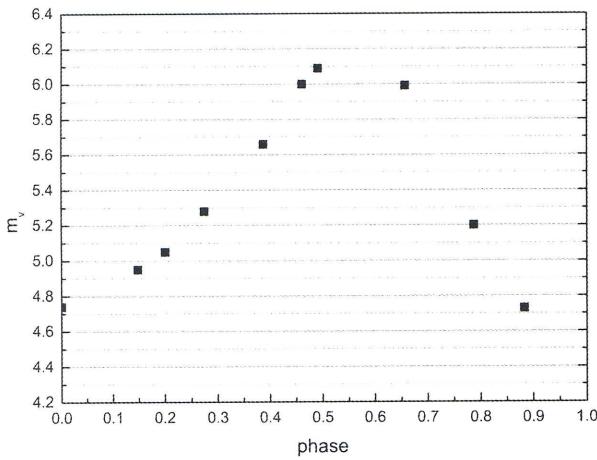
1) 这颗造父变星的光变曲线如下页左中图所示。

2) 从光变曲线图上可以量出它的光变周期约为 $P =$



23天。

3) 以相位为横坐标的光变曲线图如下图所示, 0所对应的日期为儒略日405.3天。相位的变化为从0到1。



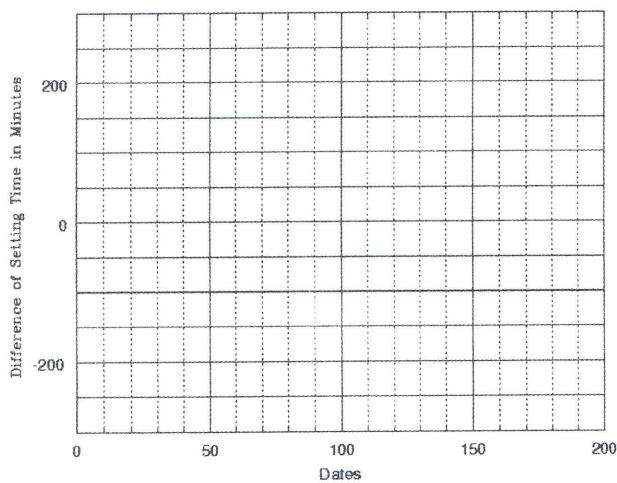
4) 根据所给的造父变星周光关系图, 可以量出周期为23天的造父变星的平均光度约为 $10^4 L_\odot$ 。

5) 太阳的绝对星等为4.7等, 这颗造父变星的平均光度为 $10^4 L_\odot$ , 可以求出它的平均绝对星等约为 $M_v = -5.3$ 等, 平均视星等可以根据所给的表求出, 约为5.4等, 因此根据 $m - M_v = 5 \lg d - 5$ , 这颗变星的距离约为:  $d = 1380$  pc。

2、金星。下表给出的是2009年太阳和金星在韩国Sobeak山落下的时间。

| 日期     | 落山时间  |       |
|--------|-------|-------|
|        | 太阳    | 金星    |
| 1-Jan  | 17 20 | 21 04 |
| 11-Jan | 17 29 | 21 19 |
| 21-Jan | 17 39 | 21 30 |
| 31-Jan | 17 50 | 21 37 |
| 10-Feb | 18 01 | 21 37 |
| 20-Feb | 18 11 | 21 30 |
| 2-Mar  | 18 21 | 21 09 |
| 12-Mar | 18 30 | 20 30 |
| 22-Mar | 18 40 | 19 31 |
| 1-Apr  | 18 48 | 18 20 |
| 11-Apr | 18 57 | 17 17 |
| 21-Apr | 19 06 | 16 32 |
| 1-May  | 19 15 | 16 05 |
| 11-May | 19 24 | 15 51 |
| 21-May | 19 32 | 15 47 |
| 31-May | 19 39 | 15 49 |
| 10-Jun | 19 45 | 15 56 |
| 20-Jun | 19 49 | 16 05 |
| 30-Jun | 19 50 | 16 17 |

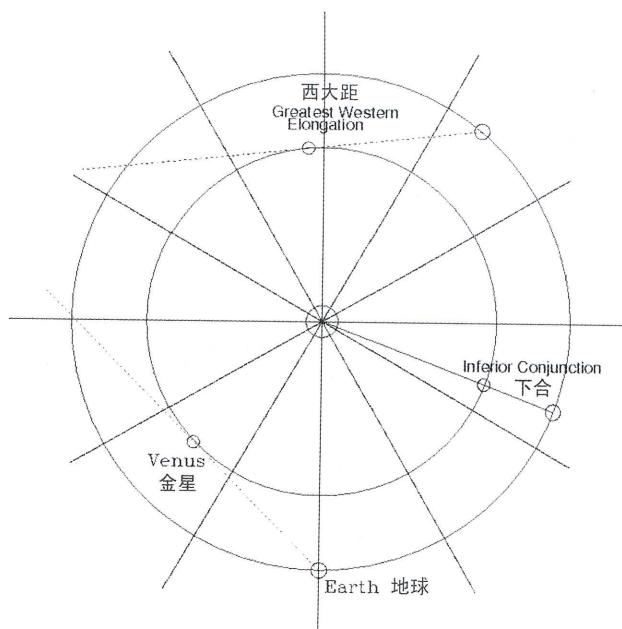
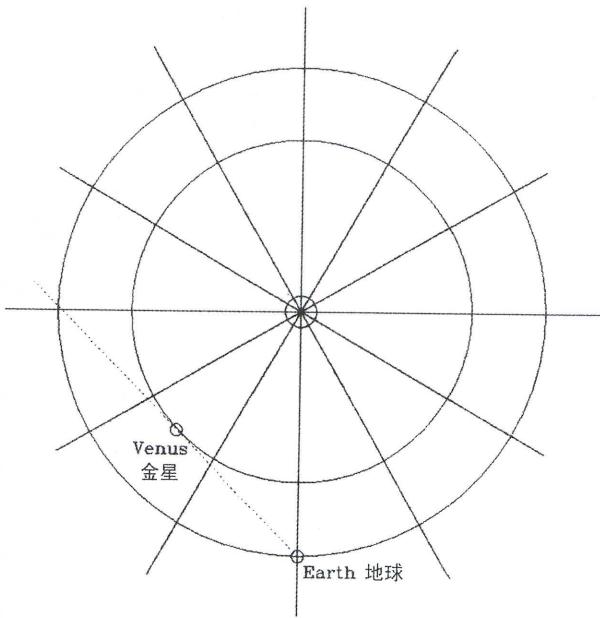
1) 利用表中的数据, 用图解法(见下图)求出西大距、东大距和金星下合的日期。



2) 下页左上图显示的是地球和金星的轨道(假定轨道均为圆形)。图中标出的是金星位于东大距那天的位置, 请利用所给的表中的数据, 标出西大距那天金星和地球所处的位置。

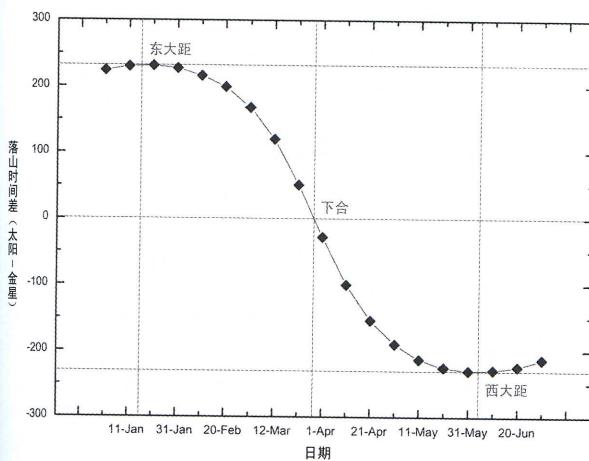
### 解答

1) 将题干所给的表格中的数据标在图中后, 以日期为横坐标, 金星、太阳的落山时间之差为纵坐标, 可



以通过数据点拟合出一条曲线，然后找出东西大距和下合的日期，如下图所示。

金星西大距时，地球观测者看到它位于太阳的西边，金星的落山时间比太阳早，且落山时间之差达到最大值，因此金星西大距的时间是：6月6日。同理可知，金星东大距的时间为：1月15日。在下合日，金星与太阳同时落山，落山时间之差为0，可以从图中读出这天的日期为：3月28日。



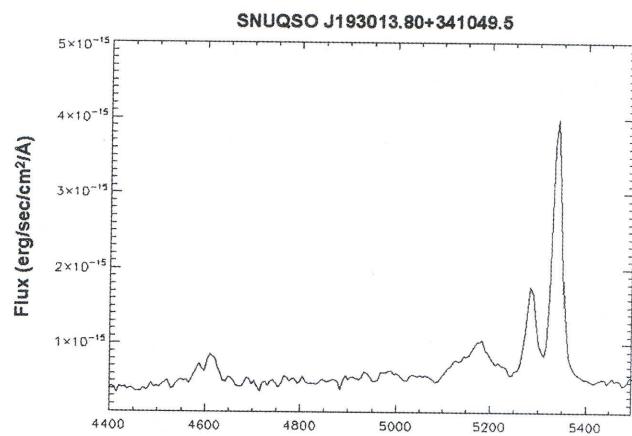
2) 从1月15日到6月6日相隔141天，这期间地球公转走过的角度为：

$$141 \times 365^\circ / 360 = 143^\circ$$

金星西大距时，在地球上的观测者看来，金星在太阳的西边 $48^\circ$ 左右，此时地球-金星连线正好与金星的公转轨道相切，根据这些结论，不难画出地球与金星的相对位置，如下图所示。

## 高年组

1、类星体。首尔国立大学亮类星体巡天组使用Bohyunsan光学天文台的1.8米望远镜，获得了类星体SNUQSO J193013.80+341049.5的光谱（即辐射流量随波长的分布图，波长的单位为埃，见下图）。求：

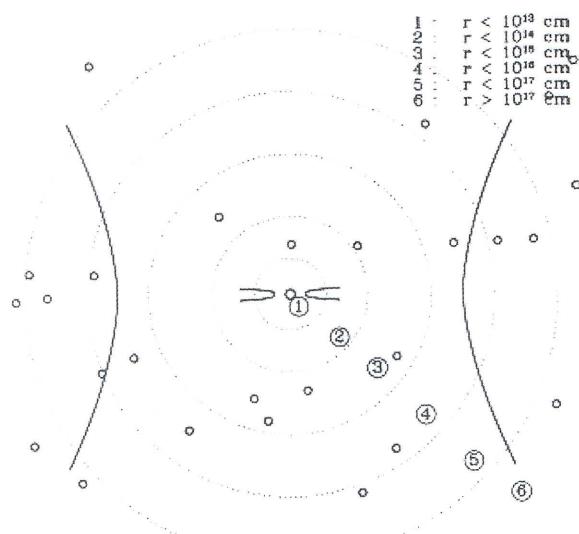


1) 下表列出的是类星体中的一些比较明显的发射线的中心波长的实验室数值。根据表中的数据证认出相应的发射线标于图上，并求出这个类星体的红移。

| Atomic Species | Central wavelength in Å | Transition |
|----------------|-------------------------|------------|
| H alpha        | 6563                    | E-1        |
| O III          | 5007                    | M-1        |
| O III          | 4959                    | M-1        |
| H beta         | 4861                    | E-1        |
| H gamma        | 4340                    | E-1        |

2) 测量出H $\beta$ 线和[O III]5007埃线的半高全宽 (the Full Width at Half Maximum, FWHM), 即流量为极大值一半处谱线的宽度, 并求出谱线宽度所对应的环绕速度 (km/s)。注意仪器所能测量的FWHM所对应的环绕速度的最小值为1500km/s (这就是所谓“光谱分辨率”)。造成谱线有宽度的原因, 是因为发出谱线的气体云正在环绕类星体中心的超大质量黑洞做圆周运动。

3) 下图是类星体模型的示意图, 中心的圆是超大质量黑洞, 旁边代表吸积盘, 黑洞正从中吸积物质。如果中心黑洞的质量为 $10^8$ 倍太阳质量, 在图中标出发射出H $\beta$ 线和[O III]5007埃线的气体云所占据的区域。



### 解答

1) 从光谱图上可以量出各个发射线的波长, 对H $\alpha$ 线:  $1+z = 5180/4861 = 1.066$ ; 对OIII[4959埃]线:  $1+z = 5280/4959 = 1.065$ ; 对OIII[5007埃]线:  $1+z = 5335/5007 = 1.066$ 。因此该类星体的红移为:

$$z = \frac{0.066 + 0.065 + 0.066}{3} \approx 0.066$$

2) 从给出的光谱图上可以量出H $\beta$ 线 (观测到的中心波长为5180埃) 的半高全宽为: 120埃, 对应的环绕速度为:

$$v = c \times z = c \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = c \times \frac{120}{5180} = 6900 \text{ km/s}$$

由于光谱仪的光谱分辨率为1500 km/s, 也就是说即使气团的环绕速度为0km/s, 这条谱线也仍然会有一个宽度, 这是由光谱分辨率决定的 (易于算出1500km/s对应的谱线FWHM为26埃)。所以气团的实际环绕速度应该比测量出的速度小, 应该对测量值做出相应的修正, 而这种修正需要用到高等数学上的卷积, 比较复杂。这里我们可以假设谱线的轮廓为高斯轮廓, 并根据高斯分布的可加性来进行估算 (高中生不必掌握), 气团的实际环绕速度为:

$$v = \sqrt{6900^2 - 1500^2} = 6700 \text{ km/s}$$

同理可得发射出[OIII 5335埃]的谱线的气团的环绕速度为: 800 km/s。

注: 所谓光谱, 就是天体的辐射流量随波长的分布, 而光谱分辨率, 指的是光谱仪能将光谱分开的程度, 通常定义为:

$$R = \lambda / \Delta\lambda$$

这里的 $\lambda$ 是某一个波长值,  $\Delta\lambda$ 是光谱仪在这个波长处能分辨的两条光谱的最小波长间隔。例如美国的哈勃空间望远镜照相光谱仪能在1000纳米的波长处分辨出0.17纳米间隔的两条光谱, 那么它的光谱分辨率就是 $1000/0.17 \approx 5900$ 。在实际科研工作中, 光谱分辨率也常常用速度来表示, 记为通过多普勒效应所能分辨出的最小的速度间隔:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{1}{z} = \frac{c}{\Delta v}$$

$c$ 为光速,  $\Delta v$ 即为光谱分辨率, 对上例,

$$\Delta v = \frac{c}{R} = c \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 51 \text{ km/s}$$

3) 根据圆轨道运动规律和牛顿运动定律

$$M = v^2 \cdot R/G$$

所以 $R = GM/v^2$ 。可以求出对H $\beta$ 线和[OIII 5335埃]线, 气团的轨道半径分别为:  $3 \times 10^{16}$  cm和 $2 \times 10^{18}$  cm, 所对应的区域为图2上的5和6。

2、疏散星团。下表示Bohyunsan天文台获得的一个疏散星团的测光数据。

| B-V    | $m_v$  | B-V    | $m_v$  |
|--------|--------|--------|--------|
| -0.061 | 8.71   | -0.15  | 7.712  |
| -0.093 | 7.394  | -0.117 | 6.516  |
| -0.145 | 8.03   | -0.059 | 8.202  |
| -0.182 | 7.276  | -0.072 | 8.044  |
| -0.063 | 6.874  | -0.11  | 7.862  |
| -0.135 | 7.653  | -0.076 | 7.49   |
| -0.198 | 5.447  | -0.084 | 8.036  |
| 1.642  | 4.816  | -0.12  | 8.042  |
| 0.065  | 9.757  | 0.149  | 10.244 |
| 0.3    | 10.931 | 0.417  | 11.633 |
| 0.4    | 11.334 | 0.061  | 9.763  |
| 0.426  | 11.631 | 0.151  | 10.308 |
| 0.222  | 10.535 | 0.017  | 9.61   |
| 0.161  | 10.198 | 0.29   | 10.863 |
| 0.336  | 11.281 | 0.199  | 10.527 |
| 0.069  | 9.891  |        |        |

1) 根据表中给出的B-V色指数和V星等 ( $m_v$ ) 数据, 画出色指数-星等图, 这些数据已经经过了消光改正。

2) 根据星团赫罗图中的“零龄主序” (Zero Age Main Sequence, ZAMS) 求出该星团的距离。零龄主序上的绝对星等

| B-V    | M <sub>v</sub> (ZAMS) | B-V    | M <sub>v</sub> (ZAMS) |
|--------|-----------------------|--------|-----------------------|
| -0.29  | -3.0                  | -0.277 | -2.5                  |
| -0.26  | -2.0                  | -0.24  | -1.5                  |
| -0.22  | -1.0                  | -0.2   | -0.5                  |
| -0.175 | 0.0                   | -0.138 | 0.5                   |
| -0.1   | 1.0                   | -0.045 | 1.5                   |
| 0.04   | 2.0                   | 0.1    | 2.25                  |
| 0.165  | 2.5                   | 0.27   | 3.0                   |
| 0.37   | 3.5                   | 0.415  | 3.75                  |
| 0.46   | 4.0                   |        |                       |

成反比，结合质光关系可知恒星寿命满足：

$$t \sim M^{-2.5}$$

同样与太阳对比，太阳 ( $1M_{\odot}$ ) 的寿命约为 100 万年，因此  $2.3M_{\odot}$  恒星的寿命约为 12.5 万年，这也就是这个疏散星团的年龄。

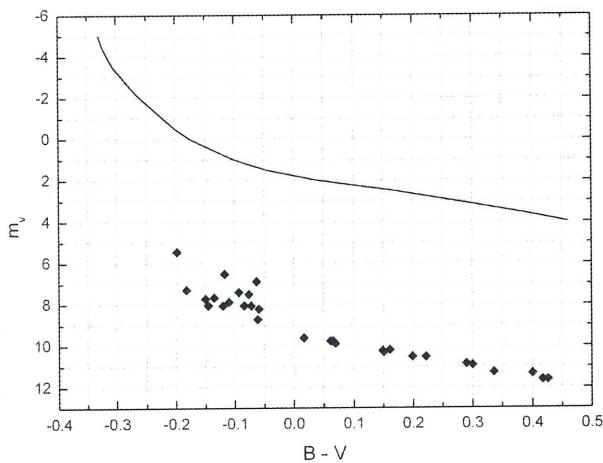
## 观测试题

亚太天文奥赛组委会 供稿/赵晋 翻译

与 B-V 色指数的关系已列于上表中。

解答

1) 星团赫罗图如下图所示。实线是题干给出的 ZAMS，菱形散点是疏散星团的赫罗图，纵坐标为视星等。



2) 在以绝对星等为纵坐标的赫罗图上，ZAMS 应与星团赫罗图重合，而在以视星等为纵坐标的赫罗图上，二者纵向相差大约 7.7 等，这也就是这个星团的距离模数 ( $m - M$ )。因此星团的距离为：

$$D = 10^{(7.7+5)/5} \text{ pc} = 350 \text{ pc}$$

注：根据题干也能求出星团的年龄。星团赫罗图上主序转向点的恒星的年龄即为该星团的年龄。从给出的赫罗图上可以看出该星团主序转向点（即恒星偏离主序的临界点）处的色指数为：B-V = -0.05，所对应的恒星的绝对星等为  $M_v = 1.5$  左右，它的主序年龄即为星团的年龄。太阳的绝对星等为 4.6 等，根据质光关系： $L \sim M^{3.5}$ ，

$$M_v - M_{v\odot} = -2.5 \lg \frac{L}{L_{\odot}} = -2.5 \lg \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} = -3.1$$

可以求出恒星质量：

$$M = 2.3M_{\odot}$$

恒星的能量来源于中心的热核反应，因此其寿命与质量成正比，当能量辐射完毕后恒星走向死亡，因此其寿命又与光度

# 2007年第一届IOAA试题

## 理论试题

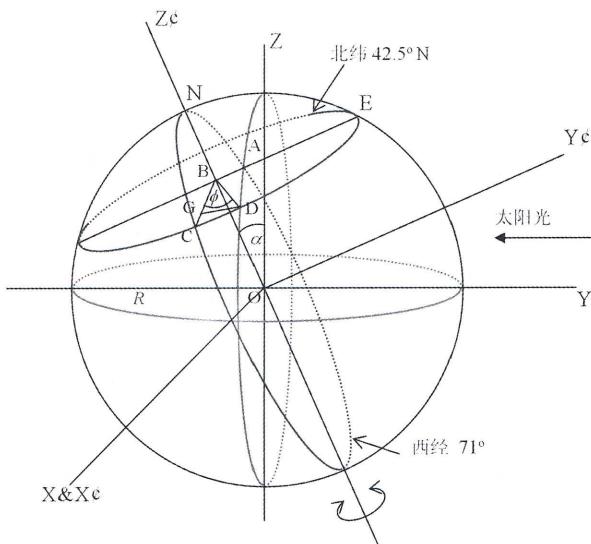
IOAA组委会 供稿/朱进、张子平 翻译

比赛地点：泰国 清迈

### 短问题

1、对于一个位于北纬 $42.5^{\circ}$ N和西经 $71^{\circ}$ W的观测者，请估算在12月21日的日出时间，假设观测者的本地时间是格林威治时间-5小时。大气的折射和日面大小均可忽略。

**解答** 地球与太阳的相对位置如图所示，



从图中可以看出： $OB = R \sin \lambda$ ,  $AB = OB \times \tan \alpha$ ,  $BC = BD = BE = R \cos \lambda$ ,  $\sin \phi = DG/BD = BA/BD = OB \times \tan \alpha / (R \cos \lambda) = \tan \alpha \times \tan \lambda = \tan(23.5^{\circ}) \times \tan(42.5^{\circ}) = 0.39843$ , 因此 $\phi = 23.48^{\circ}$ 。所以，太阳升起的时间是上午六点以后： $t = (71^{\circ} + 23.48^{\circ}) \times 4 - 5\text{小时} = 77.92\text{分钟}$ ，这时的时间应为上午7点18分。

2、从地球上观测，金星和太阳间最大的角距离是 $46^{\circ}$ ，请计算金星的圆轨道半径为多少个天文单位。

**解答** 设金星轨道半径为 $R$ , 日地距离为 $d$ , 金星达到最大角距时， $R = d \cdot \sin 46^{\circ} = 0.72\text{ AU}$ 。

3、7月1日正午和12月21日正午的时间间隔是183个太阳日。这个时间间隔对应着多少恒星日？

**解答**  $1\text{ 太阳日} = 24 \times 60 \times 60\text{ s} = 86400\text{ s}$ ,  $1\text{ 恒星日} = 23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4.1 = 86164.1\text{ s}$ , 因此： $183\text{ 太阳日} = 183.50\text{ 恒星日}$ 。

4、在满月的一个夜晚，月球对某观测者的张角是 $0.46$ 度。请问在这个晚上该观测者到月球的距离是多少？

**解答** 在满月时，地月距离=月球直径/月面张角(弧度)，因此：地月距离=月球直径 $\div (0.46\pi/180) = 4.328 \times 10^8\text{ 米}$ 。

5、由于地球围绕太阳的轨道运动，一个观测者能够通过测量确定一直到100秒差距远的恒星的方向差异。这个观测者所能测量的最小的角度差异是多少个角秒？

**解答**  $\alpha = 2a/D = 2 \times 1.496 \times 10^{11} / (100 \times 3.0856 \times 10^{16}) = 0.05''$

6、一个围绕着太阳运动的周期彗星的远日距离为31.5天文单位，它的近日距离为0.5天文单位。该彗星的轨道周期是多少？

**解答** 根据开普勒第三定律： $a^3/T^2 = C$ ，其中 $C$ 为常数： $C = 1\text{ 年}^2/\text{AU}^3$ ，对该彗星： $a = (3.15+0.5)/2 = 16.0\text{ AU}$ ,  $T = 64\text{ 年}$ 。

7、对上题所提到的彗星，该彗星与太阳的连线扫过的面积是多少？(以“平方天文单位/年”为单位)

**解答** 根据开普勒第二定律，彗星与太阳连线单位时间所扫过的面积为常数。在一个轨道周期里，它所扫过的面积为： $\pi \cdot a \cdot b$ ，其中 $a$ 、 $b$ 为椭圆的半长轴和半短轴。 $a = 16.0\text{ AU}$ ,  $b^2 = a^2 - c^2$ ,  $c$ 为椭圆焦点与中心点之间的间距。带入数据可知： $b = 3.968\text{ AU}$ ,  $\pi \cdot a \cdot b = 199.5\text{ AU}^2$ 。因此每年扫过的单位面积为： $S = 3.12\text{ AU}^2/\text{年}$ 。

8、对一个表面温度为4000K的恒星，在什么波长它的辐射最强烈？

**解答** 据维恩位移定律： $\lambda_{max} \cdot T = 2.8977 \times 10^{-3}\text{ mK}$ , 因此 $\lambda_{max} = 2.8977 \times 10^{-3} / 4000\text{ 米} = 724\text{ 纳米}$ 。

9、对一个表面温度为7500K，半径为2.5倍太阳半径的恒星，计算该恒星的总光度。请以太阳光度为单位，并假设太阳的表面温度为5800K。

**解答**

据斯特藩-玻尔兹曼定律，其辐射总光度为： $L = 4\pi r^2 \cdot \sigma T^4$ ，易于求出  $L = 17.5L_\odot$ 。

10、一个K型的主序星的光度是  $0.4L_\odot$ 。观测到该恒星的能量流量为  $6.23 \times 10^{-4} \text{ W m}^{-2}$ 。到该恒星的距离是多少？大气的影响可以忽略。

**解答**

能流量( $E$ )与光度( $L$ )成正比，与距离平方( $d^2$ )成反比： $E = L/(4\pi d^2)$ ，因此： $d = \sqrt{L/(4\pi \cdot E)} = 453 \text{ pc}$ 。

11、一个超新星的光度是太阳光度的  $10^{10}$  倍。如果这样一个超新星出现在我们的天空中时和我们的太阳一样亮，它距离我们多远？

**解答**

超新星的光度为太阳光度的100亿倍： $L_{sn} = 10^{10}L_\odot$ ，设  $D$  为到超新星的距离， $R$  为日地距离，地球上接收到的超新星和太阳的能流量相等，所以： $10^{10}L_\odot/(4\pi D^2) = L_\odot/(4\pi R^2)$ ，因此  $D = 10^5 \text{ AU}$ 。

12、静止氢原子的(自旋翻转)能级跃迁释放出的电磁波的频率为  $\nu_0 = 1420.406 \text{ MHz}$ 。在一个星系中心附近的气体云中，这样的一个辐射的频率被观测到是  $\nu = 1421.65 \text{ MHz}$ 。计算该气体云的速度。它在向我们地球靠近(towards)还是在远离(away from)地球？

**解答**

频率的变化是由于多普勒效应产生的，由于所测频率高于实验室频率  $\nu_0$ ，因此该气体云正在靠近观测者： $\nu = \nu_0 \sqrt{(c+v)/(c-v)}$ ， $v/c = [(\nu/\nu_0)^2 - 1]/[(\nu/\nu_0)^2 + 1] = 0.000875422$ ，所以  $v = 0.000875422 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 262.455 \text{ km/s}$ 。

13、在月球上的一个陨石坑的直径为80千米。我们用肉眼能够分辨出这个陨石坑吗？假设肉眼的瞳孔直径为5mm。

**解答**

欲分辨出一个给定的角  $\theta$ ，眼睛瞳孔的最小直径必须大于： $D_{min} = 1.22\lambda/\theta$ ， $\theta = 80 \text{ km}/\text{地月距离} = 2.081 \times 10^{-4} \text{ 弧度}$ 。可见光的中心波长约为5000埃，带入公式可知： $D_{min} = 1.22\lambda/\theta = 2.9 \text{ 毫米}$ ，人眼瞳孔完全可以达到这个大小，所以能够分辨出该陨石坑。

14、假如太阳通过引力塌缩形成了一个没有自旋的黑洞，它的视界(它的史瓦西半径)是多少？

**解答**

当光速等于逃逸速度时的球形半径为  $R = 2GM_\odot/c^2 = 2 \times 6.672 \times 10^{-11} \times 1.989 \times 10^{30} / (3 \times 10^8)^2 = 2.95 \text{ 千米}$ 。

15、肉眼能看到的最暗的星的星等是  $m = 6$  等，而星空中最亮的星的星等为  $m = -1.5$  等。最暗的和最亮的星的能流量(energy-flux)之比是多少？

**解答**

能流量与星等的关系为  $m_1 - m_2 = -2.5 \lg(f_1/f_2)$ ，因此： $f_1/f_2 = 10^{(m_1-m_2)/2.5}$ ，星等差为-7.5等，它们的能流量之比应为： $F_{min}/F_{max} = 10^{-7.5/2.5} =$

$10^{-3}$ 。本题目的意义在于指出我们地球上肉眼所见的恒星的实际亮度跨度为1000的量级。

**长问题**

16、行星及其表面温度。一颗快速自转的半径为  $R$ 、表面反照率为  $\alpha$  的行星围绕一颗光度为  $L$  的恒星做圆轨道运动，公转轨道半径为  $D$ 。这里的假设是，在平衡状态下，行星吸收的所有能量都作为一个黑体重新辐射出去。

- a) 在行星表面处来自恒星的辐射流量是多少？
- b) 行星总的能量吸收率是多少？
- c) 行星的反射光度是多少？
- d) 行星表面的平均黑体温度是多少？
- e) 如果假设行星的一面总是朝着恒星的话，这一面的平均表面温度是多少？
- f) 对于问题d)中的行星： $\alpha = 0.25$ ， $D = 1.523 \text{ AU}$ ，对于  $L = 3.826 \times 10^{26} \text{ W}$ ，计算它以K为单位的表面温度。

**解答**

- a) 辐射流量是  $I = L/(4\pi D^2)$
- b) 总的能量吸收率是

$$A = (1 - \alpha)\pi R^2 \cdot I = (1 - \alpha) \frac{L \cdot R^2}{4D^2}$$

c) 行星的反射光度是

$$L_{planet} = \frac{\alpha \cdot L \cdot R^2}{4D^2}$$

d) 忽略行星的内部发热。设  $T$  为行星表面的黑体辐射温度。另外由于行星的自转很快，可以认为行星表面的温度是一样的。行星表面黑体辐射的总能量由斯特藩-玻尔兹曼定律给出： $4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$ ， $\sigma$  为斯特藩-玻尔兹曼常数。

在热平衡时，能量的释放率和吸收率相等，即：

$$4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 = \frac{(1 - \alpha) \cdot L \cdot R^2}{4D^2}, T = \sqrt[4]{\frac{(1 - \alpha) \cdot L}{16\pi\sigma \cdot D^2}}$$

e) 在此情形下，行星的黑体辐射的能量大部分来自于朝向太阳的一面，所以其能量辐射面积为  $2\pi R^2$  而不是  $4\pi R^2$ ，假设其朝向太阳一面的温度为  $T_1$ ，则：

$$2\pi R^2 \cdot \sigma T_1^4 = \frac{(1 - \alpha) \cdot L \cdot R^2}{4D^2} \Rightarrow T_1 \approx 1.19T$$

f) 代入数据可以求出：

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1 - 0.25) \times 3.826 \times 10^{26}}{16\pi \times 5.67 \times 10^{-8} (1.523 \times 1.496 \times 10^{11})^2}} \approx 210 \text{ K}$$

17、双星系统。一个双星系统由  $M_1$  和  $M_2$  组成，它们之间的距离为  $D$ 。 $M_1$  和  $M_2$  均以角速度  $\omega$  围绕着该双星系统的共同质量中心作圆轨道的运动。质量在连续地从一颗星转移到

另一颗星，这个质量的转移会导致它们的轨道周期和它们之间的距离缓慢地随时间发生变化。

为了简化分析，我们将假设这两颗星可以被视作两个质点，它们各自围绕自己自转轴的自转可以被忽略。

a)该双星系统的总角动量和动能分别是多少？

b)请找出角速度 $\omega$ 与双星间距 $D$ 的关系。

c)在时间间隔 $\Delta t$ 里，两颗星间的质量转移使 $M_1$ 星的质量变化了 $\Delta m$ ，找出相对应的角度的变化量 $\Delta\omega$ 与 $\omega$ 、 $M_1$ 、 $M_2$ 和 $\Delta M_1$ 的关系式。

d)在一个特定的双星系统里， $M_1 = 2.9M_\odot$ ， $M_2 = 1.4M_\odot$ ，轨道周期 $T = 2.49$ 天。一百年后，轨道周期 $T$ 增加了20秒。请求出 $\Delta M_1/(M_1 \Delta t)$ 的数值(以每年为时间单位)

e)质量的流向是怎样的？从 $M_1$ 流向 $M_2$ ，还是从 $M_2$ 流向 $M_1$ ？

f)求出 $\Delta D/(D \cdot \Delta t)$ 的数值(以每年为时间单位)

你可以使用以下的近似：

$$(1+x)^n \sim 1+nx, \text{ 当 } x \ll 1;$$

$$(1+x)(1+y) \sim 1+x+y, \text{ 当 } x \ll 1, y \ll 1.$$

**解答**

a) 双星系统的总角动量为：

$$L = I\omega = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2)\omega$$

又因为 $M_1 r_1 = M_2 r_2$  和 $D = r_1 + r_2$ ，由此可得：

$$L = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} D^2 \omega \quad \dots \dots (1)$$

总动能为：

$$\frac{1}{2} M_1 (r_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} M_2 (r_2 \omega)^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} D^2 \omega^2 \quad \dots \dots (2)$$

从牛顿的引力定律可得：

$$M_1 \omega^2 r_1 = M_2 \omega^2 r_2 = \frac{GM_1 M_2}{D^2}$$

由此可得：

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{D^3} \quad \dots \dots (3)$$

在此系统中总质量和总角动量守恒，即： $M_1 + M_2 = \text{常数}(\text{const})$ ，而且：

$$L = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} D^2 \omega = \text{const}$$

也就是：

$$M_1 M_2 D^2 \omega = \text{const} \quad \dots \dots (4)$$

在一个小质量变化前后： $\omega \rightarrow \omega + \Delta\omega$ ， $M_1 \rightarrow M_1 +$

$\Delta M_1$ ， $M_2 \rightarrow M_2 - \Delta M_1$ ， $D \rightarrow D + \Delta D$ ，所以 $M_1 M_2 D^2 \omega$ 可以表示为：

$$(M_1 + \Delta M_1)(M_2 - \Delta M_2)(D + \Delta D)^2 (\omega + \Delta\omega)$$

利用以下近似： $(1+x)^n \approx 1+nx$ ，可得：

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + 2 \frac{\Delta D}{D} = \frac{(M_1 - M_2)}{M_1 M_2} \Delta M_1 \quad \dots \dots (5)$$

从等式(3)得知 $\omega^2 D^3$ 也是常数，所以：

$$\omega^2 D^3 = (\omega + \Delta\omega)^2 (D + \Delta D)^3$$

由此可得：

$$\Delta D \cdot D = -\frac{2}{3} \Delta\omega \omega \quad \dots \dots (6)$$

故：

$$\Delta\omega = -\frac{3(M_1 - M_2)}{M_1 M_2} \omega \Delta M_1 \quad \dots \dots (7)$$

d) 已知 $M_1 = 2.9M_\odot$ ， $M_2 = 1.4M_\odot$ ，轨道周期 $T = 2.49$ 天。 $T$ 在过去一年增加了20秒。由 $\omega = 2\pi/T$  可得：

$$\Delta\omega = -\frac{\omega}{T} \Delta T, \Delta M_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{\Delta T}{T} \quad \dots \dots (8)$$

可以求出： $\Delta M_1/(M_1 \Delta t) = 2.89 \times 10^{-7} M_\odot/\text{年}$ 。

e) 质量由 $M_2$  流向 $M_1$ 。

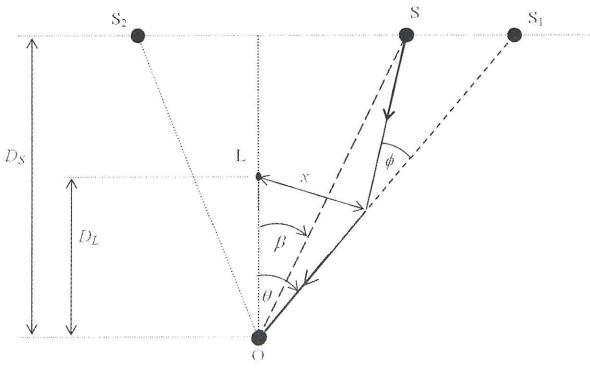
f) 从等式(6) 和(8)可得：

$$\frac{\Delta D}{D \cdot \Delta t} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta\omega}{\omega} = +\frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T} = 6.20 \times 10^{-7}/\text{年}$$

18、引力透镜。光在引力场中的偏折是爱因斯坦在1916年出版广义相对论之前的1912年首先预言的。一个大质量天体引起的光线偏折看上去象一个经典的透镜。这个预言在1919年被爱丁顿所证实。



考虑一个球对称透镜，具有质量 $M$ ， $\xi$ 是到中心的碰撞参



数。在这种情形下光线偏折的公式为:  $\varphi = 4GM/(\xi c^2)$ , 这是一个非常小的角度。在给出的图中(上图), 起着透镜作用的大质量天体位于L点。源S发出的光线被透镜偏折后被O点的观测者观测成 $S_1$ 和 $S_2$ 两个像。在这里,  $\varphi$ 、 $\beta$ 和 $\theta$ 都是非常小的角度。

a) 在一个特殊的情形下, 当源与引力透镜天体严格在一条直线上时, 即 $\beta = 0$ 时, 一个呈环形的像将会产生, 这个环的角半径被称作爱因斯坦半径 $\theta_E$ , 请证明它的公式是:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_S - D_L}{D_L D_S}}$$

b) 源天体到地球的距离大约是50kpc。一个太阳质量的透镜与源天体的距离是10kpc。请计算当源天体、透镜和观测者严格在一条直线上时的爱因斯坦环的角半径的数值。

c) 哈勃空间望远镜主镜的直径为2.4米, 它相应的角分辨率是多少? 哈勃望远镜能够分辨出问题b)中的爱因斯坦环吗?

d) 在给出的图中, 对一个孤立的点源S, 会由引力透镜效应形成两个像 $S_1$ 和 $S_2$ 。请求出这两个像的位置, 即 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ , 请以 $\beta$ 和 $\theta_E$ 为参数来表示。

e) 请以 $\eta$ 为参数, 求出比率 $\theta_{1,2}/\beta$  ( $\theta_1/\beta$  及 $\theta_2/\beta$ )。在此,  $\theta_{1,2}$ 分别代表着d)中的两个像的位置,  $\eta = \beta/\theta_E$ 。

f) 当 $\Delta\beta \ll \beta$ ,  $\Delta\theta \ll \theta$ , 且对 $\theta = \theta_{1,2}$  ( $\theta = \theta_1$  及 $\theta = \theta_2$ ) 的情形, 请以 $\eta$ 为参数, 找出差分放大倍数 $\Delta\theta/\Delta\beta$ 的表达式。

### 解答

a) 在图中, 对小的角度,  $\tan \theta \approx \theta$ , 故:  $PS_1 = PS + SS_1$ , 而且:

$$\begin{aligned} \theta D_s &= \beta D_s + (D_s - D_L)\phi \\ \theta - \beta &= \frac{4GM}{\xi c^2} \left[ \frac{D_s - D_L}{D_s} \right] \end{aligned} \quad \dots \dots (1)$$

同时注意到 $\theta = \xi/D_L$ , 所以:

$$\theta^2 - \beta\theta = \left( \frac{4GM}{c^2} \right) \left( \frac{D_S - D_L}{D_L D_S} \right) \quad \dots \dots (2)$$

$\pm \theta_E$ , 其中:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_S - D_L}{D_L D_S}} \quad \dots \dots (3)$$

b) 借助等式(3), 对一个太阳质量的透镜 $D_S = 50$ kpc,  $D_L = 50 - 10 = 40$ kpc,

$$\theta_E = 0.956 \times 10^{-9} \text{ 弧度} = 1.97 \times 10^{-4} \text{ 角秒}$$

c) 主镜为2.4米的哈勃望远镜的分辨率(对波长=500nm的光):

$$\theta_{Hubble} = 1.22 \cdot \lambda/D = 2.54 \times 10^{-7} \text{ 弧度}$$

所以哈勃望远镜无法分辨出该爱因斯坦环。

d) 等式(2)有两个解, 即:

$$\theta_1 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \theta_E^2}, \quad \theta_2 = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \theta_E^2}$$

其中 $\theta_E$ 由(3)式给出。这意味着对一个孤立源对应着两个像。

e) 答案如下:

$$\frac{\theta_{1,2}}{\beta} = \left[ \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \theta_E^2} \right] / \beta = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{\eta^2 + 4}}{\eta} \right)$$

其中 $\eta = \beta/\theta_E$ 。

f) 根据 $\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0$ 可知,  $(\theta + \Delta\theta)^2 - (\beta + \Delta\beta) \cdot (\theta + \Delta\theta) - \theta_E^2 = 0$ ,  $\Delta\theta/\Delta\beta = \theta/(\theta + \Delta\theta - \beta)$ , 因此有:

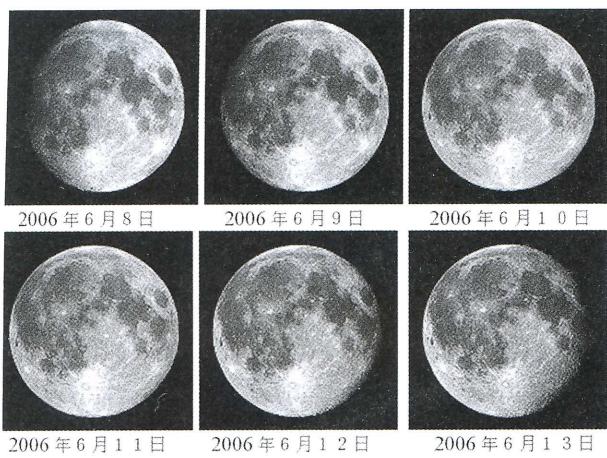
$$\left( \frac{\Delta\theta}{\Delta\beta} \right)_{\theta=\theta_{1,2}} = \frac{\theta_{1,2}}{2\theta_{1,2} - \beta} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + 4}} \right)$$

## 数据分析试题

**试题1 伽利略卫星。**在屏幕上显示的是木星和它的4个伽利略卫星的计算机模拟运动, 它应该和小望远镜里所看到的现象类似。观察了这些卫星的运动之后, 请在答题纸上写下这些数字所对应的卫星的中文名称。(模拟将在考试的最开始的15分钟和考试最后的15分钟在屏幕上播放)

**试题2 月龄。**泰国国王普利蓬的登基60周年纪念活动于2006年6月8日到13日在泰国(格林威治时间+07小时)举行。在这期间每个晚上的同一时间所拍摄的月球照片如下页左栏上图所示。

假设爱因斯坦出生于1879年3月14日的中午, 请用上面提供的数据确定在爱因斯坦在德国(格林威治时间+01小时)出生的那一天的月龄(新月之后的天数)。请详细给出计算使用的方法, 并估算你计算中的误差。



**试题3 太阳系天体。**右表给出了一组包括4个太阳系天体在一个日历年期间视位置的数据。观测地点纬度：北纬 $18^{\circ}47'00.0''$ ，经度：东经 $98^{\circ}59'00.0''$ 。详细给出你的数据分析方法，并回答以下的问题。

3.1) 把字母A、B、C、D相应地写在答题纸上正确的天体(object)后面。

3.2) 在整个观测期间，哪个天体在黑夜时可以被观测到最长的时间？

3.3) 对于3.2的情况，对应的日期是哪天？

3.4) 假设轨道都是共面的(位于同一平面)圆轨道，在你的答题纸上提供的轨道图上(此图从略，编者)，画出在3.3)说的那天，这四个天体和地球分别所在的位置。答题(纸上)必须把作为这些天体之一的太阳画在太阳系的中心。对其他天体并包括地球必须同时明确写下当天它们的距离(elongation)的准确数值。

| Date  | Object-A            |                      |                     | Object-B             |                     |                      | Object-C            |                      |                     | Object-D             |                     |                      |  |
|-------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|--|
|       | R.A.<br>h<br>m<br>s | Decl.<br>°<br>'<br>" |  |
| Jan 1 | 18 44 7.11          | + 23 3 11.92         | 9 18 19.95          | + 19 36 33.18        | 15 28 49.55         | - 15 14 51.78        | 16 9 18.02          | - 16 57 57.20        |                     |                      |                     |                      |  |
| 2     | 19 48 32.14         | + 22 58 18.94        | 9 17 59.44          | + 19 32 19.98        | 15 32 37.40         | - 15 27 53.09        | 15 11 50.45         | - 17 8 47.63         |                     |                      |                     |                      |  |
| 3     | 18 52 56.86         | + 22 52 58.47        | 9 17 38.28          | + 19 34 9.61         | 15 39 27.82         | - 15 49 56.32        | 15 14 26.14         | - 17 19 36.70        |                     |                      |                     |                      |  |
| 4     | 18 57 21.21         | + 22 47 10.65        | 9 17 16.59          | + 19 36 1.83         | 15 49 29.79         | - 15 53 58.28        | 15 17 21.13         | - 17 36 8.30         |                     |                      |                     |                      |  |
| 5     | 19 1 45.16          | + 22 40 55.67        | 9 16 54.11          | + 19 37 50.27        | 15 44 16.12         | - 16 6 58.27         | 15 19 38.41         | - 17 45 34.92        |                     |                      |                     |                      |  |
| 6     | 19 6 8.68           | + 22 34 33.99        | 9 16 31.11          | + 19 39 53.34        | 15 48 13.95         | - 16 19 55.09        | 15 22 14.98         | - 17 50 54.64        |                     |                      |                     |                      |  |
| 7     | 19 10 31.74         | + 22 27 4.91         | 9 16 7.53           | + 19 41 52.72        | 15 52 14.02         | - 16 32 47.28        | 15 24 51.65         | - 18 1 7.23          |                     |                      |                     |                      |  |
| 8     | 19 14 54.39         | + 22 19 29.54        | 9 15 43.38          | + 19 43 54.33        | 15 56 16.44         | - 16 45 33.75        | 15 27 29.01         | - 18 11 11.93        |                     |                      |                     |                      |  |
| 9     | 19 19 16.35         | + 22 11 27.84        | 9 15 18.68          | + 19 45 58.07        | 16 0 21.12          | - 16 58 13.38        | 15 36 6.46          | - 15 21 8.68         |                     |                      |                     |                      |  |
| 10    | 19 23 37.84         | + 22 2 59.77         | 9 14 53.45          | + 19 48 4.28         | 16 4 28.02          | - 17 10 44.96        | 15 32 44.21         | - 18 30 57.40        |                     |                      |                     |                      |  |
| 11    | 19 27 59.77         | + 21 54 6.25         | 9 14 27.71          | + 19 50 11.49        | 16 8 37.09          | - 17 23 7.37         | 15 39 22.25         | - 18 40 38.02        |                     |                      |                     |                      |  |
| 12    | 19 32 19.11         | + 21 44 46.98        | 9 14 1.47           | + 19 52 29.98        | 16 12 48.29         | - 17 35 19.51        | 15 38 0.58          | - 18 50 10.48        |                     |                      |                     |                      |  |
| 13    | 19 36 38.64         | + 21 5 2.30          | 9 13 32.75          | + 19 54 32.16        | 16 17 1.59          | - 17 47 26.28        | 15 40 36.21         | - 18 53 34.64        |                     |                      |                     |                      |  |
| 14    | 19 40 57.93         | + 21 24 52.84        | 9 13 7.57           | + 19 55 45.02        | 16 18 16.94         | - 17 59 3.85         | 15 43 18.13         | - 18 50 5.83         |                     |                      |                     |                      |  |
| 15    | 19 45 16.37         | + 21 14 18.25        | 9 12 39.95          | + 19 58 37.16        | 15 53 34.31         | - 18 10 43.57        | 15 45 57.34         | - 19 17 57.99        |                     |                      |                     |                      |  |
| 16    | 19 49 34.14         | + 21 3 18.44         | 9 12 11.92          | + 19 58 15.16        | 15 56 53.93         | - 18 22 4.02         | 15 48 36.85         | - 19 20 57.02        |                     |                      |                     |                      |  |
| 17    | 19 53 51.23         | + 20 51 56.52        | 9 11 43.49          | + 17 3 32.27         | 16 26 14.95         | - 18 33 9.01         | 15 51 16.55         | - 19 35 47.51        |                     |                      |                     |                      |  |
| 18    | 19 58 7.61          | + 20 40 9.83         | 9 11 14.66          | + 17 5 50.62         | 16 38 38.13         | - 18 43 57.54        | 15 53 56.73         | - 19 44 29.41        |                     |                      |                     |                      |  |
| 19    | 20 2 29.28          | + 20 36.60           | 9 10 45.47          | + 17 8 10.15         | 16 43 3.17          | - 18 54 28.78        | 15 56 37.11         | - 19 53 2.63         |                     |                      |                     |                      |  |
| 20    | 20 6 38.22          | + 20 19 25.68        | 9 10 15.93          | + 17 10 39.64        | 16 47 30.03         | - 19 4 41.47         | 15 59 17.75         | - 20 1 27.09         |                     |                      |                     |                      |  |
| 21    | 20 10 52.44         | + 20 2 30.27         | 9 9 46.06           | + 17 12 52.19        | 16 51 58.65         | - 19 14 34.99        | 16 1 5.85           | - 20 29 2.73         |                     |                      |                     |                      |  |
| 22    | 20 15 5.91          | + 19 49 18.07        | 9 9 15.88           | + 17 15 14.38        | 16 56 29.91         | - 19 24 8.21         | 16 4 35.91          | - 20 17 49.49        |                     |                      |                     |                      |  |
| 23    | 20 19 18.63         | + 19 35 30.63        | 9 8 48.41           | + 17 17 37.36        | 17 1 1.06           | - 19 33 20.35        | 16 7 21.40          | - 20 25 47.08        |                     |                      |                     |                      |  |
| 24    | 20 23 30.60         | + 19 21 17.01        | 9 8 14.68           | + 17 26 0.93         | 17 5 3.74           | - 19 42 16.51        | 16 10 3.16          | - 20 33 35.67        |                     |                      |                     |                      |  |
| 25    | 20 27 41.89         | + 19 7 4.21          | 9 7 43.79           | + 17 22 49.68        | 17 19 10.92         | - 19 59 37.83        | 16 12 48.18         | - 20 41 15.19        |                     |                      |                     |                      |  |
| 26    | 20 31 52.24         | + 18 52 19.95        | 9 7 12.51           | + 17 24 49.38        | 17 14 46.85         | - 19 59 41.50        | 16 15 27.49         | - 20 45 43.51        |                     |                      |                     |                      |  |
| 27    | 20 36 1.91          | + 18 37 13.01        | 9 6 41.12           | + 17 27 14.09        | 16 25 19.16         | - 20 6 20.74         | 16 18 10.04         | - 20 59 8.62         |                     |                      |                     |                      |  |
| 28    | 20 40 16.79         | + 18 21 49.95        | 9 6 9.57            | + 17 29 38.82        | 17 17 24.49         | - 20 13 34.89        | 16 20 52.84         | - 21 3 37.77         |                     |                      |                     |                      |  |
| 29    | 20 44 18.89         | + 18 6 0.94          | 9 5 37.88           | + 17 32 3.69         | 17 28 46.04         | - 20 20 22.93        | 16 23 35.88         | - 21 19 10.99        |                     |                      |                     |                      |  |
| 30    | 20 48 38.26         | + 17 19 44.55        | 9 4 5.03            | + 17 34 28.52        | 17 18 28.49         | - 20 28 44.44        | 16 26 19.15         | - 21 21 12.59        |                     |                      |                     |                      |  |
| Feb 1 | 20 50 32.68         | + 17 33 23.39        | 9 4 17.03           | + 17 34 52.17        | 17 12 12.21         | - 20 32 38.60        | 16 29 3.65          | - 21 23 55.54        |                     |                      |                     |                      |  |
| 2     | 20 50 36.36         | + 17 16 45.58        | 9 4 2.10            | + 17 39 16.74        | 17 17 57.13         | - 20 38 4.93         | 16 31 46.55         | - 21 34 26.92        |                     |                      |                     |                      |  |
| 3     | 21 4 47.25          | + 16 25 16.22        | 9 4 2.10            | + 17 39 16.74        | 17 17 57.13         | - 20 38 4.93         | 16 31 46.55         | - 21 34 26.92        |                     |                      |                     |                      |  |
| 4     | 21 8 47.25          | + 16 25 16.22        | 9 4 2.10            | + 17 39 16.74        | 17 17 57.13         | - 20 38 4.93         | 16 31 46.55         | - 21 34 26.92        |                     |                      |                     |                      |  |
| 5     | 21 12 52.84         | + 16 8 5.10          | 9 1 53.73           | + 17 48 50.81        | 18 2 7.72           | - 20 54 58.81        | 16 42 43.13         | - 21 25 4.57         |                     |                      |                     |                      |  |
| 6     | 21 16 49.40         | + 16 24 37.92        | 9 1 21.76           | + 17 51 11.93        | 18 7 57.82          | - 20 57 56.81        | 16 45 27.79         | - 22 0 48.74         |                     |                      |                     |                      |  |
| 7     | 21 20 55.14         | + 15 39 2.15         | 9 0 49.82           | + 17 53 42.40        | 18 11 48.80         | - 21 0 23.64         | 16 48 12.63         | - 22 6 22.92         |                     |                      |                     |                      |  |
| 8     | 21 24 55.06         | + 15 11 28.75        | 9 0 17.97           | + 17 55 51.84        | 18 19 40.61         | - 21 2 19.00         | 16 50 57.83         | - 22 11 47.07        |                     |                      |                     |                      |  |
| 9     | 21 28 64.18         | + 14 52 23.36        | 9 8 59.46           | + 17 58 10.33        | 18 10 13.18         | - 21 3 42.38         | 16 53 42.89         | - 22 17 1.17         |                     |                      |                     |                      |  |
| 10    | 21 32 52.49         | + 14 33 16.20        | 8 59 14.69          | + 18 0 27.18         | 18 26 26.46         | - 21 4 33.49         | 16 56 28.13         | - 22 22 5.19         |                     |                      |                     |                      |  |
| 11    | 21 36 56.00         | + 14 09 13.74        | 8 59 42.28          | + 18 2 42.91         | 18 31 20.41         | - 21 4 51.09         | 16 59 13.62         | - 22 36 5.09         |                     |                      |                     |                      |  |
| 12    | 21 40 46.73         | + 13 54 5.52         | 8 58 12.10          | + 18 4 57.23         | 18 38 14.98         | - 21 4 37.58         | 17 1 5.26           | - 22 31 42.86        |                     |                      |                     |                      |  |
| 13    | 21 44 42.68         | + 13 34 9.45         | 8 57 41.12          | + 18 7 10.95         | 18 41 19.07         | - 21 4 34 49.99      | 17 4 45.04          | - 22 36 18.48        |                     |                      |                     |                      |  |
| 14    | 21 48 37.86         | + 13 14 0.13         | 8 57 10.36          | + 18 9 21.31         | 18 46 5.67          | - 21 2 29.01         | 17 7 30.93          | - 22 40 39.92        |                     |                      |                     |                      |  |
| 15    | 21 51 32.29         | + 13 0 56.03         | 8 53 15.48          | + 18 9 25            | 15 47.86            | - 19 20 31.97        | 17 24 42.21         | - 23 1 37.52         |                     |                      |                     |                      |  |
| 16    | 21 55 0.03          | + 12 46 39.75        | 8 50 49.81          | + 18 9 34.91         | 15 41 22.60         | - 19 26 49.93        | 17 32 28.29         | - 23 12 28.11        |                     |                      |                     |                      |  |
| 17    | 22 0 45.09          | + 12 40 21           | 8 49 45.88          | + 18 9 29.38         | 15 38 37.65         | - 20 17 47.48        | 17 35 16.21         | - 23 15 8.29         |                     |                      |                     |                      |  |
| 18    | 22 27 10.89         | + 9 41 45.98         | 8 52 20.58          | + 18 9 30.88         | 19 3 37.65          | - 20 17 47.48        | 17 35 16.21         | - 23 15 8.29         |                     |                      |                     |                      |  |
| 19    | 22 36 55.19         | + 9 18 39.85         | 8 52 49.06          | + 18 9 34.92         | 15 32 12.49         | - 19 1 10.99         | 17 57 32.10         | - 23 34 19.49        |                     |                      |                     |                      |  |
| 20    | 22 39 1.83          | + 9 17 52.52         | 8 52 48.41          | + 18 9 44.24         | 15 22 44.20         | - 19 20 16.87        | 17 38 3.17          | - 23 37 18.08        |                     |                      |                     |                      |  |
| 21    | 22 42 45.95         | + 9 16 44.88         | 8 52 16.55          | + 18 9 46.55         | 15 26 20.59         | - 18 36 31.87        | 18 1 3.52           | - 23 32 17.62        |                     |                      |                     |                      |  |
| 22    | 22 46 32.64         | + 9 12 20.52         | 8 52 34.67          | + 18 9 17.55         | 15 23 48.67         | - 18 19 53.79        | 18 3 3.52           | - 23 27 4.47         |                     |                      |                     |                      |  |
| 23    | 22 48 18.78         | + 8 32 20.29         | 8 50 35.38          | + 18 9 27.26         | 15 27 27.29         | - 19 4 43.57         | 17 44 24.21         | - 23 24 4.47         |                     |                      |                     |                      |  |
| 24    | 22 51 1.86          | + 8 32 20.29         | 8 49 43.81          | + 18 9 28.48         | 15 28 20.29         | - 19 4 48.26         | 17 49 18.48         | - 23 24 3.48         |                     |                      |                     |                      |  |
| 25    | 22 54 5.09          | + 8 32 20.29         | 8 49 43.81          | + 18 9 28.48         | 15 28 20.29         | - 19 4 48.26         | 17 49 18.48         | - 23 24 3.48         |                     |                      |                     |                      |  |
| 26    | 22 57 33.65         | + 8 31 37.96         | 8 49 32.58          | + 18 9 36.21         | 15 28 22.35         | - 13 4 58.42         | 18 45 33.28         | - 23 28 10.48        |                     |                      |                     |                      |  |
| 27    | 22 59 1.84          | + 8 30 25.70         | 8 44 33.99          | + 18 9 35.99         | 15 29 21.39         | - 13 5 59.32         | 18 39 5.93          | - 23 27 17.12        |                     |                      |                     |                      |  |
| 28    | 23 0 51.65          | + 8 29 52.85         | 8 42 51.87          | + 18 9 37.89         | 15 22 43.22         | - 14 7 49.84         | 18 41 50.44         | - 23 27 37.75        |                     |                      |                     |                      |  |
| 29    | 23 0 54.79          | + 8 29 52.85         | 8 42 52.09          | + 18 9 33.23         | 15 22 47.92         | - 14 8 3.87          | 18 44 35.49         | - 23 28 3.42         |                     |                      |                     |                      |  |
| 30    | 23 0 30.11          | + 8 22 40.30         | 8 43 59.37          | + 18 9 26.21         | 15 24 42.12         | - 14 7 1 53.13       | 18 47 20.15         | - 23 22 19.49        |                     |                      |                     |                      |  |
| 31    | 0 7 3.67            | + 6 36 21.01         | 8 43 50.01          | + 18 9 35.30         | 15 21 57.69         | - 13 47 18.24        | 18 50 4.57          | - 23 22 25.91        |                     |                      |                     |                      |  |
| 32    | 0 10 47.16          | + 1 10 0.35          | 8 43 40.91          | + 18 9 26 51         | 15 24 49.34         | - 13 26 19.81        | 18 52 49.14         | - 23 22 29.20        |                     |                      |                     |                      |  |
| 33    | 0 14 24.99          | + 1 13 37.62         | 8 43 25.62          | + 18 9 33.           |                     |                      |                     |                      |                     |                      |                     |                      |  |

|       |   |
|-------|---|
| May 1 | 2 31 14.97 + 14 52 3.27; 8 47 19.81 + 18 46 32.78; 0 44 3.39 + 2 56 1.79; 20 32 26.79; - 20 22 29.76                  |
| 2     | 2 35 4.24 + 15 11 14.92; 3 47 39.54 + 15 45 11.47; 9 48 31.95 + 3 23 55.52; 20 34 54.81; - 20 15 35.46                |
| 3     | 3 38 54.04 + 15 29 11.50; 8 47 59.91 + 18 43 47.59; 0 53 0.70; + 3 54 46.66; 20 37 21.59; - 20 8 46.02                |
| 4     | 4 24 44.49 + 15 46 52.68; 8 48 20.93; 18 42 29.99; 0 57 29.76; + 4 19 34.49; 29 39 48.02; - 20 1 52.59                |
| 5     | 5 24 35.29 + 16 4 18.13; 8 48 42.57; + 16 40 51.68; 1 59.13; + 4 47 18.32; 20 42 13.78; - 19 54 53.36                 |
| 6     | 6 25 26.74 + 16 21 27.53; 8 49 4.85; + 18 39 19.87; 1 6 28.84; + 5 14 57.48; 20 44 38.88; - 19 47 54.52               |
| 7     | 7 24 18.73 + 16 38 20.54; 8 49 27.73; + 18 37 45.49; 1 10 58.94; + 5 42 31.26; 20 47 3.30; - 19 40 50.29              |
| 8     | 8 25.11.28; + 16 54 59.85; 8 49 51.22; + 18 38 8.56; 1 15 29.49; + 6 9 58.98; 20 49 27.03; - 19 33 42.84              |
| 9     | 9 2 4.37; + 17 11 16.13; 8 50 15.31; + 18 34 29.11; 1 20 0.94; + 6 37 19.94; 20 51 56.07; - 19 26 32.37               |
| 10    | 10 5 58.01; + 17 27 18.08; 8 50 39.98; + 18 32 47.15; 1 24 31.86; 7 4 33.46; 20 54 12.40; - 19 19 19.06               |
| 11    | 11 9 5.20; + 17 43 2.38; 8 51 5.23; + 18 31 2.69; 1 29 3.82; 7 31 38.86; 20 54 34.02; - 19 12 3.10                    |
| 12    | 12 3 13.46; + 17 58 28.74; 8 51 31.05; + 18 29 15.74; 1 33 33.94; 7 58 35.45; 20 58 54.92; - 18 4 44.67               |
| 13    | 13 17.42; + 18 13 38.88; 8 51 57.43; + 18 27 26.31; 1 38 9.44; + 8 25 22.56; 21 1.59.93; - 18 57 23.93                |
| 14    | 14 2.31.38; + 18 28 26.53; 8 52 24.37; + 18 25 34.49; 1 42 13.7; + 8 51 59.41; 20 54 1.54; 18 50 1.95                 |
| 15    | 15 3 34.50; + 18 42 57.44; 8 52 51.86; + 18 23 40.03; 1 47 17.56; + 9 25 21.71; 5 52.26; 18 42 36.24                  |
| 16    | 16 3 29.14; + 18 57 9.36; 8 53 19.90; + 18 21 43.22; 1 51 52.65; + 4 44 40.42; 7 8 11.21; + 18 39 9.67                |
| 17    | 17 3 33.29; + 19 11 2.10; 8 56 48.47; + 18 19 43.95; 1 59 28.48; + 10 10 43.01; 20 28.42; - 17 27 41.99               |
| 18    | 18 3 27.14; + 19 24 35.38; 8 54 17.57; + 18 17 42.36; 2 1 5.07; + 10 10 38 32.80; 21 12 44.86; - 18 20 12.21          |
| 19    | 19 3 41.25; + 19 47 48.67; 8 54 47.19; + 18 18 38.42; 2 9 42.45; + 10 10 38.42; 20 28.46; - 18 12 41.88               |
| 20    | 20 3 45.26; + 19 58 42.62; 8 55 17.32; + 18 20 22.12; 2 10 20 29.98; 31 27 31.71; 20 17 15.33; + 18 5 10.99           |
| 21    | 21 3 44.26; + 19 31 3.07; 8 55 47.98; + 18 11 23.39; 2 14 59.71; + 11 52 38.39; 20 19 29.32; - 17 57 38.86            |
| 22    | 22 3 53 25.29; + 19 16 20.98; 8 55 19.99; + 18 9 12.58; + 19 38.96; 20 17 26.81; 21 21 42.45; - 17 50 6.84            |
| 23    | 23 3 18.25; + 19 21 27.31; 8 56 19.99; + 18 10 5.56; 20 17 24.97; + 12 42 5.04; 21 23 54.70; - 17 42 34.86            |
| 24    | 24 4 1.27.59; + 19 28 52.62; 8 57 22.82; + 18 4 43.81; 2 29 2.22; + 13 6 23.14; 20 28 6.65; - 17 35 2.99              |
| 25    | 25 5 29.56; + 19 20 5.20; 8 57 55.49; + 18 2 25.67; 20 13 44.92; 1 39 23.45; 21 26 16.48; - 17 27 31.68               |
| 26    | 26 9 32.05; + 21 6 61.32; 8 58 28.48; + 18 0 5.83; 2 38 28.96; + 13 54 26.21; 20 26 16.98; - 19 20 1.12               |
| 27    | 27 4 18.35; + 21 11 18.24; 8 59 1.98; + 17 57 43.41; 2 43 13.25; + 17 27 64.21; 20 23 32.45; - 17 12 31.58            |
| 28    | 28 4 17.38; + 21 21 29.24; 8 59 35.98; + 17 56 18.72; + 2 47 58.82; 1 40 30.47; 21 34 42.07; - 17 5 3.34              |
| 29    | 29 4 21 42.59; + 21 31 6.31; 8 60 9; + 10 10.36; + 17 52 51.77; + 2 42 46.61; + 3 12 46; 21 23 36.83; - 16 57 36.65   |
| 30    | 30 4 24.63; + 21 40 26.58; 8 60 45.28; + 10 20 52.37; + 2 57 33.44; + 15 23 36.06; 21 36 54.17; + 16 50 1.81          |
| 31    | 31 4 21.51; 8 60 20.80; + 18 5 59.34; + 18 20 24.97; + 12 42 5.04; 21 23 44.70; - 17 42 34.86                         |
| Jun 1 | 1 4 33 57.16; + 21 57 56.92; 8 61 5.35; + 17 45 17.53; 3 7 1.18; 9 7.21; 20 43 2.13; + 16 35 28.73                    |
| 2     | 2 4 38 2.81; + 22 6 11.87; 9 2 32.52; + 17 42 47.83; 3 12 2.94; + 10 10 39.18; 21 43 4.47; - 16 11 19.94              |
| 3     | 3 4 42.89; + 22 14 0.93; 9 3 8.12; + 17 49 3.77; 3 16 54.94; + 18 1 51; 7.50; 20 47 5.79; + 16 20 56.39               |
| 4     | 4 46 15.26; + 22 11 18.24; 8 59 1.98; + 17 57 43.41; 2 43 13.25; + 17 27 64.21; 20 23 32.45; - 17 12 31.58            |
| 5     | 5 40 22.16; + 22 28 28.87; 8 59 24.51; + 17 34 41.47; 2 36 24.19; + 17 31 27.98; 21 51 4.99; + 16 26 6.69             |
| 6     | 6 4 54 22.88; + 22 28 35.73; 8 59 24.51; + 17 31 27.98; 21 31 37.47; + 17 59 30.77; 20 23 25.35                       |
| 7     | 7 4 53 36.79; + 22 41 22.17; 8 59 24.51; + 17 29 10.89; 2 36 38.84; + 19 10 31.21; 21 58 2.97; + 15 52 31.99          |
| 8     | 8 5 2.44.39; + 22 47 12.89; 8 6 17.99; + 18 26 23.25; 3 41 34.31; + 18 28 39.49; 21 58 35.10; + 15 45 38.85           |
| 9     | 9 5 32.52; + 22 52 38.64; 8 6 5.69; + 18 21 33.18; 3 49 28.88; + 18 46 47.46; 21 58 49.45; + 18 38 44.17              |
| 10    | 10 5 1.63; + 22 57 42.13; 8 7 36.19; + 18 20 38; 3 51 29.52; + 19 46 24.41; 2 50 2.52; + 15 31 57.18                  |
| 11    | 11 5 18.84; + 22 20 32.52; 8 15 17.56; + 17 37 44.88; 3 56 30.29; + 19 21 35.68; 20 13 34.39; - 15 15 15.14           |
| 12    | 12 5 19.75; + 22 6 24.51; 8 16 34.15; 9 15 55.72; + 17 44 46.66; + 2 4 16.66; + 13 5 16.47; + 16 20 55.39             |
| 13    | 13 5 23.39; + 23 19 23.54; 9 16 36.03; + 17 11 44.94; 4 6 3.35.06; + 19 54 22.73; 2 13 14.33; - 15 12 6.86            |
| 14    | 14 5 27.35; + 23 18 43.48; 9 16 16.67; + 18 4 8.43; + 11 39.04; + 20 5 59.26; 8 2.2.35; + 15 4 1.24                   |
| 15    | 15 5 31.67; + 23 11 22.17; 8 16 5.95; + 18 29 10.89; 3 36 38.84; + 19 10 31.21; 21 58 2.97; + 15 52 31.99             |
| 16    | 16 5 31.44; + 23 16 48.84; 9 16 57.64; + 18 20 25.75; 3 27 4.46; 20 54 1.54; + 14 59 21.65                            |
| 17    | 17 5 36.93; + 23 19 24.66; 9 16 39.83; + 18 20 35.11; 3 20 35.51; 21 11 34.35; + 14 53 4.86                           |
| 18    | 18 5 32.52; + 23 21 31 39.32; 8 16 56.94; + 18 20 24.81; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86           |
| 19    | 19 5 32.52; + 23 21 35.85; 9 12 20.54; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 20    | 20 5 32.52; + 23 22 39.38; 8 16 56.94; + 18 20 24.81; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 21    | 21 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 22    | 22 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 23    | 23 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 24    | 24 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 25    | 25 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 26    | 26 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 27    | 27 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 28    | 28 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 29    | 29 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 30    | 30 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| 31    | 31 5 32.52; + 23 24 44.18; 9 16 44.86; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; 20 54 1.54; + 14 53 4.86              |
| Jul 1 | 1 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 2     | 2 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 3     | 3 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 4     | 4 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 5     | 5 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 6     | 6 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 7     | 7 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 8     | 8 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 9     | 9 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35  |
| 10    | 10 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 11    | 11 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 12    | 12 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 13    | 13 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 14    | 14 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 15    | 15 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 16    | 16 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 17    | 17 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 18    | 18 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 19    | 19 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 20    | 20 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 21    | 21 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 22    | 22 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 23    | 23 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 24    | 24 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 25    | 25 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 26    | 26 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 27    | 27 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 28    | 28 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 20 25.35 |
| 29    | 29 5 38.17; + 23 18 56.91; 9 2 32.79; + 12 16 52.37; 8 5 4.93; + 18 20 25.77; 3 26 52.77; + 19 46 4.47; - 16 2        |

# 2008年第二届IOAA试题

## 理论试题

IOAA组委会 供稿/张子平、陈冬妮 翻译

比赛地点: 印度尼西亚 万隆

### 短问题

1、地球赤道上的两个观测者同时观测有恒星背景的月球的位置, 二者的经度差为180度。如果观测时月球的赤纬刚好是0度, 请画图说明观测者看到的情形(你的图中应包括月球、背景星空、两个观测者、地球), 并计算两个观测者看到的月球视赤经之差(以时分秒表示)。

**解答** 从常数表中可得: 平均地月距离 $r = 384399\text{km}$ , 地球直径 $D = 12724\text{km}$ ,  $r = D/\alpha$ ,  $\alpha$ 为弧度单位, 换算成角分为 $\alpha = 7.6$ 角分。因此两个观测者看到的月球视赤经之差为7.6角分。

2、2008年4月2日, 万隆的Bosscha 天文台使用一台口径为10cm, 焦比为f/10的望远镜观测太阳, 发现了一块NOAA编号为0987的太阳活动区。在太阳坐标系中, 该活动区相对于太阳盘面中心的位置为: 南8度, 西40度。用SBIG ST-8 CCD相机( $1600 \times 1200 \text{ pixels}$ ;  $9 \mu\text{m} \times 9 \mu\text{m}/\text{pixel}$ )对该区域拍照, 该活动区在CCD上占据的面积为 $5 \times 4$  pixels。根据天文年历知道太阳的视直径为 $32'$ , 请计算该活动区在太阳表面上占据的球面面积(以百万分之一太阳半球表面积(msh)为单位)。

**解答** 像素尺寸('') =  $206265 \times 9 / (1000 \times 1000) = 1.86''$ 。太阳盘面尺寸 $r = 32 \times 60'' / 1.86'' / \text{像素} = 1034 \text{像素} = 9306 \mu\text{m}$ , 太阳盘面半径 $R = 4653 \mu\text{m}$ 。如果 $A_s$ 是所测面积, 则:

$$A_s = 5 \times 4 \times 81 \mu\text{m}^2 = 1620 \mu\text{m}^2$$

而被投影效果修正过的真实面积 $A_m$ 为:

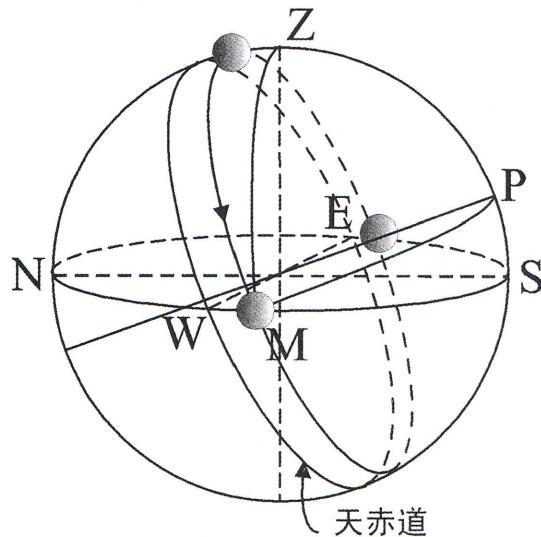
$$\frac{A_s \cdot 10^6}{2\pi R^2 \cos B \cos L} = \frac{1620 \times 10^6}{2\pi R^2 \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 40^\circ} = 15.7 \text{ msh}$$

3、满月发生的时间是印度尼西亚西部时间( $105^\circ \text{ E}$ ,  $UT + 7^h 00^m$ )2008年6月19日 $00^h 30^m$ 。对于位于Bosscha 天

文台(经度: 东经 $107^\circ 35' 00'' \text{ E}$ , 纬度: 南纬 $6^\circ 49' 00'' \text{ S}$ , 海拔: 1300.0 m)的观测者, 计算月亮在地平之上可能的最短和最长的时间。

**解答**

2008年6月19日的太阳位置为:  $\delta \approx +23^\circ.5$ ,  $\alpha \approx 6^h = 90^\circ$ 。满月时月球的赤纬范围为:  $\delta \approx -18.5^\circ \rightarrow -28.5^\circ$ (取决于交点位置), 在如图所示的球面三角形ZPM中, Z为天顶, P为南天极, M为月球。



由上图可知:  $ZP = m = 90^\circ - 6^\circ 49' = 83^\circ 11'$ ,  $ZM = p = 90^\circ$ ,  $PM = z = 90^\circ - 23^\circ 30' = 66^\circ 30'$ 。PM可能的最大值=  $z = 90^\circ - 18^\circ 30' = 71^\circ 30'$ , 而PM可能的最小值=  $z = 90^\circ - 28^\circ 30' = 61^\circ 30'$ ,  $\cos p = \cos m \cos z + \sin m \sin z \cos \angle P$ 。

PM为最大值时:  $\cos 90^\circ = \cos 83^\circ 11' \cos 71^\circ 30' + \sin 83^\circ 11' \sin 71^\circ 30' \cos \angle P$ , 可以求出:

$$\angle P = 92^\circ 17' 53'' = 6^h 9^m 11^s, 2\angle P = 12^h 18^m 22^s$$

PM为最小值时:  $\cos 90^\circ = \cos 83^\circ 11' \cos 61^\circ 30' + \sin 83^\circ 11' \sin 61^\circ 30' \cos \angle P$  可以求出:

$$\angle P = 93^\circ 43' 16'' = 6^h 14^m 53^s, 2\angle P = 12^h 29^m 46^s$$

4、假设一颗恒星的质量为 $20 M_\odot$ , 如果现在该恒星质量的20%为氦, 计算该恒星氦燃烧能够进行多长时间。假设该恒星的总光度为 $100 L_\odot$ , 总光度的30%来自于氦燃烧。碳原子 $^{12}\text{C}$ 的质量为12.000000 amu。氦核聚变为碳的公式:  $^3\text{He} + ^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C} + \gamma$ 。

## 解答

3个氦原子核的质量=  $3 \times 4.002603 \text{amu} = 12.007809 \text{amu}$ , 被用来转换成能量的质量为3个氦原子核与核聚变所产生的碳原子核的质量差:  $12.007809 \text{amu} - 12.000000 \text{amu} = 7.81 \times 10^{-3} \text{amu}$ , 这一质量差与原质量之比为 $7.81 \times 10^{-3} / 12.007809 = 6.5 \times 10^{-4}$ 。恒星质量 $m = 20 \times 1.99 \times 10^{33} = 3.98 \times 10^{34} \text{g}$ , 所以 $6.5 \times 10^{-4}$ 的20%的恒星质量将通过核聚变转换为能量, 或:

$$E = mc^2 = 4.66 \times 10^{51} \text{erg}$$

氦燃烧的寿命为:

$$t = E/(0.3L) = 1.24 \times 10^9 \text{ 年}$$

5、宇宙微波背景(CMB)目前的平均温度=2.73 K, 由此可以推断出CMB的光子是在红移 $z_{CMB} = 1100$ 处发出的。目前宇宙中的暗能量、暗物质、正常物质的密度分别为:  $\rho_{DE} = 7.1 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_{DM} = 2.4 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_{NM} = 0.5 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ 。如果我们假设暗能量是真空能量, 其密度不随时间变化。请计算CMB光子发出时( $z_{CMB} = 1100$ )的宇宙暗物质密度和暗能量密度的比值。

## 解答

现在的宇宙尺寸记为 $S_{now}$ , 红移为 $Z$ 处的宇宙尺寸记为 $S_z$ , 则宇宙尺寸变化和红移的关系为:

$$S_z = \frac{S_{now}}{1+z} = \frac{S_{now}}{1+1100} = 0.00091 S_{now}$$

所以在CMB发出时, 宇宙的尺寸为现在宇宙尺寸的0.00091倍。如果假设A为CMB发出时宇宙体积与现在宇宙体积的比, 则:

$$A = V_{CMB}/V_{now} = 0.00091^3 = 7.5 \times 10^{-10}$$

则CMB发出时的暗物质的密度为:

$$\rho_{DMatCMB} = \rho_{DM}/A = 3.2 \times 10^{-21} \text{ g/cm}^3$$

则在CMB发出时暗物质密度与暗能量密度之比为:

$$\frac{\rho_{DMatCMB}}{\rho_{DE}} = \frac{3.2 \times 10^{-21}}{7.1 \times 10^{-30}} = 4.5 \times 10^8$$

6、在银河系中心有一个气体团围绕着一个黑洞旋转, 该气体团中的氢原子自旋翻转(相应的静止频率=1420.41 MHz)所产生的射电辐射频率被测为1421.23MHz。如果该气体团和黑洞间的距离是0.2 pc, 而且气体团的旋转轨道为圆轨道。请确定气体团的速度、它的移动方向(向我们移动还是远离我们), 并请计算黑洞的质量。

## 解答

静止频率 $\nu_0 = 1420.41 \text{ MHz}$ , 测得频率 $\nu = 1421.23 \text{ MHz}$ , 因此 $\Delta\nu = \nu_0 - \nu = -0.82 \text{ MHz}$ 。从多普勒效应所计算的速度为:  $v = c \times \Delta\nu/\nu_0 = -1.73 \times 10^7 \text{ cm/s}$ , 因为 $v > \nu_0$ , 所以该气体团向我们移动。如果 $M$ 为

黑洞的质量,  $v$ 为气体团速度,  $R$ 为气体团的轨道半径, 则:  $M = Rv^2/G$ , 其中 $R = 0.2 \text{ pc} = 6.17 \times 10^{17} \text{ cm}$ , 并且从所提供的数值表中查得 $G$ 的数值, 因此有:

$$M = Rv^2/G = 1.4 \times 10^6 M_\odot$$

7、一个空间望远镜的灵敏度程度使得它刚好能够探测到一个距离为20pc的主序星, 假设该望远镜的灵敏度对所有波长都是一样的。该恒星最终会变成一个红巨星, 那时它的表面温度降为原来的 $1/3$ , 半径变成了原来的100倍。请计算该恒星被这个空间望远镜刚好能探测到的最远距离。

## 解答

以 $L$ 表示红巨星的光度,  $L_{MS}$ 表示主序星的光度,  $F$ 表示红巨星的能量流密度,  $F_{MS}$ 表示主序星的能量流密度,  $T$ 表示红巨星的温度,  $T_{MS}$ 表示主序星的温度,  $R$ 表示红巨星的半径,  $R_{MS}$ 表示主序星的半径。根据光度-温度关系式:

$$\frac{L}{L_{MS}} = \frac{R^2 T^4}{R_{MS}^2 T_{MS}^4} = 123.5$$

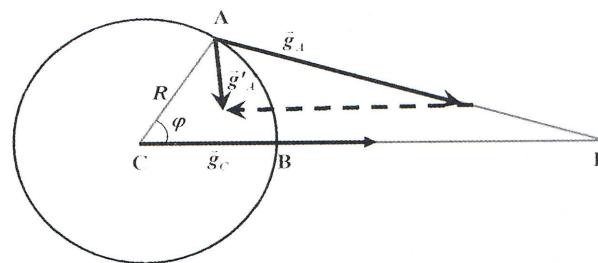
$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad \frac{F}{F_{MS}} = \frac{L}{L_{MS}} \left( \frac{d_{MS}}{d} \right)^2$$

即该恒星变成巨星之后其亮度增大了123.5倍。用同样的望远镜刚好能看到它, 我们必须让它变暗123.5倍, 让它远离的距离为:  $d/d_{MS} = 123.5^{0.5} = 11.11$ , 于是可知 $d = 222.2 \text{ pc}$ 。

8、太阳和月球的引力作用导致了海潮的涨落。考虑在地球赤道上的两点A和B, 而且A点在海平面。A点和B点间的经度差为 $\varphi$ 。如果月球在B点的天顶, 请推导在A点的由于月球引力所导致的海水的水平加速度。(请用 $\varphi$ 、地球的半径 $R$ 和地月距离来表示)

## 解答

编者注: 本题所用知识涉及到大学物理的内容, 对我国天文奥赛和国际天文奥赛(IAO)的参赛者不作要求。



如上图所示, D在图中为月球中心。月球A点和地球中心C点所产生的引力加速度(矢量)为:  $\vec{g}_A = -GM/r_A^2 \vec{r}_A'$ ,  $\vec{g}_C = -GM/r_C^2 \vec{r}_C'$ , 它们的方向均指向月球,  $M$ 为月球质量。其中,  $r_A = AD$ ,  $r_C = CD = r$ ,  $\vec{r}_A'$ 和 $\vec{r}_C'$ 分别为从月心指向A和C点的单位矢量。

月球在A点所产生的引力加速度为(对观察者来说):

$$\begin{aligned} \vec{g}_A' &= \vec{g}_A - \vec{g}_C = -(GM/r_A^2 \cdot \vec{r}_A' - GM/r_C^2 \cdot \vec{r}_C') \\ &= -(GM/r_A^3 \cdot \vec{r}_A - GM/r_C^3 \cdot \vec{r}_C) \end{aligned}$$

其中 $\vec{r}_A$ 、 $\vec{r}_C$ 分别为AD、CD方向的单位矢量， $\vec{r}_A = r_A \cdot \vec{r}_A'$ ， $\vec{r}_C = r_C \cdot \vec{r}_C'$ 。因为 $\vec{r}_A = \vec{r}_C + \vec{R}$ ， $\vec{R}$ 为A点相对于地心的位移矢量，因此：

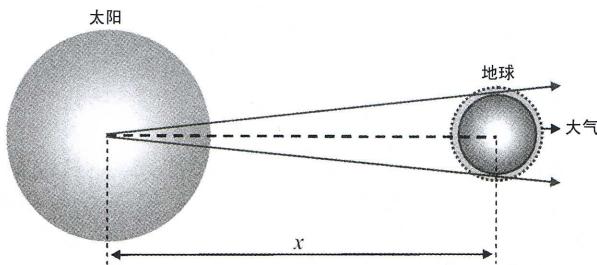
$$\vec{g}_A' = -GM/r_A^3 \cdot \vec{R} - (GM/r_A^3 - GM/r_C^3) \cdot \vec{r}_C$$

其中第一项为径向方向，而第二项的切向或水平分量等于A点海水加速度的水平分量( $r_C = r$ )，所以：

$$\begin{aligned} \vec{g}_{A(\text{水平})}' &= (GM/r^3 - GM/r_A^3) \times r \times \sin \phi \\ &= \frac{GM}{r^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (R/r)^2 - 2R/(r \cos \phi)]^{3/2}} \right\} \sin \phi \end{aligned}$$

9、太阳的辐射必须穿过地球的大气层才能抵达地球的表面。地球也向外部辐射，而且这些辐射也必须先穿过大气层才能够辐射到外空间环境去。一般来说，太阳辐射穿透地球大气层的透射率( $t_1$ )高于地球辐射向外穿透地球大气层的透射率( $t_2$ )。假设 $T_{eff\odot}$ 是太阳的有效温度， $R_\odot$ 是太阳的半径， $r_\oplus$ 是地球的半径， $x$ 为地球和太阳间的距离。请以这些变量为参数推导出地球表面温度的表达式。

**解答**



如上图所示，地球所接收的太阳能量：

$$P_{in} = \sigma T_{eff\odot}^4 \cdot 4\pi R_\odot^2 \frac{\pi r_\oplus^2}{4\pi x^2} t_1$$

地球向太空辐射出的能量：

$$P_{out} = \sigma T_\oplus^4 4\pi r_\oplus^2 t_2$$

热平衡时 $P_{in} = P_{out}$ ，因此

$$\begin{aligned} T_\oplus^4 &= \frac{T_{eff\odot}^4 t_1 R_\odot^2}{4t_2 \cdot x^2} \Rightarrow \\ T_\oplus &= \sqrt[4]{\frac{T_{eff\odot}^4 t_1 R_\odot^2}{4t_2 \cdot x^2}} = T_{eff\odot} \sqrt[4]{\frac{t_1}{4t_2} \left( \frac{R_\odot}{x} \right)^2} \end{aligned}$$

10、天蝎座 $\mu$ ( $\mu$  Sco)是视双星系统，两颗子星在2008年8月22日的坐标由下表给出。

观测用的是Bossch天文台的蔡斯折射镜，口径为600mm，焦距为10780 mm。望远镜接的CCD面积为 $765 \times 510$  pixels，单位像素尺寸为 $9\mu\text{m} \times 9\mu\text{m}$ ，请回答以下两个问题：

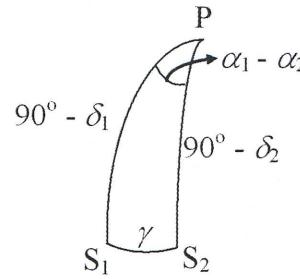
|                  | $\alpha$ (RA)       | $\delta$ (Dec)       |
|------------------|---------------------|----------------------|
| $\mu$ Sco 1 (主星) | $20^h 17^m 38^s.90$ | $-12^\circ 30' 30''$ |
| $\mu$ Sco 2 (次星) | $20^h 18^m 03^s.30$ | $-12^\circ 32' 41''$ |

1)能够在一次CCD的曝光中同时拍摄两颗子星吗？请用英文Yes或No回答，并给出估算步骤，画出必要的图。

2)求出次星(secondary, S2)相对于北极(North)的方位角。

**解答**

1)CCD尺寸： $(9 \times 765)\mu\text{m} \times (9 \times 510)\mu\text{m} = 6885\mu\text{m} \times 4590\mu\text{m} \approx 6.9\text{mm} \times 4.6\text{mm}$ ，望远镜的焦距 $F = 10780$  mm，一个像素所对应的角度(角秒)= $206265 \times \text{像素尺寸}(\mu\text{m}) / (1000 \times F) = 206265 \times 9 / (1000 \times 10780) = 0.1722''$ 。CCD所对应的视场= $(765 \times 510) \times 0.1722 = 131.7330'' \times 87.8220'' = 2.1956'' \times 1.4637'$ ，对 $\mu$  Sco 1： $\alpha_1 = 20^h 17^m 38^s.90 = 20.2941^h = 304.4121^\circ$ ， $\delta_1 = -12^\circ 30' 30'' = -12.5083^\circ$ 。对 $\mu$  Sco 2： $\alpha_2 = 20^h 18^m 03^s.30 = 20.3009^h = 304.5138^\circ$ ， $\delta_2 = -12^\circ 32' 41'' = -12.5447^\circ$ 。



如上图所示，设 $\gamma$ 为两颗星的角距，用球面三角学公式： $\cos \gamma = \cos(90^\circ - \delta_1) \cos(90^\circ - \delta_2) + \sin(90^\circ - \delta_1) \sin(90^\circ - \delta_2) \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$ ，因此：

$$\cos \gamma = 0.999998298, \gamma = 6.3424'$$

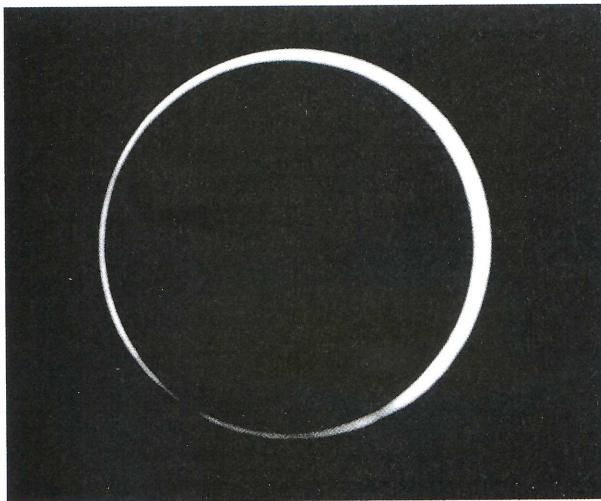
答案为“否”，因为 $\gamma > \sqrt{(2.1956'')^2 + (1.4637'')^2}$ (CCD的对角线所对应的最大角距)。

b)设 $S_1$ 为位置角，根据球面三角形正弦定理： $\sin(\alpha_2 - \alpha_1) / \sin \gamma = \sin S_1 / \sin(90^\circ - \delta_2)$ ，带入数据可得： $\sin S_1 = 0.9388$ ， $S_1 = 69.8535^\circ$ 或 $110.1466^\circ$ ，据图示可知 $110.15^\circ$ 为正确的角度。

11、下图(见下页)是1998年8月22日在印尼Dumai Riau所拍摄的日环食的35毫米胶卷照片，所使用的望远镜的有效孔径为10cm，焦比为f/15。在这个照片的底片上，日面的直径为13.817 mm，月面的直径为13.235 mm。请以km为单位分别确定日地和地月的距离，并确定在这次日环食中月球遮挡日面的百分比。

**解答**

因 $D = 10\text{cm}$ ， $f = F/D = 15$ ，则 $F = 150\text{cm}$ ，其中 $D$ 为望远镜孔径， $F$ 为望远镜焦距。在望远



镜焦平面所成像的尺寸比例  $S = 206265/F$  (" /mm) =  $(206265/1500) = 137.51$  " /mm。太阳的角直径为  $137.51$  " /mm  $\times 13.817\text{mm} = 1899.97567$  " =  $0^\circ 31'39'' .98$ , 日地距离为  $1392000/(0^\circ.527771019/180^\circ) \times \pi = 151118045.9$  km, 月球的角直径为:  $137.51$  " /mm  $\times 13.235\text{mm} = 1819.94485$  d =  $0^\circ.505540236 = 0^\circ 30'19'' .94$ , 地月距离为:  $3476/(0^\circ.505540236/180^\circ \times \pi) = 393955.0515$  km。因此, 太阳盘面被月球遮掩的比例为:  $(13.235\text{ mm}/13.817\text{ mm})^2 \times 100\% = 91.75\%$ 。

12、在一个遥远的星系中有一颗Ia型超新星, 其最大光度为  $5.8 \times 10^9 L_\odot$ 。假定用你的望远镜观测这颗超新星, 发现它的亮度为织女星(Vega)的  $1.6 \times 10^{-7}$  倍。已知超新星的宿主星系的红移为  $z = 0.03$ , 请利用题目给出的关于超新星的数据计算星系的距离(以pc为单位)和哈勃时间(宇宙年龄)。

**解答** 能量流密度  $F$  与光度  $L$  的关系为:  $F = L/(4\pi d^2)$ , 对织女星:  $F_V = L_V/(4\pi d_V^2)$ , 对超新星:  $F_{SN} = L_{SN}/(4\pi d_{SN}^2)$ ,  $F_{SN} = 1.6 \times 10^{-7} F_V$ , 因此:

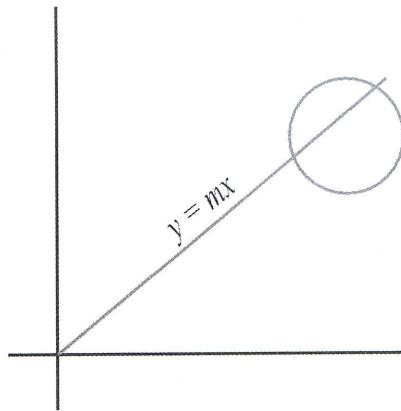
$$d_{SN} = d_V \sqrt{\frac{L_{SN}}{L_V} \times \frac{1}{1.6 \times 10^{-7}}} = 1.3 \times 10^8 \text{ pc}$$

如果  $t_H$  为哈勃时间, 则红移-距离-哈勃时间的关系为:

$$t_H = d_{SN}/cz = 1.41 \times 10^{10} \text{ 年}$$

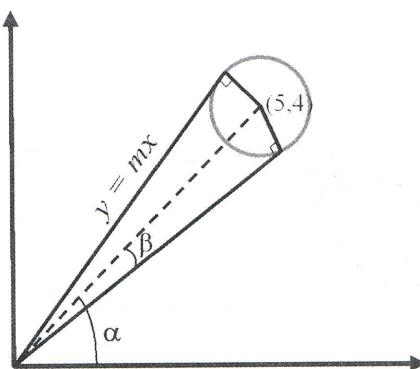
13、一艘旅行中的宇宙飞船与某个物体近距离相遇了, 飞船上的科学家打算利用携带的望远镜对该物体进行更仔细的观测。简单起见, 假定我们只在二维平面上考虑这个问题, 而且飞船(也就是望远镜)的位置是静止在平面的原点(0, 0)的。被观测物体的形状是圆盘状的, 其边界可以用公式表示为:  $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 。设  $\varphi$  为观测物体时望远镜的指向与X轴间的夹角, 当用望远镜观测该物体时, 望远镜的指向从物体的一端扫到另一端, 请计算  $\tan \varphi$  所对应的最大值和最小值, 要求画出必要的图, 用几何或数学方法都可以。

**解答**



**I.代数解法** 如上图所示, 令  $y = mx$  为望远镜的视方向。则视线与圆的交点为  $x^2 + (mx)^2 - 10x - 8mx + 40 = 0$ , 即  $(1+m^2)x^2 - (10+8m)x + 40 = 0$ 。该方程只在以下条件下有解:  $D = b^2 - 4ac = (10+8m)^2 - 4(1+m^2) \times 40 \geq 0$ , 由此得:  $5/6 - \sqrt{10}/2 \leq m \leq 5/6 + \sqrt{10}/2$ 。因此  $\tan \varphi$  的最大值为  $5/6 + \sqrt{10}/2$ , 最小值为  $5/6 - \sqrt{10}/2$ 。

### II.几何解法



如上图所示, 用解析几何方法写下该圆的公式:  $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$ , 圆的中心为(5, 4), 半径为1。则  $\tan \alpha = 4/5$ ,  $\tan \beta = 1/\sqrt{40}$ 。最小仰角为:  $\tan(\alpha - \beta) = 5/6 - \sqrt{10}/2$ , 最大仰角为:  $\tan(\alpha + \beta) = 5/6 + \sqrt{10}/2$ 。

14、有一个潜在危险天体(PHO)受到地球引力的作用正在距离地球很近的轨道上运行。假设  $u$  为该天体与地球间距离的倒数,  $p$  为其线性动量值。当天体在轨道上运行时,  $u$  作为  $p$  的函数在 A 点和 B 点的值列在下面的表格中。请计算该天体的质量和总能量, 并给出  $u$  作为  $p$  的函数表达式, 画出该函数从 A 点到 B 点的  $u \sim p$  图(以  $u$  为纵坐标,  $p$  为横坐标)

|   | $p (\times 10^9 \text{ kgms}^{-1})$ | $u (\times 10^{-8} \text{ m}^{-1})$ |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| A | 0.052                               | 5.15                                |
| B | 1.94                                | 194.17                              |

**解答** 该系统机械能守恒, 则:  $E = p^2/2m - GMm/r = p^2/2m - uGMm$ 。对 A、B 两点分别代入  $p$  和  $u$ ,

并求出 $m$ 和 $E$ 的表达式:

$$E_A = \frac{p_A^2}{2m} - GMmu_A = E_B = \frac{p_B^2}{2m} - GMmu_B$$

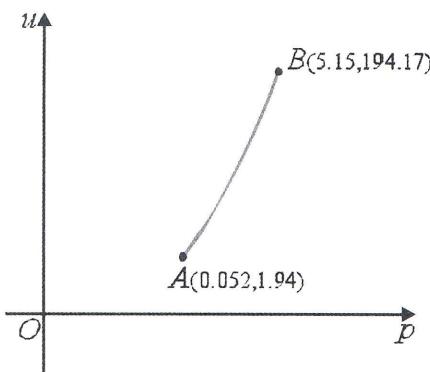
因此:

$$m = \sqrt{\frac{p_A^2 - p_B^2}{2GM(u_A - u_B)}} = 50 \text{ 吨}$$

可以求出:

$$E = p_A^2/2m - GMmu_A = -1.0 \times 10^{12} \text{ J}$$

在绘图时, 使用如下公式:  $E = p^2/2m - uGMm$ ,  $u = p^2/2GMm^2 - E/GMm$ , 此函数图像应为抛物线, 如下图。



15、星系NGC2639被定义为Sa型旋涡星系, 测得其最大的旋转速度为 $v_{max} = 324 \text{ km/s}$ 。经过各种消光改正后, 测得该星系B波段的视星等为 $m_B = 12.22$ 。天文学家经常需要测定旋涡星系的一个特征半径 $R_{25}$ (以kpc为单位), 该特征半径 $R_{25}$ 的定义为: 在 $R_{25}$ 处, 星系的表面亮度降为25 mag<sub>B</sub>/arcsec<sup>2</sup>。而旋涡星系存在以下关系:  $\lg R_{25} = -0.249M_B - 4.00$ , 其中 $M_B$ 为B波段星系的绝对星等。

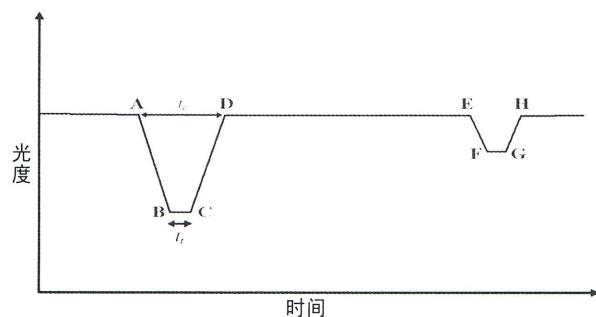
对于Sa型旋涡星系来说, B波段的Tully-Fisher关系为:  $M_B = -9.95 \lg v_{max} + 3.15$  ( $v_{max}$ 以km/s为单位)。请利用上述已知关系, 计算NGC2639包含在 $R_{25}$ 以内的质量[以太阳质量为单位, 已知太阳的色指数为( $m_{B\odot} - m_{V\odot} = 0.64$ )]和该星系 $R_{25}$ 以内B波段的光度(以太阳光度 $L_\odot$ 为单位)。

**解答**

NGC 2639在B波段的绝对星等为 $M_B = -9.95 \lg v_{max} + 3.15 = -9.95 \lg 324 + 3.15 - 21.83$ 。 $\lg R_{25} = -0.249M_B - 4.00 = 1.4357$ , 因此 $R_{25} = 27.2678 \text{ pc} = 8.41 \times 10^{19} \text{ cm}$ , NGC 2639的质量估算:  $M = v^2 R_{25}/G = 1.32 \times 10^{42} \text{ kg} = 6.62 \times 10^{11} M_\odot$ 。太阳的B波段绝对星等:  $M_{B\odot} = M_{V\odot} + (m_{B\odot} - m_{V\odot}) = 4.82 + 0.64 = 5.46$ , 这意味着太阳在蓝波段相对于A0标准星要暗。根据星等易于求出NGC 2639的光度为(以太阳光度 $L_\odot$ 为单位):  $L = 8.24 \times 10^{10} L_\odot$ 。

## 长问题

1、一个食双星系统的周期为30天, 下图所示的测光曲线显示其次星掩主星(从点A到点D)的时间为8个小时【从初亏(第一次相切)到复圆(第四次相切)的时间】，而从B点(第二次相切)到C点(第三次相切)的时间为1小时18分钟。光谱测量显示该系统主星的最大视向速度为30 km/s, 次星的最大视向速度为40km/s。如果我们假设它们的轨道为圆轨道, 且它们的轨道倾角 $i = 90^\circ$ (轨道面与视向连线共面), 请确定这两颗恒星的半径和质量(以太阳的半径和质量为单位)。



**解答**

如上图所示, 双星周期 $P = 0.0821$ 年, 食的时间 $t_e = 8^h = 0.0009$ 年, 全食的时间 $t_t = 1^h 18^m = 0.0001$ 年, 主星的径向速度 $V_{r1} = 30 \text{ km/s} = 6.3285 \text{ AU/year}$ , 次星的速度 $V_{r2} = 40 \text{ km/s} = 8.4380 \text{ AU/year}$ 。

对圆轨道 $V_r = 2\pi/P$ , 轨道半径 $a = PV_r/2\pi$ , 对主星:

$$a_1 = PV_{r1}/2\pi = 0.0827 \text{ AU} = 1.24 \times 10^7 \text{ km}$$

对次星:

$$a_2 = PV_{r2}/2\pi = 0.1103 \text{ AU} = 1.65 \times 10^7 \text{ km}$$

两星间距为:  $a = a_1 + a_2 = 2.89 \times 10^7 \text{ km}$ 。主星的半径可以由以下等式确定:

$$R_1 = 2\pi a / 4P \times (t_e + t_t) = 0.0039 \text{ AU} = 0.84R_\odot$$

次星的半径可以由以下等式确定(可参考137页图片):

$$R_2 = 2\pi a / 4P \times (t_e - t_t) = 0.0028 \text{ AU} = 0.61R_\odot$$

由开普勒第三定律:  $a^3 \sin^3 i / P^2 = (M_1 + M_2)$ , 且 $M_1/M_2 = a_2/a_1$ , 代入 $i = 90^\circ$ ,  $\sin i = 1$ , 则:

$$M_1 = 0.61M_\odot, \quad M_2 = \frac{a^3}{P^2(1 + a_2/a_1)} = 0.46M_\odot$$

2、对一颗恒星进行Johnson UBV系统测光, 测得该恒星在UBV三个波段的视星等分别为 $U = 8.15$ ,  $B = 8.50$ ,  $V = 8.14$ 。根据该恒星的光谱型得知其U-B的本征(原始)色指数值为 $(U - B)_0 = -0.45$ , 如果该恒星的半径为 $2.3R_\odot$ , 绝对热星等为 $M_{bol} = -0.25$ , 热改正(BC)值为 $BC = -0.15$ ,

通过计算确定：

1)该恒星在U、B、V三个波段的本征视星等(考虑星际消光, 消光值与色余E(B-V)之间成正比关系, 其比例系数为 $R_V = 3.2$ )

2)该恒星的有效温度

3)该恒星的距离(以pc为单位)

**注释:** 色余即测得的色指数与其对应波段的本征色指数之差, U - B 波段的色余E(U-B)与B - V波段的色余E(B-V)之间存在关系:  $E(U - B) = 0.72 E(B - V)$

**解答**

已知 $U = 8.15$ ,  $B = 8.50$ ,  $V = 8.14$ ,  $(U - B)_0 = -0.45$ ,  $R = 2.3R_\odot = 1.60 \times 10^{11}$  cm,  $M_{bol} = -0.25$ ,  $BC = -0.15$ 。

1)  $U - B = 8.15 - 8.50 = -0.35$ , 对 $U - B$ :

$$E(U - B) = (U - B) - (U - B)_0 = 0.10$$

$U - B$  和 $B - V$ 之间的关系为:  $E(U - B) = 0.72E(B - V)$ , 可知:

$$E(B - V) = 0.10/0.72 = 0.14$$

设 $A_v$ 为星际消光, 且 $R = 3.2$ , 则:  $A_v = 3.2E(B - V) = 3.2 \times 0.14 = 0.45$ 。由 $V - V_0 = A_v$ 得 $V_0 = V - A_v = 8.14 - 0.45 = 7.69$ 。据 $(B - V) = (B - V) - (B - V)_0$ , 可得 $(B - V)_0 = (B - V) - E(B - V) = (8.50 - 8.14) - 0.14 = 0.22$ ; 据 $(B - V)_0 = B_0 - V_0 = 0.22$ , 可得 $B_0 = 0.22 + V_0 = 0.22 + 7.69 = 7.91$ ; 据 $(U - B)_0 = U_0 - B_0 = -0.45$ , 可得:  $U_0 = B_0 - 0.45 = 7.91 - 0.45 = 7.46$ 。

2) 依据光度-绝对星等关系 $M_{bol} - M_{bol\odot} = -2.5\lg(L/L_\odot)$ , 易于求出:

$$L/L_\odot = 10^{-(M_{bol} - M_{bol\odot})/2.5} = 100$$

所以有:  $L = 100L_\odot = 3.90 \times 10^{35}$  erg/s, 据 $L = 4\pi\sigma R^2 \cdot T_{eff}^4$ , 可得 $T_{eff} = 12092$  K。

3) 因为 $M_v - M_{bol} = BC$ , 所以 $M_v = M_{bol} + BC = -0.25 - 0.15 = -0.40$ 。又由 $m_v - M_v = -5 + 5\lg d + A_v$ , 可得

$$5\lg d = m_v - M_v + 5 - A_v = 13.09$$

因此 $d = 10^{13.09/5} = 414.9$  pc。

3、对宇宙微波背景(CMB)的测量显示, 对于整个宇宙来说, 微波背景的温度在很高精度上来说都是均匀的。假定从宇宙再复合时期(recombination,  $T_r \approx 3000$  K,  $t_r \approx 300000$  年)发出的光子直到今天( $T_0 \approx 3$  K,  $t_0 \approx 1.5 \times 10^{10}$  年)才到达地球。宇宙尺度因子 $S$ 是表征宇宙膨胀的值, 今天( $t = t_0$ )的 $S$ 值记为 $S_0 = S(t = t_0) = 1$ , 而对于宇宙其他时间 $t$ 的 $S$ 值记为 $S_t = S(t < t_0) < 1$ 。宇宙暴胀结束( $t = 10^{-32}$  秒)直到再复合时刻, 这期间宇宙都是处于由辐射主导的状态; 从再复合时期直到今天, 宇宙则变为由物质主导的。

当宇宙处于辐射主导时期, 尺度因子 $S$ 随时间 $t$ 的变化关系为 $S$ 正比于 $\sqrt{t}$ , 而在物质主导时期, 尺度因子 $S$ 随时间的变化关系为:  $S$ 正比于 $t^{2/3}$ 。

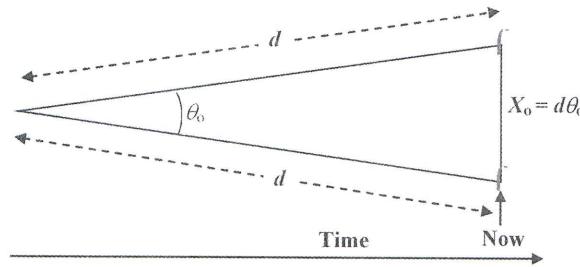
1) 请估算再复合时刻宇宙的视界距离(horizon distances, 以角度表示)。假设宇宙的温度 $T$ 与尺度因子的倒数 $1/S$ 成正比, 画出必要的图示。

注: 以角度表示的视界距离是指在宇宙微波背景辐射中, 当再复合发生(CMB光子产生)时能够彼此通过光子联系(彼此能够看到)的两点间最大角距离。

2) 假设宇宙微波背景遗迹中有两个点, 今天我们测得二者间的角距离为5度, 二者的角距离不随宇宙膨胀而变化, 请问它们之间能否以光信号联系(亦即它们是否能够彼此看到)? 请用数值说明原因, 并用英文Yes或No作答。

3) 请估算暴胀结束时( $t = 10^{-32}$ 秒)宇宙的大小。

**解答**



a) 如上图所示,  $X_0 = d\theta_0$ , 这里 $d = c(t_0 - t_r) \approx ct_0$ ,  $t_0 \gg t_r$ 。 $S$ 被定义为 $S_0 = S(t = t_0) = 1$ , 且 $S_t = S(t < t_0) < 1$ 。在复合期时, 天体间的最大距离为:

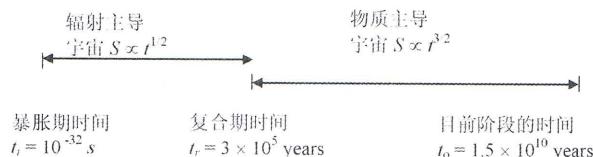
$$X_r = S_r X_0 = S_r \theta_0 t_0 c$$

又由 $X_r = ct_r$ , 可得:

$$ct_r = S_r \theta_0 t_0 c, \theta_0 = t_r / (S_r t_0)$$

从 $T \propto 1/S$ 可知:  $S_0/S_r = T_r/T_0$ , 即 $1/S_r = T_r/T_0$ , 因此可求出 $\theta_0 = t_r T_r / (t_0 T_0) = 114^\circ$ 。

b) 不, 因为 $\alpha > \theta_0$ 。



c) 如上图所示, 从复合期时( $t_r$ )到目前( $t_0$ ):  $S \propto t^{2/3}$ , 可得:

$$S_0/S_r = t_0/t_r = 1.36 \times 10^3$$

宇宙在 $t_r$ 时的尺寸为:

$$1.5 \times 10^{10} / (1.36 \times 10^3) = 1.11 \times 10^7 \text{ 光年}$$

在暴胀结束时( $t_r = 3 \times 10^5$ 年到 $t_i = 10^{-32}$ 秒), 宇宙是辐射主导的, 可得:

$$S_r/S_i = \sqrt{t_r/t_i} = 3.08 \times 10^{22}$$

在暴胀结束时宇宙的尺寸为:

$$1.1 \times 10^7 / (3.08 \times 10^{22}) \text{ 光年} \approx 3 \text{ 米}$$

| <i>i</i> | Distance Indicator 距离测定的方法            | Virgo Distance (Mpc) 室女座星系团距离 |
|----------|---------------------------------------|-------------------------------|
| 1        | Cepheids造父变星                          |                               |
| 2        | Nova新星                                |                               |
| 3        | Planetary Nebulae行星状星云                | $15.2 \pm 1.1$                |
| 4        | Globular Cluster球状星团                  | $18.8 \pm 3.8$                |
| 5        | Surface Brightness Fluctuation 表面亮度起伏 | $15.9 \pm 0.9$                |
| 6        | Tully-Fisher relation                 | $15.8 \pm 1.5$                |
| 7        | Faber-Jackson relation                | $16.8 \pm 2.4$                |
| 8        | Type Ia Supernovae Ia型超新星             | $19.4 \pm 5.0$                |

## 数据分析试题

1、室女座星系团。室女座星系团是离我们最近的大星系团，它在天空中所对应的视角近10度而且有若干个明亮的星系。一件有意思的事情是通过测定室女座星系团的距离来推导有用的宇宙学常数，本页上表提供了测定室女座星系团距离的不同方法(列在表格的左列)。表格的右列出了该种测量方法所测的的平均距离 $d_i \pm s_i$ ,  $s_i$ 为标准偏差。

1) 使用加权平均的方法，计算到室女座星系团的平均距离:  $d_{avg} = \sum_i (d_i/s_i^2)/\sum_i (1/s_i^2)$ 。这里的*i*包含了8种不同测量距离的方法。

2) 在上一问中所得的距离估算值的误差是多少？(以Mpc为单位)

室女座星系团的光谱测量显示它有着1136 km/sec的退行速度。请估算哈勃常数及其误差。

3) 请用上一问中获得的哈勃常数计算哈勃时间(宇宙的年龄)及其误差。

2、双星系统的质量确定。半人马座α(Centauri α)含有3颗星，其中的两个主序星Centauri A和Centauri B构成一个双星系统，它的第三颗星叫做Proxima Centauri，比其他两颗星小而且暗。Centauri A和Centauri B的最大角距为17.59角秒。这一双星系统的轨道周期为79.24年。Centauri A和Centauri B的视星等分别为-0.01 和1.34，色指数分别为0.65 和0.85。请用给出的主序星数据表来回答以下问题。其中BC为星等的热改正， $(B - V)_0$ 为恒星的内禀颜色(或称色指数)。

| $(B - V)_0$ | $T_{eff}$ | BC   | $(B - V)_0$ | $T_{eff}$ | BC   |
|-------------|-----------|------|-------------|-----------|------|
| -0.25       | 24500     | 2.30 | -0.23       | 21000     | 2.15 |
| -0.20       | 17700     | 1.80 | -0.15       | 14000     | 1.20 |
| -0.10       | 11800     | 0.61 | -0.05       | 10500     | 0.33 |
| 0.00        | 9480      | 0.15 | 0.10        | 8530      | 0.04 |
| 0.20        | 7910      | 0    | 0.30        | 7450      | 0    |
| 0.40        | 6800      | 0    | 0.50        | 6310      | 0.03 |
| 0.60        | 5910      | 0.07 | 0.70        | 5540      | 0.12 |
| 0.80        | 5330      | 0.19 | 0.90        | 5090      | 0.28 |
| 1.00        | 4840      | 0.40 | 1.20        | 4350      | 0.75 |

1) 请画出 $BC$ 和 $(B - V)_0$ 间的关系曲线。

2) 用以上曲线确定Centauri A 和Centauri B的热星等(热改正后的星等)。

3) 确定每个恒星的质量。

提示：星等的热改正是为了把一颗恒星的视星等转换为热星等所必须做的修正，即： $BC = m_v - m_{bol}$ 或 $BC = M_v - M_{bol}$ 。可能用到的质量-光度关系： $M_{bol} = -10.2 \times \lg(M/M_\odot) + 4.9$

3、陨石的年龄。放射性衰变的基本公式可以表述为：

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

这里 $N(t)$ 和 $N_0$ 分别是放射性同位素在时间 $t$ 和 $t = 0$ 时的原子存留数， $\lambda$ 为衰变常数。衰变所产生的衰变产物被称作radiogenics，其原子数目定义为：

$$D(t) = N_0 - N(t)$$

基于这些，天文学家们试图确定一组陨石样品的年龄。他们有两类陨石样品：allende球粒状陨石(A)和玄武岩无球粒陨石(B)。在这些样品里，他们测定 $^{87}\text{Rb}$ 和 $^{87}\text{Sr}$ 两种元素的丰度，这里我们假设全部的 $^{87}\text{Sr}$ 都是由 $^{87}\text{Rb}$ 衰变产生的。这一同位素衰变的衰变常数 $\lambda$ 为 $1.42 \times 10^{-11}/\text{年}$ 。除此之外，非衰变元素 $^{86}\text{Sr}$ 的含量也被测定。这些元素含量的测量数据被列在下表中(见下页)，单位为ppm(百万分之一，浓度单位)

| 样品号 | 陨石类型 | $^{86}\text{Sr}$ | $^{87}\text{Rb}$ | $^{87}\text{Sr}$ |
|-----|------|------------------|------------------|------------------|
| 1   | A    | 29.6             | 0.3              | 20.7             |
| 2   | B    | 58.7             | 68.5             | 44.7             |
| 3   | B    | 74.2             | 14.4             | 52.9             |
| 4   | A    | 40.2             | 7.0              | 28.6             |
| 5   | A    | 19.7             | 0.4              | 13.8             |
| 6   | B    | 37.9             | 31.6             | 28.4             |
| 7   | A    | 33.4             | 4.0              | 23.6             |
| 8   | B    | 29.8             | 105.0            | 26.4             |
| 9   | A    | 9.8              | 0.8              | 6.9              |
| 10  | B    | 18.5             | 44.0             | 15.4             |

1) 推导出以 $D_{(t)}/N_{(t)}$ 为参数的 $t$ 的表达式。

2)确定这一放射性衰变的半衰期 $t_{1/2}$ , 即衰变产物的原子数目达到衰变前母衰变元素原子数一半时的时间。

3)两种同位素原子数目的比例的信息比单个元素的丰度的信息更为有价值, 因为很可能有初始的Sr元素存在。请选择( $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ )为主变量( $x$ )和( $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ )为从变量( $y$ ), 推导出能够代表实验数据的线性回归关系。

4)以( $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ )为纵轴、( $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ )为横轴画图, 并请画出每类陨石的回归线。(在中间计算过程中请至少使用小数点后7位数字)

5)请接着确定每一类陨石的年龄以及年龄的误差。哪一类陨石更古老?

6)确定每一类陨石的初始( $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ )值及其误差。

**提示:** 任意一组实验数据( $X_i, Y_i, i=1, \dots, n$ )的线性回归拟合为:  $y = a + bx$ , 其线性回归的拟合常数为:  $b = SS_{xy}/SS_{xx}$ ,  $a = \bar{y} - b\bar{x}$ 。其中:

$$\begin{aligned} SS_{xx} &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \\ SS_{yy} &= \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 \\ SS_{xy} &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i \end{aligned}$$

$a$ 与 $b$ 的标准偏差可以通过以下公式计算:

$$\begin{aligned} S_a &= \sqrt{\frac{SS_{YY} - SS_{XY}^2/SS_{XX}}{(n-2) \cdot SS_{XX}} \times \sum_{i=0}^n X_i^2} \\ S_b &= \sqrt{\frac{SS_{YY} - SS_{XY}^2/SS_{XX}}{(n-2) \cdot SS_{XX}}} \end{aligned}$$

## 观测试题

1、图1给出的是2008年8月21日晚7时(考试当地时间)南天的部分星图。不幸的是, 星图上遗漏了摩羯座和天蝎座的一些亮星。现在, 请你对照模拟的星空图, 把这两个星座遗漏的亮星补全。为了帮助你记起这些亮星, 一些常用的亮星名在表1中给出。请你在星图上尽可能多地将摩羯座和天蝎座的遗漏的亮星用小圆圈标注在正确的位置上(满分为60分, 正确地标出的星越多得分越多), 并将表1中的属于这两个星座的亮星的对应编号写在星图的对应位置上(满分为60分, 正确地标出的星越多得分越多)。然后, 请在星图上标出天蝎座和摩羯座的边界线(每个星座15分)。(图表从略-编者)

2、利用组委会提供的望远镜和CCD你能拍得一张星空照片, 请在这张照片上确认尽可能多的恒星。首先请在下面列出的5个天区中选择一个作为观测目标(此表从略-编者), 然后将望远镜指向该天区, 你可以使用三种不同的曝光时间分别对该天区拍照, 利用CCD相机得到三张该天区的照片。请将观测的结果保存并打印出来, 如果有必要, 可以请求技

术助手帮忙。选择三张照片中最好(最合适)的一张用来确认所观测天区尽可能多的恒星。