HFAA的M31之旅 参考解答

依旧 by HFAA13.0 郭雨泽

(T1) 设晴天时M31流量密度为F_0，则当前观测值为$F = F_0 \cdot e^{-\tau}$.故

$$m - m_0 = -2.5\lg\frac{F}{F_0} = 2.5(\lg e)\cdot\tau = 2.0\,,$$

$$\boxed{m = m_0 + 2.0^{\mathrm{m}} = 5.44^{\mathrm{m}} > 4.0^{\mathrm{m}}}$$

因此答案是**No**,无法看到.

设所需最小的的望远镜口径为$D_{\min}$(单位为mm)，由极限星等公式

$$m_1 = 2.1 + 5\lg D_{\min} - 2 = 5.44$$

解得$D_{\min} = 10^{1.068}\ \mathrm{mm} = \boxed{11.65\ \mathrm{mm}}$.

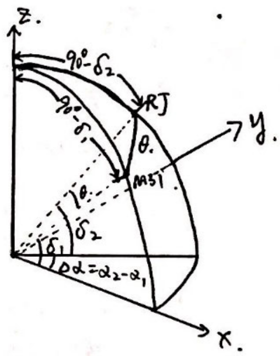
※注意：目视极限星等下降，望远镜也受影响.

(T2) 方法一：球面三角法.

易知坐标: $\alpha_1 = 10.97°$, $\delta_1 = 41.385°$

$\alpha_2 = 29.646°$, $\delta_2 = 49.208°$

$\therefore \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 18.676°$.



由边正弦公式

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(90° - \delta_2)\cdot\cos(90° - \delta_1)\\ &\quad + \sin(90° - \delta_2)\cdot\sin(90° - \delta_1)\cdot\cos\Delta\alpha\\ &= \sin\delta_1\cdot\sin\delta_2 + \cos\delta_1\cdot\cos\delta_2\cdot\cos\Delta\alpha\\ &= 0.9649\end{aligned}$$

$\therefore \boxed{\theta = 15.23°}$.

方法2:空间向量法.

令M31方向单位矢量为

$$\boldsymbol{r}_1 = (\cos\delta_1,\, 0,\, \sin\delta_1),$$

则

$$\boldsymbol{r}_2 = (\cos\delta_2\cos\Delta\alpha,\, \cos\delta_2\sin\Delta\alpha,\, \sin\delta_2)$$

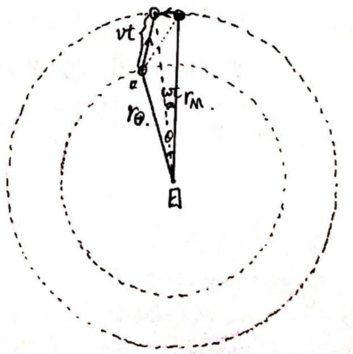
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_2|} = \cos\delta_1\cos\delta_2\cos\Delta\alpha + \sin\delta_1\sin\delta_2 = 0.9649$$

$\therefore \boxed{\theta = 15.23°}$

(T3) 由几何关系易求得

$$\theta = \arccos\left(\frac{1^2 + 1.524^2 - 0.66^2}{2\times1\times1.524}\right) = 18.71° = 0.3265\ \mathrm{rad}.$$

由开普勒第三定律求得$\omega_{\mathrm{M}} = 1.0583\times10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$.



设在太阳系中看来,骑行时间为t.则有

$$r_{\oplus}^2+r_{\mathrm{M}}^2-2r_{\oplus}\cdot r_{\mathrm{M}}\cdot\cos(\theta-\omega_{\mathrm{M}}t)=v^2t^2$$

解得$t\approx 32871.58\ \mathrm{s}=9.131\mathrm{h}=\boxed{9\mathrm{h}7\mathrm{m}52\mathrm{s}}$

而在阿猫们自己看来，由于狭义相时论,

$$t'=t\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=32869.94\ \mathrm{s}=\boxed{9\mathrm{h}7\mathrm{m}50\mathrm{s}}.$$

(T4) 假设光帆面积与$4\pi r^2$相比极小，故光辐射压力F可视为全部沿径向．易得

$$F_{\mathrm{G}}=F,$$

$$\Rightarrow G\frac{M_{\odot}m}{r^2}=\frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}\cdot\frac{S}{c}$$

其中S为光帆面积.

解得

$$S=\frac{4\pi GM_{\odot}mc}{L_{\odot}}=\boxed{65280\ \mathrm{m}^2}.$$

显然$S\ll 4\pi r^2$ （$r\sim 10^{11}$ m）,假设成立.

(实际上查阅多份资料后发现普遍使用的光辐射压公式为$p=\dfrac{1}{3}\dfrac{L}{4\pi r^2c}$，也就是说帆的面积要大三倍左右．但是为了致敬CNAO，仍旧采用相同公式_(:з)∠)_)

(T5) 马门溪龙望远镜的底片比例尺为

$$\frac{206264.8''}{F\,(\mathrm{mm})}=20.63''/\mathrm{mm}.$$

则易知尺寸为$\boxed{51.7\ \mathrm{cm}\times 20.3\ \mathrm{cm}}$.

作为常识,我们认为马门溪龙的瞳孔直径为20 mm．故角分辨率

$$\theta=\frac{1.22\lambda}{D}=3.355\times10^{-5}\ \mathrm{rad}=6.92''$$

距离要远$\boxed{\dfrac{178'}{6.92''}=1543.35\text{倍}}$

!但·是，这时的M31视星等变为$m'=m+5\lg\dfrac{r'}{r}=19.38^{\mathrm{m}}$.

而马门溪龙望远镜极限星等为$\boxed{m_1=2.1+5\lg D=8.61^{\mathrm{m}}<19.38^{\mathrm{m}}}$

实际上是看不到M31的.

因此,本题答案是**不可能用望远镜只能看到一个亮点**(坑1).

(D1) 由距离模数公式得

$$M_{\mathrm{V}}=V-5\lg\frac{r}{10\ \mathrm{pc}}=V-5\lg\frac{1.524}{(10\ \mathrm{pc})\cdot\pi''}.$$

而由星等定义

$$m=-2.5\lg\frac{F}{F_0}=-2.5\lg\frac{L}{4\pi r^2F_0}=-2.5\beta\lg\frac{kP}{4\pi r^2F_0}.$$

代入得

$$\boxed{M_{\mathrm{V}} = -2.5\beta \lg P + C.}$$

利用表1数据，求出每颗恒星的绝对星等(和误差)与lg P .

※注意：该表中的视差给的是火星上的视差，距离计算应用$r\,(\mathrm{pc}) = \dfrac{1.524}{\pi('')}$. (坑2)

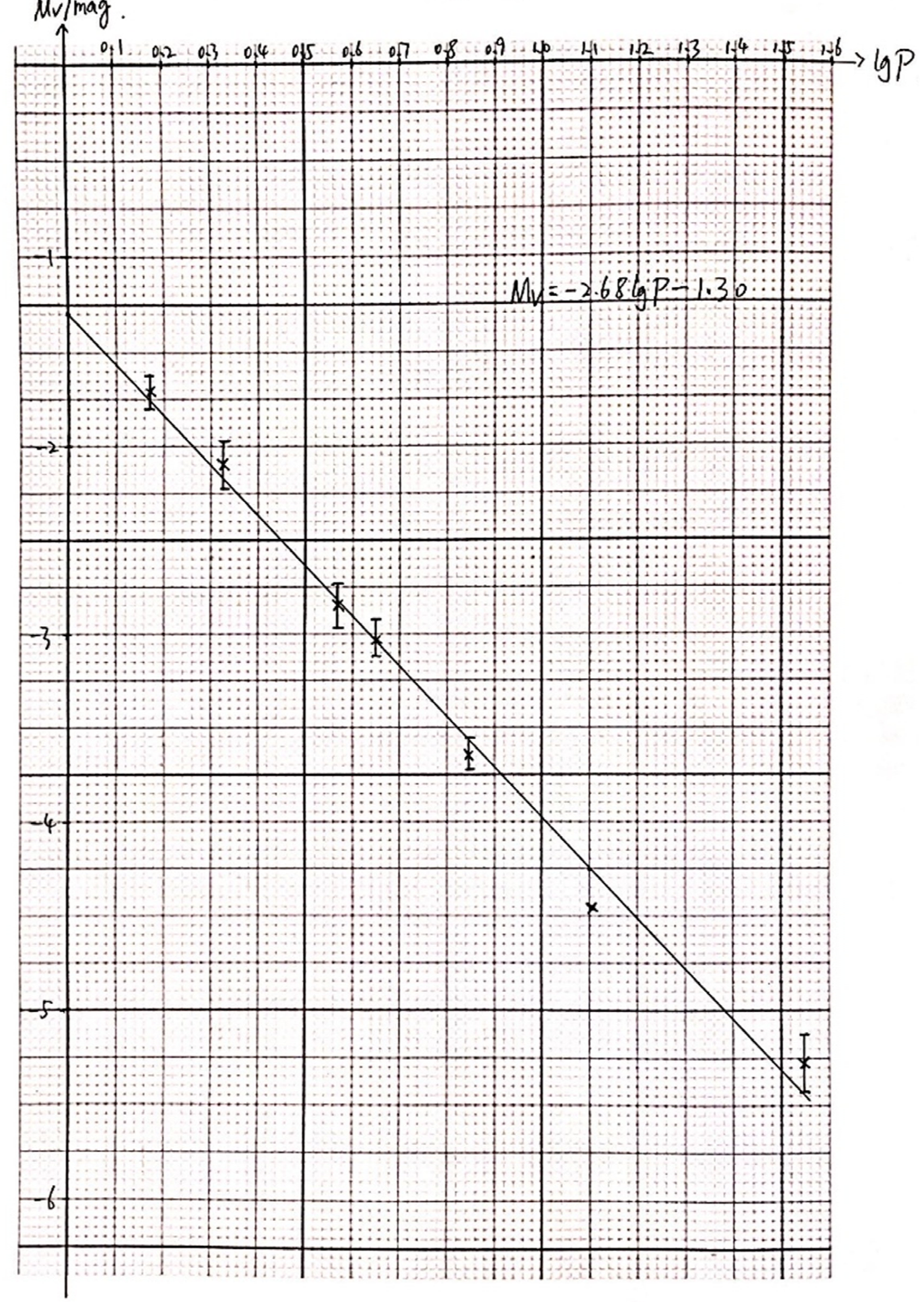
造父变星	lg P	M_{V} (mag)	误差值(上下限) (mag)
FF Aql	0.6504	−3.03	−2.94
			−3.12
X Sgr	0.8459	−3.65	−3.56
			−3.73
RT Aur	0.5715	−2.85	−2.74
			−2.97
IO Car	1.1035	−4.46	—
			—
l Car	1.5509	−5.28	−5.14
			−5.43
IP Cep	0.3251	−2.10	−1.97
			−2.23
V473 Lyr	0.1734	−1.71	−1.62
			−1.80

根据Fig 1，拟合出的曲线为$\boxed{M_{\mathrm{V}} = -2.68 \lg P - 1.30}$. 故$-2.5\beta = -2.68$, $\boxed{\beta = 1.072}$, 即$L \propto P^{1.072}$.

Fig 1.

(D1)

Mv－lgP图.



(D2) 由周光关系(D1)得$M_V = -2.68\lg P - 1.30 = -5.56$.

由$m - M = 5\lg\dfrac{r}{10\ \mathrm{pc}}$得$r = (10\ \mathrm{pc}) \cdot 10^{0.2\times(m-M)} = \boxed{361.41\ \mathrm{kpc}}$

(D3) 由Fig 2可知系统速度$v_{\mathrm{sys}} = -165\ \mathrm{km/s}$.

在质心系中，有$M_1 v_1 = M_2 v_2$

$\therefore \boxed{q = \dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{v_2}{v_1} \approx 1.45}$.

(D4) 由(D3)中求出的q，容易算出$M_1 = 21.96 M_\odot$，$M_2 = 15.14 M_\odot$.

故双星总光度

$$\boxed{L_1 + L_2 = L_\odot \cdot \left[\left(\frac{M_1}{M_\odot}\right)^{3.5} + \left(\frac{M_2}{M_\odot}\right)^{3.5}\right] = 63129.77 L_\odot}$$

由常数表已知$\mathcal{M}_\odot = 4.80$ mag. 联立关系

$$\begin{cases} m_\odot - M_\odot = 5\lg\dfrac{d_\oplus}{10\ \mathrm{pc}} \\ m_{\mathrm{tot}} - m_\odot = -2.5\lg\dfrac{F_1 + F_2}{F_\odot} = -2.5\lg\left(\dfrac{L_1 + L_2}{L_\odot} \cdot \dfrac{d_\oplus^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

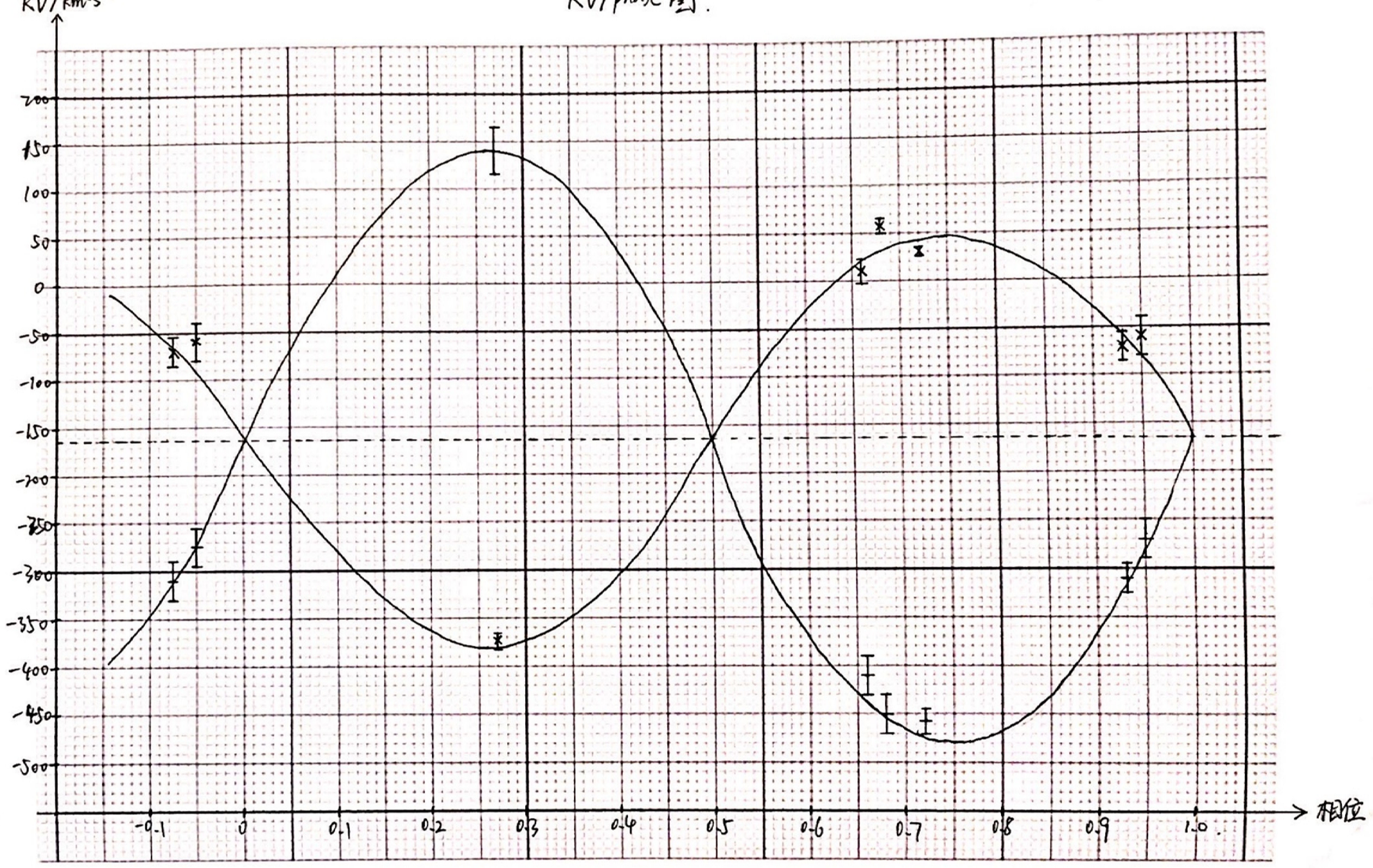
解得

$$\boxed{r = 10\ \mathrm{pc} \cdot 10^{\frac{1}{5}(m_{\mathrm{tot}} - \mathcal{M}_\odot)} \cdot \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_\odot}} = 742\ \mathrm{kpc}}.$$

(D3)

Fig 2.

RV/phase 图.



(T6) 在地球上看, M31形状类似椭圆. 设其投影的视半轴分别为a, b, 则其视面积

$$S=\pi\cdot\left(\frac{a}{r}\times 206264.8\right)\cdot\left(\frac{b}{r}\times 206264.8\right)\ \text{arcsec}^2$$

$$=\frac{\pi ab}{r^2}\cdot 206264.8^2\ \text{arcsec}^2$$

又设其总光度为L, 则其面亮度

$$\boxed{\mu=-2.5\lg\left(\frac{L}{4\pi r^2 S}\cdot\frac{1}{F_0}\right)=-2.5\lg\left(\frac{L}{4\pi^2 ab}\cdot\frac{1}{F_0\cdot 206264.8^2}\right)}$$

可见面亮度与实际距离无关. 它的值为

$$\boxed{\mu=m-2.5\lg\frac{F/(\pi ab)}{F}=m+2.5\lg(\pi ab)=23.81\ \text{mag}/\text{arcsec}^2}.$$

若要看到的M31与满月一样亮, 则

$$m'-m_0=5\lg\frac{r'}{r}$$

解得$\boxed{r'=430.93\ \text{pc}}$.

!但·是, 显然对于M31来说, r'已远小于它的实际尺度(M31直径为67.28 kpc), 几乎就在M31内部, 而此时M31中的恒星已有明显距离, 不能再当作整体计算星等.

因此, 本题的答案是**不可能看到M31亮度与满月一样**.(坑3)

(T7) 依旧以赤道面作为xy平面, 北天极方向作为z轴.

由前面题目已知, $r_{\text{RJ}}=244.68$ l.y. $=74.87$ pc. $r_{\text{SS}}\approx 742$ kpc.

以1 pc作为单位长度, 结合(T2)中已算出的夹角ϑ, 由余弦定理,

$$\boxed{r=\sqrt{r_{\text{RJ}}^2+r_{\text{SS}}^2-2r_{\text{RJ}}\cdot r_{\text{SS}}\cdot\cos\theta}=741.93\ \text{kpc}.}$$

(从本题答案也可以看出, 星系间尺度远比星系本身大得多)

(T8) 首先注意到, 附录中并没有地球辐射率ε, 需要自己求得.

取地球表面温度为$T_\oplus=290$ K. 为使温度稳定, 有热平衡方程

$$(1-a)\cdot\frac{L_\odot}{4\pi d_\oplus^2}\cdot\pi R_\oplus^2=\varepsilon\cdot 4\pi R_\oplus^2\cdot\sigma T_\oplus^4,$$

解得$\boxed{\varepsilon=\dfrac{(1-a)L_\odot}{16\pi d_\oplus^2\sigma T_\oplus^4}=0.515}$.

设该行星轨道半径为d, 同样有

$$(1-a)\frac{L_\odot\cdot(M_{\text{SS}}/M_\odot)^{3.5}}{4\pi d^2}\cdot\pi R^2=\varepsilon\cdot 4\pi R^2\cdot\sigma T_\oplus^4$$

解得 $d=\sqrt{\dfrac{(1-a)L_\odot(M_{\text{SS}}/M_\odot)^{3.5}}{16\pi\varepsilon\sigma T_\oplus^4}}=\boxed{2.064\times 10^{11}\ \text{m}}=\boxed{1.376\ \text{au}}$.

再由 $\dfrac{GM_{\text{SS}}}{d^2}=\dfrac{4\pi^2}{T^2}d$ 解得

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{GM_{\text{SS}}}}=\boxed{4.668\times 10^7\ \text{s}}=\boxed{540\ \text{d}}=\boxed{1.48\ \text{y.r.}}$$