第三次作业

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

一、填空题

1．设随机变量 X 与 Y 相互独立，具有相同的分布律，

X	0	1
P	0.4	0.6

P	(X, Y)	max{X, Y}
0.16	(0, 0)	0
0.24	(0, 1)	1
0.24	(1, 0)	1
0.36	(1, 1)	1

则 $\max\{X, Y\}$ 的分布律为

max{X, Y}	0	1
P	0.16	0.84

2．设随机变量（X,Y）的联合分布律为

$$P\{X=m, Y=n\}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{m+1}}, m\ge n, \\ 0,\ \ m<n,\end{cases} m,n=1,2,\cdots$$

$P\{X=m\}=\sum_{n=1}^{m}P\{X=m, Y=n\}$　　$P\{Y=n\}=\sum_{m=n}^{\infty}P\{X=m, Y=n\}=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}}$

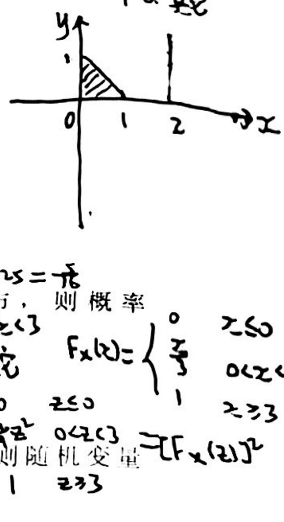
则关于 X 的边缘分布律为 $P\{X=m\}=\frac{m}{2^{m+1}}$　$m=1,2,3\cdots$；关于 Y 的边缘分布律为 $P\{Y=n\}=\frac{1}{2^n}$，$n=1,2,3\cdots$

3．若二维随机变量 (X,Y) 在区域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$ 上服从均匀分布，则 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2\\ 0, & 其它\end{cases}$.

4．设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，则概率 $P\{X+Y>1\}=$ $1-\frac{1}{2e}$.

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0 & 其它\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

$=1-P\{X+Y\le 1\}=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}e^{-y}dy=1-\frac{1}{2e}$.



5．设随机变量 X 和 Y 相互独立且同分布，已知

X	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

则 $P\{X\ge Y\}=$ $\frac{11}{16}$.

$P\{X<Y\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=0, Y=2\}+P\{X=1, Y=2\}=0.25\cdot 0.5+0.25\cdot 0.25+0.5\cdot 0.25=\frac{5}{16}$

6．设相互独立的随机变量 X 与 Y 均服从 $[0,3]$ 上的均匀分布，则概率 $P\{1<\max(X,Y)\le 2\}=$ $\frac{1}{3}$.

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0<x<3\\ 0, & 其它\end{cases}$　$F_X(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x}{3} & 0<x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$

$=F_Z(2)-F_Z(1)$

$F_{\max\{X,Y\}}(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \frac{1}{9}z^2 & 0<z<3\\ 1 & z\ge 3\end{cases}=[F_X(z)]^2$

7．设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$，则随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$.　$-\infty<z<+\infty$

$2X-Y\sim N(2,9)$

密度函数：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}e^{-\frac{(z-2)^2}{2\cdot 9}}$

$-\infty<z<+\infty$

结论：若 X 分布函数为 $F_X(x)$，密度函数为 $f_X(x)$

则 $Y=X+a$ 的分布函数为 $F_X(x-a)$ 密度函数为 $f_X(x-a)$

或利用结论：

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

则 $aX+b\sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

$\Rightarrow X+3\sim N(\mu+3, \sigma^2)$

$\Rightarrow X\sim N(1,1)$, $Y\sim N(0,1)$ X与Y独立

8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$.

$P\{XY-Y<0\}=P\{X>1,Y<0\}+P\{X<1,Y>0\}$
$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

二、选择题

$XY-Y<0 \Leftrightarrow \{X>1,Y<0\}\cup\{X<1,Y>0\}$

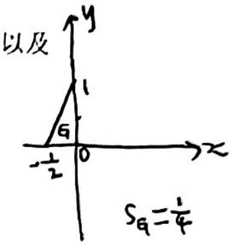
1. 关于随机事件 $\{X\le a,Y\le b\}$ 与 $\{X>a,Y>b\}$ 下列结论正确的是（ B ）

对立事件为 $\{X>a\}\cup\{Y>b\}$

（A）为对立事件.　（B）为互斥事件.

（C）为相互独立事件.　（D）$P\{X\le a,Y<b\}>P\{X>a,Y>b\}$.

A8 2. 设二维随机变量 (X,Y) 在平面区域 G 上服从均匀分布，其中 G 是由 x 轴，y 轴以及直线 $y=2x+1$ 所围成的三角形域，则 (X,Y) 的关于 X 的边缘概率密度为（ B ）



$S_G=\frac{1}{4}$

当 $-\frac{1}{2}<x<0$ 时

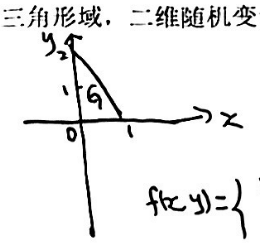
$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$=\int_0^{2x+1}4\,dy=8x+4$

（A）. $f_X(x)=\begin{cases}8x+2, & -\frac{1}{2}<x<0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$　（B）. $f_X(x)=\begin{cases}8x+4, & -\frac{1}{2}<x<0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（C）$f_X(x)=\begin{cases}4x+2, & -\frac{1}{2}<x<0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$　（D）$f_X(x)=\begin{cases}4x+4, & -\frac{1}{2}<x<0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

A13 3. 设平面区域 G 是由 x 轴，y 轴以及直线 $x+\frac{y}{2}=1$ 所围成的三角形域，二维随机变量 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布，则 $f_{X|Y}(x|y)=$（ A ）$(0<y<2)$



$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in G\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}}1\,dx=1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$=\begin{cases}\frac{1}{1-\frac{y}{2}}=\frac{2}{2-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2}\\ 0 & 其它\end{cases}$

（A）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2}{2-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（B）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{2}{1-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（C）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（D）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$F(+\infty,+\infty)=A\pi(B+\frac{\pi}{2})=1$
$F(+\infty,-\infty)=A\pi(B-\frac{\pi}{2})=0$ $\Rightarrow$ $B=\frac{\pi}{2}$, $A=\frac{1}{\pi^2}$

$$F(x,y)=A\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(B+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

则常数 A 和 B 的值依次为（ C ）

（A）π^2 和 $\frac{2}{\pi}$．　（B）$\frac{1}{\pi}$ 和 $\frac{\pi}{4}$．　（C）$\frac{1}{\pi^2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$．　（D）$\frac{1}{\pi}$ 和 $\frac{\pi}{2}$．

5．设随机变量 X，Y 相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布，则下列选项中服从参数为 2λ 的指数分布的随机变量是（ D ）

$Z=X+Y$: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$
$=\begin{cases}\lambda^2 ze^{-\lambda z}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

（A）$X+Y$．　（B）$X-Y$．

（C）$\max\{X,Y\}$．　（D）$\min\{X,Y\}$．

$Z=\max\{X,Y\}$ $f_Z(z)=\begin{cases}2\lambda e^{-\lambda z}(1-e^{-\lambda z}), & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

$Z=\min\{X,Y\}$ $F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-2\lambda z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

$Z=X-Y$: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)dx$
$=\begin{cases}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda z}, & z>0\\ \frac{\lambda}{2}e^{\lambda z} & z\le 0\end{cases}$

6．如果 (X,Y) 是连续型随机变量，下列条件中不是 X 与 Y 相互独立的充分必要条件的是（ D ），其中 x,y 为任意实数.

（A）$P\{X\ge x,Y\ge y\}=P\{X\ge x\}P\{Y\ge y\}$．

（B）$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$．

（C）$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$．

（D）$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$．

$X+Y\sim N(1,2)$
$X-Y\sim N(-1,2)$

7．设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从 $N(0,1)$，Y 服从 $N(1,1)$，则（ B ）

（A）$P(X+Y\le 0)=0.5$．　（B）$P(X+Y\le 1)=0.5$．

（C）$P(X-Y\le 0)=0.5$．　（D）$P(X-Y\le 1)=0.5$．

8．设 X 和 Y 是两个随机变量，且 $P(X\ge 0,Y\ge 0)=\frac{3}{7}$，$P(X\ge 0)=P(Y\ge 0)=\frac{4}{7}$，则

$P(\max\{X,Y\}\ge 0)=$（ D ）.

（A）$\frac{2}{7}$．　（B）$\frac{3}{7}$．　（C）$\frac{4}{7}$．　（D）$\frac{5}{7}$．

$P\{\max\{X,Y\}\ge 0\}=P\{(X\ge 0)\cup(Y\ge 0)\}$
$=P\{X\ge 0\}+P\{Y\ge 0\}-P\{X\ge 0,Y\ge 0\}$
$=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$.

*9．设 (X,Y) 具有概率密度函数 $f(x,y)=\frac{1+\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，则（ D ）

（A）(X,Y) 服从二维正态分布，且 X 和 Y 均服从一维正态分布；

（B）(X,Y) 服从二维正态分布，但 X 和 Y 均不服从一维正态分布；

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$
$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy}_{0}$
$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$
$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
同理 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

(C) (X,Y) 不服从二维正态分布，且 X 和 Y 均不服从一维正态分布；

(D) (X,Y) 不服从二维正态分布，但 X 和 Y 均服从一维正态分布.

三、计算题

PPT有 1. 设随机变量 X 在 1，2，3，4 四个数字中等可能取值，随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值，求 (X,Y) 的概率分布，并判断 X 和 Y 是否独立.

解. $P\{X=i, Y=j\}=0$，当 $j>i$ 时

$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j|X=i\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}=\frac{1}{4i}$ $i=1,2,3,4$. $j\leq i$.

(X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$ $P\{Y=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}$.

显然 $P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4}\neq P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}$

故 X 与 Y 不独立.

PPT有 2. 设随机事件 A、B 满足 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$$

求（1）(X,Y) 的概率分布；（2）$Z=X+Y$ 的概率分布.

解 由 $P(A)=\frac{1}{4}$. $P(B|A)=\frac{1}{2}$ 可得 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{8}$

又由 $P(A|B)=\frac{1}{2}$ 可得 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{4}$.

$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{8}$. $P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$.

$P\{X=0,Y=1\}=P(B\bar{A})=P(B)-P(BA)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$.

$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

(X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$Z=X+Y$ 的分布律为

Z	0	1	2
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

3. 设随机变量U在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，令

$$X=\begin{cases}-1 & 若U\le -1,\\ 1 & 若U>-1,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1 & 若U\le 1,\\ 1 & 若U>1,\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布律.

解. 由已知 $f_U(u)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -2<u<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

$P\{X=-1,Y=-1\}\ne P\{X=-1\}P\{Y=-1\}$

$P\{X=-1\}=\frac{1}{4}$. $P\{Y=-1\}=\frac{3}{4}$

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1\}=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}$.

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=P(\phi)=0$

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{-1<U\le 1\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}du=\frac{1}{2}$

$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>1\}=\int_{1}^{2}\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}$

故(X,Y)的分布律为

X\Y	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4. 已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

(1) 求系数k；(2) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(3) 判断X和Y是否相互独立；(4) 计算概率$P\{X<2|Y<1\}$；(5) 求$Z=\min\{X,Y\}$的密度函数$f_Z(z)$.

解. (1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}ke^{-2x-y}dxdy=\frac{k}{2}$ 得 $k=2$.

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-2x-y}dx=e^{-y}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

当$y>0$时. $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-2x-y}dy=2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

易见 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 对一切x,y均成立，故X和Y相互独立 可以利用独立性得到

(4) $P\{X<2|Y<1\}=\frac{P\{X<2,Y<1\}}{P\{Y<1\}}=\frac{\int_0^2dx\int_0^1 2e^{-2x-y}dy}{\int_0^1 e^{-y}dy}=\frac{(1-e^{-1})(1-e^{-4})}{1-e^{-1}}=1-e^{-4}$. 太繁 $P\{X<2|Y<1\}=P\{X<2\}=F_X(2)=1-e^{-4}$.

(5) $F_Z(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))=\begin{cases}1-e^{-3z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$. $f_Z(z)=\begin{cases}3e^{-3z}. & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

5、设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<\infty \\ 0, & 其他. \end{cases}$

（1）确定常数b.（2)求边缘概率密度函数.（3）求$U=\max\{X,Y\}$的分布函数.

解.(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ 得 $\int_0^1 dx\int_0^{+\infty} be^{-x-y}dy = b(1-e^{-1})=1$

解得 $b=\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}$.

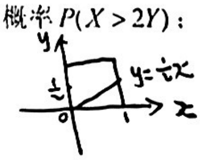
(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{e}{e-1}e^{-x-y}dy=\frac{e}{e-1}e^{-x}, & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases}\int_0^1 \frac{e}{e-1}e^{-x-y}dx = e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ 显然X与Y相互独立

(3) $F_U(u)=F_X(u)F_Y(u)$ $F_X(u)=\int_{-\infty}^u f_X(t)dt = \begin{cases}0, & u<0\\ \int_0^u \frac{e}{e-1}e^{-t}dt=\frac{e}{e-1}(1-e^{-u}), & 0\le u<1\\ \int_0^1\frac{e}{e-1}e^{-t}dt=1, & u\ge1\end{cases}$

$F_Y(u)=\begin{cases}1-e^{-u}, & u>0\\0 & u\le0\end{cases}$ 故 $F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0\\ \frac{e}{e-1}(1-e^{-u})^2, & 0\le u<1\\ 1-e^{-u}, & u\ge 1\end{cases}$

6．设(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$．(I)求概率$P(X>2Y)$；



(II)求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解.(1) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)dy = \int_0^1 (x-\frac58 x^2)dx = \frac{7}{24}$.

(2) 法一.

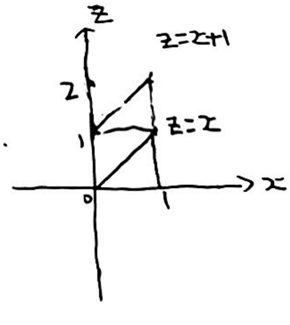
$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$

$=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z dx\int_0^{z-x}(2-x-y)dy = z^2-\frac13 z^3, & 0\le z<1\\ 1-\int_{z-1}^1 dx\int_{z-x}^1(2-x-y)dy = -\frac53+4z-2z^2+\frac13 z^3, & 1\le z<2\\ 1 & z\ge 2\end{cases}$

从而 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0\le z<1\\ 4-4z+z^2, & 1\le z<2\\ 0 & z<0或z\ge2\end{cases}$

法二. $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$.

当$0<x<1$, $0<z-x<1$ 即当$0<x<1$, $x<z<x+1$ 时 $f(x,z-x)=2-z$.



则 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0或z\ge2\\ \int_0^z(2-z)dx=2z-z^2, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1(2-z)dx=4-4z+z^2, & 1\le z<2\end{cases}$