一、单项选择题

1. 设 $f(1,1)=-1$ 为函数 $f(x,y)=ax^3+by^3+cxy$ 的极值, 则 a,b,c 分别等于(A).

(A) $1,1,-3$; (B) $1,1,3$; (C) $1,1,-1$; (D) $-1,-1,3$.

2. $z'_x(x_0,y_0)=0$ 与 $z'_y(x_0,y_0)$ 同时存在是函数 $z=z(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值的(D).

(A) 必要条件但非充分条件; (B) 充分条件但非必要条件;

(C) 充分必要条件; (D) 既非必要也非充分条件.

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$, 则点 $(0,0)$ (C).

(A) 不是 $f(x,y)$ 的极值点; (B) 是 $f(x,y)$ 的极大值点;

(C) 是 $f(x,y)$ 的极小值点; (D) 无法判断是否极值点.

4. 曲面 $z=x+f(y-z)$ 的任一点处的切平面(D)

(A) 垂直于一定直线; (B) 平行于一定平面;

(C) 与一定坐标面成定角; (D) 平行于一定直线.

5. 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是(B).

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$; (B) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$;

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$; (D) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

二、填空题

1. 如果曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的切线平行于平面 $x+3y+3z=4$, 则切点 M 的坐标为____________.

答案 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right)=\frac{1}{27}(9,-3,1)$.

2. 曲面 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{2},1\right)$ 处的切平面方程为______________.

答案 $x+4y-4z=0$.

3. 函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在该点的外法线方向的方向导数为______________.

答案 $\dfrac{1}{3}$.

4. 曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ 在对应于 $u=1, v=\dfrac{\pi}{2}$ 的点处的切平面方程为____________________________.

答案 $ax+z=\dfrac{\pi a}{2}$.

5. 函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}$ 在点 $(0,1)$ 处具有Peano余项的二阶Taylor公式为

____.

答案 $1+x+\dfrac{1}{2}[x^2+2x(y-1)]+o(x^2+(y-1)^2)$.

三、计算题

1. 求曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}=1\\ x-2y+z=0\end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解 曲线的切向量

$$\boldsymbol{s}=\left.\left|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{x}{2} & \dfrac{y}{2} & z\\ 1 & -2 & 1\end{matrix}\right|\right|_{(1,1,1)}=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$$

因此切线方程为

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}.$$

法平面方程为 $5(x-1)+(y-1)-3(z-1)=0$, 即 $5x+y-3z-3=0$.

2. 过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面, 求其方程.

解 过直线的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0,$$

即

$$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0.$$

设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$. 曲面在切点的法向量为 $(3x_0,y_0,-z_0)$，有

$$\begin{cases}(10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0,\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27,\\ \dfrac{3x_0}{10+\lambda}=\dfrac{y_0}{2+\lambda}=\dfrac{-z_0}{-(2+\lambda)}.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-1$ 或者 $\lambda=-19$，因此切平面方程为

$$9x+y-z-27=0 \text{ 或 } 9x+17y-17z-27=0.$$

3. 求函数 $u=x+y+z$ 在 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

解 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\dfrac{\partial u}{\partial y}=1\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$，故在内部没有驻点.

在 $z=1$ $(x^2+y^2=1)$ 上, 作Lagrange函数

$$F(x,y,\lambda)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1),$$

解方程组

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0,\\ 1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y=\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=1$ 或 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=1.$

在 $z=x^2+y^2$ 上, 作Lagrange函数

$$F(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2-z),$$

解方程组

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0,\\ 1+2\lambda y=0,\\ 1-\lambda=0,\\ x^2+y^2-z=0.\end{cases}$$

解得 $x=-\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2},z=\frac{1}{2}$. 由于

$$u\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=1+\sqrt{2},u\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=1-\sqrt{2},u\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

故满足条件的最大值为 $u\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=1+\sqrt{2}$, 最小值为 $u\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

4. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

解 方程两端分别对 x,y 求偏导得

$$4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+8\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad (1)$$

$$4y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+8x\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad (2)$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x+8y}{1-8x-2z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y}{1-8x-2z}$. 令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$,解得 $x=-2z,y=0$, 代入原方程, 有

$$x=-2,y=0,z=1 \text{ 或 } x=\frac{16}{7},y=0,z=-\frac{8}{7}.$$

在 (1) 两端对 x,y 求偏导, (2)式两端对 y 求偏导, 有

$$4+2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]+8\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\quad (3)$$

$$2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+8\left(\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad (4)$$

$$4+2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]+8x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad (5)$$

将点 $(-2,0)$ 代入(3),(4),(5) 式有

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-2,1)}=\frac{4}{15},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-2,1)}=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-2,0)}=\frac{4}{15}.$$

由于$AC-B^2=\frac{16}{225}>0,A=\frac{4}{15}>0$, 故 $(-2,0)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极小值点, 极小值 1.

将点 $\left(\frac{16}{7},0\right)$ 代入(3),(4),(5) 式有

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{16}{7},0\right)}=-\frac{4}{15},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(\frac{16}{7},0\right)}=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\left(\frac{16}{7},0\right)}=-\frac{4}{15}.$$

由于$AC-B^2=\dfrac{16}{225}>0, A=-\dfrac{4}{15}<0$, 故 $\left(\dfrac{16}{7},0\right)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极大值点, 极大值 $-\dfrac{8}{7}$.

5. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆, 求原点到该椭圆的最长距离和最短距离

解 作Lagrange函数

$$\begin{aligned}F(x,y,z,\lambda,\mu)&=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)\\&=z+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1).\end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases}2\lambda x+\mu=0, & (1)\\ 2\lambda y+\mu=0, & (2)\\ 2z+1+\mu=0, & (3)\\ x^2+y^2-z=0, & (4)\\ x+y+z-1=0, & (5)\end{cases}$$

由(1),(2)得 $\lambda=0$, 或 $x=y$. 若 $\lambda=0$, 解得 $z=-\dfrac{1}{2}$, 矛盾. 故 $x=y$, 代入(4),(5) 解得

$$x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, z=2-\sqrt{3},\ \text{或}\ x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, z=2+\sqrt{3},$$

由实际意义,最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, 最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

6. 将长为 l 的细铁丝剪成三段, 分别用来围成圆、正方形和正三角形, 问怎样剪法才能使它们围成的面积之和为最小, 并求出最小值.

解 设剪成的三段长度为别为 x,y,z. 则围成的面积之和为 $S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}z^2}{36}$.
作Lagrange函数

$$F(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}z^2}{36}+\lambda(x+y+z-l).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0, \\ \dfrac{y}{8}+\lambda=0, \\ \dfrac{\sqrt{3}z}{18}+\lambda=0, \\ x+y+z-l=0, \end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{\pi l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$, $x=\dfrac{4l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$, $x=\dfrac{3\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$. 由实际意义知, x,y,z 为所求. 因此最小面积为 $S=\dfrac{l^2}{4(\pi+4+3\sqrt{3})}$.

圆半径为 $\dfrac{l}{2(\pi+4+3\sqrt{3})}$, 正方形边长为 $\dfrac{l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$, 正三角形边长为 $\dfrac{\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.