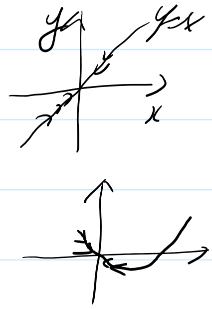
多元微分18-1

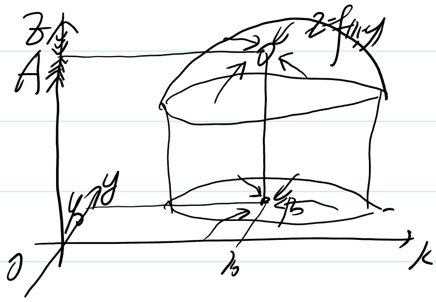
2022年4月29日 8:06

例 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \dfrac{x^2}{x+x} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x\to 0}} \dfrac{x(x^2-x)}{x+x^2-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x\to 0}} \dfrac{x^3-x^2}{x^2} = -1 \end{cases}$



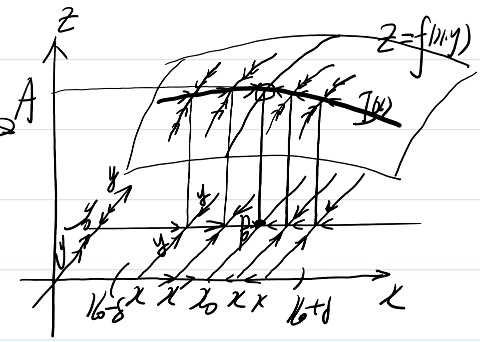
$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 不存在

二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$



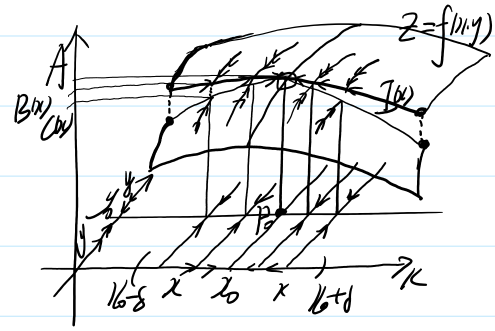
二次极限

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} I(x) = A \\ \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0} J(y) = B \end{cases}$$



二重极限存在 ~~与二次极限存在~~

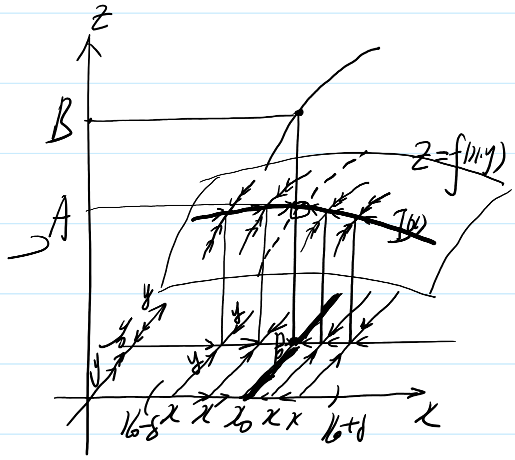
$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$



$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} I(x)$ 不存在，$I(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 不存在 $\begin{cases} \lim\limits_{y\to y_0^+} f(x,y) = C(x) \\ \lim f(x,y) = B(x) \end{cases}$ $B(x) \neq C(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0} I(x)$ 不存在， $I(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 不存在 $\begin{cases}\lim\limits_{y\to y_0^+} f(x,y)=C(x)\\ \lim\limits_{y\to y_0^-} f(x,y)=B(x)\end{cases}$ $B(x)\neq C(x)$

二次极限存在 $\not\Leftarrow$ 二重极限存在



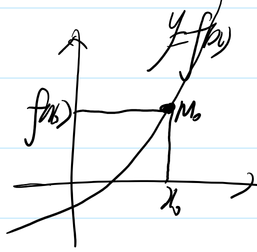
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\xlongequal{\text{控}x=x_0}\lim_{\substack{x=x_0\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=B$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\xlongequal{\text{沿除}x=x_0\text{外的曲线}} A$$

多元连续函数

$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$ $P,P_0\in\mathbb{R}^n$

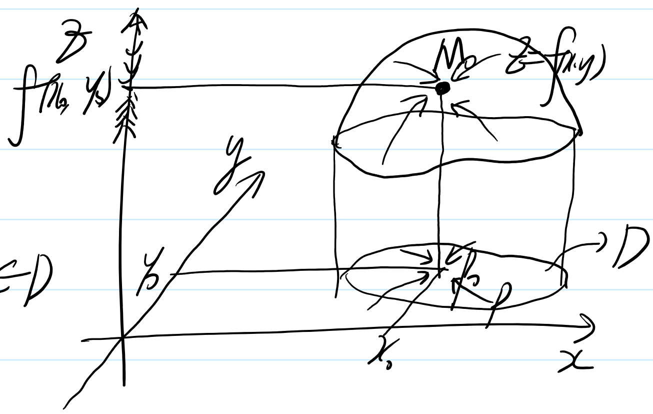
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$



$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

$n=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

$\Longleftrightarrow$ $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续



$z=f(x,y)$ 在 D 上连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall P_0(x_0,y_0)\in D$

皆有 $z=f(x,y)$ 在 P_0 处连续

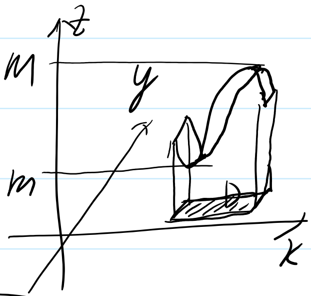
多元连续函数 $z=f(P)$ 的运算法则 与一元连续函数 $y=f(x)$ 的法则完全一样

① 四则运算法则 ② 复合函数法则

有界闭域D上连续函数的性质

① $z=f(x,y)$ 在有界闭域D上连续，则

$\exists P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 使得 $f(x_1,y_1)=m\le f(x,y)\le M=f(x_2,y_2)$



② $z=f(x,y)$ 在有界闭域D上连续 则

$\exists M>0$，使得 $\forall P(x,y)\in D$ 有 $|f(x,y)|\le M$

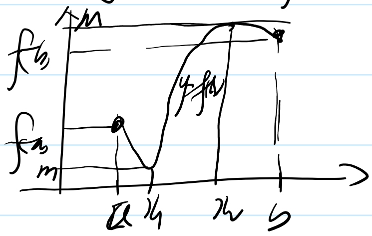
③ $z=f(x,y)$ 在有界闭域D上连续 则对

$\forall \mu\in[m,M]$ $\exists P(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta)=\mu$

(与 $[a,b]$ 上连续函数性质一样)

① $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$

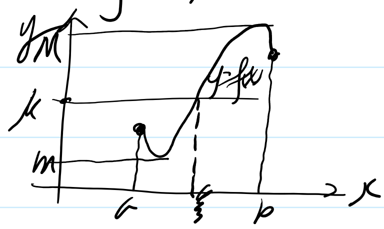
使得 $f(x_1)=m\le f(x)\le M=f(x_2)$



② $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\Rightarrow$ $\exists M$ 使 $|f(x)|\le M$

③ $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 则对 $\forall \mu\in[m,M]$

则 $\exists \xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\mu$



偏导数

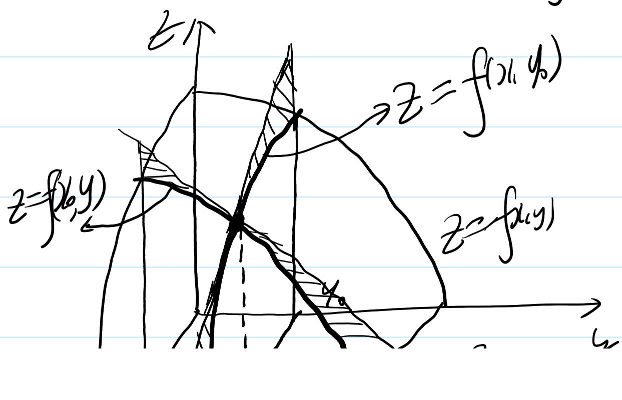
$\frac{\partial z}{\partial x}$ ∂ round.

∂ 偏 ∂ bound

$z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处偏导数

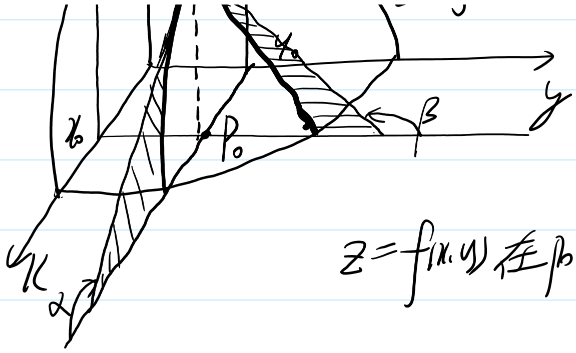
1) 令 $y=y_0$ 相对于 x 不变，$z=f(x,y_0)$ 为 x 一元函数 $f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

2) 令 $x=x_0$ 相对于 y 不变，$z=f(x_0,y)$ 为 y 一元函数 $f'_y(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$



$z=f(x,y_0)$ → $z'_x(y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\tan\alpha$

$z=f(x_0,y)$ → $z'_y(x_0)=\lim \frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{}$



$z=f(x_0,y)$ $\longrightarrow$ $z_y'(P_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\tan\beta$

$z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处可偏导 $\not\Rightarrow$ $z=f(x,y)$ 在 P_0 处连续

$\Rightarrow z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处 $(P_0(x_0,y_0))$ 连续

$\Rightarrow z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处 $(P_0(x_0,y_0))$ 连续

偏导函数

1) 令 $y=y$ 时不变，$z=f(x,y)$ 为 x 一元函数 $f_x'(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$

2) 令 $x=x$ 时 y 不变，$z=f(x,y)$ 为 y 一元函数 $f_y'(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

定理 $z=f(x,y)$ 在 P_0 处可偏导，且 $f_x'(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有界，则 $z=f(x,y)$ 在 P_0 连续

$u=f(x,y,z)$ 在 $P(x,y,z)$ 处的偏导数

$y=y$
$z=z$ 不变 $u=f(x,y,z)$ 为 x 一元函数 $u_x'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$

$x=x$
$z=z$ 不变 $u=f(x,y,z)$ 为 y 一元函数 $u_y'=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$