多元微分17-1

2022年4月26日 7:25

多元函数的极限与连续

$y=f(x)$ $z=f(x,y)$ $u=f(x,y,z)$ $\cdots$ $z=f(x_1,\cdots,x_n)$

$x\in I$ 定义域 $(x,y)\in D$ 定义域

$y\in J$ 值域 $z\in J$ 值域

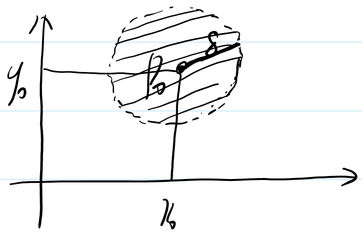
$x\in(a,b)\longleftrightarrow p(x,y)\in$ 开区域 D 

$x\in[a,b]\longleftrightarrow p(x,y)\in$ 闭区域 D 

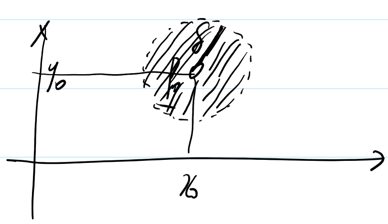
平面点集中的邻域

$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$ $P,P_0\in\mathbb{R}^2$

$=\{P(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$ $P(x,y)\in\mathbb{R}^2$



$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$ $P,P_0\in\mathbb{R}^2$

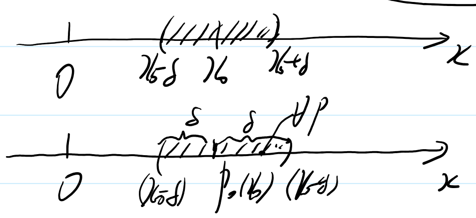


一元邻域 $U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ $x\in\mathbb{R}$

$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$ $P\in\mathbb{R}$

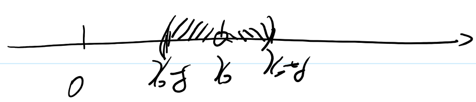
① $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ $\sqrt{(x-x_0)^2}<\delta$

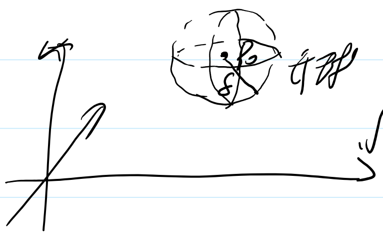
②



$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$

$0<|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0 \cup x_0<x<x_0+\delta$





开球

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$

$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$ $P,P_0\in\mathbb{R}^3$

$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$ $P,P_0\in\mathbb{R}^n$ $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$

$\sqrt{[x_1-x_1^{(0)}]^2+[x_2-x_2^{(0)}]^2+\cdots+[x_n-x_n^{(0)}]^2}<\delta$

邻域 $U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$ $P, P_0\in\mathbb{R}^n$

$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}$ $P, P_0\in\mathbb{R}^n$

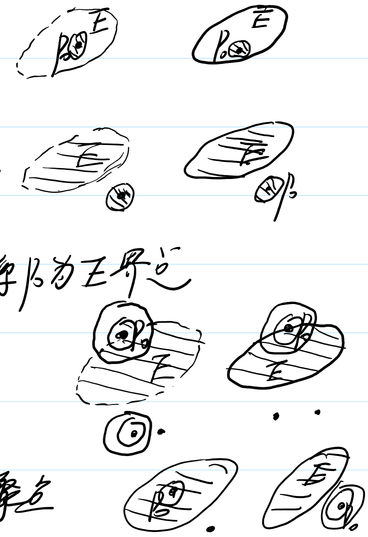
平面点集 $E\subset\mathbb{R}^2$ $P_0\in\mathbb{R}^2$ （$\mathbb{R}$中取定）

内点 $\exists U(P_0,\delta)\Rightarrow U(P_0,\delta)\subset E$，则称$P_0$为E内点

外点 $\exists U(P_0,\delta)\Rightarrow U(P_0,\delta)\cap E=\varnothing$，则称$P_0$为E外点

界点 $\forall U(P_0,\delta)\Rightarrow \mathring{U}(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$ 且 $U(P_0,\delta)\cap E^c\neq\varnothing$，则称$P_0$为E界点

（或$\forall\mathring{U}(P_0,\delta)$）

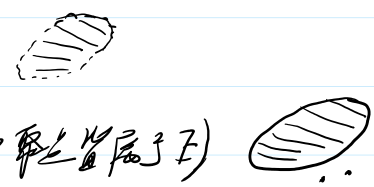


聚点 $\forall \mathring{U}(P_0,\delta)\Rightarrow \mathring{U}(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$，则称$P_0$为E聚点

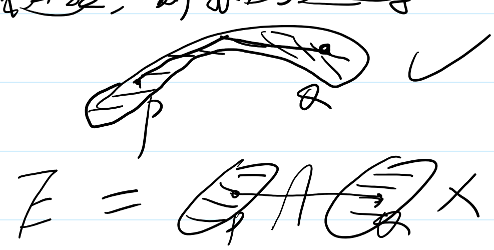
孤立点 $\forall U(P_0,\delta)\Rightarrow U(P_0,\delta)\cap E=\{P_0\}$，则称$P_0$为E孤立点

开集 $\forall P_0\in E\Rightarrow P_0$为E内点，则称E为开集

闭集 开集及其边界（界点的集合）称为闭集 （或E中聚点皆属于E）



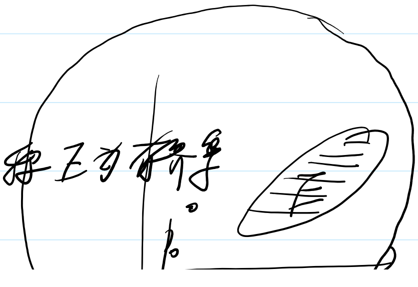
连通集：若E中任意二点皆可用含于E折线连接，则称E为连通集



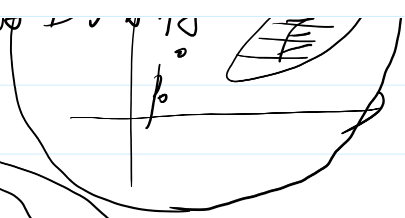
开域：即连通的开集

闭域：开域及其边界

有界集：若$\exists U(P_0,\delta)$ 使 $U(P_0,\delta)\supset E$，则称E为有界集

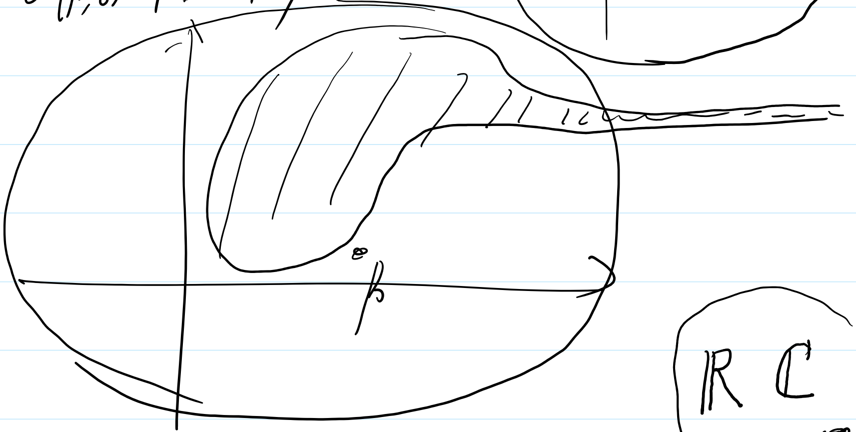


有界集：若 $\exists U(P_0,\delta)$ 使 $U(P_0,\delta)\supset E$，……



无界集 $\forall U(P_0,\delta) \Rightarrow U^c(P_0,\delta)\cap E \neq \varnothing$

即 $\forall U(P_0,\delta)$，$\exists P_1\in E$
$\Rightarrow P_1 \notin U(P_0,\delta)$



R C

R R R Z Q

N

有界开域 $D \xleftrightarrow{\text{对应}} R^1$ 中 (a,b)

有界闭域 $D \xleftrightarrow{\text{对应}} R^1$ 中 $[a,b]$

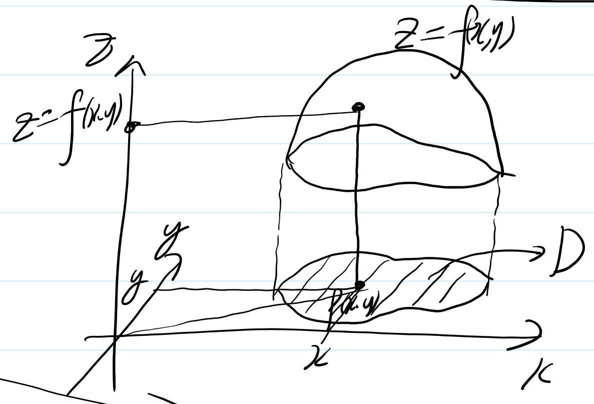
多元函数 $z=f(P)$ $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$

$z=f(x)$
$z=f(P)$ $P\in R^1$

$z=f(x,y)$ | $P(x,y)\in D$ 区域
$z=f(P)$

$z=f(P)$ $P(x,y)\in D$，为二元函数

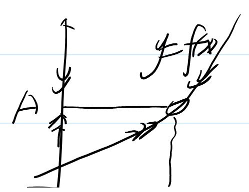
$z=f(x,y)$ 空间曲面 Σ



$T=T(x,y,z)=T(P)$ $P\in R^3$

$P\in\Omega\subset R^3$

多元函数极限



$\lim f(x)=A$

多元函数极限

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \qquad P, P_0\in\mathbb{R}^2$$

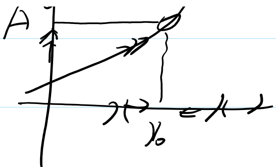
或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

当 $P(x,y)$ 以任意方式 $\to P_0(x_0,y_0)$ 时，有 $f(x,y)\to A$

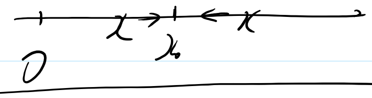
$$|f(x,y)-A|\to 0$$

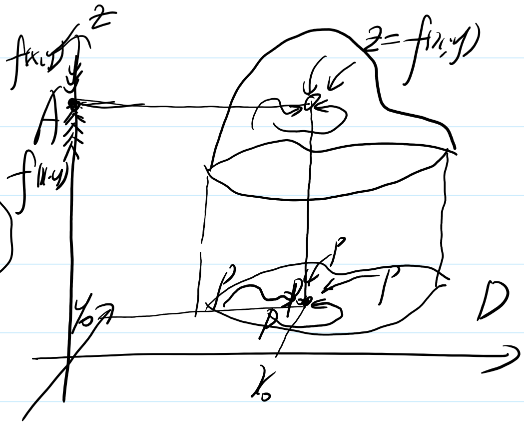
$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall\, 0<|PP_0|<\delta$
$\Rightarrow |f(P)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$



x 以任意方式 $\to x_0$ 时，有 $f(x)\to A$





一元极限 ① 公式型 $(1+0)^\infty$, $\frac{0}{0}$,
② 无穷小代换
③ 无穷小乘有界 *
④ 单调有界
⑤ 夹逼定理 *
⑥ Taylor 公式 ———

$f(x,y)=\dfrac{xy}{(xy)^2+1} \overset{xy=u}{=\!=} \dfrac{u}{u^2+1}$

$f(x,y)=\dfrac{x-\frac{\sin x}{y}}{\sin xy+x+y+\tan x}$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to1}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to1}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot1=1$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\underset{\downarrow\,0}{x}\cdot\underset{有界量}{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}=0$

其中 $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{\frac12(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac12$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln(x^2+y^2)$

$$0 \le \left| xy\ln(x^2+y^2) \right| \le \left| \frac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) \right| = \frac{1}{2}\left|u\ln u\right| \to 0$$

$$\lim_{u\to 0} u\ln u = \lim_{u\to 0} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = 0$$

由夹逼定理 $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln(x^2+y^2) = 0$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} \xlongequal{y=kx} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$ 由k任意性 $\Rightarrow$ ~~极限不存在~~ 存在