隐函数求导

例 $x^2+y^2=a^2$，$y=y(x)$　　　$x^2+y^2=-a^2$

$2x+2yy'_x=0 \Rightarrow y'_x=-\frac{x}{y}$

例 $F(x,y)=x^2+y^2-a^2$，问方程 $F(x,y)=0$ 是否确定

隐函数 $y=y(x)$，是否 $y(x)$ 唯一，是否 $y(x)$ 可导

定理1：$F(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 处

1) $F(x,y)\in C^{(1)}U(P_0)$；　2) $F(x_0,y_0)=0$　3) $F'_y(P_0)\neq 0$ ※

即在 $U(P_0)$ 内 F'_x, F'_y 连续

则有方程 $F(x,y)=0$ 在 $U(P_0)$ 内确定了唯一的具有连续导数的隐函数 $y=y(x)$，且有 $y(x_0)=y_0$

以及 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$

$F(x,y)=0$　$y=y(x)$

$F<^{x}_{y-x}$

$F'_x+F'_y\cdot y'_x=0$

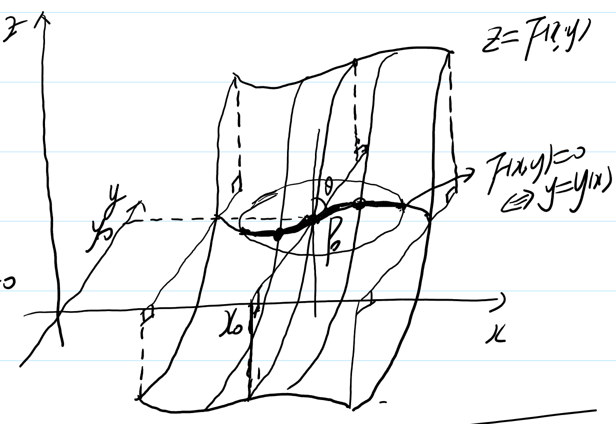
$\Rightarrow y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$

$F(x,y)=0$　$\begin{cases} z=F(x,y) \\ z=0 \end{cases}$

$\tan\theta=F'_y(P_0)\neq 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} F'_y(x,y)=F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

保号性 $\exists U(P_0)$，其内 $F'_y(x,y)\neq 0$



其中，若3)改为 $F'_x(P_0)\neq 0$，则 $F(x,y)=0$ 确定的 $x=x(y)$，$x_0=x(y_0)$　$\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y}{F_x}$

定理2　$F(x,y,z)$ 在 $U(P_0)$ 内
$P_0(x_0,y_0,z_0)$

1) F'_x, F'_y, F'_z 在 $U(P_0)$ 内连续

2) $F(P_0)=0$

3) ...

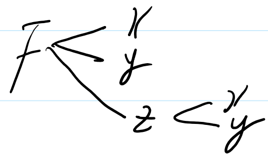
$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 2) $F(P_0)=0$

3) $F_z'|_{P_0}\neq 0$ ※

则 1) 方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $U(P_0)$ 内确定了唯一的具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

2) $F(P_0)=F(x_0,y_0,z_0)=0$

3) 且有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$



$F(x,y,z)=0$

$F_x'+F_z' z_x'=0 \Rightarrow z_x'=-\frac{F_x'}{F_z'}$

$F_y'+F_z' z_y'=0 \Rightarrow z_y'=-\frac{F_y'}{F_z'}$

例 $u=F(x,y,z,t)$ 1) $F\in C^{(1)}U(P_0)$ 2) $F(P_0)=0$, 3) $F_y'(P_0)\neq 0$

方程 $F(x,y,z,t)=0$ 确定 $y=y(x,z,t)$ 为隐函数

$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z'}{F_y'}$ $\quad\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_y'}$ $\quad\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{-F_t'}{F_y'}$

例 $x^2+y^2=a^2$ 对应 $F(x,y)=x^2+y^2-a^2=0$ $\Longleftrightarrow$ $y=y(x)=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

验证 $y_x'=\pm\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)$

$=-\frac{x}{\pm\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$

法一: $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$

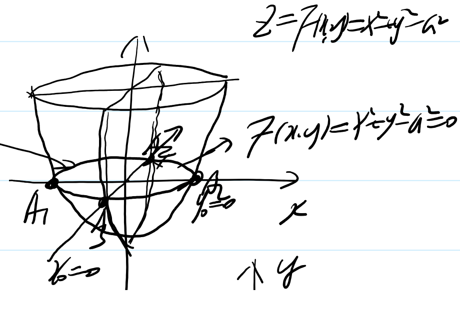
法二: $2x+2y y_x'=0 \Rightarrow y_x'=-\frac{x}{y}$

法三: $d(x^2+y^2)=da^2$ $\quad 2x\,dx+2y\,dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

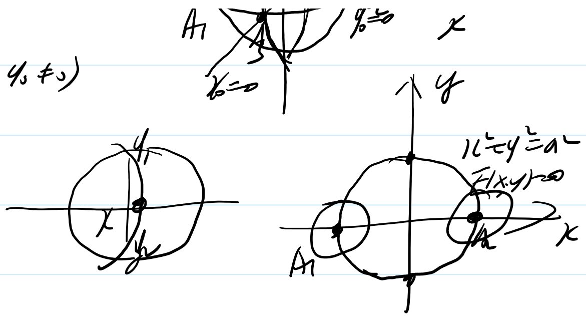
解 1) $F_x'=2x$, $F_y'=2y$, 连续

2) $F(x_0,y_0)=0$ $\quad P_0(x_0,y_0)$

3) $F_y|_{P_0}=-\frac{x}{y}=-\frac{x_0}{y_0}\neq 0$ $\quad(x_0\neq 0,\ y_0\neq 0)$



3) $y'(x_0) = -\frac{x}{y} = -\frac{x_0}{y_0} \neq 0 \quad (x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0)$



例 $xy + \sin z + y = 2z$ 确定了 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z''_{xx}$

$$y + \cos z \cdot z'_x + 0 = 2z'_x \Rightarrow z'_x = \frac{y}{2-\cos z}$$

$$x + \cos z\, z'_y + 1 = 2z'_y \Rightarrow z'_y = \frac{x+1}{2-\cos z}$$

$$0 + (-\sin z)\cdot z_x'^2 + \cos z\, z''_{xx} = 2z''_{xx} \Rightarrow z''_{xx} = \frac{-\sin z \cdot z_x'^2}{2-\cos z} = \frac{-\sin z\,\frac{y}{2-\cos z}}{2-\cos z} = \frac{-y\sin z}{(2-\cos z)^2}$$

例 验证除 $(0,0)$ 外 $x^3+y^3-3xy=0$ 的所有点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内都能唯一确定具有连续导数的隐函数 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$

① $F \in C^{(1)}$
② $F(P_0)=0$
③ $F'_y(P_0) \neq 0$ ⊛
$\Rightarrow y=y(x)$

$F(x,y) = x^3+y^3-3xy$　　$F'_x = 3x^2-3y,\quad F'_y = 3y^2-3x$

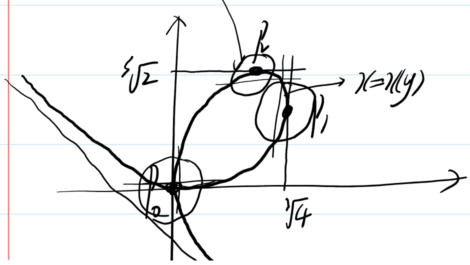
$\begin{cases} F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0 \\ F'_y(x,y)=3y^2-3x=0 \end{cases}$ 的解 $P_0(x_0,y_0)$　在 $U(P_0)$ 内不能确定 $y=y(x)$ $\Rightarrow P_0(0,0),\ P_1(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$

—— $F'_y(P_1)=0$ 但 $F'_x(P_1)\neq 0 \Rightarrow x=x(y)$

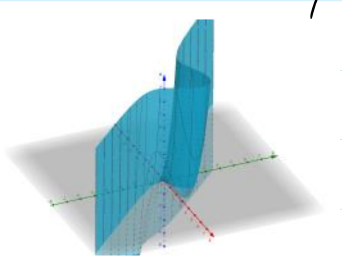
$\begin{cases} F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0 \\ F'_x(x,y)=3x^2-3y=0 \end{cases}$ 的解 $P_0(x_0,y_0)$，在 $U(P_0)$ 内不能确定 $x=x(y) \Rightarrow P_0(0,0)\ P_2(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$

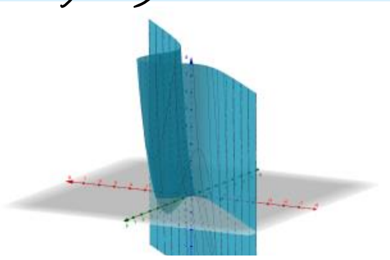
$F'_x(P_2)=0$，但 $F'_y(P_2)\neq 0 \Rightarrow y=y(x)$

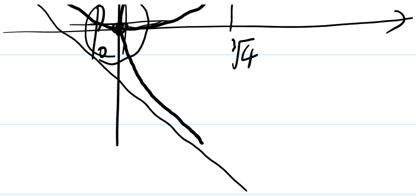
$x^3+y^3-3xy=0$ 笛卡尔叶形线

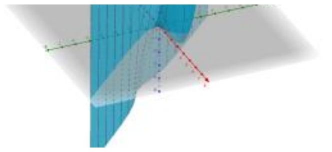


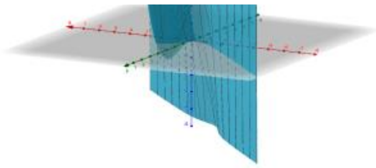
$z = F(x,y) = x^3+y^3-3xy$











隐函数组存在定理

定理：$F(x,y,z)$ 与 $G(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 处

1) $F,\ G \in C^{(1)}U(P_0)$
2) $F(P_0)=0,\ G(P_0)=0$
3) $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}\neq 0$ 关

（雅可比）Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}$$

则方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 $U(P_0)$ 内确定唯一的具有连续导数的隐函数组 $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ 且有 $\begin{cases} y_0=y(x_0) \\ z_0=z(x_0) \end{cases}$ 且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

$F,G <$ x; $y - x$; $z - x$

在 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 两侧对 x 求导 $(y=y(x),\ z=z(x))$

$$\begin{cases} F_x' + F_y'\,y_x' + F_z'\,z_x' = 0 \\ G_x' + G_y'\,y_x' + G_z'\,z_x' = 0 \end{cases}$$

$$y_x'=\frac{\begin{vmatrix} -F_x' & F_z' \\ -G_x' & G_z' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\qquad z_x'=\frac{\begin{vmatrix} F_y' & -F_x' \\ G_y' & -G_x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$