第二节　二维离散型随机变量及其概率分布

一、　二维离散型随机变量及其概率分布

二、　二维离散型随机变量的边缘分布律

三、　二维离散型随机变量的独立性

2.1 二维离散型随机变量及其概率分布

定义2.1 若二维随机变量(X, Y)所有可能取的值是有限对或无限可列多对, 则称(X, Y)为二维离散型随机变量.

定义2.2 设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取值为

(x_i, y_j), $(i, j=1,2,\cdots)$, 取值的概率为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad i, j=1,2,\cdots \quad --(*)$$

则称(*)式为(X,Y)的概率分布(分布律), 也称为X和Y的联合概率分布(联合分布律)。

其中 $(1)\, p_{ij} \geq 0, (\mathrm{i}, \mathrm{j}=1,2,\cdots)$ $\quad (2)\sum_{i,j} p_{ij}=1$

(X,Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$		p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$		p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x						
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$		p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

小 → 大

小 ↓ 大

注意 X 和 Y 的行列位置

适用于X, Y取值较少的情况

二维离散型随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y) = \qquad p_{ij}.$$

$x_i \quad x \quad y_j \quad y$

例3.2.1 从装有3个黑球和2个白球的口袋中取球两次，每次任取一个，不放回. 令

$$X=\begin{cases}0, & \text{第一次取出白球,}\\ 1, & \text{第一次取出黑球,}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0, & \text{第二次取出白球,}\\ 1, & \text{第二次取出黑球.}\end{cases}$$

求(1) X与Y的联合分布律；(2) 联合分布函数.

解 (1) $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$,

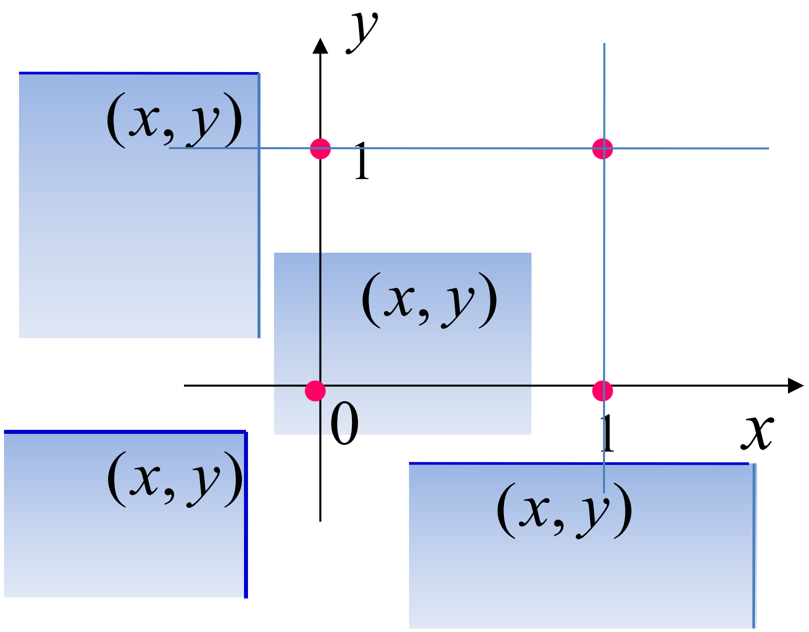
$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1|X=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0|X=1\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10},$$

于是(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$



(2) 求分布函数 $F(x,y)$;

当 $x<0, y<0$ 时，$F(x,y)=0$

当 $x<0, y\geq 0$ 时，$F(x,y)=0$

当 $y<0, x\geq 0$ 时，$F(x,y)=0$

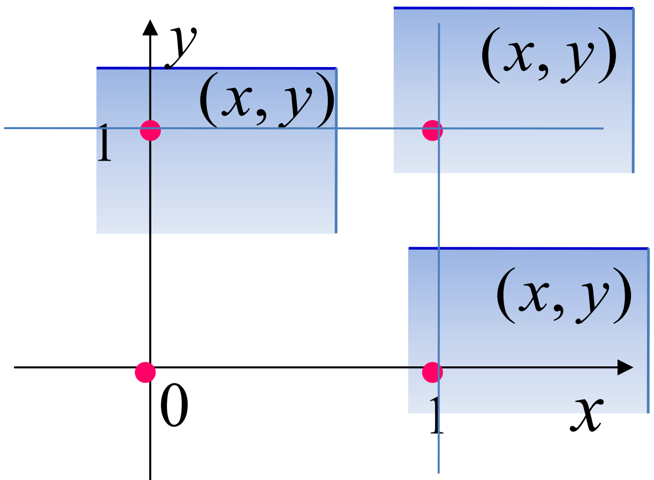
当 $0\leq x<1, 0\leq y<1$ 时， $F(x,y)=P\{X=0,Y=0\}=1/10,$

当 $0 \le x < 1, y \ge 1$ 时，

$$F(x,y) = P\{X=0,Y=0\} + P\{X=0,Y=1\} = 4/10$$

当 $x \ge 1, 0 \le y < 1$ 时，$F(x,y) = 4/10,$

当 $x \ge 1, y \ge 1$ 时，$F(x,y) = 1,$



可求得(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{或} y < 0, \\ 1/10, & 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1, \\ 4/10, & 0 \le x < 1, y \ge 1 \text{或} x \ge 1, 0 \le y < 1, \\ 1, & x \ge 1, y \ge 1. \end{cases}$$

例3.2.2 设随机变量X在1,2,3,4四个整数中等可能地取一个值,另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一整数值,试求(X,Y)的分布律.

解: X的可能取值是 1, 2, 3, 4,

Y 的可能取值是不大于 X的正整数,

当$i<j$时, $p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=0$,

当$i\geq j$时,
$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{X=i,Y=j\} \\ &= P\{X=i\}P\{Y=j \mid X=i\} \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{i}=\frac{1}{4i}, \end{aligned}$$

(X,Y)的联合分布律的表格形式为:

$X \backslash Y$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

2.2 二维离散型随机变量的边缘分布

二维离散型随机变量(X,Y)中，随机变量

X的分布律称为(X,Y)关于X的边缘分布律，

Y的分布律称为(X,Y)关于Y的边缘分布律.

已知(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\ (i,j=1,2,\cdots)$$

如何求边缘分布律？

$$P\{X=x_i\}=P\left\{\{X=x_i\}\cap\Omega\right\}$$

$$=P\left\{\{X=x_i\}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{Y=y_j\}\right)\right\}$$

$$P\{X=x_i\}=P\left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}\right)\right\}$$

$$=P\left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}\{X=x_i,Y=y_j\}\right\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}\quad(i=1,2,\cdots)$$

互

关于X的
边缘
分布律

$$\boxed{P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\quad(i=1,2,\cdots)}$$

关于Y的边
缘
分布律

$$\boxed{P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\triangleq p_{\cdot j}\quad(j=1,2,\cdots)}$$

定义2.3 设二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad (i,j=1,2,\cdots)$$

则① 关于X的边缘分布律为

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}, \ (i=1,2,\cdots)$$

② 关于Y的边缘分布律为

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}, \ (j=1,2,\cdots)$$

注意

(1) 联合分布律可确定边缘分布律, 反之不一定.

(2) 边缘分布律都是一维随机变量的分布律.

二维离散型随机变量的边缘分布律:

X的边缘分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}=P_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P\{Y=y_j\}=P_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

Y的边缘分布律

二维离散型随机变量的分布函数:

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$ y	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}=P_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x						
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P\{Y=y_j\}=P_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{x_i\le x}p_{i\bullet}\quad ,$$

关于Y的边缘分布函数为

$$F_y(y)=F(+\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\sum_{y_j\le y}p_{\bullet j}\quad .$$

例3.2.3 袋中有3个黑球, 2个白球. 每次从中任意取出1个球,不放回连抽两次,令

$$X=\begin{cases}0, & \text{第一次取到白球,}\\ 1, & \text{第一次取到黑球.}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0, & \text{第二次取到白球,}\\ 1, & \text{第二次取到黑球.}\end{cases}$$

求关于X 的边缘概率分布和关于Y的边缘概率分布.

解: 边缘概率分布律为

X \ Y	0	1	$P\{X=x_{i\bullet}\}$
0	0.1	0.3	**0.4**
1	0.3	0.3	**0.6**
$P\{Y=y_{\bullet j}\}$	**0.4**	**0.6**	**1**

关于X的边缘分布为

X	0	1
p_k	0.4	0.6

关于Y的边缘分布为

Y	0	1
p_k	0.4	0.6

例3.2.4 设(X,Y)的概率分布如下表所示，求

(1)X,Y的边缘分布律；

(2)$P\{X\le 0,Y\le 0\}$；

(3)$P\{XY=0\}$

X \ Y	0	1	2	$P\{X=x_{i\bullet}\}$
-1	0.1	0.3	0.15	**0.55**
0	0.2	0.05	0	**0.25**
2	0	0.1	0.1	**0.2**
$P\{Y=y_{\bullet j}\}$	**0.3**	**0.45**	**0.25**	**1**

解：(1)见表最后一行、最后一列.

$$(2)P\{X\le 0,Y\le 0\}$$
$$=P\left(\{X=-1,Y=0\}\cup\{X=0,Y=0\}\right)$$
$$=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=0,Y=0\}$$
$$=0.1+0.2 \quad =0.3$$

$$(3)P\{XY=0\}=P\left(\{X=0\}\cup\{Y=0\}\right)$$
$$=P\{X=0\}+P\{Y=0\}\underline{-P\{X=0,Y=0\}}$$
$$=0.25+0.3-0.2=0.35$$

两个事件不互斥，有交集

2.3 二维离散型随机变量的独立性

若离散型随机变量 (X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

即p_{ij}=行和×列和
对所有i,j均成立。

$$\text{边缘分布律} \underset{\text{可以}}{\overset{\text{独立性}}{\rightleftarrows}} \text{联合分布律}$$

2.3 二维离散型随机变量的独立性

定理 设二维离散型随机变量(X,Y), 则X与Y相互独立的充要条件是对任意的i, j, 都有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}, \quad (i,j=1,2,\cdots)$$

即$p_{ij} = p_{i\cdot}\ p_{\cdot j}, \quad (i,j=1,2,\cdots)$

判断随机变量的独立性的方法:

(1) 按定义判断　　　(2) 从直观背景判断

例如 甲袋中有3红球2白球; 乙袋中有4红球5白球. 从甲乙两袋中各任取两球, 用 X、Y分别表示取到白球的个数, 问X与Y是否独立?

例3.2.5 袋中有3个黑球, 2个白球. 每次从中任意取出1个球, 连抽两次,令

$$X=\begin{cases}0, & 第一次取到白球,\\ 1, & 第一次取到黑球 .\end{cases} \quad Y=\begin{cases}0, & 第二次取到白球,\\ 1, & 第二次取到黑球 .\end{cases}$$

分别判断不放回抽样和放回抽样时, X与Y的独立性.

解:

不放回抽样时分布律:

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	0.1	0.3	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$P\{Y=y_j\}$	0.4	0.6	

由表知

不放回抽样时, X 与 Y不独立.

放回抽样时分布律:

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{5}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

放回抽样时, X 与 Y相互独立.

例3.2.6 设A, B是两个随机事件, $P(A)=1/4$, $P(B|A)=1/3$, $P(A|B)=1/2$,

$$令X=\begin{cases}1, & A发生,\\ 0, & A不发生;\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B发生,\\ 0, & B不发生;\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布，X,Y的边缘分布并判断X与Y是否相互独立.

解: 由已知可得 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$,

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6},$$

$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$, $P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$,

$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$,

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$

$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$.

$X \backslash Y$	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	

由表知

X 与 Y不独立.

例3.2.7 设 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	$P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{8}$	b	$b+\frac{1}{8}$
2	a	$\frac{1}{4}$	$a+\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
$P\{Y=y_j\}$	$a+\frac{1}{6}$	$b+\frac{3}{8}$	

(1) 求a,b应满足的条件； (2) 若X,Y独立, 求a, b.

解

$$(1)a \geq 0, b \geq 0,$$

$$a+b=1-(\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=\frac{11}{24}$$

例3.2.7 设 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	$P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{8}$	b	$b+\frac{1}{8}$
2	a	$\frac{1}{4}$	$a+\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
$P\{Y=y_j\}$	$a+\frac{1}{6}$	$b+\frac{3}{8}$	

(1) 求a,b应满足的条件； **(2)** 若X,Y独立, 求a, b.

---

(2) 若X, Y相互独立, 则

$$\frac{1}{24}=P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3\}\cdot P\{Y=1\}=\frac{1}{6}(a+\frac{1}{6})$$

$$\therefore a=\frac{1}{12};$$

$$\frac{1}{8}=P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\}=\frac{1}{6}(b+\frac{3}{8})$$

$$\therefore b=\frac{3}{8}.$$