第四章　随机变量的数字特征

一、数学期望

二、方差

三、协方差与相关系数

四、矩

第一节　数学期望

一、　数学期望的概念

二、　随机变量函数的数学期望

三、　数学期望的性质

四、　小结

一、数学期望的概念

引例1 赌金分配问题(产生背景)

A, B 两人赌技相同, 各出赌金50法郎, 并约定先胜三局者为胜, 取得全部 100 法郎. 由于出现意外情况 ,在 A 胜 2 局 B 胜1 局时, 不得不终止赌博, 如果要分赌金,该如何分配才算公平?

分析

前三局: *A* 胜 2 局 *B* 胜 1 局 不妨记为*AAB*

假设继续赌一局,即第四局,
则有2种可能结果: *A*胜 *B*胜

结合前三局(*AAB*),有2种
可能结果:

A ABA → *A*胜

A ABB → 不能分出胜负

可能分不出胜负

假设继续再往下赌一局,即第五局,
则仍有2种可能结果: *A*胜 *B*胜

结合前四局*A*,*B*总共赌完5局,有4种
可能结果:

A AB AA

A AB AB

A AB BA

→ *A*胜

A AB BB → *B*胜

故在赌技相同的情况下，A, B 最终获胜的可能性大小之比为 $3:1$,

即A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$，而 B 只能获得赌金的$\frac{1}{4}$.

因此, A 能“**期望**”得到的赌金数目应为

$$100\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=75(\text{法郎}),$$

而B 能“**期望**”得到的赌金数目应为

$$100\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{4}=25(\text{法郎}).$$

数学期望一词由此而来。

若设随机变量 X 为:在 A 胜2局B 胜1局（AAB）的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则X 所取可能值为:	100	0
其概率分别为:	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

因而A期望所得的赌金

等于 $100\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=75$(法郎).

即为 **X 的每个可能值与其对应概率之积的累加.**

引例2　射击问题

设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次,(命中的环数是一个随机变量).射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问:该射手每次射击平均命中靶多少环?

解 平均射中环数 $=\dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$=\frac{0\times2+1\times13+2\times15+3\times10+4\times20+5\times30}{90}$$

$$=0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}$$

$$+5\times\frac{30}{90}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}=3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y.

$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}}$

随机波动

频率随机波动

"平均射中环数"的稳定值=？

$$\sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{5} k \cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

"射中环数理论平均值"等于

射中环数的每个可能值与其对应概率之积的累加

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的值为随机变量 X 的数学期望(*Mathematical Expectation*), 也称为均值(*Mean*), 记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

注 (1) $E(X)$是确定实数,是一种加权平均，体现了真正平均.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变，从而保证数学期望的唯一性。

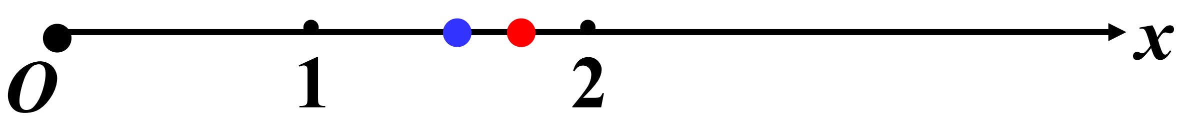
(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2} = 1.5,$

$$E(X) = 1\times 0.02 + 2\times 0.98 = 1.98.$$



它从本质上体现了随机变量X取可能值的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时，X 的期望值与算术平均值相等.

应用实例 分组验血

在一个人数很多的团体中普查某种疾病,为此要抽验 N 个人的血,可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去化验,这就需化验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组,把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验,如果这混合血液呈阴性反应,就说明 k 个人的血都呈阴性反应,这样,这 k 个人的血就只需验一次.若呈阳性,则再对这 k 个人的血液分别进行化验,这样,k 个人的血共最多需化验 $k+1$ 次.

假设每个人化验呈阳性的概率为 p，且这些人的化验反应是相互独立的．试说明当p较小时，选取适当的k，按第二种方法可以减少化验的次数．并说明k取什么值时最适宜．

解 由于血液呈阳性反应的概率为 p，

所以血液呈阴性反应的概率为 $q = 1 - p$，

因而 k 个人的混合血呈阴性反应的概率为 q^k，

k 个人的混合血呈阳性反应的概率为 $1 - q^k$．

设以 k 个人为一组时，组内每人的血化验的次数为 X，

则 X 为一随机变量，且其分布律为

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+(1+\frac{1}{k})(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

N 个人平均需化验的次数 为 $N(1-q^k+\frac{1}{k}).$

因此,只要选择 k 使

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1,$$

则 N 个人平均需化验的次数 $< N$.

当 p 固定时,选取 k 使得

$L=1-q^k+\frac{1}{k}$ 小于1且取到最小值，

此时可得到最好的分组方法.

若p=0.001, k=10, $1-(1-0.001)^{10}+\frac{1}{10}=0.11,$

可减少89%的检测工作量。

根据武汉市卫生健康委员会资料显示，截止2020年4月30日，武汉市累计确诊新冠肺炎病例50333, 占常驻人口的0.35%

4月8日至4月15日，武汉市对重点人群、复工复产人员等完成了27.54万人次的核酸检测，检出新冠肺炎无症状感染者182人，占比约0.066%.

据此可以近似地认为新冠肺炎的患病率p约为0.001.

例4.1.1 设 离散型随机变量X 的分布律为

$$p_k = P\{X = (-1)^{k+1}\tfrac{3^k}{k}\} = \tfrac{2}{3^k}, k = 1,2,\cdots,$$

判断其数学期望$E(X)$是否存在?

解: 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k = \sum_{k=1}^{\infty}|(-1)^{k+1}\tfrac{3^k}{k}|\times\tfrac{2}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{2}{k} = \infty,$$

虽然

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\tfrac{3^k}{k}\times\tfrac{2}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\tfrac{2}{k} = 2\ln 2,$$

因而其数学期望不存在。

例4.1.2 设X服从参数为p的(0−1)分布，求X的数学期望.

解 X 的分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

例4.1.3 设 $X\sim B(n,p)$，求 $E(X)$.

解 X 的分布律为

$$p_k=P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}kp_k=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np(p+1-p)^{n-1}=np.$$

例4.1.4 设$X \sim P(\lambda)$，求 $E(X)$.

解 X 的分布律为

$$p_k = P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$E(X) = \sum_{k=0} kp_k = \sum_{k=1} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda .$$

例4.1.5 设 X 服从参数为 p 的几何分布, 求$E(X)$.

解 X 的分布律

$$P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \cdots, n, \cdots$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\left|\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\right|'\Bigg|_{x=1-p} = p\frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=1-p} = \frac{1}{p}.$$

常见离散型r. v. 的数学期望

分布	概率分布	期望
参数为p的(0-1)分布	$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p$	p
$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots$	λ
参数为 p 的几何分布	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$ $k=1,2,\cdots,n,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$

2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$.

即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注　不是所有的连续型随机变量都有数学期望

例如 设X服从 柯西(Cauchy)分布，概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad -\infty<x<+\infty$$

但

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty,$$

故 X 的数学期望不存在!

例4.1.6 求E(X) $(1)X \sim U(a,b)$

$(2)X \sim$ 参数为λ的指数分布

$(3)X \sim N(\mu,\sigma^2)$

解：第一步一定是写定义！

$$(1)X \sim U(a,b),\text{则}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a<x<b\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx \ =\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\times\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}$$

均匀分布的期望=区间中点的坐标

$$(2) X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, \qquad x \le 0 \end{cases},$$ 指数分布，参数 λ

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} x d(e^{-\lambda x})$$

$$= -\left(x e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-\lambda x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}$$

$$= 0$$

(3) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty, \text{参数} \sigma > 0.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

利用 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

$$\xlongequal[\begin{pmatrix} x = \sigma t + \mu \\ dx = \sigma dt \end{pmatrix}]{\text{令} t = \frac{x-\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma t + \mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

（对称区间上的奇函数积分 $= 0$）

$$= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \mu$$

例4.1.7

设$X \sim N(0,1)$,对X作4次独立观测，Y表示观测到$X > 0$的次数，求随机变量Y的数学期望。

解　每次观测到$X>0$的概率为

$$p = P\{X > 0\} = 1 - P\{X \le 0\} = 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5,$$

于是$Y \sim B(4,0.5)$, 所以

$$E(Y) = 4 \times 0.5 = 2.$$

六种一维常用分布的期望

特殊分布		$E(X)$
离散型	两点分布$B(1, p)$	p
	二项分布$B(n, p)$	np
	泊松分布	λ
连续型	均匀分布	$\dfrac{a+b}{2}$
	指数分布	$\dfrac{1}{\lambda}$
	正态分布	μ

二、一维随机变量函数的数学期望

方法1（定义法）：

设X是随机变量，其分布已知，

随机变量 Y 是随机变量 X 的函数：$Y=g(X)$.

$$\begin{cases} P\{X=x_i\}=p_i, \\ f_X(x), \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P\{Y=y_i\}=p_i, \\ f_Y(y), \end{cases}$$

?

$$E(g(X))=E(Y)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} y_i P\{Y=y_i\}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy. \end{cases}$$

方法2（公式法）：

定理1.1

设 X是随机变量，概率分布已知， Y=g(X). 函数g(•)连续，则

(1) 若X为离散型r.v.，概率分布为 $p_k = P\{X = x_k\}$， $k = 1, 2, \cdots$

如果$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则随机变量Y的数学期望是

$$E(Y) = E\big(g(X)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$$

(2) 若X为连续型r.v.，其概率密度为 $f(x)$，如果广义积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则随机变量 Y 的数学期望是

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

例4.1.8 设随机变量 X 的分布律为

$X=x_k$	-1	0	1	2
$P\{X=x_k\}=p_k$	0.1	0.1	0.4	0.4

若 $Y=g(X)=(2X+3)^2$,求 $E(Y)$.

解1 先求 $Y=(2X+3)^2$ 的分布律

$Y=(2X+3)^2$	1	9	25	49
p	0.1	0.1	0.4	0.4

则有

$$E(Y)=E(g(X))=E(2X+3)^2$$

$$=1\cdot 0.1+9\cdot 0.1+25\cdot 0.4+49\cdot 0.4$$

$$=30.6.$$

例4.1.8 设随机变量 X 的分布律为

$X=x_k$	-1	0	1	2
$P\{X=x_k\}=p_k$	0.1	0.1	0.4	0.4

若 $Y=g(X)=(2X+3)^2$，求 $E(Y)$.

解2

$$E(Y)=E(2X+3)^2$$

$$=[2\times(-1)+3]^2\cdot 0.1+(2\times 0+3)^2\cdot 0.1$$

$$+(2\times 1+3)^2\cdot 0.4+(2\times 2+3)^2\cdot 0.4$$

$$=30.6.$$

例4.1.9 设$X \sim N(0,1)$, 求$E(X^2)$.

解 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,d\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=1.$$

3. 二维随机变量函数的数学期望

设随机变量Z是X,Y的函数$Z=g(X,Y)$,

(1) 若(X, Y)为二维离散型随机变量，联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

如果$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则随机变量 Z 的数学期望是

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

(2) 若(X,Y)为二维连续型随机变量，联合概率密度为

$f(x,y)$，如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$绝对收敛,

则随机变量 Z 的数学期望是

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例4.1.10 设 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	**0.2**	**0.1**	0.1
2	**0.1**	**0**	0.1
3	0	0.3	**0.1**

求：$E(X)$，$E(Y/X)$，$E[(X-Y)^2]$.

分两步：先算函数的分布律再算期望反而简便。

解 X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.4 = 2.$

由于

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

于是

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times0.2+0\times0.1+1\times0.1-\frac{1}{2}\times0.1+\frac{1}{2}\times0.1+0\times0.3+\frac{1}{3}\times0.1$$

$$=-\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

得 $E[(X-Y)^2] = 4\times 0.3 + 1\times 0.2 + 0\times 0.1 + 9\times 0.4$

$= 5.$

例4.1.11 设(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $E(X)$、$E(XY)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y=1.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xye^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y==\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} ye^{-y}\mathrm{d}y=1.$$

三、数学期望的性质

1. 设 C 是常数, 则有 $E(C) = C$.

证明 $E(X) = E(C) = 1 \times C = C$.

2. 设 X 是一个随机变量,C 是常数, 则有

$$E(CX) = CE(X).$$

证明（离散型）$E(CX) = \sum_k C x_k p_k = C \sum_k x_k p_k = CE(X)$.

（连续型） $E(CX) = \int_{-\infty}^{+\infty} C x f(x) dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = CE(X)$.

例如 $E(X) = 5$, 则 $E(3X) = 3E(X) = 3 \times 5 = 15$.

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证明（离散型）

$$E(X+Y)=\sum_k (x_k+y_k)p_k$$

$$=\sum_k x_k p_k+\sum_k y_k p_k=E(X)+E(Y).$$

（连续型）

设 (X, Y)的概率密度函数为$f(x,y)$, 则有

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}y\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=E(X)+E(Y)$$

类似可证E(X-Y)=E(X)-E(Y).

4. 设 X,Y 是随机变量,a,b,c 是常数, 则有

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c.$$

5. 若X、Y相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

证　只对连续型加以证明.

设 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)$, 关于 X、Y 的边缘密度分别为$f_X(x)$ $f_Y(y)$. 则有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 于是

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)E(Y).$$

注： 若$E(XY)=E(X)E(Y)$，X, Y 不一定独立.

反例 $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y),$$ 即随机变量X,Y不相互独立.

但 $$E(X)=\int_{-1}^{1}x\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\mathrm{d}x=0;\qquad E(Y)=\int_{-1}^{1}y\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}\mathrm{d}y=0;$$

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\frac{1}{\pi}dxdy=0;\qquad E(XY)=E(X)E(Y)=0.$$

6. 设 X, Y 是两个随机变量, $E(X^2), E(Y^2)$ 都存在,

则 $\left[E(XY)\right]^2 \le E(X^2)E(Y^2).$

此式称为柯西-施瓦茨（Cauchy-Schwarz）不等式。

证明　对于任意实数t, 设

$$g(t) = E[(X+tY)^2].$$

由期望的性质有

$$E[(X+tY)^2] = E(X^2+2tXY+t^2Y^2) = E(X^2)+2tE(XY)+t^2E(Y^2),$$

因此$g(t) = E(X^2)+2tE(XY)+t^2E(Y^2)$,

对任意实数t, 恒有g(t)≥0,

所以有$\Delta = 4[E(XY)]^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \le 0,$

从而$\left[E(XY)\right]^2 \le E(X^2)E(Y^2).$

例4.1.12 将n个球随机地放入N个空盒中$(N \geq n)$, 设每个球落入每个盒子的可能性相同，且每个盒子都可以容纳n个球，求有球的盒子数X的数学期望。

解 引入随机变量 X_i ,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 个盒子无球}, \\ 1, & \text{第 } i \text{ 个盒子有球}, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,N.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$

则有 $P\{X_i=0\}=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$，　$P\{X_i=1\}=1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$，

$i=1,2,\cdots,N.$

由此 $E(X_i)=1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$，　$i=1,2,\cdots N.$

得

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_N)$$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_N)$$

$$=N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right].$$

练习(A21) 一民航巴士载有 20 位旅客自机场开出,旅客有 10 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车,以 X 表示停车的次数,求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量 X_i,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车}, \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车}, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,10.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$.

则有 $P\{X_i=0\}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$， $P\{X_i=1\}=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$,

$i=1,2,\cdots,10.$

由此 $E(X_i)=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$， $i=1,2,\cdots 10.$

得

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})$$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$

$$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784(\text{次}).$$

例4.1.13 设X和Y是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-2)}, & y>2,\\ 0, & y\le 2.\end{cases}$$

求 $E(XY)$.

解 因X和Y相互独立，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x\int_2^{+\infty}ye^{-(y-2)}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\times 3=2.$$

四、小结

1. 数学期望是一个实数, 而非变量,它是一种**加权平均**, 与一般的算术平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

1° $E(C)=C$;

2° $E(CX)=CE(X)$;

3° $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$;

4° X,Y 独立 $\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$.

5° $E(X^2),E(Y^2)$存在 $\Rightarrow [E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)$.

期望的计算公式

	一维随机变量X	二维随机变量(X, Y)
离散型	$EX=\sum_{i} x_i p_i$	$EX=\sum_{i,j} x_i p_{ij}, EY=\sum_{i,j} y_j p_{ij}$
	随机变量函数$Y=g(X)$ $EY=E[g(X)]=\sum_{i} g(x_i)p_i$	随机变量函数$Z=g(X,Y)$ $EZ=E[g(X,Y)]=\sum_{i,j} g(x_i,y_j)p_{ij}$
连续型	$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$	$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$ $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$
	随机变量函数$Y=g(X)$ $EY=E[g(X)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$	随机变量函数$Z=g(X,Y)$ $EZ=E[g(X,Y)]$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$