一、单项选择题

1. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1是 D 的第一象限部分, 则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$ 等于(A).

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$; (B) $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}\sigma$;

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$; (D) 0.

2. 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a,b 为常数, 则 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma =$(D).

(A) $ab\pi$; (B) $\dfrac{ab\pi}{2}$; (C) $(a+b)\pi$; (D) $\dfrac{(a+b)\pi}{2}$.

3. 设平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, $M=\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$, $N=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2\mathrm{d}\sigma$, $P=\iint\limits_D [\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1]\mathrm{d}\sigma$, 则有(B).

(A) $M>N>P$; (B)$N>M>P$; (C) $M>P>N$; (D) $N>P>M$.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以写成(D).

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$; (B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$; (D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$ 化为极坐标形式的累次积分为(C).

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2)\mathrm{d}r$; (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 f(r^2)r\mathrm{d}r$;

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2) r\mathrm{d}r$;　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r^2) r\mathrm{d}r$;

二、填空题

1. $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{-x}^{2-x^2} (1-xy)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2-x^2} (1-xy)\mathrm{d}y =$ ______________.

答案 $\frac{7}{3}$.

2. 积分 $\int_0^8 \mathrm{d}x \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{1}{1+y^4}\mathrm{d}y =$ ______________.

答案 $\frac{\ln 17}{4}$.

3. 设平面区域 $D = \{(x,y) | 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, 则 $\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma =$ ______________.

答案 $-\frac{3}{2}$.

4. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t \mathrm{d}y \int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2) =$ ______________.

答案 $f(2)$.

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leqslant t^2\}$. 则 $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{\pi t^2} \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma =$ ______________.

答案 $f(0,0)$

三、解答题

1. 设平面区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x, x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma$.

解　直线 $x + y = 8$ 与直线 $y = 3x, x = 3y$ 的交点分别为 $(2,6), (6,2)$. 故

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma &= \int_0^2 x^2\mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{3x} \mathrm{d}y + \int_2^6 x^2\mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \frac{8x^3}{3}\mathrm{d}x + \int_2^6 \left(8x^2 - \frac{4x^3}{3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{416}{3}.\end{aligned}$$

2. 设平面区域 $D = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, 计算 $\iint\limits_D \max\{xy, 1\}\mathrm{d}\sigma$.

解

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{D(xy>1)}\max\{xy,1\}\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D(xy<1)}\max\{xy,1\}\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint\limits_{D(xy>1)} xy\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D(xy<1)}\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}xy\mathrm{d}y + 4 - \int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{15}{4} - \ln 2 + 4 - (3 - 2\ln 2) = \frac{19}{4} + \ln 2.
\end{aligned}
$$

3. 计算 $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$.

解

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^2\cdot r\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16-16\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= 4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

4. 设平面区域 D 由两条双曲线 $xy=1,xy=2$ 和两条直线 $y=x,y=4x$ 所围成的在第 I 象限内的闭区域, 计算 $\iint\limits_{D}x^2y^2\mathrm{d}\sigma$.

解 令 $\begin{cases} u=xy, \\ v=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$ 则 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\dfrac{2y}{x}=2v$. 图形 D 变换为

$$
D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4\}.
$$

$$
\iint\limits_{D}x^2y^2\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D'}\frac{u^2}{2v}\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 u^2\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{2v}\mathrm{d}v = \frac{7\ln 2}{3}.
$$

5. 设连续函数 $f(x)$ 满足

$$
f(x) = x^2 + x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t + \iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}\sigma,
$$

其中区域 D 是以 $(-1,-1),(1,-1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域, 且 $f(1)=0$, 求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 令 $x^2-t=u$, 则 $\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u$, 从而

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u+\iint_D f(xy)\mathrm{d}\sigma.$$

设 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}\sigma=A$, 于是

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u+A,$$

因此

$$f(xy)=(xy)^2+(xy)\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u+A,$$

在上式两端在 D 上取二重积分, 有

$$A=\iint_D x^2y^2\mathrm{d}\sigma+\iint_D\left[(xy)\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\sigma+A\iint_D\mathrm{d}\sigma,$$

由于 $\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=2, \iint\limits_D\left[(xy)\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\sigma=0$, 从而

$$A=-\iint_D (xy)^2\mathrm{d}\sigma=-\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x\int_{-1}^x y^2\mathrm{d}y=-\frac{2}{9}.$$

于是 $f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u-\frac{2}{9}$, 代入 $f(1)=0$, 解得 $\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=-\frac{7}{9}$, 因此

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{9}.$$