保密★启用前

2021-2022 学年第二学期期末考试

《概率论与数理统计 A》

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**学号**，并涂写考生**学号**信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生教学号								
考生姓名								

一、选择题：共 6 小题,每小题 3 分,满分 18 分．下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上,写在试题册上无效．

$\Rightarrow P(A|B)=P(A|\bar{B}) \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

1. 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(A|\bar{B})=1$，则事件 A 与 B (C).

(A) 互不相容；　(B) 是对立事件；　(C) 相互独立；　(D) 不独立.

2. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x|y)=$ (A).

$=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$\rho_{XY}=0 \Rightarrow X$与$Y$相互独立 $\Rightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

(A) $f_X(x)$；　(B) $f_Y(y)$；　(C) $f_X(x)f_Y(y)$；　(D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

3. 设随机变量 X_1与X_2 相互独立，分布函数分别为 $F_1(x)$与$F_2(x)$，则随机变量 $Y=\min\{X_1,X_2\}$ 的分布函数为(D).

$F_Y(x)=P\{Y\le x\}=P\{\min\{X_1,X_2\}\le x\}=1-P\{\min\{X_1,X_2\}>x\}$

$=1-P\{X_1>x,X_2>x\}=1-P\{X_1>x\}\cdot P\{X_2>x\}$

$=1-(1-F_1(x))(1-F_2(x))$

(A) $F_1(x)F_2(x)$ ；　(B) $F_1(x)+F_2(x)$；

(C) $\{1-F_1(x)\}\{1-F_2(x)\}$ ；　(D) $F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)$.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，

$X\sim B(1,\frac{1}{2})$

$\sum_{i=1}^{100}X_i\sim B(100,\frac{1}{2})$

记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right\}$ 的近似值为(B).

由De Moivre-Laplace中心极限定理 $\sum_{i=1}^{100}X_i \overset{近似}{\sim} N(np,np(1-p))$

$P\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\}=P\{\frac{\sum X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{55-50}{5}\}\approx\Phi(1)$

(A) $1-\Phi(1)$；　(B) $\Phi(1)$；　(C) $1-\Phi(0.2)$；　(D) $\Phi(0.2)$.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 是取自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，则下列结论不正确的是(D).

(A) $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$；　(B) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$；

(C) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$;　(D) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$.

$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，若 σ^2 已知，总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$(\overline{X}-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, 则$\lambda$=(B).

(A) $u_{-\alpha}$; (B) $u_{\frac{\alpha}{2}}$; (C) $u_{-\frac{\alpha}{2}}$; (D) u_{α}.

二、填空题：共 6 小题,每小题 3 分,满分 18 分．请将答案写在答题卡上,写在试题册上无效．

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$
$=1-P(A)=0.4$

$\Rightarrow P(AB)=P(B)$

1. 设随机事件 A与B,若 $P(A)=0.6, P(A|B)=1$,则$P(\overline{A}\overline{B})=$ <u>0.4</u> .

$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(\frac{1}{2})^{k-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2.$

2. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$,则 $E(X)=$ <u>2</u> .

3. 设随机变量X服从$(0,3)$区间上的均匀分布,随机变量Y服从参数为 2 的泊松分布,

$D(X)=\frac{1}{12}(3-0)^2=\frac{3}{4}$ $D(Y)=2$

且 X与Y 的协方差为-1,则 $D(2X-Y+1)=$ <u>9</u> .

$=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)=4\times\frac{3}{4}+2-4\times(-1)=9.$

4. 设随机变量 X, $E(X)=50, D(X)=25$,则由切比雪夫不等式可知 $P\{40<X<60\}\geq$ <u>0.75</u> .

$=P\{|X-E(X)|<10\}\geq 1-\frac{D(X)}{100}=1-\frac{25}{100}=\frac{3}{4}$

5. 设总体的概率密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1\\ 1-\theta, & 1\leq x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$,其中 θ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本,则θ的矩估计量为 <u>$\frac{3}{2}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$</u>

$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$
$=\int_0^1\theta x dx+\int_1^2(1-\theta)xdx$
$=\frac{3}{2}-\theta$
令 $\mu_1=A_1$ 即
$\frac{3}{2}-\theta=\overline{X}$ 得
$\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\overline{X}$
$=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ和σ^2 均未知,检验假设 $H_0:\mu=\mu_0; H_1:\mu\neq\mu_0$,检验统计量$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$,在显著性水平$\alpha$下,拒绝域为 <u>$|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$</u>

三、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

某医院用某种新药医治流感,对病人进行试验,其中$\frac{3}{4}$的病人服用此药,$\frac{1}{4}$的病人不服用此药,5 天后有 70%的病人痊愈.已知不服药的病人 5 天后有 10%可以自愈.(1)求该药的治愈率;(2)若某病人 5 天后痊愈,求他是服此药而痊愈的概率.

四、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 若 $Y=X^2$, 求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

三、解：设A表示事件"病人服用此药"，B表示事件"5天后病人痊愈"。

由全概率公式，$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

根据题意，$P(B)=0.7$，$P(A)=\frac{3}{4}$，$P(\bar{A})=\frac{1}{4}$，$P(B|\bar{A})=0.1$

代入上式可解得 $P(B|A)=\frac{9}{10}$，故该药的治愈率为 $\frac{9}{10}$

(2) 所求概率为 $P(A|B)$，由贝叶斯公式，

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{9}{10}}{0.7}=\frac{27}{28}.$$

四、解：设Y的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=0$，从而 $f_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

从而当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})$

由题意，$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ 于是当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$

综上 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

五、解：观察值落在区域 G_1 内的概率 $P=\frac{S_{G_1}}{S_G}=\frac{1}{4}$

设3次独立重复观察中观察值落在区域 G_1 的次数为Y，则 $Y\sim B(3,\frac{1}{4})$

所求概率为 $P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-\binom{3}{0}(1-\frac{1}{4})^3=\frac{37}{64}$.

六、解：由题意，$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ $_{i=1,2,\cdots,n}$ 且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，从而 $E(X_{i+1}-X_i)=E(X_{i+1})-E(X_i)=\mu-\mu=0$

$D(X_{i+1}-X_i)=D(X_{i+1})+D(X_i)=\sigma^2+\sigma^2=2\sigma^2$ $\forall 1\le i\le n-1$.

于是 $E(X_{i+1}-X_i)^2=[E(X_{i+1}-X_i)]^2+D(X_{i+1}-X_i)$

$=0^2+2\sigma^2=2\sigma^2$.

要使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量，即使 $E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=\sigma^2$.

而 $E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=C\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=2C\sigma^2(n-1)$ 故 $C=\frac{1}{2(n-1)}$.

七、解 (1) $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0|X=0\}=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1|X=0\}=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=0|X=1\}=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1|X=1\}=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

(2) X的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y的分布律为

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X)=E(Y)=\frac{1}{2}$，$E(X^2)=E(Y^2)=\frac{1}{2}$，$D(X)=D(Y)=\frac{1}{4}$.

XY的分布律为

XY	0	1
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

$E(XY)=\frac{3}{10}\times 1=\frac{3}{10}$，$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$.

相关系数 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{1/20}{1/4}=\frac{1}{5}$.

五、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 服从均匀分布,对 (X,Y) 独立重复地观察 3 次,求至少一次观察值落在区域 $G_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le \frac{1}{4}\}$ 内的概率.

六、解答题：满分 6 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,试确定常数 C 使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为参数 σ^2 的无偏估计量.

七、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

甲、乙两个盒子中均装有 2 个红球和 2 个白球,先从甲盒中任取一球,观察颜色后放入乙盒,再从乙盒中任取一球.令 X 与 Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数.求 (1) (X,Y) 的分布律;(2) X 与 Y 的相关系数.

八、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

第二章标准化作业题

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ (1)确定常数 b; (2)判断 X 与 Y 是否独立.

九、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设某种元件的使用寿命 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$ 其中 $\theta>0, m>0$ 为参数.(1)求总体 X 的概率密度;(2)任取 n 个这种元件做寿命试验,测得它们的寿命分别为 $x_1,\cdots,x_n\ (x_i>0, i=1,2,\cdots,n)$,若 m 已知,求 θ 的最大似然估计值.

解 (1) X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{m}{\theta^m}x^{m-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m}, & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

(2) 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\frac{m^n}{\theta^{mn}}(x_1x_2\cdots x_n)^{m-1}e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^m}$

$\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^m$.

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}m\cdot\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{m-1}\cdot\frac{x_i}{\theta^2}=0$ 得 θ 的最大似然估计值为

$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^m}$.

八、(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ 得 $\int_0^1dx\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy=1$ 即 $b(1-e^{-1})=1$. 解得

$b=\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy=be^{-x}=\frac{e}{e-1}e^{-x}. & 0<x<1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1be^{-(x+y)}dx=be^{-y}(1-e^{-1})=e^{-y}. & 0<y<+\infty \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 显然 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ $\forall(x,y)\in R^2$. 故 X与Y相互独立