第六节　n维随机变量

n 维随机变量的概念

定义 设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 Ω，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在 Ω 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.

1.分布函数

对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的**分布函数**

或随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合**分布函数**。

若n 维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 所有可能取的值是有限或可列无穷个n 元数组，则称之为n 维离散型随机变量.

其概率分布为

$$P\left\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\right\} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n},\quad i_1, i_2, \cdots, i_n = 1, 2, \cdots.$$

2.概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 使对于任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n,$$

则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为n维连续型随机变量;
称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数或 $X_1,X_2,\cdots,X_n$的联合概率密度。

3.边缘分布函数

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1 的**边缘分布函数**.

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)$$

称为n维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$关于(X_1,X_2)的**边缘分布函数**.

在$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中保留相应的$k(1\le k<n)$个位置，其他变量趋于$+\infty$,

则可确定出$(X_1, X_2, \ldots X_n)$的k维边缘分布函数。

4.边缘概率密度函数

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度, 则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1,关于 (X_1,X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n.$$

同理可得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的 $k(1\le k<n)$ 维边缘概率密度.

设n 维离散型随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$具有概率分布

$$P\left\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\right\} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的边缘概率分布（边缘分布律）为

$$P\left\{X_1 = x_{i_1}\right\} = \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{i_3=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=1}^{\infty} p_{i_1 i_2 \cdots i_n}, \quad i_1 = 1, 2, \cdots.$$

5. n维随机变量的相互独立性

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

n 维离散型随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立充要条件是

$$P\left\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\right\} = \prod_{j=1}^{n} P\left\{X_1 = x_{i_j}\right\}$$

n 维连续型随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立充要条件是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

6. 两个多维随机变量的相互独立性

若对于任意$m+n$个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

其中F_1,F_2,F依次为随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$,$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$和$(X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数,

则称随机变量$(X_1,\cdots,X_m)$与$(Y_1,\cdots,Y_n)$相互独立.

结论

(1) 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立,则 $X_i(1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立.

(2) 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立,若 h, g 是连续函数,则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

7. 正态随机变量的结论

若 X, Y 相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

推广

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n$，则

$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2)$ 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为不全为零的常数.

8. n维随机变量的最值的分布函数

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$

则$M=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$及$N=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且具有相同的 分布函数 $F(x)$,则

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\ F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n.$$