第五章　大数定律与中心极限定理

一、切比雪夫不等式

二、大数定律

三、中心极限定理

第一节　切比雪夫(Chebyshev)不等式

切比雪夫不等式

切比雪夫

定理　设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数 ε，不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\text{ 或 }P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

成立.

切比雪夫不等式

证明： 设X是离散型随机变量，其概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\cdots,$$

根据概率的可加性，可得

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\sum_{|x_k-\mu|\geq\varepsilon}P\{X=x_k\}=\sum_{|x_k-\mu|\geq\varepsilon}p_k,$$

从而有

$$\sum_{|x_k-\mu|\geq\varepsilon}p_k\leq\sum_{|x_k-\mu|\geq\varepsilon}\frac{(x_k-\mu)^2}{\varepsilon^2}p_k$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{|x_k-\mu|\geq\varepsilon}(x_k-\mu)^2p_k$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-\mu)^2p_k$$

$$=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

证明　若X是连续型随机变量，

设 X 的概率密度为 $f(x)$,则有

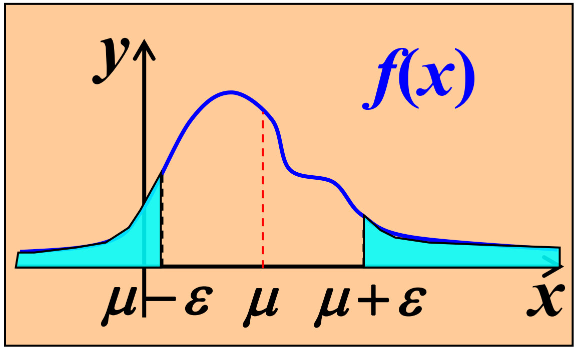
$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

得　$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}.$

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$



注: 切比雪夫不等式给出在分布未知情况下X与其均值偏离程度的一个概率估计.

例如, 取 $\varepsilon = 3\sigma$, 有:

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\} \geq 1-\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{8}{9} = 0.8889.$$

而若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则: $P\{|X-\mu|<3\sigma\} = 0.9974.$

若取 $\varepsilon = 4\sigma$, 有:

$$P\{|X-\mu|<4\sigma\} \geq 1-\frac{\sigma^2}{(4\sigma)^2} = \frac{15}{16} = 0.9375.$$

性质5 随机变量X的方差$D(X)=0$的充分必要条件是：

X以概率1取常数$C=E(X)$,即 $P\{X=C\}=1$

充分性显然，下证必要性。

设D(X)=0, 由切比雪夫不等式, 对任意的$\varepsilon>0$

$$1\geq P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1,$$

令ε→0得 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} P\{|X-E(X)|\leq\varepsilon\}=P\{|X-E(X)|=0\}=1,$

即$P\{X=E(X)\}=1.$

由此有：$D(X)=0 \Longleftrightarrow P\{X=C\}=1$ (C为常数)

课堂练习

在300次独立重复的试验中, 事件A每次发生的概率

$P\{A\}=\dfrac{1}{4}$, 300次试验中事件A发生的次数记为X,

用切比雪夫不等式估计

$P\{25 \le X \le 125\} \ge$ ______ $\dfrac{391}{400}$ ______.

$|X-75| \le 50$

例5.1.1 将一颗骰子连续投掷6次，设出现的点数和为X，根据切比雪夫不等式，估计概率$P\{|X-21|<7\}$.

解 设第i次投掷所得的点数为X_i $(i=1,2,\cdots,6)$，则$X=\sum^{6}X_i$.
依题意，$X_1,X_2,\cdots,X_6$相互独立且具有相同的概率分布。

$$P(X_i=i)=\frac{1}{6},\ i=1,2,\cdots,6.$$

$$E(X_i)=\sum_{i=1}^{6} i\cdot\tfrac{1}{6}=\frac{7}{2},$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12},\quad i=1,2,\cdots,6.$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6}E(X_i)=6\times\frac{7}{2}=21,\ D(X)=\sum_{i=1}^{6}D(X_i)=6\times\frac{35}{12}=\frac{35}{2},$$

根据切比雪夫不等式，有

$$P\{|X-21|<7\}=P\{|X-E(X)|<7\}$$

$$\geq 1-\frac{D(X)}{7^2}=1-\frac{35/2}{49}=\frac{9}{14}.$$

例5.1.2 设随机变量X和Y的数学期望都是2，方差分别为1和4，相关系数为0.5. 根据切比雪夫不等式，估计概率$P\{|X-Y|\geq 6\}$.

解

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0,$$

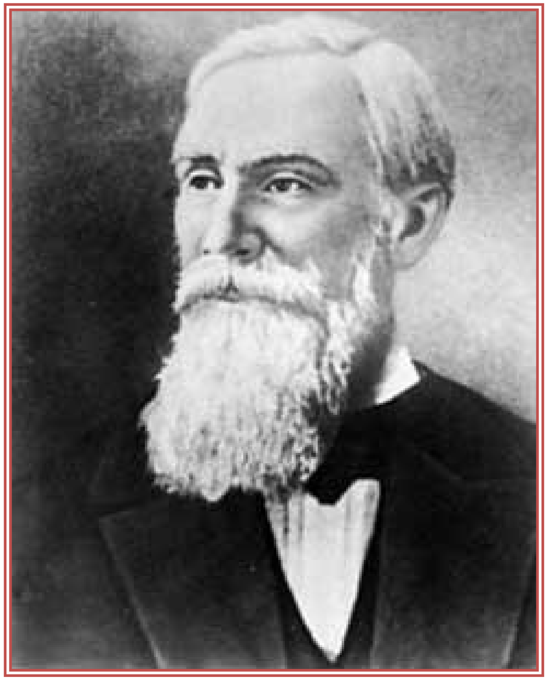
$$\begin{aligned}D(X-Y)&=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)\\&=D(X)+D(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=1+4-2\times 0.5\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=3.\end{aligned}$$

根据切比雪夫不等式，有

$$\begin{aligned}&P\{|X-Y|\geq 6\}=P\{|X-Y-E(X-Y)|\geq 6\}\\&\leq\frac{D(X-Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

切比雪夫（Pafnuty Chebyshev）资料

1821-1894



被誉为令俄国数学崛起的数学家，数学教育家

在分析、数论、概率论和函数逼近论等方面有出色成就

为俄国培养了一批出色的数学家，被誉为圣彼得堡学派创始人。

返回

学术谱系

faculty.uml.edu//dklain

Here is my mathematical (Ph.D.) lineage:

August Gottlieb Meissner	(?)
Joseph Johann von Littrow	Charles University
Nikolai Dmitrievich Brashman	University of Vienna
Pafnuty Lvovich Chebyshev	Moscow State University
Andrei Andreevich Markov	St. Petersburg State University
Jacob D. Tamarkin	St. Petersburg State University
Nelson Dunford	Brown University
Jacob T. Schwartz	Yale University
Gian-Carlo Rota	Yale University