# 第四节　矩

一、　矩的概念

二、　协方差矩阵

三、　$n$维正态分布

# 一、矩的概念

## 1.定义

设 $X$ 和 $Y$ 是随机变量,若$E(X^k)$, $k=1,2,\cdots$
存在,称它为 $X$ 的 $k$ **阶原点矩**,简称 $k$ **阶矩.**

若 $E\{[X-E(X)]^k\}$, $k=1,2,3,\cdots$
存在,称它为 $X$ 的 $k$ **阶中心矩.**

若 $E(X^kY^l)$, $k,l=1,2,\cdots$
存在,称它为 $X$ 和 $Y$ 的$k+l$**阶混合原点矩.**

若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$, $k,l=1,2,\cdots$
存在,称它为 $X$ 和 $Y$ 的 $k+l$ **阶混合中心矩.**

## 2. 说明

(1) 以上数字特征都是随机变量函数的数学期望;

(2) 随机变量 $X$ 的数学期望 $E(X)$ 是 $X$ 的一阶原点矩,方差为二阶中心矩,协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$是 $X$ 与 $Y$ 的二阶混合中心矩;

(3) 在实际应用中,高于 4 阶的矩很少使用.

三阶中心矩$E\{[X-E(X)]^3\}$主要用来衡量随机变量的分布是否有偏.

四阶中心矩 $E\{[X-E(X)]^4\}$ 主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度如何.

## 例4.4.1

设随机变量X $\sim N(\mu,\sigma^2)$,求X的2阶、3阶原点矩及3阶、4阶中心矩.

**解:** 因$E(X)=\mu,\ D(X)=\sigma^2$,故

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2.$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(x^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-2\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\right)$$

$$+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=2\sigma^2\mu+\mu(\sigma^2+\mu^2)=\mu^3+3\mu\sigma^2.$$

## 例4.4.1

设随机变量X $\sim N(\mu,\sigma^2)$，求X的2阶、3阶原点矩及3阶、4阶中心矩.

**解:**

$$E\{[X-E(X)]^3\}=E[(X-\mu)^3]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=\!=}\frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0.$$

$$E\{[X-E(X)]^4\}=E[(X-\mu)^4]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=\!=}\frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^4e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\left(t^3e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-3\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

$$=3\sigma^4\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=3\sigma^4.$$

## 二、协方差矩阵

设二维随机变量 $(X_1, X_2)$ 关于 $X_1$ 和 $X_2$ 的二阶中心矩和二阶混合中心矩

$$C_{ij} = E\left\{\left[X_i - E\left(X_i\right)\right]\left[X_j - E\left(X_j\right)\right]\right\}, i, j = 1, 2$$

都存在，则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

为二维随机变量 $(X_1, X_2)$ 的协方差矩阵。

设$n$维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$关于$X_1, X_2, \cdots, X_n$的二阶中心矩和二阶混合中心矩

$$C_{ij} = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

都存在，则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

为$n$维随机变量$(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 的协方差矩阵。

注：协方差矩阵为对称矩阵，且可证明是半正定矩阵。

# 三、$n$维正态分布

## 1. 二维正态随机向量的协方差矩阵

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

协方差矩阵：

$$C=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},$$

## 2. 二维正态随机向量密度函数的矩阵表示法

协方差矩阵：

$$C=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},$$

其行列式为：$|C|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$,

$C$的逆矩阵为：$C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}.$

二次型

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi|C|^{1/2}}\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

令 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},$

则

$$=-\frac{1}{2|C|}(x-\mu_1, y-\mu_2)\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)$$

因此

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

## 对比一维正态随机变量密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

协方差矩阵： $C=\left(\sigma^2\right),$

其行列式为：$|C|=\sigma^2,$

$C$的逆矩阵为：$C^{-1}=\left(\frac{1}{\sigma^2}\right).$

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}|C|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right\},$$

其中$(x-\mu)$为一维向量。

记 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$,

如果$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$具有概率密度

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right\},$$

其中$C$为$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的协方差矩阵，

则称$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从$n$维正态分布。

**$n$维正态分布的性质：**

1. $n$ 维正态随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的每一个分量 $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 都是正态变量;

反之,若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态变量, 且相互独立, 则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $n$ 维正态变量.

**2. $n$ 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 $n$ 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意的线性组合 $l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$ 服从一维正态分布(其中 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为零 ).**

3.若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从$n$维正态分布,设$Y_1,\cdots,Y_k$是$X_j(j=1,2,\cdots,n)$的线性函数,则$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)$也服从多维正态分布. 线性变换不变性

4.设$(X_1,\cdots,X_n)$服从$n$维正态分布,则"$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立"与"$X_1,X_2,\cdots,X_n$两两不相关"是等价的.

# 本章小结

1.随机变量$X$的数学期望$E(X)$的定义及性质

2. $Y$=g($X$)，$Z$=g($X$,$Y$)的数学期望的求法

3.方差$D(X)$及标准差的概念及性质, 方差$D(X)$常用的计算公式

4.协方差Cov($X$, $Y$)和相关系数的定义、计算、性质

5.明确（不）相关与（不）独立的关系

6.四种矩的定义