第五节　二维随机变量的函数的分布

一、　二维离散型随机变量的函数的分布

二、　二维连续型随机变量的函数的分布

三、　小结

设(X,Y)是二维随机变量，$z=g(x,y)$是二元函数，若当(X,Y)取值(x,y)时，随机变量Z取值为$z=g(x,y)$，则称Z是X、Y的函数，记作 $Z=g(X,Y)$.

问题：

已知随机变量(X,Y)的概率分布，$g(x,y)$为已知的二元函数，如何求一维随机变量$Z=g(X,Y)$的概率分布.

$$
\text{本节要求}\begin{cases}
\text{一般函数的分布} \\
\text{和函数的分布}(Z=X+Y) \\
\text{最值函数的分布}\begin{cases} Z=\max\{X,Y\} \\ Z=\min\{X,Y\} \end{cases}
\end{cases}
$$

5.1 二维离散型随机变量函数的分布

已知(X,Y)的分布律，如何求Z=g(X,Y)的分布律？

步骤：

(1) 确定Z的所有可能取值$z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$

(2) 求概率$P\{Z = z_k\}$.

例3.5.1 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	2
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

求：1）$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$

2）$\boldsymbol{Z} = \frac{X}{Y}$

的分布律.

已知(X,Y)的联合分布律

$X \backslash Y$	-1	1	2
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

求：1）$\boldsymbol{Z = X + Y}$

2）$\boldsymbol{Z = \frac{X}{Y}}$

的分布律．

解： 1)

$X+Y$	-1	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

2)

X/Y	-2	0	1	2
p_k	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

结论

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

例3.5.2 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例3.5.3 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z = \max(X, Y)$ 的分布律 .

解 因为X与Y相互独立,

所以 $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\} = P\{X=0,Y=0\} = \frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\}$$

$$= P\{X=1,Y=0\} + P\{X=0,Y=1\} + P\{X=1,Y=1\}$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}.$$

故$Z = \max(X,Y)$的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

例3.5.4 设随机变量X和Y相互独立，且$X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$.
求$Z=X+Y$的概率分布.

解: Z=X+Y的可能取值为0, 1, 2,⋯, 对任意非负整数k有

$$P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=P\bigcup_{i=0}^{k}\{X=i,Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\cdot\frac{1}{k!}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

即两个独立的服从Poisson分布的随机变量之和仍然服从Poisson分布，亦即

$$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

泊松分布具有可加性.

具有可加性的两个离散分布

1^0 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立，则

$$X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$$

证明参看习题课教程例15

2^0 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且独立，则

$$X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2).$$

5.2 二维连续型随机变量函数的分布

设(X,Y)为连续型$r.v.$，且$f(x,y)$ 为已知，则Z=g(X,Y)是$r.v.$，若Z是连续型时，如何求Z的概率密度?

1. 一般情形

步骤： (1) 先求随机变量Z的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\underset{D_z}{} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$D_z := \{(x,y) \mid g(x,y)\le z\}$.

(2) 对$F_Z(z)$求导得概率密度函数 $f_Z(z)=F_Z'(z)$.

例3.5.5 设 X 和 Y 相互独立, 概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

求Z=2X+Y的概率密度.

解 联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

设 $Z=2X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)$

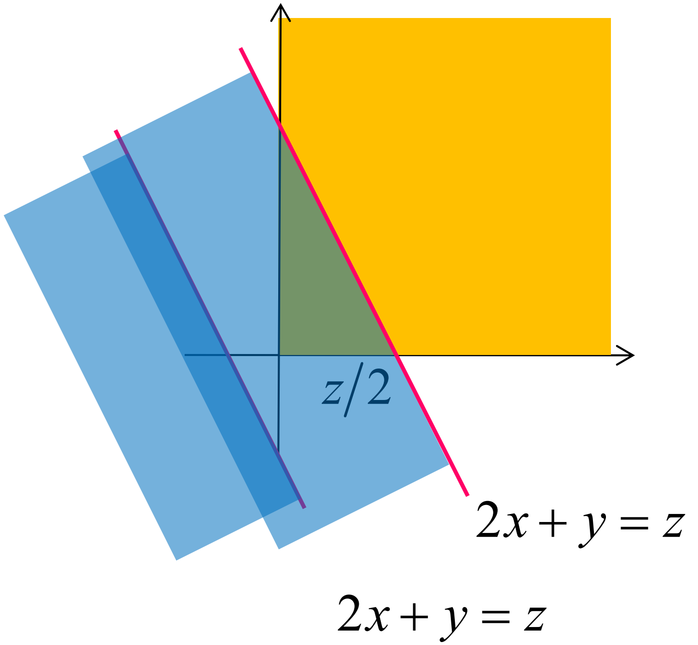
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

f为分片函数,
要讨论

当$z<0$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)dxdy=0$

当$z\ge 0$时，



$$F_Z(z)=\int_0^{z/2}dx\int_0^{z-2x}e^{-(x+y)}dy$$

$$=\int_0^{z/2}(e^{-x}-e^{x-z})dx=1-2e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}$$

故Z的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-2e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}, & z\ge 0\end{cases}$

求导得Z的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}, & z\ge 0\end{cases}$$

例3.5.6 设随机变量X和Y相互独立, 并且都服从 $N(0,\sigma^2)$, 求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度函数。

解 联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,$$

设Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=P(\Phi)=0$

当$z\ge0$时,

$$F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_Z(z) = \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r\mathrm{d}r = 1-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

求导得Z 的概率密度为

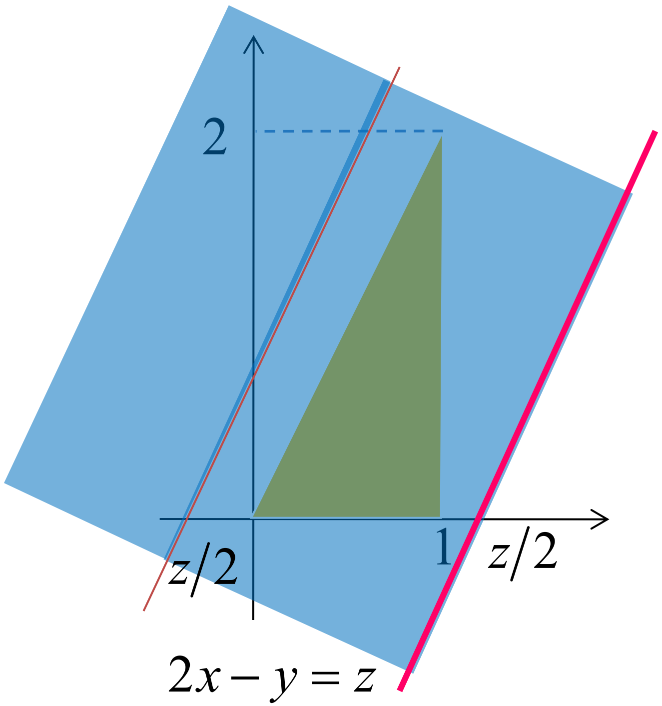
$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\ge 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

称Z服从参数为σ ($\sigma > 0$)的Rayleigh分布。

例3.5.7 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1) 求$Z=2X-Y$的概率密度.



解(1) **Z的分布函数**

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)dxdy$$

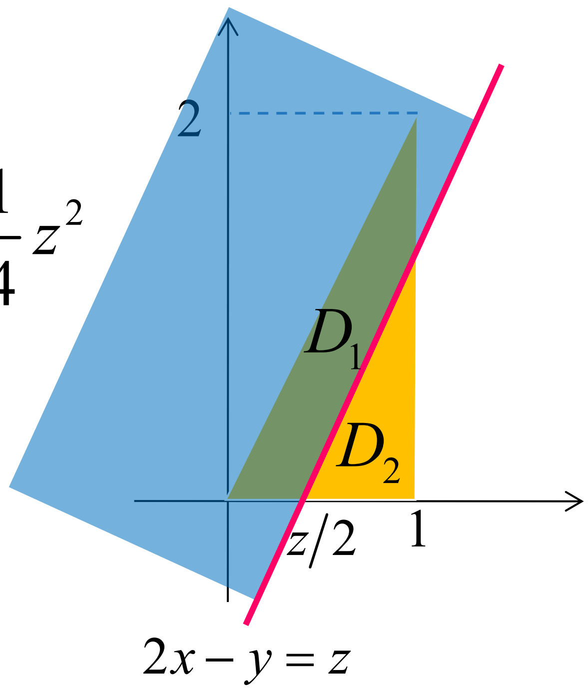
当$z<0$时, 有 $F_Z(z)=0$

当$z\ge 2$时, 有 $F_Z(z)=1$

当$0\le z<2$ 时，有

$$F_Z(z)=\iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$$

$$=1-\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=1-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{z}{2})(2-z)=z-\frac{1}{4}z^2$$



Z=2X-Y的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z-z^2/4, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

Z=2X-Y的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例3.5.7 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求(2)关于X和关于Y的边缘概率密度$f_X(x)$, $f_Y(y)$;

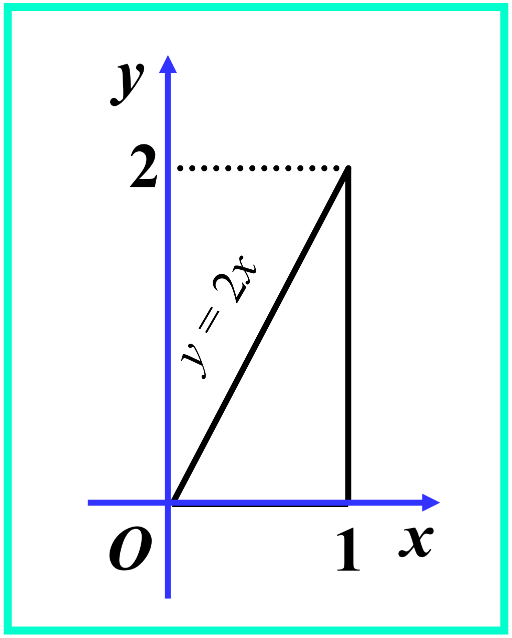
(3) $P\{Y \quad \frac{1}{2} | X \quad \frac{1}{2}\}$.

解(2)

当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{0}^{2x}\mathrm{d}y=2x$;

当$x\le 0$ 或$x\geq 1$时， 有$f_X(x)=0$,

因此$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$



当$0<y<2$时有 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{y/2}^{1}\mathrm{d}x=1-\frac{y}{2}$;

当$y\le 0$ 或$y\geq 2$时，有$f_Y(y)=0$,

因此 $f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

例3.5.7 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求(2)关于X和关于Y的边缘概率密度$f_X(x)$, $f_Y(y)$;

(3) $P\{Y \quad \frac{1}{2} | X \quad \frac{1}{2}\}$.

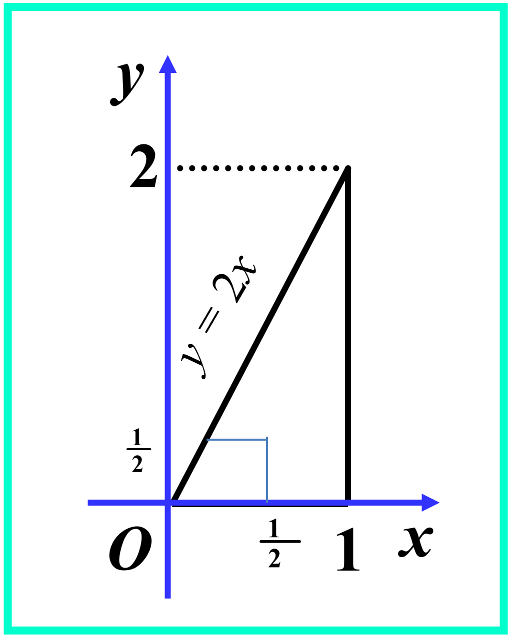
解(3)

$$P\{Y \quad \tfrac{1}{2} | X \quad \tfrac{1}{2}\}=\frac{P\{X \quad \frac{1}{2}, Y \quad \frac{1}{2}\}}{P\{X\le\frac{1}{2}\}}$$

$$P\{X \quad \tfrac{1}{2}, Y \quad \tfrac{1}{2}\}= \ _0^{\frac{1}{2}} dy \ _{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = \ _0^{\frac{1}{2}} (\tfrac{1}{2}-\tfrac{y}{2})dy=\tfrac{3}{16}.$$

$$P\{X\le\tfrac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx=\tfrac{1}{4}.$$

所以$P\{Y \quad \frac{1}{2} | X \quad \frac{1}{2}\}=\dfrac{P\{X \quad \frac{1}{2}, Y \quad \frac{1}{2}\}}{P\{X\le\frac{1}{2}\}}=\dfrac{3/16}{1/4}=\dfrac{3}{4}.$



2. 两种特殊情形

(1) 连续型(X, Y)的和函数的分布

已知连续型二维随机向量(X,Y)的$f(x,y)$，

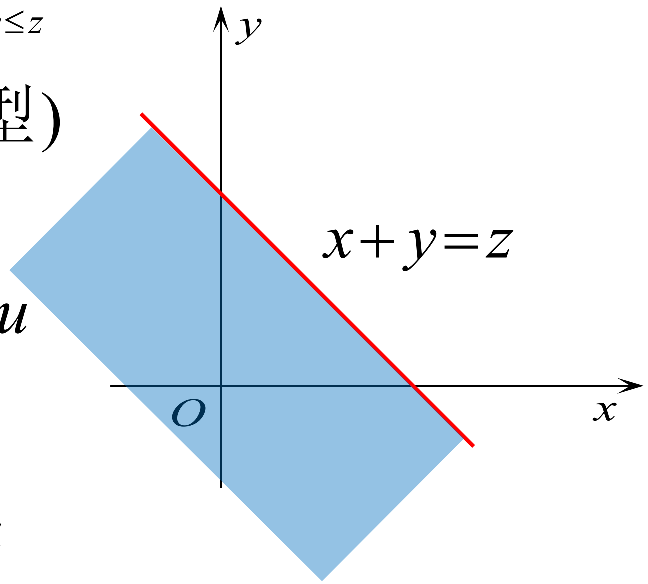
求$Z=X+Y$的概率密度.

解： $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dx \qquad (Y型)$$

把对x的积分换成u的积分

$$\overset{令x=u-y}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{z}f(u-y,y)du$$



$$\overset{交换积分次序}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-y,y)dy\right]du$$

从而$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$

$Z=X+Y$的概率密度.

由对称性可知，$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

$Z = X + Y$的密度：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx$

若X与Y相互独立，且其边缘密度函数分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，从而

$$f(z-y, y) = f_X(\underline{z-y})f_Y(y),$$

$$故此时f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

记住公式

称为f_X和f_Y的卷积公式，记为$f_X * f_Y$

已知连续型二维随机向量(X,Y)的$f(x,y)$，求$Z=X+Y$的概率密度.

方法一：分布函数法。先求$F_Z(z)$，再求$f_Z(z)$

方法二：利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx.$$

方法三：利用卷积公式（适用X，Y独立情形）

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

推广：已知连续型二维随机向量(X,Y)的$f(x,y)$，求$Z=aX+bY$的概率密度.

方法一：分布函数法。先求$F_Z(z)$，再求$f_Z(z)$

方法二：公式 $f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f[\frac{1}{a}(z-by),y]dy$

$$=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f[x,\frac{1}{b}(z-ax)]dx$$

方法三：卷积公式（适用X,Y独立情形）

$$f_{aX+bY}(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\frac{1}{a}(z-by))f_Y(y)dy$$

$$=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(\frac{1}{b}(z-ax))dx.$$

例3.5.7续 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1) 求$Z=2X-Y$的概率密度.

解(1) 法二（公式法）

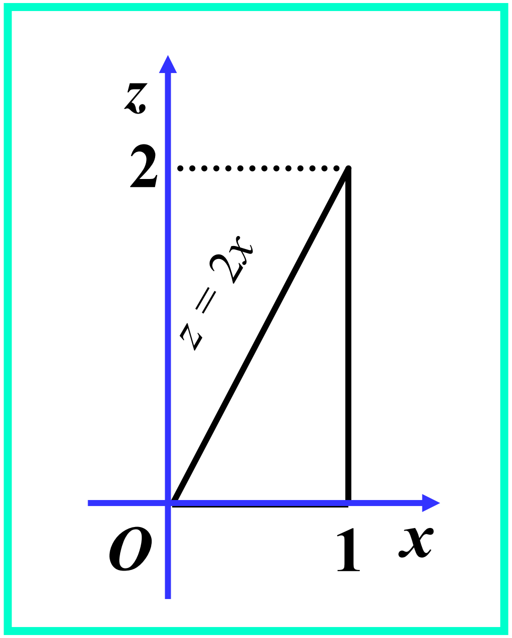
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,2x-z)\mathrm{d}x,$$

其中$$f(x,2x-z)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<z<2x,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$z\le 0$或$z\ge 2$时，有$f_Z(z)=0$,

当$0<z<2$时, $f_Z(z)=\int_{z/2}^{1} dx = 1-\dfrac{z}{2}$,

综上所述 $$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



例3.5.8 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

由公式 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$$

得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=x-\frac{z}{2}}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

独立正态随机变量的重要结论

一般，设X,Y相互独立且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z=X+Y$仍然服从正态分布，且有$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2),i=1,2,\cdots,n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}c_i^2\sigma_i^2\right),$$ 其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为常数。

例3.5.9 设两个相互独立的随机变量X和Y都在区间(0,1)上服从均匀分布，求随机变量$Z=X+Y$的概率密度。

解一： 先求$Z=X+Y$的的分布函数。由于X与Y相互独立，可得

(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

从而Z的分布函数为 $F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$

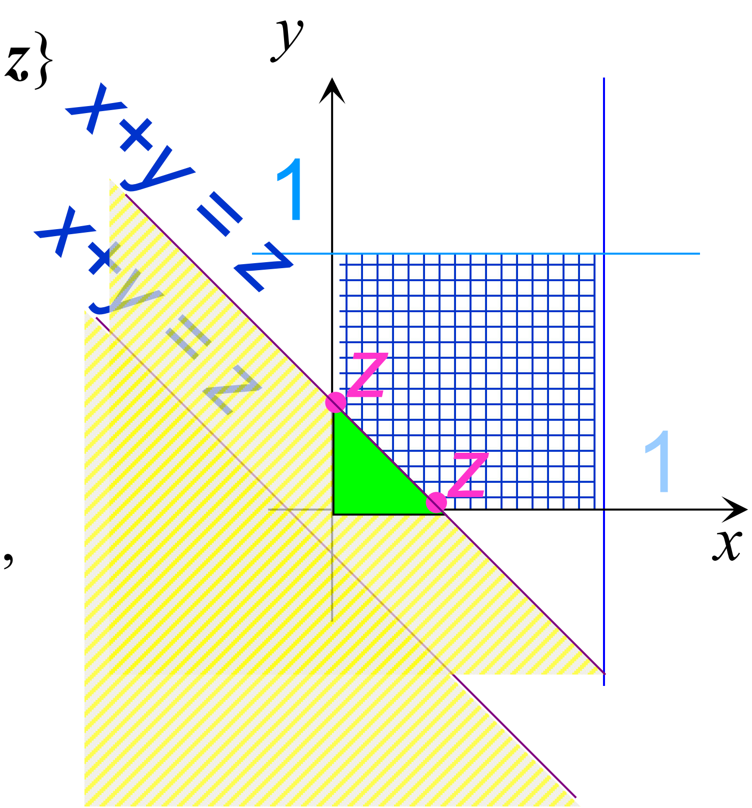
$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$,

当$0\le z<1$ 时,

$$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x} 1\mathrm{d}y=\int_0^z (z-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}z^2,$$

因而 $f_Z(z)=z.$



例3.5.9 设两个相互独立的随机变量X和Y都在区间(0,1)上服从均匀分布，求随机变量$Z=X+Y$的概率密度。

解一:

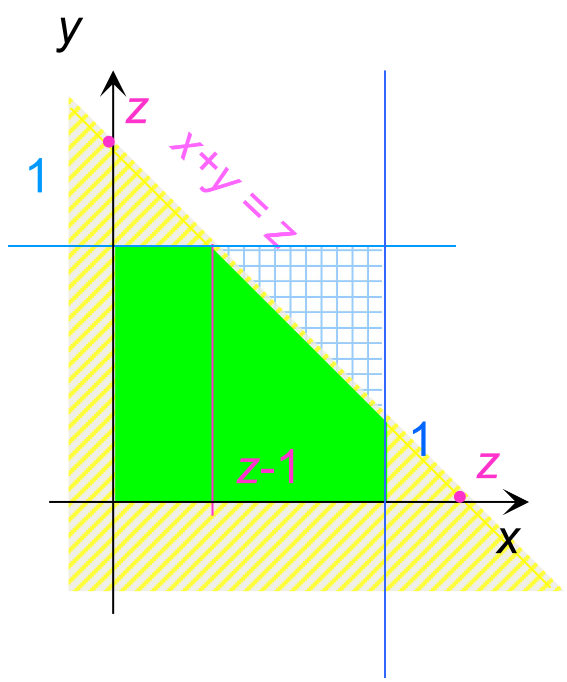
当$1\le z<2$时,

$$F_Z(z)=(z-1)+\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{z-x}1\mathrm{d}y$$

$$=z-1+\int_{z-1}^{1}(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=2z-z^2/2-1$$

因而 $f_Z(z)=2-z.$



例3.5.9 设两个相互独立的随机变量X和Y都在区间(0,1)上服从均匀分布，求随机变量$Z=X+Y$的概率密度。

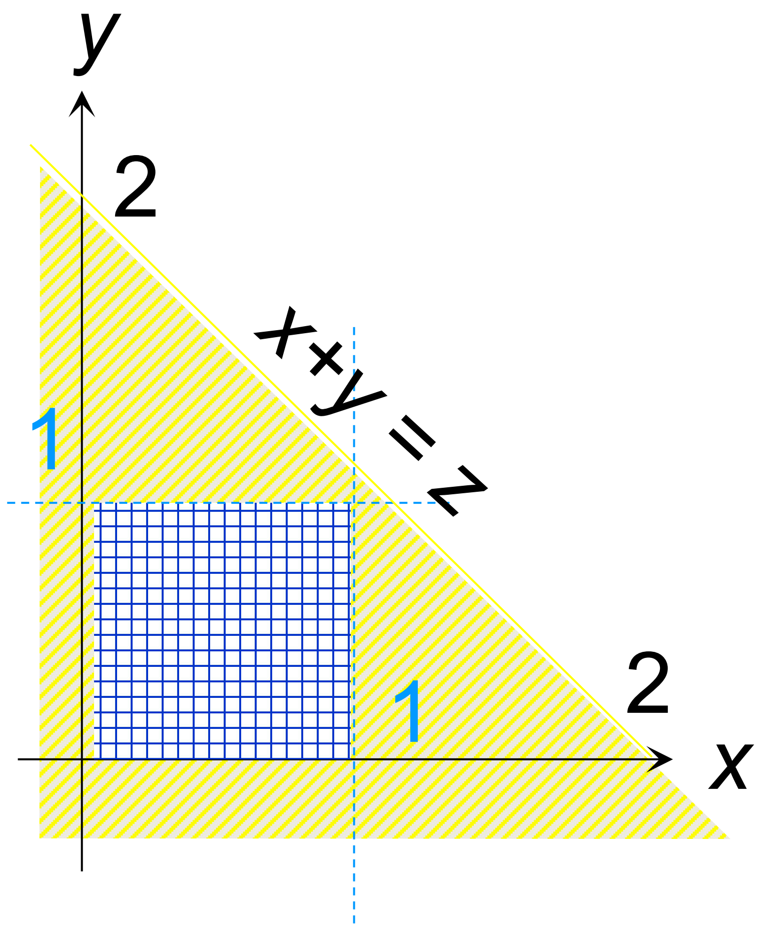
解一:

当$2 \le z$时， $F_Z(z) = 1.$

因而 $$f_Z(z) = 0,$$

综上所述

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{或} z \ge 2, \\ z, & 0 \le z < 1, \\ 2 - z, & 1 \le z < 2. \end{cases}$$

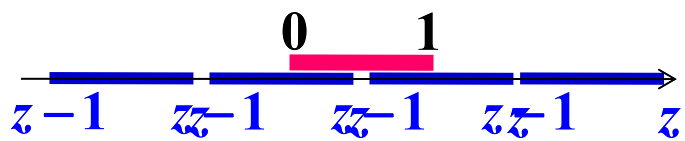


解二（利用卷积公式）

由于

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

且已知X,Y相互独立。根据卷积公式得



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

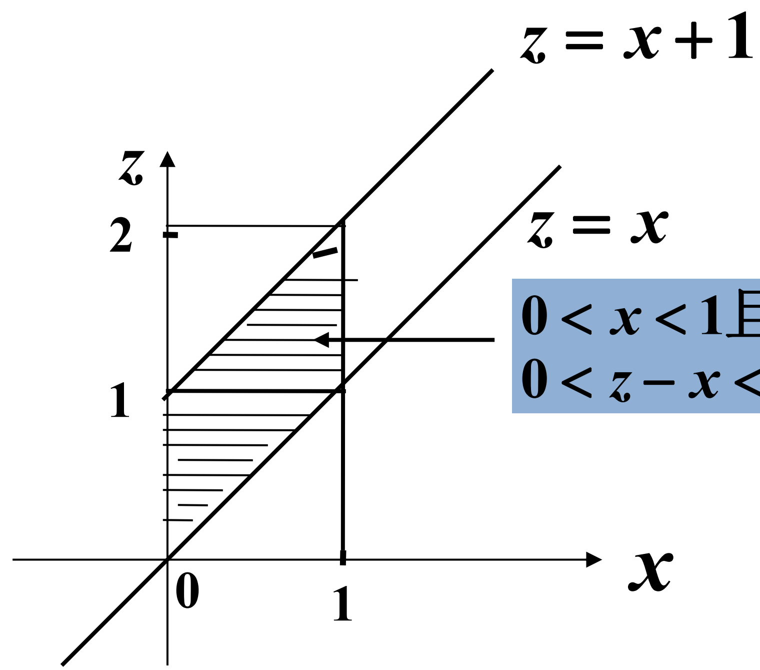
$$=\int_0^1 f_Y(z-x)\mathrm{d}x \overset{t=z-x}{=} \int_{z-1}^{z} f_Y(t)\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0\text{或}z\ge 2,\\ \int_0^z 1\mathrm{dt}, & 0<z\le 1,\\ \int_{z-1}^1 1\mathrm{dt}, & 1<z<2,\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le 0\text{或}z\ge 2\\ z, & 0<z\le 1\\ 2-z, & 1<z<2\end{cases}$$

例3.5.9 设两个相互独立的随机变量X和Y都在区间(0,1)上服从均匀分布，求随机变量$Z=X+Y$的概率密度。

解三 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

画出关于x和z的坐标系，确定被积函数的非零区域

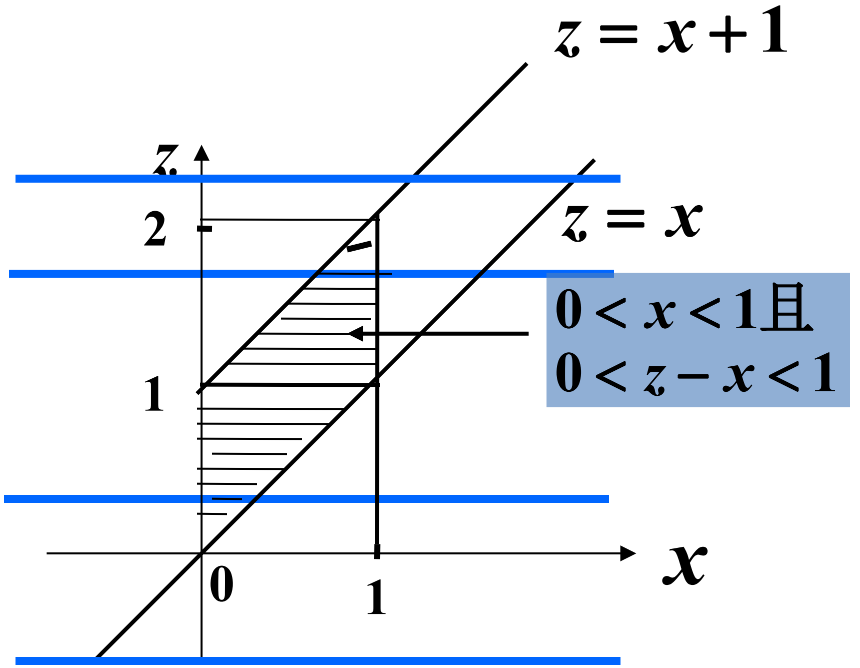


$0<x<1$且
$0<z-x<1$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\begin{cases}0 & z\le 0,\\ \int_0^z 1dx & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^1 1dx & 1\le z<2,\\ 0 & z\ge 2,\end{cases}=\begin{cases}0 & z\le 0,\\ z & 0<z<1,\\ 2-z & 1\le z<2,\\ 0 & z\ge 2,\end{cases}$$

综上所述

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\text{或}z\ge 2,\\ z, & 0<z<1,\\ 2-z, & 1\le z<2.\end{cases}$$



例3.5.10

设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为$P\{X=i\}=1/3,\ i=-1,0,1.$ Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

记$Z=X+Y$,求$P\{Z\le \frac{1}{2}\mid X=0\}$和$Z$的概率密度.

解

$$P\{Z\le \tfrac{1}{2}\mid X=0\}=\frac{P\{Z\le \frac{1}{2},X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{P\{X+Y\le \frac{1}{2},X=0\}}{P\{X=0\}}$$

$$=\frac{P\{X=0,Y\le \frac{1}{2}\}}{P\{X=0\}}=\frac{P\{X=0\}P\{Y\le \frac{1}{2}\}}{P\{X=0\}}=P\{Y\le \tfrac{1}{2}\}=\frac{1}{2}.$$

例3.5.10

设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为$P\{X=i\}=1/3,\ i=-1,0,1.$ Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

记$Z=X+Y$,求$P\{Z\le \frac{1}{2}\mid X=0\}$和$Z$的概率密度.

解　Z的分布函数为 $F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$

$$=P\{X+Y\le z,X=-1\}+P\{X+Y\le z,X=0\}+P\{X+Y\le z,X=1\}$$

$$=P\{X=-1,Y\le z+1\}+P\{X=0,Y\le z\}+P\{X=1,Y\le z-1\}$$

$$=P\{X=-1\}P\{Y\le z+1\}+P\{X=0\}P\{Y\le z\}+P\{X=1\}P\{Y\le z-1\}$$

$$=\frac{1}{3}[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-1\}]$$

$$=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)],$$

由此得$\mathrm{f}_Z(z)=[\mathrm{F}_Z(z)]'=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<z<2,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(2) $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机 变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有 $F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$= 1 - [1 - P\{X \le z\}] \cdot [1 - P\{Y \le z\}]$$

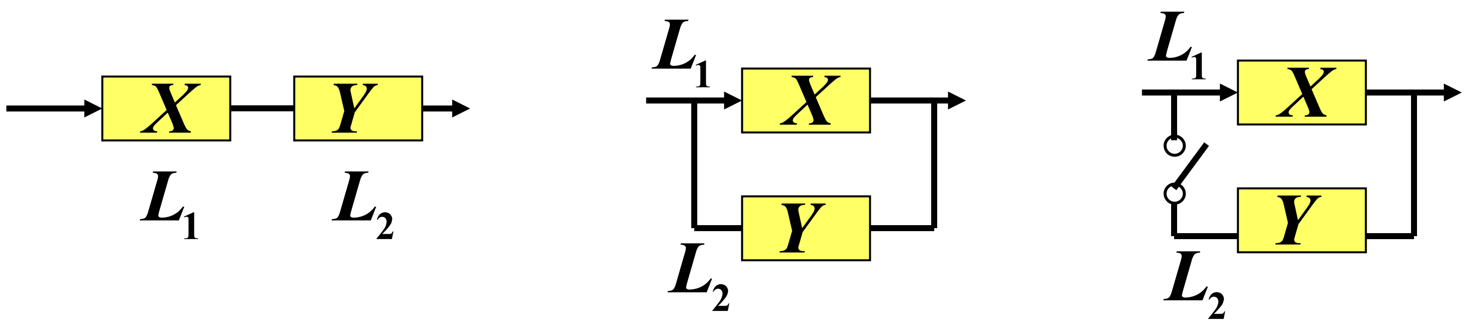
$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

故有

$$F_{\max}(z) = F_X(z) F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

例3.5.11 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\ \beta>0$ 且 $\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度 .

解　(i)串联情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时 ,系统 L 就停止工作,所以这时 L 的寿命为　$Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases} \Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta \mathrm{e}^{-\beta y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, z>0,\\ 0, \quad z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, z>0,\\ 0, \quad z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha z})(1 - \mathrm{e}^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha z} + \beta \mathrm{e}^{-\beta z} - (\alpha + \beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,

因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和,即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时, $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}\, y = \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta \mathrm{e}^{-\beta y} \mathrm{d}\, y$$

$$= \alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha) y} \mathrm{d}\, y = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha} [\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}].$$

当 $z \le 0$ 时, $f(z) = 0$,

于是 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

三、小结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

2. 连续型随机变量函数的分布

(1) 一般情形 分布函数法

(2) $Z=X+Y$ 的分布 分布函数法、公式法、卷积公式

(3) $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

会求分布函数