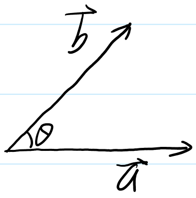
空间解析几何10-1

2022年4月1日 7:58

向量的内积（点积、数量积）

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \theta=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\in[0,\pi]$



$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\pm(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

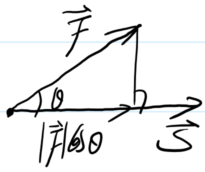
$=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$

$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z)$

$\lambda\vec{a}=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})$

$=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

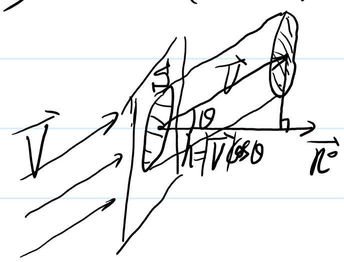
引入：1) 功（$\vec{F}$沿直线位移作功） 用于第II型曲线积分



$$\boxed{W=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\theta \quad \theta=(\widehat{\vec{F},\vec{S}})}$$

$W=\vec{F}\cdot\vec{S}$

2) 流量（通量） 用于第II型曲面积分



$$\boxed{H=S|\vec{v}|\cos\theta=S|\vec{v}||\vec{n}^0|\cos\theta \quad \theta=(\widehat{\vec{v},\vec{n}}) \quad =|\vec{v}||\vec{S}|\cos\theta}$$

$H=S\vec{v}\cdot\vec{n}^0$ 定义 $S\vec{n}^0=\vec{S}$ 有向面积

$=\vec{v}\cdot\vec{S}$

内积性质 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$，即 $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\theta$

$=|\vec{b}|\,|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$ 即 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta$

$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta$

$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\theta$

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta$

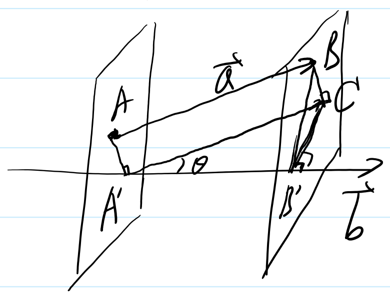
$=|\vec{a}||\vec{b}^0|\cos\theta$

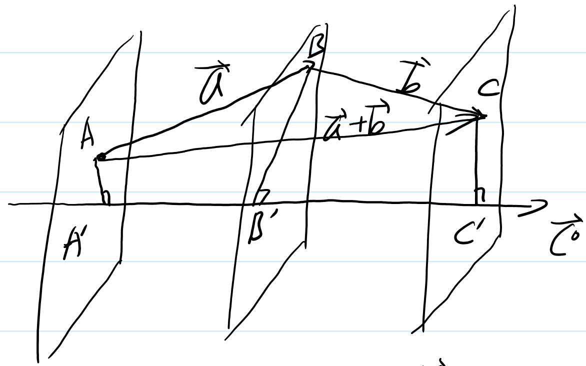
$=\vec{a}\cdot\vec{b}^0$

4) 运算律
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
(2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b} \quad \lambda\in R$
(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

证明：只须证 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}^0=\vec{a}\cdot\vec{c}^0+\vec{b}\cdot\vec{c}^0$

只须证 $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{b}$ （射影定理）

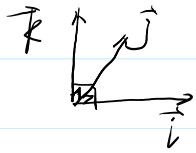




$A'B' = |\vec{AC}|\cos\theta = |\vec{AB}|\cos\theta = \mathrm{Prj}_{\vec b}\vec a$

$A'C' = A'B' + B'C'$ 即 $\mathrm{Prj}_{\vec c}(\vec a+\vec b) = \mathrm{Prj}_{\vec c}\vec a + \mathrm{Prj}_{\vec c}\vec b$

5) 内积的坐标 $\vec a = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec b = (b_x, b_y, b_z)$



$\vec i\cdot\vec j = \vec j\cdot\vec k = \vec k\cdot\vec i = 0$

$\vec i\cdot\vec i = \vec j\cdot\vec j = \vec k\cdot\vec k = 1$

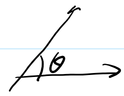
$$\vec a\cdot\vec b = (a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k)\cdot(b_x\vec i + b_y\vec j + b_z\vec k)$$

$$= a_xb_x\,\vec i\cdot\vec i + a_yb_y\,\vec j\cdot\vec j + a_zb_z\,\vec k\cdot\vec k$$

$$+\underbrace{(a_xb_y + a_yb_x)\,\vec i\cdot\vec j}_{0} + \underbrace{(a_yb_z + a_zb_y)\,\vec j\cdot\vec k}_{0} + \underbrace{(a_zb_x + a_xb_z)\,\vec k\cdot\vec i}_{0}$$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

6) 向量的夹角



$$\vec a\cdot\vec b = |\vec a||\vec b|\cos\theta \Rightarrow \cos(\widehat{\vec a,\vec b}) = \cos\theta = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\,|\vec b|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$\theta\in[0,\pi]$

例 $|\vec a| = 2$，$|\vec b| = 1$ $(\widehat{\vec a,\vec b}) = \frac{\pi}{3}$ 求 $\vec m = 2\vec a+\vec b$ 与 $\vec n = \vec a - 4\vec b$ 的夹角

$$\cos(\widehat{\vec m,\vec n}) = \frac{\vec m\cdot\vec n}{|\vec m|\,|\vec n|}$$

$\vec m\cdot\vec n = (2\vec a+\vec b)\cdot(\vec a - 4\vec b)$

$= 2|\vec a|^2 - 8\vec a\cdot\vec b + \vec b\cdot\vec a - 4|\vec b|^2 = \cdots\cdots$

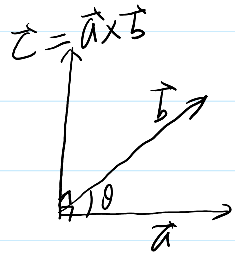
$\vec a\cdot\vec b = |\vec a|\,|\vec b|\cos\frac{\pi}{3}$

$|\vec m|^2 = \vec m\cdot\vec m = (2\vec a+\vec b)\cdot(2\vec a+\vec b) = 4|\vec a|^2 + |\vec b|^2 + 4\vec a\cdot\vec b$

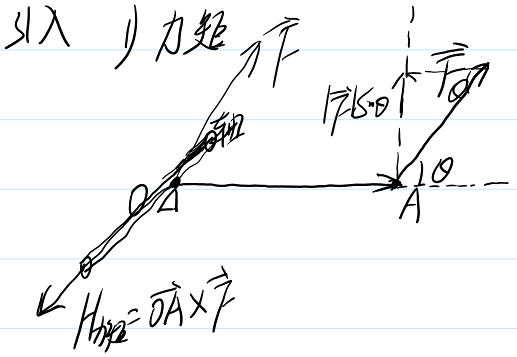
随习扩解 - - -

向量的外积（叉积，向量积（矢量积））

定义 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ $\begin{cases} 1) \ |\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta \quad \theta=(\hat{\vec{a},\vec{b}}) \\ 2) \ \vec{c}\perp\vec{a} \text{ 且 } \vec{c}\perp\vec{b}，\text{右手系} \end{cases}$



引入 1) 力矩

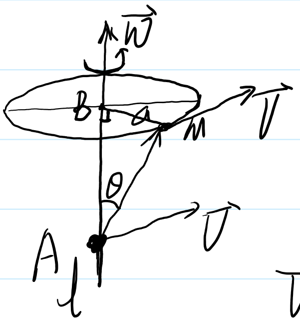


$\vec{H}_{力矩}$ $\begin{cases} |\vec{H}|=|\vec{OA}|\,|\vec{F}|\sin\theta \quad \theta=(\hat{\vec{OA},\vec{F}}) \\ \vec{H}\perp\vec{OA}，\vec{H}\perp\vec{F}，\text{右手系} \end{cases}$

即 $\boxed{\vec{H}=\vec{OA}\times\vec{F}}$

2) 线速度 $\vec{V}$　M点绕其轴 l 旋转（转轴 $\parallel\vec{k}$），设 M 点 M 角速度为 $\vec{\omega}$

半径为 a，求 M 点线速度（如图）



$\forall$ 点 $A\in l$，则有

$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{AM}$ $\begin{cases} |\vec{V}|=|\vec{\omega}|\,a=|\vec{\omega}|\,|\vec{AM}|\sin\theta \\ \vec{V}\perp\vec{\omega}，\vec{V}\perp\vec{AM} \quad \text{右手系} \end{cases}$

$$\boxed{\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{AM}}$$

性质 1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$　或 $\vec{a}\times\vec{a}=0$

2) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \iff \vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}=\lambda\vec{b}$

3) $\begin{cases} (1) \ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a} \\ (2) \ \vec{a}\times(\lambda\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) \\ (3) \ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \end{cases}$

1 (3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$