A11. $F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-3y}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

显然，$\forall x,y\in R$ 有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，故X和Y相互独立

A19 解 因 $P\{XY=0\}=1$ 则 $P\{XY\neq 0\}=0$ 从而 $P\{XY=1\}=0$. 且 $P\{XY=-1\}=0$

于是 $P\{X=-1,Y=1\}=0$. $P\{X=1,Y=1\}=0$

由 $P\{X=-1\}=\frac{1}{4}$ 得 $P\{X=-1,Y=0\}=P\{X=-1\}-P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$

由 $P\{X=1\}=\frac{1}{4}$ 得 $P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}-P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$，由 $P\{Y=0\}$ 得 $P\{X=0,Y=0\}=0$

由 $P\{X=0\}=\frac{1}{2}$ 得 $P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	$P\{X=i\}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$P\{Y=j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

(2) $P\{X=0,Y=0\}=0$. 而 $P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq 0$ 故X和Y不独立

A22. 证明 对n进行归纳

$n=1$时，结论显然成立

$n=2$时 设 $Y=X_1+X_2$ Y的可能取值为0.1.2.

$P\{Y=0\}=P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{X_1=0\}\cdot P\{X_2=0\}=(1-p)^2=\binom{2}{0}p^0(1-p)^{2-0}$

$P\{Y=1\}=P\{X_1=1,X_2=0\}+P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=0\}+P\{X_1=0\}P\{X_2=1\}$

$=p(1-p)+(1-p)\cdot p=2p(1-p)=\binom{2}{1}p^1(1-p)^{2-1}$

$P\{Y=2\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}=p^2=\binom{2}{2}p^2(1-p)^{2-2}$

故 $Y\sim B(2,p)$

当 $n>2$时 假设 $Z=X_1+\cdots+X_{n-1}\sim B(n-1,p)$

$X=X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}+X_n=Z+X_n$. X的可能取值为 $0,1,2,\cdots n$

$P\{X=0\}=P\{Z=0,X_n=0\}=P\{Z=0\}P\{X_n=0\}=\binom{n-1}{0}(1-p)^{n-1}\cdot(1-p)=\binom{n}{0}(1-p)^n$

$P\{X=k\}=P\{Z=k,X_n=0\}+P\{Z=k-1,X_n=1\}=P\{Z=k\}P\{X_n=0\}+P\{Z=k-1\}P\{X_n=1\}$

$=\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}\cdot(1-p)+\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\cdot p=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=1,2,\cdots n$

故 $X\sim B(n,p)$

A14. P98

解. (1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{9y^2}{x} & 0<y<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases} \int_y^1 \dfrac{9y^2}{x}\,dx=-9y^2\ln y. & 0<y<1 \\ 0 & \cancel{0<y<1}\ 其它 \end{cases}$

(3) $P\{X>2Y\}=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x}\,dy=\frac{1}{8}$

B6. 解. 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$ 得 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-(y-x)^2}dy$

$=\pi A=1$ 故 $A=\frac{1}{\pi}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$

于是 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}\quad -\infty<y<+\infty$

B7. 解. 先求分布函数 $F_Z(z)$

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=P\{X+Y\le z,\ X=0\}+P\{X+Y\le z,\ X=2\}$

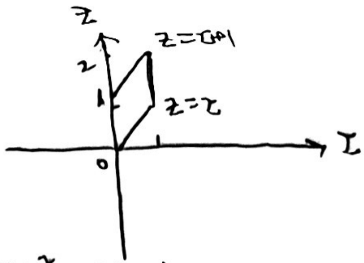
$=P\{X=0\}\,P\{X+Y\le z|X=0\}+P\{X=2\}\cdot P\{X+Y\le z|X=2\}$

$=\frac{1}{2}[P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-2\}]$

$=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-2)$

于是 $f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-2)=\begin{cases} z. & 0<z<1 \\ z-2 & 2<z<3 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

B3 解 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$



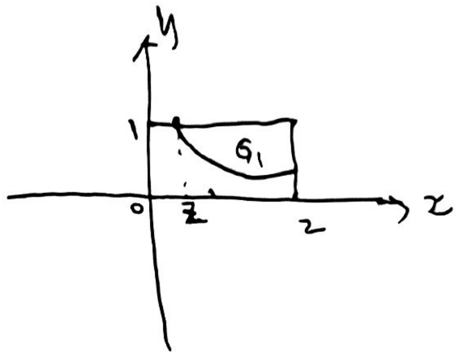
如右图所示 当 $0<x<1$, 且 $0<z-x<1$ 即

$0<x<1$, $x<z<x+1$ 时

$f(x,z-x)\neq 0$

故 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx=\begin{cases}\int_0^z (x+z-x)\,dx=z^2 & 0<z<1\\ \int_{z-1}^1 (x+z-x)\,dx=2z-z^2 & 1<z<2\\ 0 & 其它\end{cases}$

习题课教程例18



解 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x,y)\in G\\ 0 & 其它\end{cases}$

设 $Z=XY$ 的分布函数为 $F_Z(z)$

当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=P\{XY\le z\}=P(\emptyset)=0$

当 $z\ge 2$ 时 $F_Z(z)=P\{XY\le z\}=P(\Omega)=1$.

当 $0\le z<2$ 时 $F_Z(z)=P\{XY\le z\}=1-P\{XY>z\}=1-\iint\limits_{xy>z} f(x,y)\,dx\,dy=1-\iint\limits_{G_1}\frac{1}{2}\,dx\,dy$

$=1-\int_z^2 dx\int_{\frac{z}{x}}^1 \frac{1}{2}\,dy=1-\frac{1}{2}\int_z^2\left(1-\frac{z}{x}\right)dx=\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\ln 2-\frac{z}{2}\ln z=\frac{z}{2}(1+\ln 2-\ln z)$.

从而可得 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z) & 0<z<2\\ 0 & 其它\end{cases}$