第三节　二维连续型随机变量及其概率密度

一、　二维连续型随机变量及其概率密度

二、　边缘概率密度

三、　二维连续型随机变量的相互独立性

四、　两个常用的分布

3.1 二维连续型随机变量及其概率密度

1.定义

对于二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$, 如果存在非负的函数 $f(x,y)$ 使对于任意 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

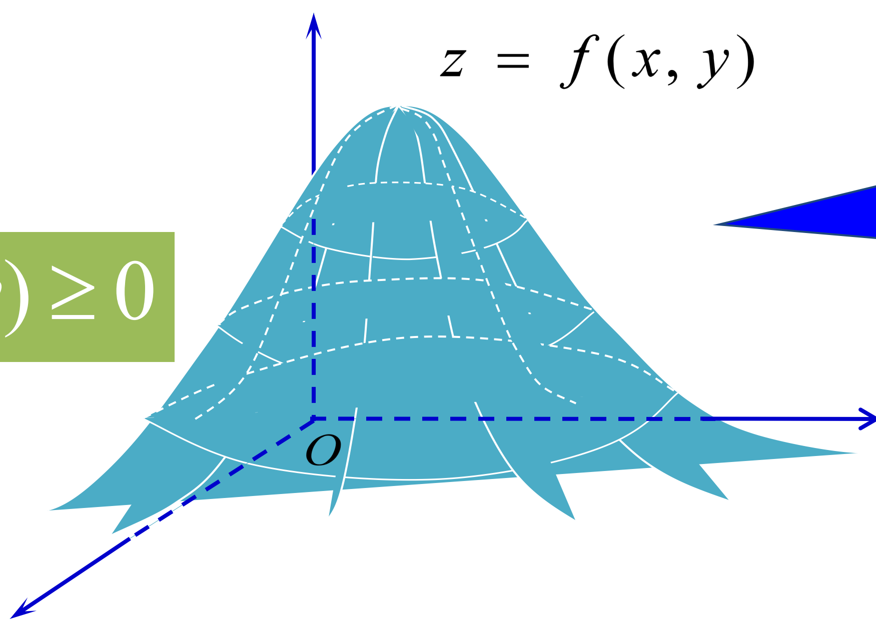
则称 (X,Y) 是连续型的二维随机变 量,函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的概率密度,或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

2.性质

(1) $f(x,y)\geq 0.$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty)=1.$

几何意义



$f(x,y)\geq 0$

曲面 $z=f(x,y)$
与xoy平面围成
的体积为 1

2.性质

(3)若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.

$$\because \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv\right)du\right] = \int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv$$

$$\therefore \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv\right) = f(x,y)$$

2.性质

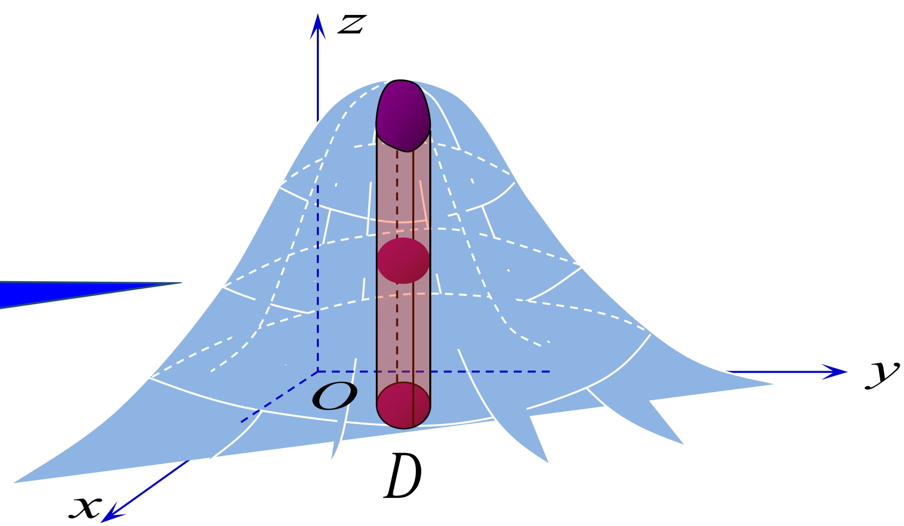
(4) 设 D 是 xoy 平面上的一个区域, 点 (X,Y) 落在 D 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

计算概率的公式

$P\{(X,Y)\in D\}=$

曲顶柱体体积



常见题型：

(1) 求$f(x,y)$中的未知参数。 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

(2) 由$F(x,y)$求$f(x,y)$. $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$

(3) 由$f(x,y)$求$F(x,y)$.

(4) 利用$f(x,y)$求关于(X,Y)的相关事件的概率.

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

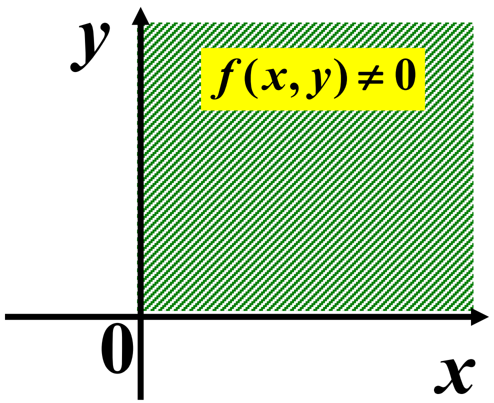
例3.3.1 设(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 (1)常数 C； (2) $F(x,y)$;

(3) $P\{X+Y<1\}$.

解 (1) 由密度函数的性质有



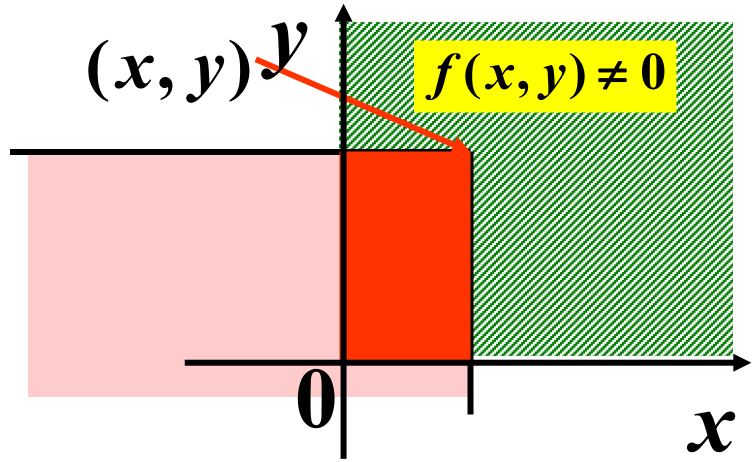
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} Ce^{-(3x+4y)}dxdy$$

$$=C\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx\int_{0}^{+\infty} e^{-4y}dy=\frac{C}{12}$$

$$\Rightarrow C=12.$$

(2) 当 $x>0, y>0$, 时



$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

$$=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 12e^{-(3u+4v)}dudv$$

$$=\int_{0}^{x} 3e^{-3u}du\int_{0}^{y} 4e^{-4v}dv$$

$$=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}).$$

其它， $F(x,y)=0$,

于是

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$F(x,y)$中自变量x和y的定义域均为全体实数，所以要对所有点写出表达式.

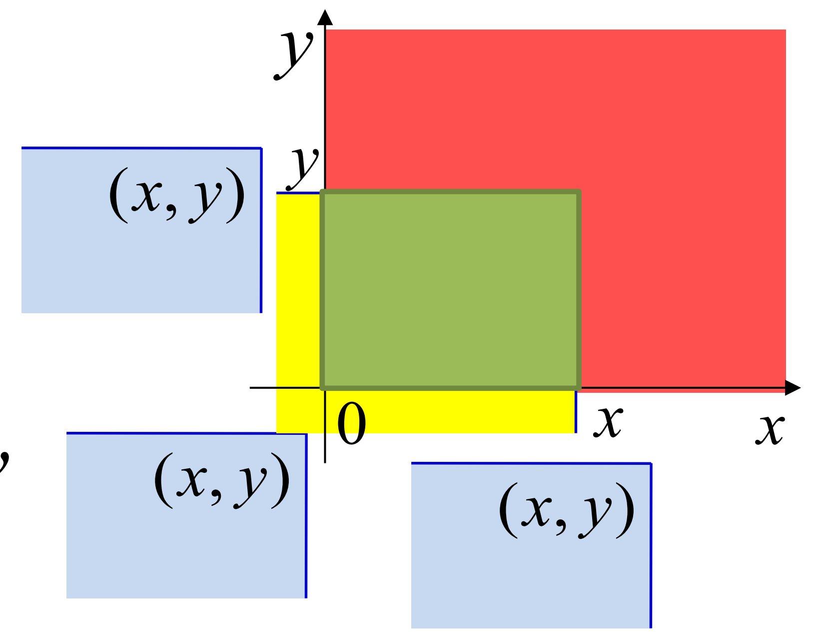
(2) 当 $x>0$, $y>0$, 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

$$=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x}12e^{-(3u+4v)}dudv$$

$$=\int_{0}^{x}3e^{-3u}du\int_{0}^{y}4e^{-4v}dv$$

$$=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}).$$



当$x\le 0$或$y\le 0$时，$F(x,y)=0$,

于是

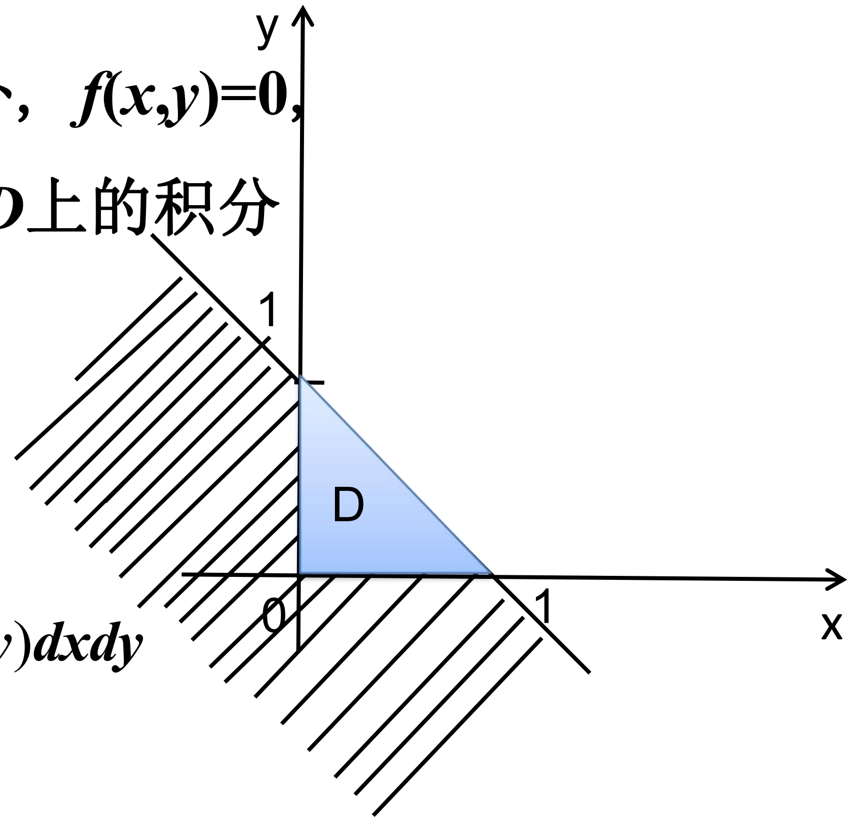
$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$F(x,y)$中自变量x和y的定义域均为全体实数，所以要对所有点写出表达式.

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

解：(3) 以G表示区域 $\{(x,y)|x+y<1\}$，则$P\{X+Y<1\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$

由于在区域$\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$外，$f(x,y)=0$，则在区域$G$上的积分等价于在区域$D$上的积分(如右图)，即



$$P\{X+Y<1\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}12e^{-(3x+4y)}dy$$

$$=\int_0^1(3e^{-3x}-3e^{-4}e^{x})dx=1-4e^{-3}+3e^{-4}.$$

3.2 二维连续型随机变量的边缘概率密度

设(X, Y)的分布函数为$F(x,y)$, 概率密度为 $f(x, y)$， 则关于X 的边缘分布函数

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = \lim_{y \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{y} f(u, v) \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}u$$

所以 X 是一个连续型随机变量，关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) \mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y \quad (-\infty < x < +\infty).$$

同理可知 Y 也是一个连续型随机变量, 关于 Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}v.$$

关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x \quad (-\infty < y < +\infty).$$

定义 对于连续型随机变量 (X,Y), 设它的概率密度为 $f(x,y),(x,y)\in R^2$,

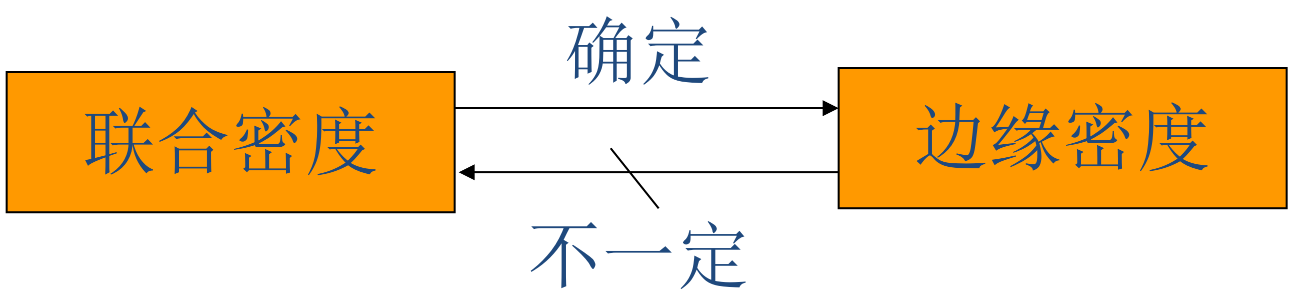
将一元函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,\ \ x\in R,$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x,\ \ y\in R,$$

分别称为随机变量 (X,Y) 关于 X和关于 Y 的边缘概率密度.

联合密度与边缘密度有何关系?

一般地:



例3.3.2 设(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求(X,Y)关于X和关于Y的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty} 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y=3e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

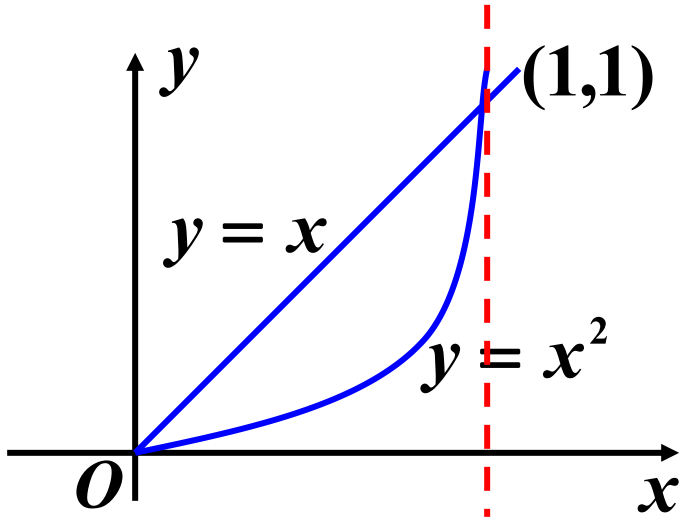
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{+\infty} 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x=4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

例3.3.3 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$



当 $0\le x\le 1$ 时,

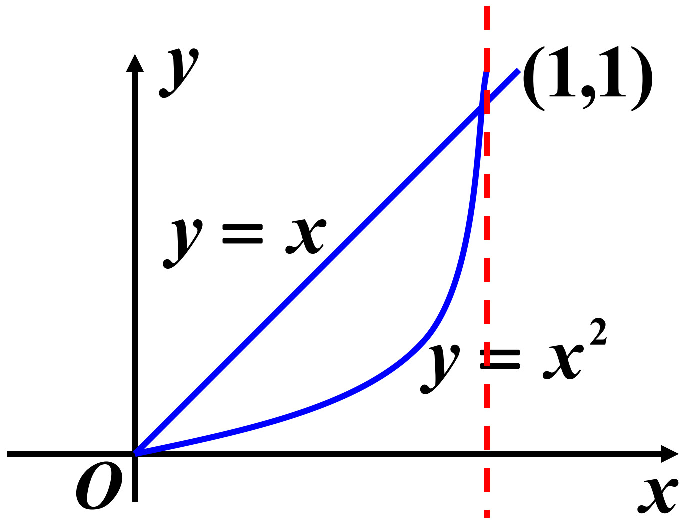
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_{x^2}^{x}6\,\mathrm{d}\,y$$

$$= 6(x - x^2).$$

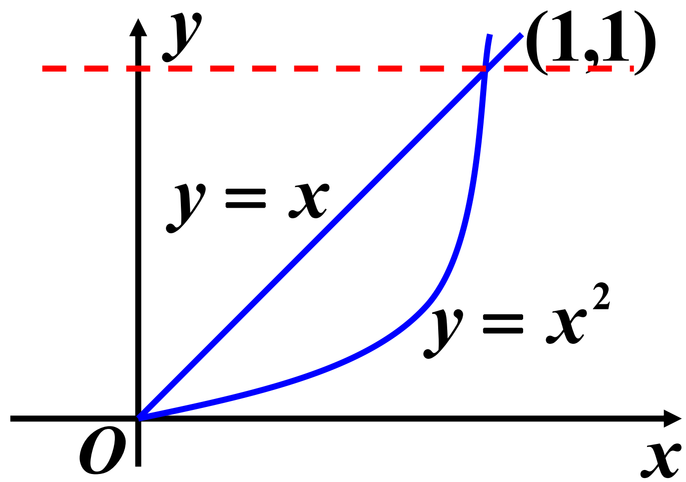
当 $x < 0$ 或 $x > 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0.$$



因而得 $$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $0 \le y \le 1$ 时,



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x$$

$$= 6(\sqrt{y} - y).$$

当 $y < 0$ 或 $y > 1$时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0.$

得 $$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

如何由联合密度求边缘密度？（重点）

求随机变量X的边缘密度函数$f_X(x)$

已知$f(x,y)$求$f_X(x)$的过程：

(1)先定出$f_X(x)\neq 0$的x的范围，以及用X型积分求解法得到的y的变化范围D;

(2)求积分$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_D f(x,y)dy$;

(3)其它区间上，$f_X(x)=0.$

3.3 二维连续型随机变量的独立性

定理 若 (X, Y)是二维连续型随机变量,则X,Y相互独立的充要条件是对任意的 x, y, 有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

几乎处处成立。

几乎处处成立：在平面上除去“面积”为零的集合（点集、直线）以外，处处成立；

$$\text{边缘密度} \underset{\text{可以}}{\overset{\text{独立性}}{\rightleftarrows}} \text{联合密度}$$

在例3.3.2中

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

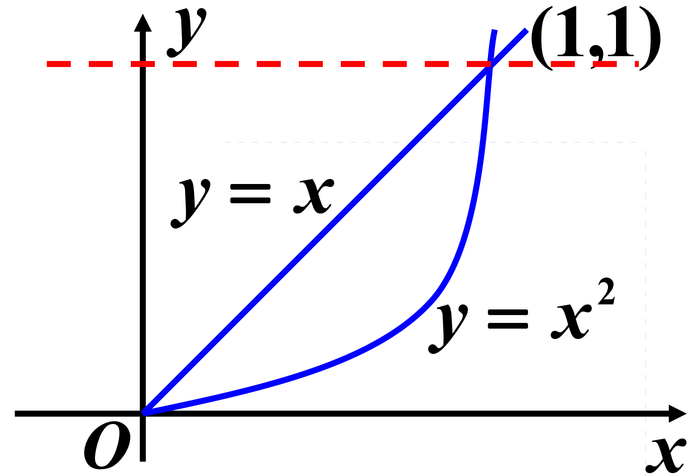
关于X和Y的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

知X与Y独立.

在例3.3.3中 X与Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



两个边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$ X与Y不相互独立.

例3.3.4 设随机变量X和Y相互独立，X在区间上(0,2)上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

求: (1) $P\{-1<X<1,\ 0<Y<2\}$; $P\{X+Y>1\}$.

解: （1）根据已知条件，得X的概率密度为

$$f_X(\mathrm{x})=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

由于X和Y相互独立，因此二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y}, & 0<x<2,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

例3.3.4 设随机变量X和Y相互独立，X在区间上(0, 2)上服从均匀分布，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

求: (1) $P\{-1<X<1, 0<Y<2\}$; $P\{X+Y>1\}$.

解: $P\{-1<X<1\}P\{0<Y<2\}$

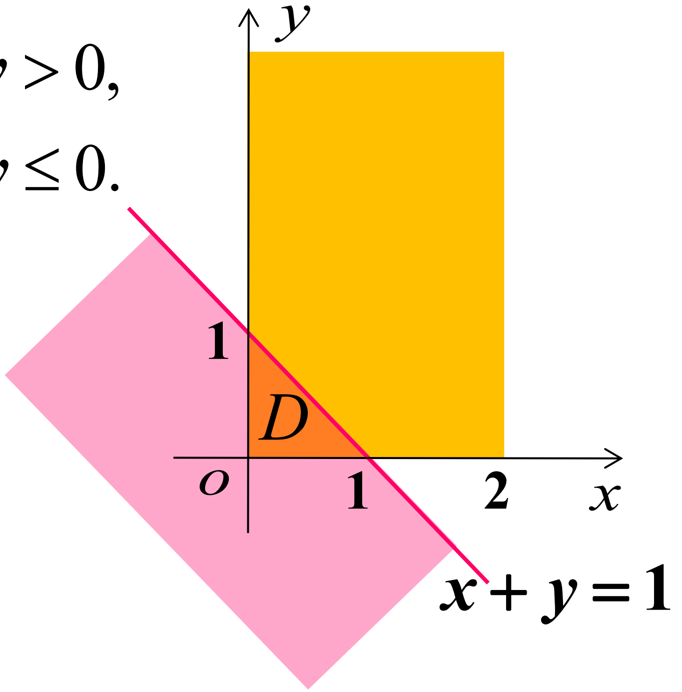
$$=\int_{-1}^{1} f_X(x)dx\int_0^2 f_Y(y)dy=\int_0^1 \frac{1}{2}dx\int_0^2 e^{-y}dy$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-2}).$$

例3.3.4 设随机变量X和Y相互独立，X在区间(0,2)上服从均匀分布，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

求: (1) $P\{-1<X<1,\ 0<Y<2\}$; $P\{X+Y>1\}$.



解:

$$P\{X+Y>1\}=1-P\{X+Y\le 1\}$$

$$=1-\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=1-\iint\limits_{x+y\le 1,\ 0<x<2,\ y>0}\frac{1}{2}e^{-y}dxdy$$

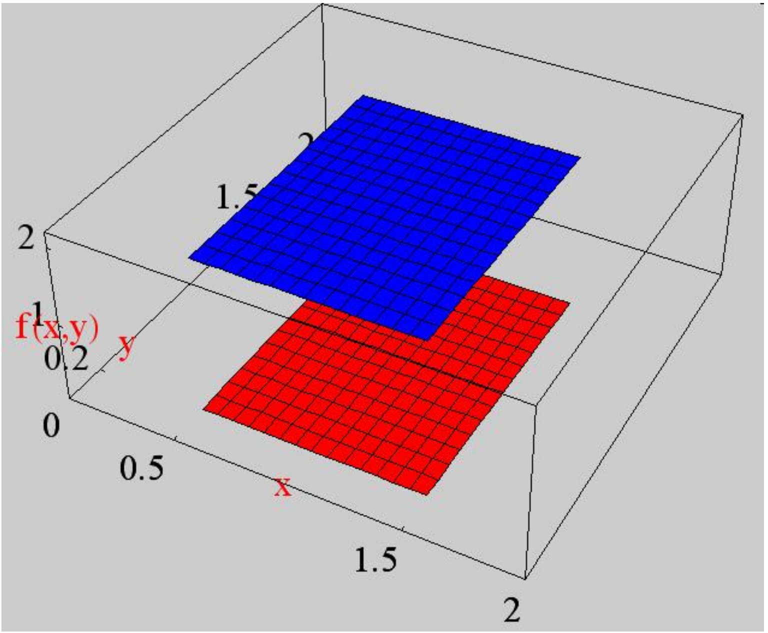
$$=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}e^{-y}dy=1-\int_0^1\frac{1}{2}(1-e^{x-1})dx=1-\frac{1}{2e}.$$

3.4 两个常用的分布

1.均匀分布

定义 设 D 是平面上的有界区域,其面积为 S,若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



则称 (X, Y) 在 D 上服从**均匀分布.**

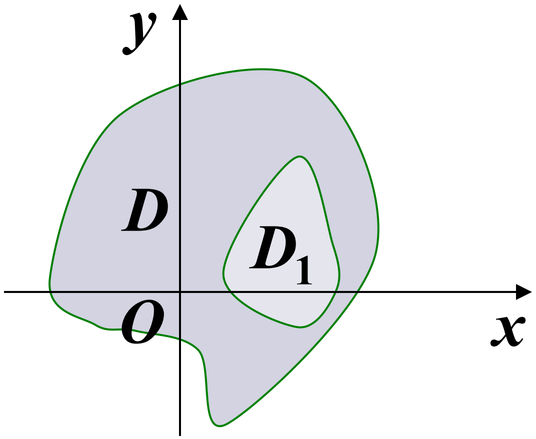
随机点落在区域D内每一点的可能性都相同.

注1:

若(X,Y)服从区域D上的均匀分布, 则 $\forall D_1 \subset D$, 设D_1的面积为 S_{D_1}, 有

$$P\{(X,Y)\in D_1\}=\frac{S_{D_1}}{S_D}.$$

二维几何概率公式



上式说明: 对均匀分布, 随机点(X,Y)落在区域 D_1 的概率和区域 D_1 的位置无关, 只和 D_1 的面积成正比.

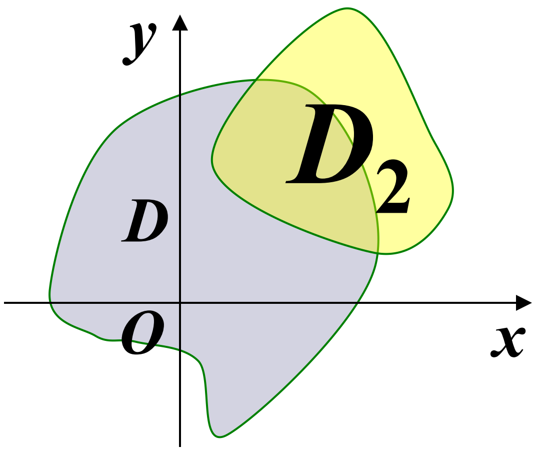
注2:

对于区域D_2，如图:

$$P\{(X,Y)\in D_2\}=\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{D_2\cap D}\frac{1}{S_D}dxdy$$

$$=\frac{S_{D_2\cap D}}{S_D}$$



例3.3.5 设(X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中

$$G=\{(x,y)\mid 0 \quad y \quad x, 0 \quad x \quad 1\}.$$

求 (1) $f(x,y)$;

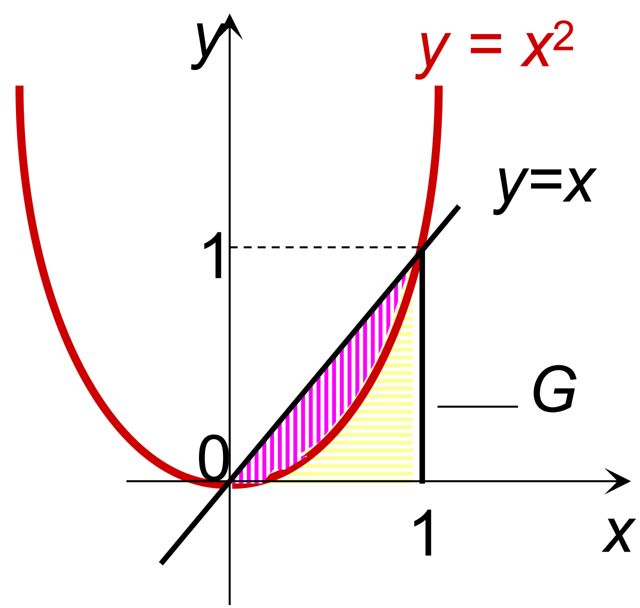
(2) $P\{Y>X^2\}$;

(3) 求关于X和关于Y的边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$.

并判断X和Y是否独立。

解 (1)

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0 \quad y \quad x, 0 \quad x \quad 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



(2)

$$P\{Y>X^2\}= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} 2\mathrm{d}y$$

$$=1/3.$$

解 (3) 当 $0 \le x \le 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x 2\,\mathrm{d}y = 2x;$$

当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f_X(x) = 0$.

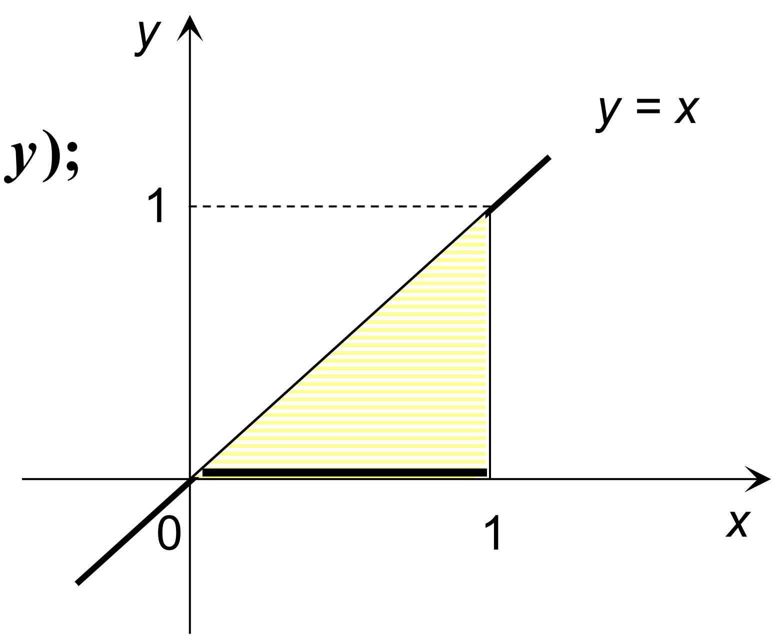
因而得 $$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $0 \le y \le 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_y^1 2\,\mathrm{d}x = 2(1-y);$$

当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时, $f_Y(y) = 0$.

得 $$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



当$0<x<1$且$0<y<x<1$时，由于

$$f(x,y) = 2 \ne 2x \cdot 2(1-y) = f_X(x) f_Y(y)$$ 故X和Y不独立.

例3.3.6 设(X,Y)服从矩形$[a,b;c,d]$上的均匀分布，请问X与Y是否独立？

解

联合密度函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, a<x<b, c<y<d\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

边缘密度函数
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a<x<b\\ 0,\text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, c<y<d\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 对$\forall x,y$均成立

从而，X与Y独立.

例3.3.7 已知随机向量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, x^2+y^2\le R^2\\ 0, \text{其它}\end{cases},$$

问(1)X与Y是否分别服从一维均匀分布?

(2)X与Y是否独立?

解： (1)先 求 X 与 Y的 边 缘 密 度

(2) 判 断 是 否 有 下 式 成 立：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y), \text{对}\forall x,y\text{均成立}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}dy, -R \le x \le R \\ 0, 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, -R \le x \le R \\ 0, 其它\end{cases}$$

X不是服从[-R, R]上的均匀分布

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \dfrac{1}{\pi R^2} dx, -R \le y \le R \\ 0, 其它 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}, -R \le y \le R \\ 0, 其它 \end{cases}$$

*Y*也不是服从[-*R*, *R*]上的均匀分布

联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

圆形区域

边缘密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & -R\le x\le R\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, & -R\le y\le R\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

矩形区域

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，X与Y不独立

关于二维均匀分布的几点说明

- 矩形域$[a, b; c, d]$上如果(X, Y)满足均匀分布，则X和Y分别满足$[a, b]$和$[c, d]$上的均匀分布，且二者相互独立；
- 圆形域上$x^2 + y^2 \leq R^2$，若(X, Y)满足均匀分布，则X和Y并不满足均匀分布，且二者不独立；
- 边缘分布不仅与联合密度函数的取值有关，而且与联合密度函数的非零区域有关.

2.二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$$

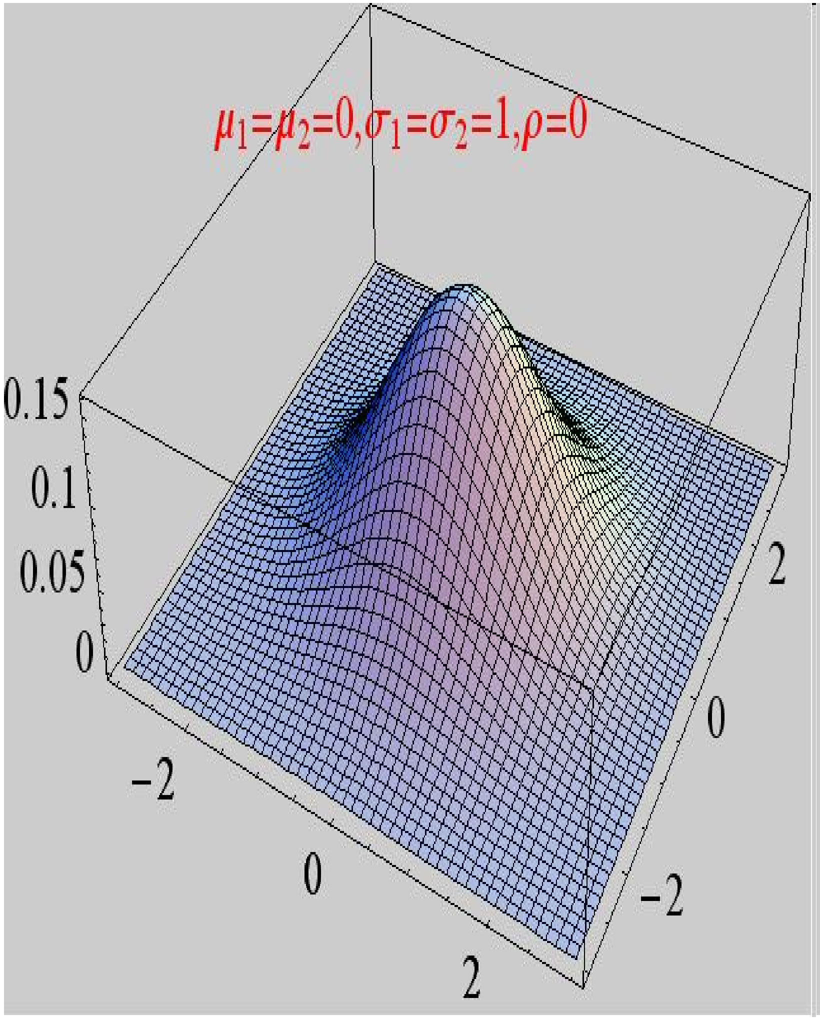
其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且

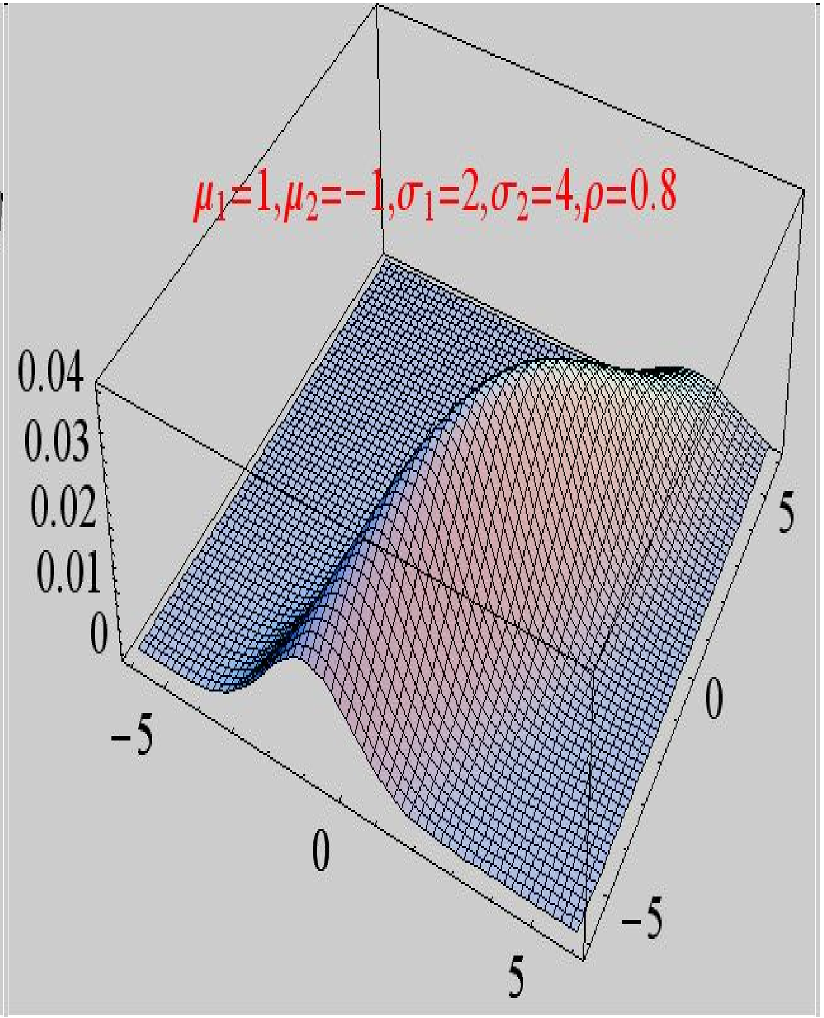
$-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty,\sigma_1,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称 (X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布 .记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

二维正态分布的图形


$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
-2
0
2
2
0
-2


$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-5
0
5
5
0
-5

二维正态分布的重要性质

① 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

二维正态分布的边缘分布是一维正态分布

二维正态分布与参数ρ有关, 但关于X和关于Y的边缘分布与ρ无关, 即只要给定二维正态分布的前4个参数, 关于X和关于Y的边缘分布也就确定了, 与ρ无关.

注意：由联合分布可唯一确定边缘分布, 反之不然, 即一般情况下，不能由边缘分布确定联合分布。

②若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

则X与Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$.

例3.3.8 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

求关于X和关于Y 的边缘概率密度。

解 (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}$$

$$(-\infty<x,y<+\infty)$$

$$\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

$$=-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2,$$

因此 关于X的边缘概率密度为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1,$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$, 则

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty.$$

同理 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty.$

$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然 (X,Y) 不服从正态分布，但

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布.

例3.3.9 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,证明$X$与$Y$相互独立的充分必要条件是$\rho=0$.

证: 由$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$知:

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

于是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho 2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho 2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

“$\Rightarrow$” 若X与Y相互独立,则对$\forall x,y$有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

令$x=\mu_1, y=\mu_2$, 则 $\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$,

由此得 $\rho=0.$

“$\Leftarrow$” 若$\rho=0$, 则

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$=f_X(x)f_Y(y),$$

故X与Y相互独立.

例3.3.10 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\tfrac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\},-\infty<x,y<+\infty$$

求(1) (X,Y)的分布，关于X和关于Y的边缘分布。

(2)求$P\{(X,Y)\in G\}$,其中$G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\sigma^2\}$.

解 (1) $(X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$, $X\sim N(0,\sigma^2), Y\sim N(0,\sigma^2)$.

(2) $$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_G \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}r\mathrm{d}r$$

$$=-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{\sigma}=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$