第一章

事件

关系：$A \subset B, A = B, \bar{A}$(互逆/对立), $AB = \varnothing$(互斥/互不相容),独立

运算：$A + B, AB, A - B = A - AB = A\bar{B}$

文氏图---辅助解题

伯努利试验

概率

古典概型：$P(A) = \dfrac{n_A}{n}$

加法公式：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$(若$AB = \varnothing$)

$P(A \cup B \cup C) = ?$

减法公式：$P(A - B) = P(A) - P(AB)$; $P(A - B) = P(A) - P(B)$(若$B \subset A$)

$P(ABC) = ?$

条件概率：$P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} (P(A) > 0)$ $\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B \mid A) \\ P(A \mid \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \mid \bar{B}) \end{cases}$

全概率公式：$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$, A_i为一个Ω的划分

贝叶斯公式：$P(A_i \mid B) = \dfrac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}$

应用题

事件

- 随机事件的关系：包含、相等、互斥、对立、独立
- 运算：和、差、积运算
- 运算律：交换、结合、分配、对偶律

概率

- 基本性质：
- 概率公式：加法公式、减法公式、条件概率及乘法公式
- 用事件独立性进行概率计算

三大概型

- 古典概型
- 几何概型
- 伯努利概型--二项概率公式

全概率、贝叶斯

- 全概率公式及贝叶斯公式的应用

20212 考察互斥关系(AB=Φ)

若事件A与B互斥,且$P(A)>0, P(B)>0$,则下列式子成立的是(D)

(A) P(A|B)=P(A); (B) P(A|B)>0; (C) P(AB)=P(A)P(B); (D) P(A|B)=0.

15161 考察对立关系 $A=\overline{B}, B=\overline{A}$

设A, B为对立事件,$0<P(B)<1$,则下列概率值为1的是(B)

$(A)\ P(\overline{A}|\overline{B})$; $(B)\ P(\overline{A}|B)$;

$(C)\ P(B|A)$; $(D)\ P(AB)$.

19201 考察事件的运算

下列等式不成立的是(D)

$(A)\ A=AB\cup A\overline{B}$; $(B)\ A-B=A\overline{B}$;

$(C)\ (AB)(A\overline{B})=\Phi$; $(D)\ (A-B)\cup B=A$.

19202 考察减法公式

设随机事件A与B满足$P(A)=0.4, P(A-B)=0.4$,则(C)

(A) A与B互不相容；

(B) AB是不可能事件；

(C) AB未必是不可能事件；

(D) P(A)=0或P(B)=0.

16171 考察减法公式

设随机事件A与B,若$P(A)=0.61, P(A-B)=0.22$,则$P(\overline{AB})=$(0.61)

21222 考察加法公式和对偶律

设随机事件A与B,若$P(A)=0.6, P(A\mid B)=1$,则$P(\overline{A}\overline{B})=$(0.4)

19202

已知$P(A)=1/5, P(B\mid A)=1/2, P(B)=1/4$,则$P(\overline{A}\overline{B})=$(13/20)

19201

已知$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$,且$P(A)=0.4$,则$P(B)=$(0.6)

14151 考察独立性

设$P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(A|B)=0.8$,则下列结论正确的是(C)

(A) A与B互不相容； $(B)\ A\subset B$;

(C)A与B 相互独立； $(D)\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

21222 考察独立性

$P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$

设$0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$,则事件$A$与$B$(C)

(A) 互不相容； (B) 是对立事件； (C) 相互独立； (D) 不独立。

18191 考察加法公式和独立性

已知事件A和B相互独立，且$P(A)=0.4, P(B)=0.5$,则$P(A\cup B)=$(0.7)

17181 考察加法公式和独立性

已知事件A和B相互独立，且$P(A)=0.3, P(A\cup\overline{B})=0.7$,则$P(B)=$(3/7)

19202 考察独立性事件概率计算

设每次试验成功的概率为$p(0<p<1)$,则独立重复进行试验直到第n次才取得成功的概率为 $\underline{\quad p(1-p)^{n-1}\quad}$.

19201 考察几何概型

在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上(0,1)内所有实数，旋转陀螺，陀螺停下时，圆周与桌面的接触点位于$(1/3,2/3)$内的概率为 $\underline{\quad 1/3\quad}$.

18191 考察古典概型

某人忘记了电话号码的最后一位数字，因而他在拨打到最后一位时采取随机拨号，则他拨号不超过3次而接通所需电话的的概率为 $\underline{\quad 0.3\quad}$.

$$\frac{1}{10}+\frac{9\times1}{10\times9}+\frac{9\times8\times1}{10\times9\times8}$$

14151　　利用独立性和加法公式计算条件概率

甲乙两人独立地对同一目标射击一次，其中命中率分别为0.6和0.5，现已知目标被击中，则它是甲击中的概率为 <u>0.75</u> .

16171　　考察古典概型和条件概率

A

抛掷两颗均匀的骰子，已知两颗骰子点数之和为7点，则其中一颗为1点的概率为 <u>1/3</u> .

B

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}.$$

19201

有两箱同种零件，在第一箱内装10件，其中有9件是一等品；在第二箱内装15件，其中有7件是一等品。现从两箱中随机地取出一箱，然后从该箱中取两次零件，每次随机地取出一个零件，取出的零件均不放回。求(1)第一次取出的零件是一等品的概率；(2)在第一次取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件是一等品的概率。

21222

某医院用某种新药医治流感，对病人进行试验，其中3/4的人服用此药，1/4的病人不服用此药，5天后有70%的病人痊愈。已知不服药的病人5天后有10%可以自愈。(1)求该药的治愈率；(2)若某病人5天后痊愈，求他是服此药而痊愈的概率。 0.9 27/28

背

- **随机变量**
  - 定 义
  - 事件的表示
  - 分 类 → 离散型、连续型
  - 分布函数 → 定义、定义域、值域、四个性质、求事件概率
    - 求$F(x)$中的未知系数

- **随机变量的分布**
  - 离散型
    - 分布律及其性质、分布律与分布函数的关系
    - 特殊分布：两点、二项、泊松、几何
  - 连续 型
    - 密度函数及其性质、密度与分布函数的关系
    - 特殊分布：均匀、标准正态、一般正态、指数
      - $\Phi(x),\varphi(x)$,查表、计算概率、相关结论
      - 标准化
  - 随机变量函数的分布
    - 离散型
    - 连续型
      - 严格单调，58页公式
      - 用$F(x)$求$f(x)$

针对离散型随机变量要掌握的内容有:

(1)判断是否为离散型随机变量, 即掌握其定义;

(2)会求分布律及分布函数, 以及两者之间的相互推导;

(3)会利用分布律和分布函数求某些事件的概率,

如 $P\{a < X < b\}$ 等;

(4)会利用分布律的性质求待定常数;

(5)对几种特殊的离散型分布, 要记住它们的分布律公式.

特别是两点分布、二项分布、泊松分布.

针对连续型随机变量要掌握的内容有：

- 连续型随机变量、密度函数、分布函数的定义
- 密度函数的性质，分布函数的连续性
- 利用密度函数求 $P\{X \in G\}$
- 密度函数、分布函数之间的相互推导
- 常见分布的密度函数、参数的范围以及分布的缩写

1. 均匀分布$U[a, b]$、指数分布$E(\lambda)$
2. 一般正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的密度函数（记住！）
3. 标准正态分布$N(0, 1)$及其查表、上α分位点
4. 一般正态分布与标准正态分布的关系（标准化）

16171

设连续型随机变量X的分布函数在某区间的表达式为$\frac{1}{1+x^2}$,其余部分为常数,写出此分布函数的完整表达式 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$

16171

设随机变量X的分布函数为$F(x)$,在下列概率中可表示为$F(a)-F(a-0)$的是(C)

(A) $P\{X\leq a\}$; (B) $P\{X>a\}$; (C) $P\{X=a\}$; (D) $P\{X\geq a\}$.

19201 设随机变量X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leq x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geq 1,\end{cases}$

则$P\{X=1\}=$ $\underline{\frac{1}{2}-e^{-1}}$.

20212

设连续型随机变量X的概率密度$f(x)$为偶函数，且分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$,则对任意正常数$a$,$P\{|x|>a\}$为(A)

(A) $2-2F(a)$; (B) $1-F(a)$; (C) $2F(a)$; (D) $2F(a)-1$.

19202

设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

求(1)常数A和B；(2)X的概率密度；(3)$Y=2X$的概率密度。

19201

设连续型随机变量X的概率密度$f(x)$为偶函数，且分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

则对任意实数a,有(　A　)

$(A)\quad F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx;$　　$(B)\quad F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx;$

(C) $F(-a)=F(a)$;　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$.

18191

若要$f(x)=\cos x$成为随机变量X的概率密度，则X的可能取值区间为(　A　)

(A) $[0,\frac{\pi}{2}]$. 　(B) $[\frac{\pi}{2},\pi]$. 　(C) $[0,\pi]$. 　(D) $[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}]$.

13141

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} ke^{x}, & x<0, \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2, \\ 0, & x\ge 2, \end{cases}$

求(1)常数k；(2)X的分布函数$F(x)$. (3)$P\{-1<X<1.5\}$；(4)$E(X)$.

15161 求一维离散型随机变量的分布律

1. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 2 件合格品和 2 件次品，乙箱中仅装有 2 件合格品，现从甲箱中随机地取出 2 件放入乙箱，求：（1）乙箱中次品数 X 的概率分布；（2）从乙箱中任取一件是次品的概率.

20212

设随机变量X在区间(a,b)上服从均匀分布，已知$P\{X<0\}=P\{X>2\}=\frac{1}{4}$，则$a=$ ___-1___.

15161

设随机变量$X\sim B(2,0.1)$，则$P\{X=1\}=$ ___0.18___.

17181

某公共汽车站每隔5分钟有一辆汽车到站，在该站等车的乘客可全部乘上这辆车，假设各乘客到达该站的时间是随机的且相互独立，求(1)一位乘客等车时间超过3分钟的概率;(2)在该站上车的5位乘客中恰有2位等车时间超过3分钟的概率。

18191

设随机变量$X \sim N(0,1), Y = 2X+1$,则Y服从(A).

(A) N(1,4); (B) N(0,1); (C) N(1,1); (D) N(0,2).

13141

设随机变量$X \sim N(0,1)$,对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$,数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,若$P\{|X|<x\}=\alpha$,则x等于(C).

$(A)\ \ u_{\frac{\alpha}{2}}$; $(B)\ \ u_{1-\frac{\alpha}{2}}$; $(C)\ \ u_{\frac{1-\alpha}{2}}$; $(D)\ \ u_{1-\alpha}$.

19201

设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)\ \ (\sigma>0)$,记$P=P\{X\le \mu+\sigma^2\}$,则(C)

(A) p随着μ的增加而增加; (B) p随着μ的增加而减少;

(C) p随着σ的增加而增加; (D) p随着σ的增加而减少。

19202

已知某生产线上生产的产品测量误差$X \sim N(0,10^2)$,求对3件产品独立测量中至少有1次误差的绝对值大于16.45的概率(已知$\Phi(1.645)=0.95$).

17181 设随机变量X的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.6	0.1

若随机变量$Y=(X-2)^2$,则$P\{Y=1\}=$____0.3____.

21222, 16171

设随机变量X服从参数为1的指数分布，若$Y=X^2$,求Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

20212

设随机变量X服从标准正态分布，若$Y=X^2$,求Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

设Y的分布函数为$F_Y(y)$, 当$y \le 0$时，$F_Y(y)=P\{Y \le y\}=P\{X^2 \le y\}=0;$

当$y>0$时，$F_Y(y)=P\{Y \le y\}=P\{X^2 \le y\}$

$$=P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}).$$

从而当$y>0$时，$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y}).$

二维随机变量

- 定义
- 联合分布函数
  - 定义、定义域、值域、性质、求概率
  - 边缘分布函数（与极限有关）
- 分类
  - 离散型
    - 联合分布律的性质、联合分布求边缘分布
    - 求概率：例如求$P\{XY=0\}$
  - 连续型
    - 联合密度定义及性质，$F(x,y)$求$f(x,y)$
    - 求概率 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$
      - 二重积分的计算
    - 联合密度→边缘密度
      - 步骤
  - 二维正态分布、二维均匀分布
- 相互独立
  - 离散型
    - 定义、判定
    - 联合分布律←→边缘分布律

- 不相互独立（条件分布）
  - 离散型
    - 条件分布律
    - 联合分布律←→边缘分布律+条件分布律
  - 连续型
    - 条件分布函数、条件密度
    - 联合密度←→边缘密度+条件密度
- 二维随机变量函数的分布
  - 离散型：一般函数、和函数、max、min
  - 连续型
    - 一般情形（分布函数法）
    - Max{X, Y}，Min{X, Y}
    - 利用正态分布的相关结论的计算
    - 和函数Z=X+Y的概率密度，卷积公式（独立）

21222 求二维离散型随机变量的分布律

甲、乙两个盒子中均装 有2个红球和2个白球，先从甲盒中任 取一球，观察颜色后放入乙盒， 再从乙盒中任取一球。 令X与Y分别表示从甲盒和乙盒中取到的红 球个数。求(1)(X,Y)的分布律;(2)X,Y的相关系数。

17181 由二维离散型随机变量的分布律求边缘分布律

设二维随机变量(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	1/8	a	1/24
2	b	1/4	1/8

且P{X=1}=1/2. 求(1) 常数a和b; (2) 关于X和关于Y的边缘分布律；(3) 判断X与Y是否相互独立；(4) Z=X+Y的概率分布。

20212 由二维离散型随机变量的边缘分布律求联合分布律

已知随机变量X服从二项分布B(1,1/2),随机变量Y的分布律如下：

Y	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

在下面两种不同条件下分别解答：

(1) 若X和Y相互独立，求(X,Y)的分布律并计算$P(X+Y<1)$;

(2) 若X和Y不相互独立且满足$P(XY=0)=1$，求(X,Y)的分布律并计算$Cov(X,Y)$.

18191 由联合概率密度求概率，求边缘概率密度和条件概率密度

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2\le y\le 1, \\ 0, & 其它, \end{cases}$

求(1)常数c；(2)$P\{X>Y\}$；(3)关于X和关于Y的边缘概率密度；(4)条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$；(5)判断X与Y是否相互独立。

17181 由边缘概率密度和条件概率密度求联合概率密度

设随机变量X在区间$(0,1)$内服从均匀分布，在条 件$X=x(0<x<1)$下，随机变量Y在区间$(0,x)$内服从均匀分布，则X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

21222 二维均匀分布

设二维随机变量(X,Y)在区域$G=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$服从均匀分布，对$(X,Y)$独立重复地观察3次，求至少一次观察值 落在区域$G_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le \frac{1}{4}\}$内的概率。

19201

设随机变量$X\sim N(0,1), Y\sim N(1,1)$, 且$X$与$Y$相互独立，若$P\{X-Y\ge a\}=\frac{1}{2}$,

则a等于(A)

(A) -1; (B) 0; (C) 1; (D) 2.

19201,17181 函数的分布

设随机变量X与Y相互独立，概率密度分 别为$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其它,\end{cases}$求(1) $Z_1=X+Y$的概率密度；

(2) $Z_2=2X+Y$的概率密度.

14151 和函数的分布（不具独立性）

设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1,0<y<1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$

求$Z=X+Y$的概率密度。

21222 **最值函数的分布**

设随机变量X_1与X_2相互独立，分布函数分别为$F_1(x)$与$F_2(x)$，则$Y=\min\{X_1,X_2\}$的分布函数为(D)

(A) $F_1(x)F_2(x)$;　　(B) $F_1(x)+F_2(x)$;

(C) $(1-F_1(x))(1-F_2(x))$;　　(D) $F_1(x)+F_2(x)-F_1(x)F_2(x)$.

18191

设随机变量X与Y相互独立，分布函数分别为$F_1(x)$与$F_2(y)$，则$U=\max\{X,Y\}$的分布函数为$F(u)=$(C)

(A) $\max\{F_1(u),F_2(u)\}$;　　(B) $\min\{1-F_1(u),1-F_2(u)\}$;

(C) $F_1(u)F_2(u)$;　　(D) $1-[1-F_1(u)][1-F_2(u)]$.

20212

设随机变量X_1与X_2相互独立，分布函数分别为$F_1(x)$与$F_2(x)$，概率密度分别为$f_1(x)$与$f_2(x)$，则$Z=\max\{X_1,X_2\}$的概率密度函数为(D)

(A) $f_1(z)f_2(z)$;　　(B) $f_1(z)+f_2(z)$;

(C) $f_1(z)F_1(z)+f_2(z)F_2(z)$;　　(D) $f_1(z)F_2(z)+F_1(z)f_2(z)$.

13141

设随机变量X与Y相互独立，且均服从[0,3]上的均匀分布，则$P\{\min\{X,Y\}\le 1\}=$ <u>5/9</u> .

19202

设随机变量X与Y相互独立，且概率密度 均为$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$则

$P\{1<\min\{X,Y\}<2\}=$ <u>$e^{-4}-e^{-8}$</u> .

数字特征

- 期望$E(X)$：定义、性质
  - 存在性：$\sum_{i=1}^{\infty} x_k p_k$或$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$绝对收敛
- 方差$D(X)$：定义式、计算式、性质
  - 离散型
  - 连续型
  - 一维
  - 二维
  - 随机变量函数的期望
  - 一维特殊分布的期望、方差
  - $D(X \pm Y)$ $E\left(X^2\right)$等
- 协方差Cov(*X*, *Y*)：定义、性质、与方差的关系、Cov(X, Y)=0的等价结论
- 相关系数$\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$
  - “相关”的定义、判定
- 相关性 VS 独立性
  - 独立性→不相关
  - 二维正态分布：独立性←→不相关
- 矩：原点矩、中心矩的定义
- 协方差矩阵，*n*维正态分布

背

21222

设随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots,$则$E(X)=$ __2__ .

19202

已知随机变量X在$[-1,3]$上服从均匀分布，设随机变量$Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ 0, & X=0,\\ -1, & X<0,\end{cases}$

则$D(Y)=($ B $)$

(A) 1/4; (B) 3/4; (C) 1/2; (D) 1/3.

19202

设随机变量X和Y相互独立，都服从泊松 分布，且$E(X)=2, E(Y)=3,$ 则$E[(X+Y)^2]=$ __30__ .

13141

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases} ke^{x}, & x<0, \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2, \\ 0, & x\ge 2, \end{cases}$

求(1)常数k；(2)X的分布函数$F(x)$.（3)$P\{-1<X<1.5\}$；(4)$E(X)$.

17181

设随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} 24xy, & 0<x<1, 0<y<1-x, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$

求X与Y的相关系数。

20212

随机变量X和Y相互独立是X和Y不相关的（ B ）

（A）必要且非充分条件；（B）充分但非必要条件；

（C）充分必要条件；（D）既非充分又非必要条件.

20212

随机变量X与Y的相关系数是0.5, 若Z=X-0.5，则Y与Z的相关系数为 0.5 .

18191

设随机变量X和Y的协方差等于0, 则以下结论正确的是（ B ）

(A) X和Y相互独立;　(B) D(X+Y)=D(X)+D(Y);

(C) D(X-Y)=D(X)-D(Y);　(D) D(XY)=D(X)D(Y).

17181

已知随机变量X~N(-3,1),Y~N(2,1),且X与Y相互独立，Z=X-2Y+7,则Z服从 __N(0,5)___.

19202

设随机变量(X,Y)~N(1,0,2,1,0), 则X-Y服从（ B ）

(A) N(1,1); (B) N(1,3);

(C) N(0,1); (D) 不服从正态分布.

16171

设随机变量$(X,Y)\sim N(1,0,9,16,-0.5)$,设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.求

(1)Z的期望与方差;(2)X与Z的相关系数;

(3)X与Z是否相互独立？为什么？

第五章

切比雪夫不等式

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

大数定律

1. 以事件发生的频率作为事件概率的估计
2. 以算术平均值作为随机变量期望的估计
3. 以样本均值作为总体期望的估计

中心极限定理

1. 独立同分布的中心极限定理
2. 棣莫佛-拉普拉斯定理

19202

设随机变量X的方差为2,则根据切比雪夫不等式可知P{|X-E(X)|≥2}≤ 1/2 ________.

19201

设在每次试验中，事件A发生的概率为0.8,用X表示1000次独立试验中事件A发生的次数，根据切比雪夫不等式，有P{760<X<840}≥ 9/10 ________.

17181

设$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$是相互独立同分布的随机变量，$E(X_i)=\mu, D(X_i)=8,$ $(i=1,2,\cdots,10)$,则由切比雪夫不等式可知$P\{|\overline{X}-\mu|<4\}\geq$ 19/20 ________.

其中$\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i$.

21222

设$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$为来自总体$X$的简单随机样本，其中$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，

记$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得$P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \le 55\}$的近似值为(B)

(A) 1-Φ(1). (B) Φ(1). (C) 1-Φ(0.2). (D) Φ(0.2).

20212

保险公司在多年统计资料中发现，在索赔用户中被盗索赔占20%，以X表示在随机抽查的100个索赔用户中因被盗向保险公司索赔的用户数量，利用中心极限定理，求被盗索赔用户中不少于16户且不多于24户的概率近似值（最后结果用正态分布函数值表示。）

一、总体X、个体和简单随机样本（X_i独立、与X同分布）

二、统计量 $g(X_1, X_2, ..., X_n)$,不含有未知常数

三、常用的统计量

1. 样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\boxed{E\overline{X} = \mu, D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}.}$

2. 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2]$

$\boxed{ES^2 = DX = \sigma^2}$

3. 样本标准差 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

4. 样本k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad k = 1,2,\cdots$

5. 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k \quad k = 1,2,\cdots$

19201.

设X_1,X_2,X_3是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本,其中μ为已知，σ^2为未知，则下列各式中不是统计 量的为(D).

(A) $X_2-2\mu$, (B) $\mu X_1+X_3e^{X_2}$,

(C) $\max(X_1,X_2,X_3)$, (D) $\frac{1}{\sigma^2}(X_1+X_2+X_3)$.

15161.

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本,其中μ为已知，σ^2为未知，则下列各式中不是统计 量的为(D).

(A) $\max\limits_{1\le k\le n} X_k$, (B) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k-\mu$,

(C) $\min\limits_{1\le k\le n} X_k$, (D) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{X_k}{\sigma}$.

例(16171)

设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且服从同一分布，期望为μ,方差为σ^2,定义$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则$D(\overline{X})=$ $\underline{\quad\frac{\sigma^2}{n}\quad}$.

例(20212)

设总体$X\sim P(\lambda),X_1,X_2,\cdots,X_{2m}$为来自总体的样本,样本均值定义为$\overline{X}=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{2m}X_i$,则$E(\overline{X})=$ $\underline{\quad\lambda\quad}$,$D(\overline{X})=$ $\underline{\quad\frac{\lambda}{2m}\quad}$.

例(18191)

设总体$X\sim B(m,p),X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体的样本,则$D(\overline{X})=$(D).

$(A)\,p(1-p)$, $(B)\,\frac{p(1-p)}{n}$, $(C)\,mp(1-p)$, $(D)\,\frac{mp(1-p)}{n}$.

例(18191)

设X_1,X_2,X_3,X_4与$Y_1,Y_2,\cdots,Y_5$分别是来自标准正态总体X和Y的样本，且两者相互独立，$\overline{X}$和$\overline{Y}$分别为其样本均值，$Z=\sum_{i=1}^{4}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{5}(Y_j-\overline{Y})^2$

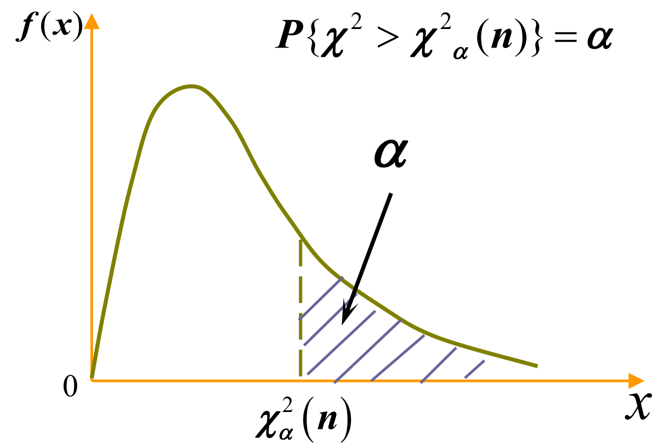
则$E(Z)=$ __7__ .

四、三大抽样分布

1. χ^2分布的定义与性质、上α分位点

- $X_i \sim N(0,1), X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，

$$\text{则}\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n).$$



χ^2分布的分位数

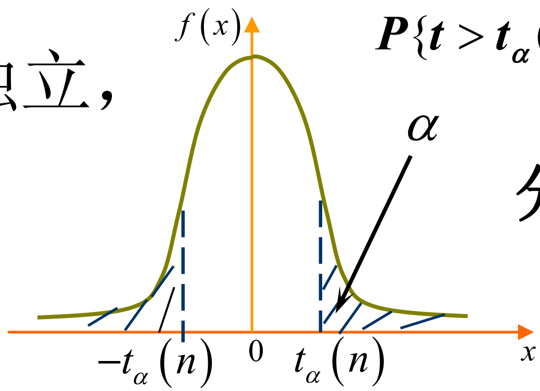
若$X \sim \chi^2(n)$,则$E(X)=n, D(X)=2n$

若$X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$,且X与Y相互独立，则$X+Y \sim \chi^2(m+n)$.

2. t分布的定义与性质、t分布的上α分位点

◆ $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, X与Y相互独立,

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$



t分布的分位数

分位数

$P\{|t| > t_{\alpha/2}(n)\} = \alpha$

$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

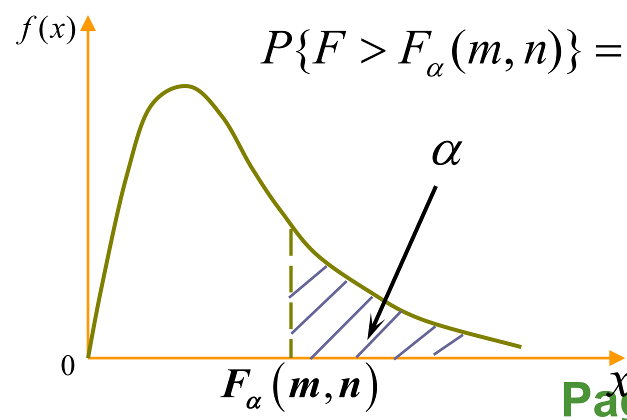
3. F分布的定义与性质、F分布的上α分位点

◆ $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$, X与Y独立

$$F = \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m,n)$$

若$F \sim F(m,n)$,则$\frac{1}{F} \sim F(n,m)$.

$$F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}.$$



F分布的分位数

例(20212)

设总体$X\sim N(0,\sigma^2)$,从总体中抽取样本$X_1,X_2,\cdots,X_8$,令$Y=(X_1+X_2+X_3+X_4)^2+(X_5+X_6+X_7+X_8)^2$,则确定常数$C$使得$CY$服从$\chi^2$分布，则$C=$ $\underline{\quad\frac{1}{4\sigma^2}\quad}$.

例(13141)

设总体$X\sim N(0,1)$,从总体中抽取样本$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$,令$Y=a(X_1+X_2+\cdots+X_6)^2+b(X_7+X_8+\cdots+X_{10})^2$,为使$Y$服从$\chi^2$分布，则$a=$ $\underline{\quad\frac{1}{6}\quad}$,$b=$ $\underline{\quad\frac{1}{4}\quad}$.

19202. 设随机变量X和Y都服从标准正态分布，则（ D ）

(A) $X+Y$服从正态分布；　(B) X^2+Y^2服从χ^2分布；

(C) $\frac{X^2}{Y^2}$服从F分布；　(D) X^2和Y^2都服从χ^2分布。

14151 设随机变量$X \sim t(n)\ \ (n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$,则（ D ）

(A) $Y \sim \chi^2(n)$;　(B) $Y \sim \chi^2(n-1)$;

(C) $Y \sim F(1,n)$;　(D) $Y \sim F(n,1)$.

五、 正态总体的抽样分布

(1) 单正态总体

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，则

- $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$; $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$;
- $\bar{X}$与S^2独立
- $\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$;
- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$;
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;
- $D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$;

14151. 设总体$X\sim N(2,4^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的样本，则下列结论正确的是（ B ）

(A) $\frac{\overline{X}-2}{4}\sim N(0,1)$, (B) $\frac{\overline{X}-2}{4/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$,

(C) $\frac{\overline{X}-2}{2}\sim N(0,1)$, (D) $\frac{\overline{X}-2}{16}\sim N(0,1)$,

20212. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$N(1,3^2)$的一个简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值，则下列结论正确的是（ B ）

(A) $\frac{\overline{X}-1}{3/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$, (B) $\frac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim\chi^2(n)$,

(C) $\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{3}/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, (D) $\frac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$.

21222. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$是取自总体X的简单随机样本，$\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差，则下列结论不正确的是（ D ）

(A) $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$, (B) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$,

(C) $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$, (D) $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$.

例(19202)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本,记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2,$$证明:

(1)T是μ^2的无偏估计量;

(2)当$\mu=0,\sigma=1$时，求$D(T)$.

例(15161)

设总体$X\sim N(1,2^2),X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自总体$X$的样本,$\overline{X}$和$S^2$分别为样本均值和样本方差，求$E(S^2),D(S^2)$及$E[(\overline{X}S^2)^2]$.

例(19201)

从总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$中抽取容量为16的样本,其中μ与σ^2均未知，S^2为样本方差,求概率$P\{\frac{S^2}{\sigma^2}\leq 2.0385\}$ $(\chi^2_{0.01}(15)=30.578)$.

(2) 双正态总体

设$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$是总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$的一个样本，

设$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$是总体$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$的一个样本，则

- $$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$
- $$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$
- $$F = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2)$$
- $$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

设$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$是总体$X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$的一个样本，

设$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$是总体$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$的一个样本，则

- $$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，$S_w = \sqrt{S_w^2}$.

点估计

- **矩估计**
  - 根据未知参数个数求需要的总体矩
  - 用样本矩替换相应的总体矩得方程（组）
  - 解方程（组）得到相应的矩估计量
  - 进一步得到矩估计值
- **最大似然估计**
  - 写出似然函数
    - 离散型：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$
    - 连续型：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$
  - 取对数
  - 求导写出对数似然方程(组)
    - 若有解，即为最大似然估计值
    - 若无解，利用单调性求
  - 得到最大似然估计值，进一步得最大似然估计量

20212.

设总体X以等概率$\frac{1}{\theta}$取值$1,2,\cdots,\theta$,则未知参数θ的矩估计量

$\hat{\theta}=$ ___$2\overline{X}-1$___ .

14151

1. 设总体 X 具有概率分布

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$是未知参数，已知来自总体 X 的样本值为 1，2，1.求θ 的矩估计值和最大似然估计值.

16171

设总体 X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ $\theta>0$为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X的样本，求 θ的矩估计量和最大似然 估计量。

21222.

设某种元件的使用寿命 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^m}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 其中 $\theta>0,m>0$ 为参数.(1)求总体 X 的概率密度;(2)任取 n 个这种元件做寿命试验,测得它们的寿命分别为 $x_1,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$,若 m 已知,求 θ 的最大似然估计值.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{m}{\theta^m}x^{m-1}e^{-(\frac{x}{\theta})^m}, & x\ge 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\frac{m^n}{\theta^{mn}}(x_1x_2\cdots x_n)^{m-1}e^{-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta})^m},$$

$$\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta})^m,$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+m\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta})^{m-1}\cdot\frac{x_i}{\theta^2}=0$ 得最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^m}.$$

估计量的评选标准

- 无偏性 → 若$E(\hat{\theta})=\theta$.
- 有效性 → $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$均为$\theta$的无偏估计，$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$.
- 一致性 → $\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)\xrightarrow{P}\theta$.

例(18191)

设总体X的期望为μ,方差为σ^2,X_1,X_2为X的样本,则在下述4个估计量中,(C)是最有效的.

$(A)\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{4}{5}X_2$, $(B)\hat{\mu}_2=\frac{1}{8}X_1+\frac{7}{8}X_2$,

$(C)\hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$, $(D)\hat{\mu}_4=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$.

例(17181)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X\sim N(0,\sigma^2)\ (\sigma^2>0)$的样本,证明:

$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$是$\sigma$的无偏估计量。

例(19202)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本,记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2,$$证明:

(1)T是μ^2的无偏估计量;

(2)当$\mu=0,\sigma=1$时，求$D(T)$.

例(16171)

设总体$X\sim U(0,\theta),X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq 2)$为来自总体$X$的样本,

已知θ的两个无偏估计量为$\hat{\theta}_1=2\overline{X},\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,

判别$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$哪个更有效?

例(15161)

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本,$\overline{X}$为样本均值,

则当常数$k =$ _n/(n-1)_ 时，$\hat{\sigma}^2 = \frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$是$\sigma^2$的无偏估计量.

三、参数的区间估计

$$P\{\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha,$$

则称$1-\alpha$为置信度或置信水平，

称(θ_1,θ_2)是θ的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

求置信区间的一般步骤

(1) 寻求$Z=Z(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$, Z的分布已知且不依赖于任何未知参数(包括θ).

(2) 对于给定的置信度$1-\alpha$,定出两个常数a,b,使$P\{a<Z(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha$.

（3）解出$\theta_1<\theta<\theta_2$, (θ_1, θ_2)即所求θ的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

四、正态总体均值与方差的置信区间

(1) 单正态总体

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，σ^2已知估计μ

- $$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1);$$

- $$P\{\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_{\alpha/2}\} = 1-\alpha,$$

- $$P\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} < \mu < \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

- 置信区间为$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right).$

21222.

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,若σ^2已知，总体均值μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$(\overline{X}-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，则$\lambda=$（ B ）

(A) $u_{-\alpha}$;　(B) $u_{\frac{\alpha}{2}}$;　(C) $u_{-\frac{\alpha}{2}}$;　(D) u_{α}.

17181.

设总体$X \sim N(\mu,1)$,一组样本值为$-2,1,3,-2$，则参数μ的置信度为0.95的置信区间为 (-0.98,0.98)____,$(u_{0.025}=1.96)$.

20212.一个随机样本来自正态 总体X,已知总体标准差$\sigma=1.5$,抽样前预计在置信水平为95%的条件下对参数μ作置信区间估计的长度$L\le 0.98$,则应抽取的样本容量至少为（ B ）（置信水平$1-\alpha=95\%,\alpha=0.05,u_{0.025}=1.96$）

(A) 12;　(B) 36;　(C) 6;　(D) 24.

(1) 单正态总体

设$X_1, X_2, \dots, X_n$是总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，σ^2未知估计μ

- $$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1);$$
- $$P\{\tfrac{|\bar{X}-\mu|}{S/\sqrt{n}} \le t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha,$$
- $$P\{\bar{X} - \tfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \tfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$
- 置信区间为$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$

19202.

无论σ^2是否已知，正态总体均值μ的置信区间的中心都是（ A ）

(A) $\overline{X}$;　　(B) S^2;　　(C) μ;　　(D) σ^2.

19201.

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ与σ^2均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体X的样本，则参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

(1) 单正态总体

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，μ已知估计σ^2

- $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n);$$
- $$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n)\} = 1-\alpha;$$
- $$P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\} = 1-\alpha;$$
- 置信区间为$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right).$$

(1) 单正态总体

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，μ未知估计σ^2

- $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1);$$

- $$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha;$$

- $$P\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\} = 1-\alpha;$$

- 置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$

(2) 双正态总体

1. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知，

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但 σ^2 为未知，

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

(2) 双正态总体

2. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

总体均值 μ_1, μ_2 为已知

$$\left(\frac{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1, n_2)}, \quad \frac{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2} F_{\alpha/2}(n_2, n_1) \right)$$

总体均值 μ_1, μ_2 为未知

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\alpha/2}(n_2 - 1, n_1 - 1) \right).$$

第八章

假设检验

- 原理 → 实际推断原理
- 基本方法 → 概率意义下的反证法
- 两类错误
  - 第一类错误（弃真）
  - 第一类错误（取伪）
- 显著性检验 → 控制犯第一类错误的概率不超过显著性水平
- 步骤
  - 提出原假设和备择假设
  - 确定检验统计量和拒绝域形式
  - 根据显著性水平确定拒绝域
  - 代入样本观测值检验
- X~N(μ,σ²),σ²已知,检验μ
  - $u=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
  - 拒绝域 $|u|\geq u_{\alpha/2}$.
- X~N(μ,σ²),σ²未知,检验μ
  - $t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
  - 拒绝域 $|t|\geq t_{\alpha/2}$.

第八章

假设检验

X~N(μ,σ²),μ已知,检验σ²

$$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$$

拒绝域$\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n)$或$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$.

X~N(μ,σ²),μ未知,检验σ²

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

拒绝域$\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$.

18191

样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自总体$X\sim N(\mu,12^2)$，若要检验假设$H_0:\mu\le 100$，应采用的统计量为(B)

$(A)\ \dfrac{\overline{X}-\mu}{12/\sqrt{n}}$，　$(B)\ \dfrac{\overline{X}-100}{12/\sqrt{n}}$，　$(C)\ \dfrac{\overline{X}-100}{S/\sqrt{n-1}}$，　$(C)\ \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$．

17181

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，若μ未知，要检验假设$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\ne\sigma_0^2$,则应取检验统计量为(B)

$(A)\ \dfrac{nS^2}{\sigma_0^2}$，　$(B)\ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，　$(C)\ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，　$(D)\ \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$．

21222 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ和σ^2均未知，检验假设$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，检验统计量$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，在显著性水平$\alpha$下，拒绝域为 $\underline{|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$.

20212 设总体$X\sim N(\mu,1)$，$x_1,x_2,\cdots,x_{16}$是总体的一组样本观测 值，在显著性水平$\alpha=0.05$下，检验假设$H_0:\mu=0,H_1:\mu\neq0$，拒绝域为$R=\{|x|>k\}$，则$k=$ $\underline{\quad 0.49 \quad}$.$(u_{0.025}=1.96)$

19201 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，据此样 本检验假设$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则(B)

(A) 若在显著性水平α=0.05时接受H_0,那么α=0.03时必拒绝H_0;

(B) 若在显著性水平α=0.05时接受H_0,那么α=0.03时必接受H_0;

(C) 若在显著性水平α=0.05时拒绝H_0,那么α=0.03时必拒绝H_0;

(D) 若在显著性水平α=0.05时拒绝H_0,那么α=0.03时必接受H_0.

一种元件，要求其平均寿命不小于1000h，现在从一批这种元件中随机抽取25件，测得平均寿命为 950 h，已知这种元件寿命服从σ =100 h 的正态分布，试在显著性水平$\alpha = 0.05$ 的条件下, 确定这批元件是否合格．($u_{0.025}$=1.96, $u_{0.05}$=1.645)

例13141

设某机器生产的零件长度（单位：cm）$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，今抽取容量为16的样本，测得样本均值$\bar{x} = 10$，样本方差$s^2 = 0.16$.

(1) 求μ的置信水平为0.95的置信区间；

(2) 检验假设H_0: $\sigma^2 \le 0.1$ (显著性水平α=0.05).

$$(t_{0.05}(16) = 1.746, t_{0.05}(15) = 1.753, t_{0.025}(15) = 2.132,$$
$$\chi^2_{0.05}(16) = 26.296, \chi^2_{0.05}(15) = 24.996, \chi^2_{0.025}(15) = 27.488)$$