15~16

一、单项选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

1. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ 在点(0,0)处的偏导数（　　）.

（A） $f_x'(0,0)$ 存在， $f_y'(0,0)$ 不存在　　（B） $f_x'(0,0)$ 不存在， $f_y'(0,0)$ 存在

（C） $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$ 都存在　　（D） $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$ 都不存在

2. 设方程 $xyz+\mathrm{e}^z=1$ 确定 z 是 x，y 的函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　）.

（A） $-\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z}$　（B） $\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z}$　（C） $-\dfrac{yz}{xy+\mathrm{e}^z}$　（D） $\dfrac{yz}{xy+\mathrm{e}^z}$

3. 空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 1,z\ge 0\}$ 的体积是（　　）

（A） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$　（B） $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$

（C） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$　（D） $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$

4. $I_1=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^9\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $I_2=\iint\limits_D(x+y)^9\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $I_3=\iint\limits_D[\sin(x+y)]^9\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中平面区域 D 由直线 $x+y=1,x+y=\dfrac{1}{2},x=0,y=0$ 所围成，则（　A　）.

（A） $I_1\le I_3\le I_2$　（B） $I_3\le I_2\le I_1$　（C） $I_1\le I_2\le I_3$　（D） $I_3\le I_1\le I_2$

5. 设空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2,z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$， $f(x,y,z)$ 为连续函数，则三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=$（　D　）.

（A） $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

（B） $4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

（C） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^{2-r^2}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$

（D） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

6. 如果反常积分 $\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x$ 收敛，则必有(B　).

（A） $k>0$　（B） $k<0$　（C） $k\ge 0$　（D） $k\le 0$

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分，请将答案写在题后的横线上.）

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \pi}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=$ ____________.

2. 直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与平面 $\Pi:-x-y+2z=1$ 的夹角为____________.

3. 曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ y=z+x\end{cases}$ 在 Oxz 平面上的投影柱面方程为______________.

4. 由曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积是__________.

5. 曲面 $z=xy$ 在点 $M(-1,-1,1)$ 处的切平面方程为___________________.

6. $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=$ _______________ .

三、按要求解答下列各题（共 4 道小题，每小题 8 分，满分 32 分）.

1．设 f 为 $C^{(2)}$ 类函数，且 $z=f(x+y,x-y)$，求 $\mathrm{d}z$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2．设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程组 $\begin{cases}x^2+2y^2+z^2=10,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

3．求过点 $(-1,2,3)$ 垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$，且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

4．设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

四、按要求解答下列各题（共 4 道小题，每小题 8 分，满分 32 分）.

1. 求心脏线 $r=2(1+\cos\theta)$ 的全长.

2. 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

3. 曲面 Σ 是由曲线 $\begin{cases}y=\sqrt{z-1},\\ x=0\end{cases}(1\le z\le 3)$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面.

（1）写出 Σ 的方程；

（2）设区域 Ω 是由曲面 Σ 与平面 $z=3$ 围成的区域，计算 $\iiint\limits_\Omega \mathrm{e}^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

4. 已知 a,b 满足 $\int_a^b |x|\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(a\le 0\le b)$，求曲线 $y=x^2+ax$ 与直线 $y=bx$ 所围区域面积的最大值和最小值.

16-17

一、填空题 1. xoz 平面上的直线 $x=1$ 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为____________。

2. 曲线 $\begin{cases} x^2+y+z=6 \\ x^2-x+z=5 \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影曲线方程为______________。

3. 方程 $xy-yz+zx=e^z$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分为________________。

4. 设 D 是由曲线 $y=1-x^2$ 与 $y=x^2-1$ 所围成的区域，则 $\iint\limits_D (x^3+y^3+xy)d\sigma=$_______________。

5. 曲面 $z=x^2+2y^2$ 在点 $P_0(1,-1,3)$ 处的切平面方程为___________________。

二、选择题 1. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　　）.

（A）沿任何方向的方向导数都不存在（B）不连续（C） $f_x'(0,0)$ 与 $f_y'(0,0)$ 相等　（D）梯度不存在

2. 下列反常积分收敛的是 (　　　).

（A）$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　（B）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　（C）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$　（D）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

3. 方程 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=z$ 所表示的曲面为（　　　）.

（A）椭球面　（B）双曲抛物面　（C）柱面　（D）旋转抛物面

4. 若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数都存在，则（　　　）.

（A） $f(x,y)$ 在 P_0 的某个邻域内有界　（B） $f(x,y)$ 在 P_0 的某个邻域内连续

（C） $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处连续　（D） $f(x,y)$ 在 P_0 处连续

5. 设空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le x+y\}$，$f(x,y,z)$ 为连续函数，则三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dV=$（　　　）.

（A） $\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_y^1 dz\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx$

（B） $\int_0^1 dz\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{z}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdr$

（C） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta} dr\int_0^{r\sin\theta+r\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)rdz$

（D） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta}} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\, dr$

三、解答题 1．求由曲线 $y=x^2$ 与 $y=2x+3$ 围成的平面图形的面积。

2．求过直线 $L_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-2}$，且平行于直线 $L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-2}$ 的平面 π 的方程。

3．设 f 为 $C^{(2)}$ 类函数，且 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

4. 求函数 $u=x-2y+2z$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值。

四、解答题 1. 计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| \mathrm{d}\sigma$，其中平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le x\right\}$。

2. 已知空间区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$，利用重积分求 Ω 的体积。

3. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^4+y^4}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

（1）求其在点 $P_0(0,0)$ 处的偏导数，

（2）判别其在点 $P_0(0,0)$ 处的可微性。

4. 已知三重积分 $\iiint\limits_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，其中空间区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|1\le x\le 2, 0\le y\le x, 0\le z\le y\right\}$.

（1）在柱坐标下计算三重积分，　（2）在球坐标下计算三重积分。

17-18

一、选择题：1～6 小题，每小题 3 分，共 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}, y=x$ 及 $x=2$ 所围成的图形面积为 S，则 $S=$（　　）.

（A）$\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x$　　（B）$\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

（C）$\int_1^2\left(2-\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y+\int_1^2(2-y)\mathrm{d}y$　　（D）$\int_1^2\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x$

2. 如果反常积分 $\int_1^{+\infty}x^p(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1})\,\mathrm{d}\,x$ 收敛，则常数 p 的取值范围是（　　）.

（A）$p\in(-\infty,2)$　　（B）$p\in(-\infty,1)$

（C）$p\in(-1,+\infty)$　　（D）$p\in(1,+\infty)$

3. 母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程是（　　）.

（A）椭圆柱面 $3x^2+2z^2=16$.　　（B）椭圆柱面 $x^2+2y^2=16$.

（C）双曲柱面 $3y^2-z^2=16$.　　（D）抛物柱面 $3y^2-z=16$.

4. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

（A）连续，且偏导数存在　　（B）连续，但偏导数不存在

（C）不连续，但偏导数存在　　（D）不连续，且偏导数不存在

5. 函数 $z=x^2-y^2+2y+7$　（　　）.

（A）没有驻点，也没有极值点　　（B）有驻点，也有极值点

（C）有驻点，但没有极值点　　（D）没有驻点，但有极值点

6. 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为（　　）.

（A）$z=0$ 与 $x+y-z=1$　　（B）$z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

（C）$y=x$ 与 $x+y-z=1$　　（D）$y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

二、填空题：7～12 小题，每小题 3 分，共 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

7. 曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的长度等于____________.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=$____________.

9. 如果向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,5)$ 与 $\boldsymbol{b}=(3,m,-2)$ 互相垂直，则常数 $m=$__________.

10. Oyz 面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面方程为____________.

11. 设 $z=f\left(x+y,xy\right)$，其中 f 是 $C^{(1)}$ 类函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________________.

12. 函数 $u=x^2+y^2-xyz$ 在点 $(1,1,1)$ 处的方向导数的最大值是__________.

三、解答题：13～19 小题，共 64 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

13.（本题满分 10 分）

计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\dfrac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y$.

14.（本题满分 10 分）

求过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$ 及 $y-3z=2$ 都平行的直线的对称式方程和参数方程.

15.（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x=z\cdot\mathrm{e}^{y+z}$ 所确定的隐函数，求 $\mathrm{d}z\big|_{(\mathrm{e},0)}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\Big|_{(\mathrm{e},0)}$.

16. （本题满分 10 分）

计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2=z^2$ 和 $z=1$ 所围成的闭区域.

17. （本题满分 8 分）

求圆域 $x^2+(y-5)^2\le 16$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

18. （本题满分 8 分）

利用 Lagrange 乘数法求函数 $f\left(x,y\right)=2x-y+1$ 满足约束条件 $x^2+y^2=5$ 下的最大值和最小值.

19.（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t+\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D 是以 $(-1,-1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域，且 $f(1)=0$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

18-19

一、　选择题：1～6 小题，每小题 3 分，共 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 设 $f(1,1)=-1$ 为函数 $f(x,y)=ax^3+by^3+cxy$ 的极值，则 a,b,c 分别等于（　　）.

（A）$1,1.-1$　　（B）$-1,-1,3$　　（C）$-1,-1,-3$　　（D）$1,1,-3$

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 偏导数存在是 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 可微的(　　)条件.

（A）必要非充分　　（B）充分非必要

（C） 充分必要　　（D）既非充分又非必要

3. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 D_1 是矩形区域 $-1\le x\le 1,-2\le y\le 2$，又 $I_2=\iint\limits_{D_2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 D_2 是矩形区域 $0\le x\le 1,0\le y\le 2$，利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系（　　）.

（A）$I_1=3I_2$　　（B）$I_1=2I_2$　　（C）$I_1=I_2$　　（D）$I_1=4I_2$

4. 下列反常积分收敛的是(　　).

（A）$\int_0^{+\infty}\cos x\,\mathrm{d}x$　　（B）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$　　（D）$\int_0^2\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$ $I_1=4I_2$

5. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=2(z\ge 0)$ 所围成，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V$ 化为柱坐标系下三次积分为（　　）.

（A）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}\left(r^2+z^2\right)\mathrm{d}z$　　（B）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}\left(r^2+z^2\right)\mathrm{d}z$　　（C）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}\left(r^2+z^2\right)\mathrm{d}z$　　（D）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}2\mathrm{d}z$

6. 设直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$**，平面** $\pi:4x-2y+z=0$**，则直线** L（　　）.

（A）平行于平面 π 但不在 π 上　　（B）垂直于平面 π

（C）在平面 π 上　　（D）与平面 π 相交但不垂直

二、填空题：7～12 小题，每小题 3 分，共 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

7. $z=\cos\mathrm{e}^{xy}$，则 $\mathrm{d}z=$__________.

8. 积分 $\int_0^8\mathrm{d}x\int_{\sqrt[3]{x}}^2\frac{1}{1+y^4}\mathrm{d}y=$__________.

9. $\int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=$__________.

10. 由曲线 $y=x^2,x=y^2$ 围成图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积为__________.

11. 已知 $f(x,y)=\ln\left(x^3+xy^2\right)$，求 $f_x(1,0)=$__________.

12. 空间曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\y=z\end{cases}$ 在 xoz 平面上的投影曲线方程为________________.

三、解答题：13～19 小题，共 64 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

13.（本题满分 10 分）

求过点 $M(3,1,-2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面方程.

14.（本题满分 10 分）

设 $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$， f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}$.

15.（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_{D}xdxdy$.

16.（本题满分 10 分）

求 $u=xy^2+yz^3$ 在 $P_0(2,-1,1)$ 的梯度及沿 $\vec{l}=(2,2,-1)$ 方向的方向导数.

17.（本题满分 10 分）

求函数 $z=x^2+y^2$ 在圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2\le 9\right\}$ 上的最大值与最小值.

18 .（本题满分 8 分）

求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程.

19.（本题满分 6 分）

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$，

19-20

二、 选择题：1～6 小题，每小题 3 分，共 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 下列反常积分收敛的是（ ）．

（A）$\int_{0}^{+\infty}\cos x\,dx$ （B）$\int_{0}^{2}\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$

（C）$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$ （D）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x+1\right)^2}\,dx$

2. 曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x^2+z^2=ax\end{cases}$ $(a>0)$ 在 xoy 面上的投影线为（ ）．

（A）抛物线 （B）双曲线 （C）椭圆 （D）圆

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{xy}=$（ ）．

（A）1 （B）0 （C）1/2 （D）不存在

4. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 沿任一方向的方向导数都存在是 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 连续的( )条件．

（A）充分必要 （B）必要非充分

（C）充分非必要 （D）既非充分又非必要

5． 设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4,x+y\ge 0\right\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$ （ ）．

（A）$ab\pi$ （B）$\frac{ab}{2}\pi$ （C）$(a+b)\pi$ （D）$\frac{a+b}{2}\pi$

6. 已知 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le a^2,x^2+z^2\le a^2,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\right\}$，$f$ 在 Ω 上连续，下列等式中正确的有（ ）个．

1) $\iiint\limits_{\Omega}f\left(z\right)dV=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f\left(z\right)dz$

2) $\iiint\limits_{\Omega}f\left(y\right)dV=\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f\left(y\right)dy$

3) $\iiint\limits_{\Omega}f\left(x\right)dV=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}rdr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\theta}}f\left(x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{a}{\sin\theta}}rdr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2\sin^2\theta}}f\left(x\right)dx$

4) $\iiint\limits_{\Omega}f\left(z\right)dV=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\theta}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}}f\left(r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi dr$

$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\arctan\frac{1}{\sin\theta}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}f\left(r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi dr$

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

二、填空题：7～12 小题，每小题 3 分，共 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

7. 摆线$\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$ 的弧长 $s =$ ____________.

8. 过点 $M(1,1,-1)$ 且与直线$\begin{cases} x = 2+t, \\ y = 4+3t, \\ z = 1+t \end{cases}$垂直的平面方程为________________.

9. $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$ 在点（0, 0）处沿 x 轴正向的方向导数为_________________.

10. 函数 $u = xyz$ 满足 $x+y+z=3(x>0, y>0, z>0)$ 的条件极值 $u =$ ______________.

11. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y \int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(t)=$ _________________.

12. 设 Ω 为 $x^2+y^2+z \le 1, z \ge 0$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+1)(y+1)(z+1)\mathrm{d}V =$ _______________.

三、解答题：13～19 小题，共 64 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

13.（本题满分 10 分）

求 $y = 2x - x^2$ 与 $y = 0$ 所围的封闭区域绕 x 轴旋转一周生成旋转体的体积.

14.（本题满分 10 分）

求过直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{-2}$ 且平行于直线 $L_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ 的平面方程.

15.（本题满分 10 分）

求椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 上点 $M(1,1,2)$ 处的切平面方程与法线方程.

16.（本题满分 10 分）

设 $u = f(x, xy, xyz)$， f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

17.（本题满分 10 分）

求函数 $z = x^2+y^2-2x-y$ 在 $D=\{(x,y)|2x+y \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$ 上的最值.

18．（本题满分 8 分）

求在上半球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ $(z \ge 0)$ 除去柱体 $x^2+y^2 \le x$ 的空间立体的体积.

19.（本题满分 6 分）

已知 $\Omega = \left\{(x,y,z)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4} \le 1\right.\right\}$，计算 $I = \iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 dV$.

20-21

三、 选择题：1～6 小题，每小题 3 分，共 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用积分表示为( ).

（A）$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$ （B）$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$

（C）$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$ （D）$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2\theta\right)^2\mathrm{d}\theta$

2. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2$，$x=1$ 所围的封闭区域，则 $f(x,y)$ 等于( ).

（A）xy （B）$2xy$ （C）$xy+\frac{1}{8}$ （D）$xy+1$

3. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z-4=0$ 平行的切线（ ）.

（A）只有 1 条 （B）只有 2 条 （C）只有 3 条 （D）不存在

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=$（ ）.

（A）0 （B）1 （C）2 （D）不存在

5. 隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$ 所确定，其中 F 可微，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$（ ）.

(A) $\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$ （B） $-\frac{F_1'}{F_2'}$ (C) z (D) 0

6.下列积分中，收敛的反常积分有( )个.

1）$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x-1}\mathrm{d}x$ 2）$\int_0^1\frac{\sin x^2}{x^2}\mathrm{d}x$ 3）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln x}\mathrm{d}x$ 4）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

二、填空题：7～12 小题，每小题 3 分，共 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

7. 由曲线 $y=x^2, x=y^2$ 围成的封闭图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积为____________.

8. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=$____________.

9. 由 xoz 面上的曲线 $x^2+z=1$ 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为____________.

10. 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x'(3,4)=$____________，

11. 设 $F(y)=\int_y^{y^2}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$，则 $F'(y)=$____________.

12. 设 Ω 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的封闭区域，则 $\iiint\limits_\Omega\left(xy+yz+zx\right)\mathrm{d}V=$____________.

三、解答题：13～19 小题，共 64 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

13.（本题满分 10 分）

求 $y=2x-x^2$ 与 $y=x-2$ 所围的封闭图形的面积.

14.（本题满分 10 分）

求过坐标原点 O，且与直线 $L_1:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行的平面方程.

15.（本题满分 10 分）

设 $u=f\left(xy,x^2+y^2\right)$， f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

16.（本题满分 10 分）

求函数 $f\left(x,y,\mathrm{z}\right)=x+2y+2z$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最值.

17.（本题满分 10 分）

计算 $I=\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x$ 和 $y^2=x$ 所围成的封闭区域.

18．（本题满分 8 分）

已知 $\Omega=\left\{\left(x,y,z\right)\middle| x^2+y^2\le 1,\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le 1,y\ge 0,x\ge 0\right\}$，

1) 写出球坐标变换公式,

2) 球坐标系下计算 $\iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2+z^2\right)^2\mathrm{d}V$.

19.（本题满分 6 分）

已知 $\Omega=\left\{\left(x,y,z\right)\middle| x^2+y^2\le 1,y+x\ge 0,0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\right\}$，

1) 写出柱坐标变换公式,

2) 计算 $\iiint\limits_\Omega \left|2z-\sqrt{2}\dfrac{xz+yz}{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}V$.