第四节　正态总体参数的区间估计

一、 单个正态总体均值与方差的区间估计

二、 两个正态总体均值差与方差比的区间估计

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$的情况

设给定置信水平为 $1-\alpha$, 并设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本, $\overline{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差.

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2为已知, 由上节例1可知:

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$.

例7.4.1 某车间生产的螺杆直径服从正态分布 $N(\mu, 0.09)$，今随机地从中抽取4只，测得直径分别为

12.6，13.4，12.8，13.2.

求 μ 的置信水平为0.95的置信区间.

解 $n=4$, $\bar{x}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i=13$.

(1) 已知 $\sigma=0.3$ 、$\alpha=0.05$，查表得 $u_{\alpha/2}=1.96$

μ 的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\quad \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$$

$$=\left(13-\frac{0.3}{\sqrt{4}}\times 1.96,\quad 13+\frac{0.3}{\sqrt{4}}\times 1.96\right)$$

$$=(12.71,\quad 13.29).$$

例7.4.2 包糖机某日开工包了12包糖，称得质量(单位：克)分别为506, 500, 495, 488, 504, 486, 505, 513, 521, 520, 512, 485. 假设重量服从正态分布，且标准差为 $\sigma = 10$, 试求糖包的平均质量 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间 (分别取 $\alpha = 0.10$ 和 $\alpha = 0.05$).

解 μ 的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2},\quad \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right)$$

$\sigma = 10$, $n = 12$, 计算得 $\bar{x} = 502.92$,

(1) 当 $\alpha = 0.10$ 时,

查表得 $u_{\alpha/2} = u_{0.05} = 1.645$,

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}= 502.92-\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=498.17,$$

$$\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}= 502.92+\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=507.67,$$

即μ的置信度为 90% 的置信区间为

(498.17，507.67).

(2) 当 $\alpha = 0.05$ 时,

查表得

$$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96,$$

同理可得 μ 的置信度为 95% 的置信区间为

$$(497.26,\ 508.58).$$

从此例可以看出,

当置信度 $1-\alpha$ 较大时, 置信区间也较长;

当置信度 $1-\alpha$ 较小时, 置信区间也较短.

(2) σ^2为未知,

μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

推导过程如下:

由于区间$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right)$中含有未知参数$\sigma$,不能

直接使用此区间,

但因为S^2是σ^2的无偏估计,可用$S = \sqrt{S^2}$替换σ,

由第六章定理5.1知 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

对于给定的置信水平1-α,

选取区间$(-t_{\alpha/2}(n-1), t_{\alpha/2}(n-1))$,使得

则 $P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\bar{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

例7.4.3 有一大批糖果,现从中随机地取16袋, 称得重量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 $\alpha = 0.05$, $n-1=15$,

查 $t(n-1)$ 分布表可知： $t_{0.025}(15) = 2.1315$,

计算得 $\bar{x} = 503.75, s^2 = 38.467, s = 6.2022$,

得μ的置信度为 95% 的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right) \text{ 即 } (500.4,\quad 507.1).$$

就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4克与507.1克之间, 这个估计的可信程度为95%.

若依此区间内任一值作 为μ的近似值,

其误差不大于 $\dfrac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61$ (克).

这个误差的可信度为95%.

2. 方差σ^2的置信区间

(1) μ为已知,

方差 σ^2 的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)} \right).$$

推导过程如下:

由第六章定理4.1知 $\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n).$

对于给定置信度$1-\alpha$,

选取区间$(\chi^2_{1-\alpha/2}(n), \chi^2_{\alpha/2}(n))$,使得

$$P\left\{ \chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n) \right\} = 1-\alpha,$$

整理得

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}<\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right\}=1-\alpha.$$

由此得σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right).$$

例7.4.4 从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$中抽取容量为9的样本, 其观测值为

13.0, 13.2, 12.8, 12.6, 13.1, 13.0, 12.9, 12.7, 12.5.

已知 $\mu=12.9$, 求 σ^2 的置信度为0.95的置信区间;

解 $n=9,\quad \alpha=0.05$

已知 $\mu=12.9$, 查表得

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)=\chi^2_{0.975}(9)=2.7 \quad \chi^2_{\alpha/2}(n)=\chi^2_{0.025}(9)=19.023$$

由已知数据算得 $\sum_{i=1}^{9}(x_i-\mu)^2=0.45.$ 因此 σ^2 的置信度为0.95的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)=\left(\frac{0.45}{19.023},\ \frac{0.45}{2.7}\right)=(0.0237,\quad 0.167).$$

(2) μ 未知

方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

推导过程如下:

根据第六章定理4.2知

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

对于给定置信度 $1-\alpha$,

选取区间 $(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \chi^2_{\alpha/2}(n-1))$, 使得

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

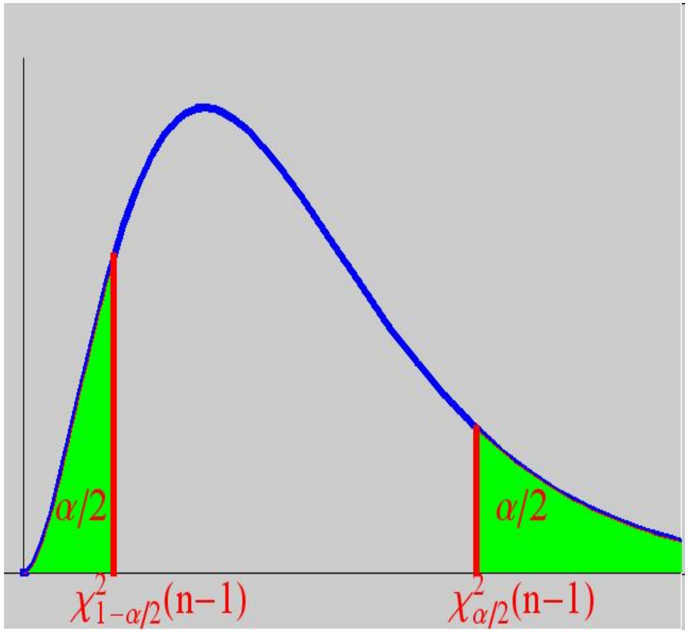
$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

进一步可得:

标准差σ的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

注意: 在密度函数不对称时,
如 χ^2 分布和 F分布,
习惯上仍取对称的分位点来
确定置信区间(如图).



例7.4.5 有一大批糖果,现从中随机地取16袋, 称得重量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体方差 σ^2 及总体标准差 σ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 $n = 16,\quad \alpha = 0.05$

μ 未知, 查表得

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(15) = 6.262,\quad \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(15) = 27.488,$$

由已知数据算得 $s^2 = 38.467, s = 6.202,$

因此 σ^2 的0.95的置信区间为:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = \left(\frac{15\times 38.467}{27.488}, \frac{15\times 38.467}{6.262}\right) = (20.991, 92.144).$$

σ 的0.95的置信区间为

二、两个总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$的情况

设研究对象的某指标$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

如果外界条件发生了变化，则要研究外界条件的变化是否对该指标产生影响。

设变化前指标$N(\mu_1,\sigma_1^2)$,变化后指标$N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

若外界条件的变化对指 标产生影响,则应反映在参数$\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2$的改变上。

故有必要求$\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2/\sigma_2^2$的区间估计。

设给定置信度为$1-\alpha$,并设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 为第一个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2})$的样本,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 为第二个总体 $N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$的样本,$\overline{X},\overline{Y}$分别是第一、二个总体的样本均值,$S_1^{\ 2},S_2^{\ 2}$分别是第一、二个总体的样本方差.

1. 两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2和σ_2^2均为已知

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

推导过程如下:

由第六章定理3.2知,

$$\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

对于给定的置信水平1-α，选取区间$(-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2})$,使得

$$P\left\{-u_{\alpha/2} < \frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{\overline{X}-\overline{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < \overline{X}-\overline{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

若μ_1-μ_2的置信区间的下限大于0, 则以置信水平1-α认为$\mu_1>\mu_2$.

若μ_1-μ_2的置信区间的上限小于0, 则以置信水平1-α认为$\mu_1<\mu_2$.

例7.4.6 设总体$X \sim N(\mu_1, 4)$, 总体 $Y \sim N(\mu_2, 6)$,分别独立地从这两个总体中抽取样本, 样本容量依次为16和24，样本均值依次为16.9和15.3，求两个总体均值差$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.95的置信区间.

解 由题设可知 $n_1 = 16$, $n_2 = 24$，$\bar{x} = 16.9$，$\bar{y} = 15.3$，$\sigma_1^2 = 4$，$\sigma_2^2 = 6, 1-\alpha = 0.95$，$\alpha = 0.05$

查附表得 $u_{a/2} = u_{0.025} = 1.96$, 从而 $\mu_1 - \mu_2$置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \bar{x} - \bar{y} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$= \left(16.9 - 15.3 - 1.96 \times \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{6}{24}},\quad 16.9 - 15.3 + 1.96 \times \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{6}{24}}\right)$$

$= (0.214,\quad 2.986)$. 在置信水平0.95下，可认为$\mu_1 > \mu_2$.

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但$\sigma^2$为未知,

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $\quad S_w=\sqrt{S_w^2}$.

推导过程如下：根据第六章定理5.2知

$$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

对于给定的置信水平$1-\alpha$, 选取区间$(-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2), t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2))$,

$$\text{使得} P\left\{-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) < \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\} = 1-\alpha,$$

$$\text{即 } P\left\{\overline{X}-\overline{Y}-S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) < \mu_1-\mu_2 < \overline{X}-\overline{Y}+S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\} = 1-\alpha,$$

于是得$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

例7.4.7 为了估计磷肥对某种农作物增产的作用, 选20块条件大致相同的地块进行对比试验. 其中10块地施磷肥, 另外10块地不施磷肥, 得到单位面积的产量（单位：kg）如下：

施磷肥	620	570	650	600	630	580	570	600	600	580
不施磷肥	560	590	560	570	580	570	600	550	570	550

设施磷肥的地块单位面积产量$X \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$, 不施磷肥的地块单位面积产量$Y \sim N\left(\mu_2, \sigma^2\right)$, 求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.95的置信区间.

解 由题设，两个正态总体的方差相等，但 σ^2 未知，

$m=10$, $n=10$, $\alpha=0.05$，$\bar{x}=600$，$\bar{y}=570$，$s_1^2=\dfrac{6400}{9}$，$s_2^2=\dfrac{2400}{9}$

$$s_w=\sqrt{\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}}=22.111,\quad \text{查表得}$$

$$t_{a/2}(m+n-2)=t_{0.025}(18)=2.1009$$

因此 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}t_{a/2}(m+n-2),\quad \bar{x}-\bar{y}+s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}t_{a/2}(m+n-2)\right)$$

$$=\left(600-570-22.111\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\times 2.1009,\quad 600-570+22.111\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\times 2.1009\right)$$

$$=(9.226,50.774).$$

在置信水平0.95下，可认为 $\mu_1>\mu_2$.

(3) $\sigma_1^{\ 2}$和$\sigma_2^{\ 2}$均为未知,

只要n_1和n_2都很大(实用上 > 50即可), 则有

$\mu_1 - \mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的近似置信区间

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{S_2^{\ 2}}{n_2}} \right).$$

2. 两个总体方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

(1) 设总体均值μ_1，μ_2为已知。

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的一个置信度为 $1-\alpha$的置信区间：

$$\left(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\quad \frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1) \right)$$

推导过程如下：根据第六章定理6.1知

$$F=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{n_2\sigma_2^2}{n_1\sigma_1^2}\sim F(n_1,n_2).$$

对于给定的置信度$1-\alpha$，选取区间$(F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2), F_{\alpha/2}(n_1,n_2))$，使得

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2) < \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{n_2\sigma_2^2}{n_1\sigma_1^2} < F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)}\right\} = 1-\alpha.$$

注意利用$\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)} = F_{\alpha/2}(n_2,n_1)$，结论得证.

若置信区间的下限大于1，则以置信水平1-α认为$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

若置信区间的上限小于1，则以置信水平1-α认为$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

例7.4.8 设总体 $X \sim N(24, \sigma_1^2)$, 总体$Y \sim N(20, \sigma_2^2)$. 从总体 X 和 Y 中独立地抽得样本值如下：

总体 X：23，22，26，24，22，25；

总体 Y：22，18，19，23，17.

求 σ_1^2 / σ_2^2的置信度为0.95的置信区间.

解 已知 $\mu_1 = 24, m = 6$; $\mu_2 = 20$，$n = 5$. 由已知数据可得

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - 24)^2 = 14 \qquad \sum_{j=1}^{5}(y_j - 20)^2 = 27$$

因 $1 - \alpha = 0.95$, 故 $\alpha = 0.05$. 查附表5，可得

$$F_{0.025}(6, 5) = 6.98, \quad F_{0.025}(5, 6) = 5.99 .$$

从而可得 σ_1^2 / σ_2^2的置信度为0.95的置信区间为

$$\left(\frac{5 \times 14}{6 \times 27 \times 6.98}, \quad \frac{5 \times 14 \times 5.99}{6 \times 27} \right) = (0.062, \quad 2.588).$$

2. 两个总体方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

(2) 设总体均值μ_1, μ_2为未知。

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right).$$

推导过程如下:

根据第六章定理6.2知 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1),$

对于给定的置信度1-α, 选取区间

$(F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1), F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)),$ 使得

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$

$$=1-\alpha,$$

即$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\}$

$$=1-\alpha,$$

于是得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right).$$

例7.4.9 从参数$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$都未知的两正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$中分别独立地抽取样本, 它们的样本容量分别为$m = 10$，$n = 8$，样本方差分别为$s_1^2 = 3.6$，$s_2^2 = 2.8$，求二总体方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为0.95的置信区间.

解 这里 $1-\alpha = 0.95, \alpha = 0.05$，查 F 分布表得:

$$F_{\alpha/2}(m-1, n-1) = F_{0.025}(9, 7) = 4.82 \quad F_{\alpha/2}(n-1, m-1) = F_{0.025}(7, 9) = 4.20$$

σ_1^2/σ_2^2 的置信度为0.95的置信区间为

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)}, \quad \frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot F_{\alpha/2}(n-1, m-1)\right)$$

$$=\left(\frac{3.6}{2.8}\times\frac{1}{4.82}, \quad \frac{3.6}{2.8}\times 4.20\right) = (0.267, \quad 5.42).$$

三、小结

1. 单个总体均值μ的置信区间

(1) σ^2为已知, $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right)$.

(2) σ^2为未知, $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

2. 单个总体方差σ^2的置信区间

(1) μ为已知, $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$.

(2) μ为未知, $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$.

3.两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知, $\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

σ_1^2 和 σ_2^2 均为未知, $\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$.

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但 σ^2 为未知,

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

4. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}$ 的置信区间

总体均值 μ_1, μ_2 为未知

$$\left(\frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right).$$

总体均值 μ_1, μ_2 为已知

$$\left(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\ \frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)$$