一、单项选择题

1. 设隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定,其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=($ C $)$

(A) x; (B) $-x$; (C) z; (D) $-z$.

2. 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是(D).

(A) $\dfrac{1}{2},0$; (B) $0,\dfrac{1}{2}$; (C) $-\dfrac{1}{2},0$; (D) $0,-\dfrac{1}{2}$.

3. 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$, 其中函数 φ 具有二阶导数, 具有一阶导数. 则必有(B).

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4. 函数 $u=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任一方向的方向导数都存在是它在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在的(D)条件.

(A) 充分必要; (B) 必要非充分; (C) 充分非必要; (D) 既非充分又非必要.

5. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在 $(0,1)$ 处的梯度等于(A).

(A) $\boldsymbol{i}$; (B) $\boldsymbol{j}$; (C) $-\boldsymbol{j}$; (D) $-\boldsymbol{i}$.

二、填空题

1. 已知 $f(1,2)=4,\mathrm{d}f(1,2)=16\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y,\mathrm{d}f(1,4)=64\mathrm{d}x+8\mathrm{d}y$, 则 $z=f(x,f(x,y))$ 在点 $(1,2)$ 处对 x 的偏导数为____________.

答案 192.

2. 设隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy-yz+xz=\mathrm{e}^z$ 确定, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$____________.

答案 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

3. 设 $z = yf(x^2 - y^2)$, 其中 $f(u)$ 可微, 则 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} =$ ______________.

答案 $\frac{f(x^2 - y^2)}{y}$ 或者 $\frac{z^2}{y}$.

4. 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴正向的方向导数为______________.

答案 1.

5. 函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{b} =$ ______________的方向导数最大,最大值为______________.

答案 $(0,1,2)\quad \sqrt{5}$.

三、计算题

1. 设 $z = f(x - y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathrm{d}z$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\mathrm{d}z = f_1(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) + f_2(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = (f_1 + yf_2)\mathrm{d}x + (xf_2 - f_1)\mathrm{d}y$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + yf_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [f_{11}(-1) + f_{12}x] + f_2 + y[f_{21}(-1) + f_{22}x] = -f_{11} + (x - y)f_{12} + xyf_{22} + f_2.$$

2. 设函数 $z = z(x,y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 所确定, 且 f 可微, 求 $\mathrm{d}z$.

解 方程两端取微分,有

$$\begin{aligned} 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z &= f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}f\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= f\left(\frac{y}{x}\right) + xf'\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= f\left(\frac{y}{x}\right) + xf'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} \end{aligned}$$

解得 $\mathrm{d}z = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2x}{2z}\mathrm{d}x + \frac{f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2y}{2z}\mathrm{d}y$.

3. 设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $f(y - x, yz) = 0$ 所确定的隐函数, 其中函数 f 对各个变量具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 方程两端对 x 求偏导, 有 $f_1(-1) + yf_2\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad (1)$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_1}{yf_2}$.

在 (1) 式两端对 x 求导, 有

$$-\left[f_{11}(-1)+f_{12}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]+y\left\{\left[f_{21}(-1)+f_{22}y\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial x}+f_2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\}=0,$$

解得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{y(f_2)^3}[f_1^2f_{22}-2f_{12}f_1f_2+f_2^2f_{11}]$.

4. 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 在方程 $z=xf(x+y)$ 两端对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x+y)+xf'(x+y)\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right), \tag{1}$$

在方程 $F(x,y,z)=0$ 两端对 x 求导得,

$$F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{F_y}\left(F_x+F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$, 代入 (1) 式,解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y-xf'(x+y)F_x}{F_y+xf'(x+y)F_z}.$$

5. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在点 $(1,2)$ 处沿着抛物线 $y^2=4x$ 在该点切线方向的方向导数.

解 函数 $z=\ln(x+y)$ 在点 $(1,2)$ 处的梯度

$$\mathbf{grad}z=\left.\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{(1,2)}=\left.\left(\frac{1}{x+y},\frac{1}{x+y}\right)\right|_{(1,2)}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

抛物线 $y^2=4x$ 在 $(1,2)$ 处的切线斜率 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\left.\dfrac{2}{\sqrt{4x}}\right|_{x=1}=1$, 切向量为 $\pm(1,1)$, 方向余弦为 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, 方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{s}}=\frac{1}{3}\times\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\times\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}.$$