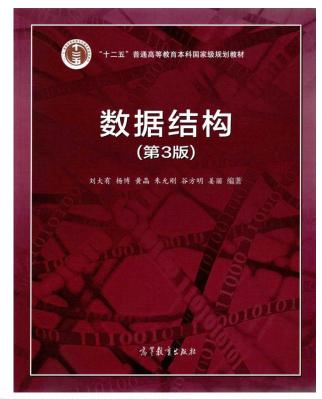


think.create.solve



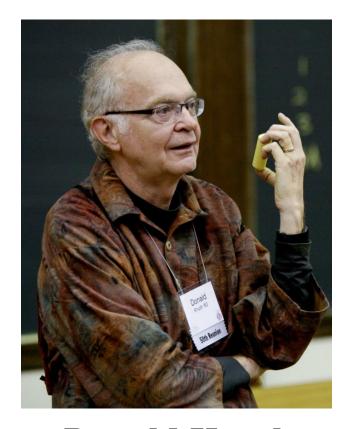
散列查找

- > 散列定义
- > 散列函数
- > 冲突处理方法
- > 散列表的删除
- > 性能分析与其他应用









Donald Knuth 图灵奖获得者 斯坦福大学教授 美国科学院院士 美国工程院院士

Computer programming is an art, because it applies knowledge to the world, because it requires skill and ingenuity, and especially because it produces objects of beauty. A programmer who views himself as an artist will enjoy what he does and will do it better.

——Donald Knuth



动机

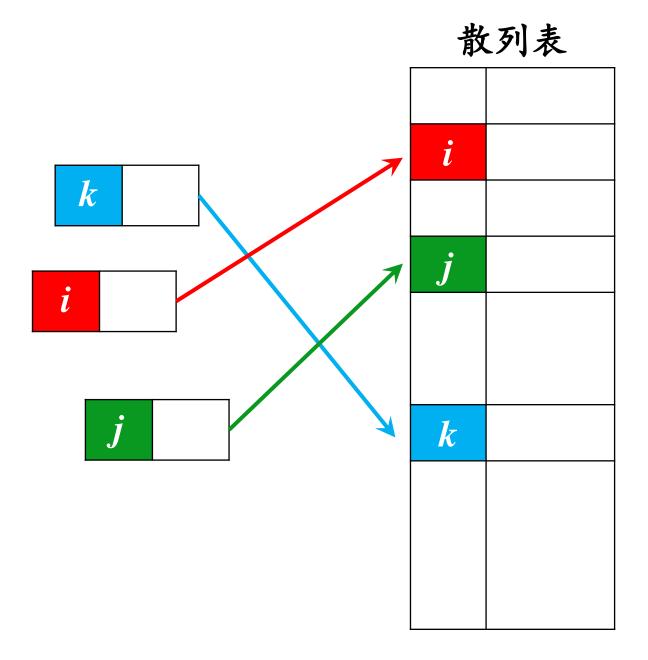
- > 前面所介绍的查找方法都是基于关键词的比较, 在找到想要的的元素之前, 需要检查若干数目的元素。
- ▶ 当数据规模n 很大时,上述方法的时间效率仍可能使得用户 无法忍受。
- >理想的情况:根据给定关键词,直接定位到元素的存储地址, 而不需要与各元素逐个比较

散列方法提出者





Hans Peter Luhn (1896-1964) IBM公司研究员



```
struct Student{
   int id;
   char name[100];
   char gender;
   int age;
   double score;
};
```

散列(Hash,亦称哈希、杂凑)



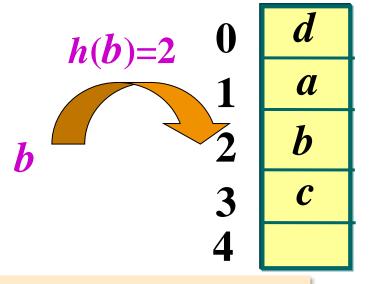
散列函数

$$h('a')=1$$

$$h(b')=2$$

$$h('c')=3$$

$$h('d')=0$$



散列表(Hash Table) 通常是一个一维数 组,散列地址即数 组的下标

散列函数h

- ✓ 自变量K: 关键词
- ✓ 函数值h(K): 元素在散列表中的存储地址(亦称散列地址)
- ✓作用:把关键词值映射到散列地址

h ('e')=1 怎么办?

冲突:多个不同的关键词具有相同的散列函数值,即 $K_1 \neq K_2$, $h(K_1)=h(K_2)$

散列方法的核心问题



散列函数设计

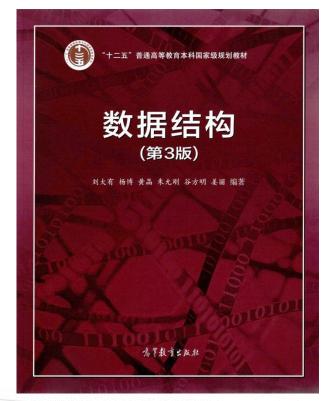
冲突处理方法

散列表

	index	Value
Key_1	0	Value_3
Kov 2 散列	1	
Key_2 N N N N N N N N N N	2	Value_2
	3	
Key_3	4	Value_1
	5	



think.create.solve



散列查找

- > 散列定义
- > 散列函数
- > 冲突处理方法
- > 散列表的删除
- > 性能分析与其他应用



散列函数定义及原则



- > 散列函数: 把关键词值映射到散列地址, 通常用h来表示。
- > h(Key) = Address of Hash Table
- > 散列函数的选取原则
 - ✓便于快速计算
 - ✓极少出现冲突:不同关键词的散列函数值尽可能不同
 - 函数值域在散列表长范围内,即 $0 \le h(K) < M$, M为散列表长度。
 - 关键词映射到散列表各位置的概率尽量相等,使散列函数值在 区间[0, M-1]内均匀分布。

除法取余 (除余法)



- > h(K) = K%M。其中M为散列表长度,%为取余运算,也表示为mod。
- > 对于理想随机的序列, M取值无关紧要。
- >实际应用中的数据序列远非理想随机,一般来说M为素数时,数据对散列表的覆盖最充分、分布最均匀。
- 》例如:对于序列a+d,a+2d,a+3d,...(公差为d的等差数列) 当GCD(d,M)=1时,(a+xd)%M均匀分布在[0,M-1]区间内。

K	1	7	13	19	25	31	37
h(K), M=9	1	7	4	1	7	4	1
h(K), M=7	1	0	6	5	4	3	2

► M取值的进一步建议: https://planetmath.org/goodhashtableprimes

MAD法 (Multiply-Add-Divide)



- $> h(K) = (a \times K + b)\% M$
- > M为素数, a > 1,b > 0,M ∤ a

乘法散列函数



> 给定一个实数 θ , $0 < \theta < 1$, 乘法散列函数为:

$$h(K) = \lfloor M(K\theta \bmod 1) \rfloor$$

其中mod 1指取小数部分, M为散列表长。

 \triangleright Knuth指出,一般来说当 $\theta=0.6180339887$ 或 $\theta=0.3819660113$ (黄金分割点)时散列函数值能均匀地分布在区间[0, M-1]上。

平方取中法



>取 K^2 的中间若干位作为h(K)的值。

关键词	平方	取中间三位
123	15129	512
1234567	1524155677489	556

压缩法



压缩法是把关键词的二进制串分割成等宽的子串,然后按某种方式把子串合并,作为散列函数值。

> 位异或:对各子串进行异或操作得到地址

 $h(356) = h(101100100) = 101 \text{ XOR } 100 \text{ XOR } 100 = (101)_2 = 5$

 $h(THE) = 10100 \text{ XOR } 01000 \text{ XOR } 00101 = (11001)_2 = 25$

缺点: 异或运算满足交换律, 即 $a \times OR b = b \times OR a$, 即有同样字母的单词有相同的散列地址。如 h(THE)=h(HTE)=h(ETH)=h(TEH)

> 折叠法: 对各子串进行求和操作得到地址

h(123456789)=123+456+789=1368 //自左向右,加法也满足交换律

h(123456789)=123+654+789=1566 //往复折返

抽取(数字分析)法

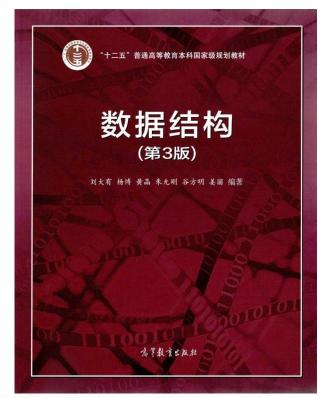


- h(1234567)=1357 //取十进制的奇数位 $h(THE)=h(10\frac{1}{1}0001000001\frac{01}{01})=(101)_2=5$ //取二进制的第3位和后2位
- 》函数值仅依赖关键词的部分位,而不是依赖整个关键词,容易出现冲突,如 $h(THE)=h(FROM)=h(ONE)=h(WE)=(101)_2=5$,h(1234567)=h(1639527)=h(1536517)=1357





think.create.solve



散列查找

- > 散列定义
- > 散列函数
- 〉冲突处理方法
- > 散列表的删除
- >性能分析与应用



之类法

THOU

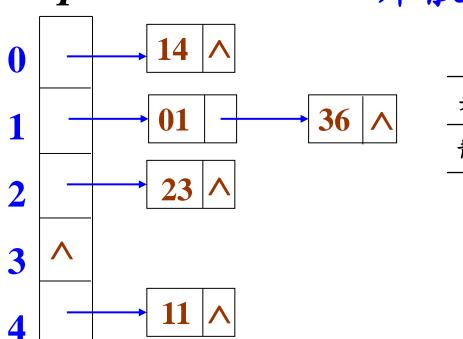
冲突处理方法





开散列法——拉链法





55

68

散列函数h(K)=K % 7

关键词	19	01	23	14	55	68	11	82	36
散列值	5	1	2	0	6	5	4	5	1

若链表很长, 可将其替代为跳表或查找树

- ✓ C++ STL: unordered_map
- ✓ Java: HashMap

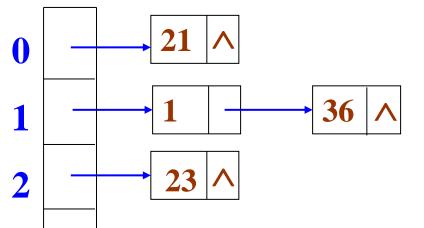
链表长度大于8时转化为红黑树

拉链就是令散列地址等于i的记录组成一个链表,且指针T[i]是该单链表的头指针。

82 ^

拉链法——平均查找长度







关键词	19	1	23	21	55	68	11	82	36
散列值	5	1	2	0	6	5	4	5	1

查找成功: 查找的元素在散列表中。

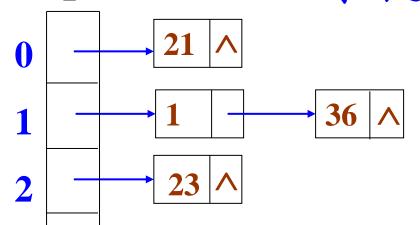
- > 输入个数等于表中实际元素个数,即9种
- > 第1种输入: 查找的元素K等于21, 比较1次
- > 第2种输入: 查找的元素K等于1, 比较1次

$$ASL_{AB} = \frac{1}{9} (6 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3)$$

虽然散列在关键词与记录存储位置之间建立了直接映射,但由于"冲突"的存在,仍有必要以平均查找长度来衡量散列表查找效率







查找不成功: 查找的元素不在散列表中。

- 输入数据经散列函数计算后只可能映射到 0..6的位置,故可能的输入有7种(散列函 数值域)。
- \triangleright 第1种输入:输入的K满足h(K)=0,比较1次
- \triangleright 第2种输入:输入的K满足h(K)=1,比较2次

$$ASL_{\text{不成功}} = \frac{1}{7} (1+2+1+0+1+3+1)$$

散列函数h(K)=K % 7

关键词	19	1	23	21	55	68	11	82	36
散列值	5	1	2	0	6	5	4	5	1

冲突处理方法



开散列法 ——拉链法

冲突处理 方法

> 闭散列法 (开放定址法)

线性探查

二次探查

双重探查

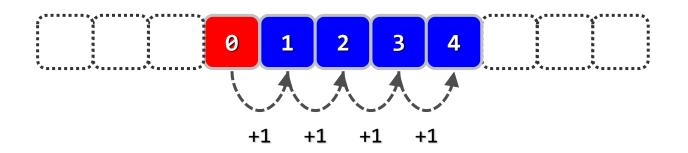
线性探查 (测)



当发生冲突时,以固定的次序查找表中的记录,直到找到一个关键词为K的结点或者找到一个空位置。

其循环探查路径:

$$h(K), h(K)+1, ..., M-1, 0, 1, ..., h(K)-1$$



线性探查:循环探查路径h(K), h(K)+1,...,M-1,0,1,...,h(K)-1



散列函数: h(K)=K mod 10

关键词 (K)	20	17	2	23	32	66	6	1
散列地址 h(K)	0	7	2	3	2	6	6	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	1	2	23	32		66	17	6	

装载因子 α=8/10=0.8

缺点:聚集现象,即很多元素连成一片,使探查次数增加。如查找31

设散列表空间大小为M,填入表中的元素个数是N,则称 $\alpha = N/M$ 为散列表的"装载(填)因子(Load Factor)"。

- \triangleright 实际应用时,常将散列表大小设计为 $\alpha = 0.5 \sim 0.8$ 为宜。
- > Java HashMap的α=0.75, 超过此值将自动进行表扩容。
- > C++ STL unordered map的α默认值1.0, 可人为修改。

线性探查——平均查找长度(平均探测次数)



散列函数: h(k)=K % 10

关名	建词	(K)	20	17	2	23	32	60	6	6	1
散列			0	7	2	3	2	6	-	6	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	20	1	2	23	32		66	17	6		

查找成功: 查找的元素在散列表中。

- > 输入个数等于表中实际元素个数,即8种。
- \triangleright 第一种输入: 查找的元素K等于20, 元素比较1次
- > 第二种输入: 查找的元素K等于1, 元素比较1次

• • •

$$ASL_{AB} = \frac{1}{8} (1+1+1+1+3+1+3)$$

线性探查——平均查找长度(平均探测次数)



散列函数: h(k)=K % 10

						<u> </u>				
关	建词	(K)	20	17	2	23	32	66	6	1
散列	地址	h(K)	0	7	2	3	2	6	6	1
	0	1	2	3	4	5	6	7 8	9	
	20	1	2	23	32		66	17	6	

查找不成功: 查找的元素不在散列表中。

- ▶ 输入数据经散列函数计算后只可能映射到0..9的位置,故可能的输入 有10种(散列函数值域)。
- \triangleright 第一种输入: 输入的K满足h(K)=0, 探测6次
- \triangleright 第二种输入: 输入的K满足h(K)=1, 探测5次

ASL<sub>$$\pi$$
, α</sub> = $\frac{1}{10}$ (6+ 5+ 4+ 3+ 2+ 1+ 4+ 3+ 2+1)





现有长度为7、初始为空的散列表HT,散列函数H(K)=K%7,用线性探查法解决冲突,将关键词22、43、15依次插入HT后,查找成功的平均查找长度是____。【2018年考研题全国卷】

0	1	2	3	4	5	6
	22	43	15			

吉林大学计算机科学与技术学院 朱允刚

课下思考



现有长度为11且初始为空的散列表HT,散列函数是H(K)=K%7,采用线性探查法解决冲突。将关键词序列87,40,30,6,11,22,98,20依次插入HT后,HT查找失败的平均查找长度是_____.【2019年考研题全国

卷】

A4

B 5.25

C 6

D 6.29

关键词	87	40	30	6	11	22	98	20
散列值	3	5	2	6	4	1	0	6

 0
 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10

 98
 22
 30
 87
 11
 40
 6
 20

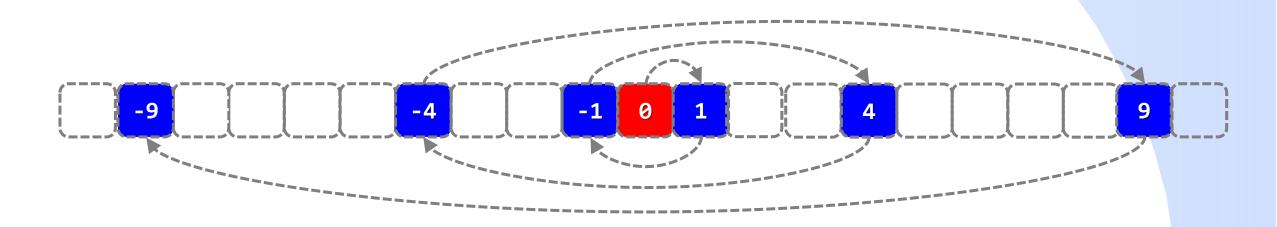
二次探查



探测序列: $h_i = (h(K) \pm i^2)$ % M , 其中i=1, 2, ..., (M-1)/2, M为散列表长特点: 一旦冲突. 能更快的跳离是非之地, 避免聚集

其具体循环探查路径:

h(K), $h(K)+1^2$, $h(K)-1^2$, $h(K)+2^2$, $h(K)-2^2$, $h(K)+3^2$, $h(K)-3^2$, ... 以上各值均在% M意义下

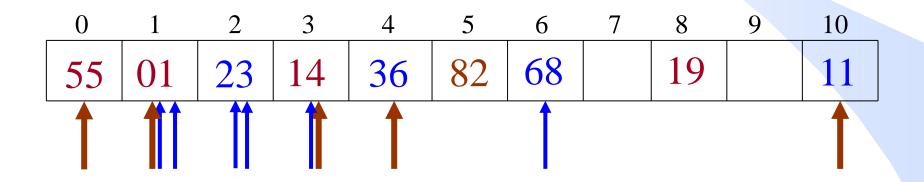


二次探查



散列函数: h(k)=K % 11

关键词 (K)	19	01	23	14	55	68	11	82	36
散列值 h(K)	8	1	1	3	0	2	0	5	3



其具体循环探查路径:

h(K), $h(K)+1^2$, $h(K)-1^2$, $h(K)+2^2$, $h(K)-2^2$, $h(K)+3^2$, $h(K)-3^2$, 以上各值均在% M意义下

双重探查



- \triangleright 从h(K)开始,寻找空地址时,所前进的步长不是固定的,而与K有关,即用 $\delta(K)$ 代替线性探查的前进步长1 ($1 \le \delta(K) < M$)。
- >循环探查路径:

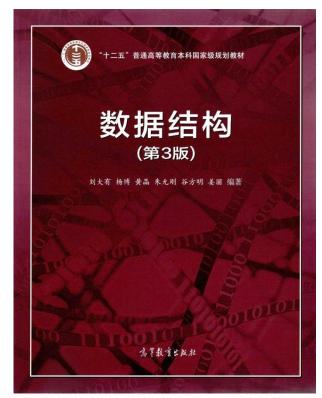
 $h(K), h(K) + \delta(K), h(K) + 2\delta(K), \dots$

以上各值均在% M意义下

 \triangleright 为了确保表中的每一个地址都能探查到,要求 $\delta(K)$ 和M互质,因此M 应选作素数。



think.create.solve



散列查找

- > 散列定义
- > 散列函数
- > 冲突处理方法
- > 散列表的删除
- > 性能分析与其他应用



散列表的删除



> 拉链法: 链表删除。

> 闭散列法: 以线性探查法为例, 讨论散列表的删除过程。

散列函数: h(k)=K % 10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	21	31	51					

▶元素不能直接删除,因为相应的位置可能引起过冲突,数据记录绕过该位置存在了别处,删除该位置将阻断查找其他元素的路径。例如对从上表删除1,把位置1清空,将导致查找21、31、51失败。

散列表的删除——方案1: 懒惰删除



懒惰删除(Lazy Deletion):并不真正的删除元素,而是将删除的位置做一个标记,其状态置为"已删除",散列表中每个位置有3种状态:空的、已占用的、已删除的。

- ① 当查找一个关键词时,将跳过"已删除"的位置,就像它们是"已占用"的一样。
- ② 插入关键词时,则可被插入到"已删除"或者"空的"位置中。

散列函数: h(k)=K%10

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	21	31	51					

散列表的删除——方案1



- > 缺点: 删除操作并不能把某位置真正变为空,在进行大量删除和插入操作后,"空的"位置将越来越少,每次不成功的查找将花费更长的查找长度,甚至为表长M。
- ▶例如对于下表,删除33后,再查找31。

散列函数: h(k)=K % 10

				4					
20	1	21	33	54	65	66	17	6	37

课下思考



现有长度为5、初始为空的散列表,散列函数h(K)=(K+4)%5,处理冲突采用线性探查法,插入2022、12、25,再用懒惰删除法删除25,则查找失败的平均查找长度是____。【2023年考研题全国卷】

A 1

B 1.6

C 1.8

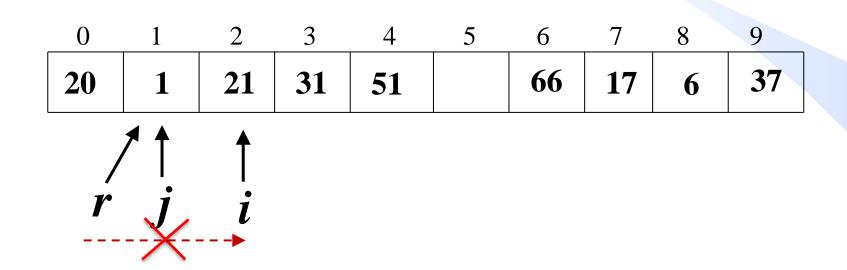
D 2.2

0	1	2	3	4
	2022	12		25

散列表的删除——方案2:实时删除



情况1



删除
$$T[i]=1$$
 $r \leftarrow h(T[i])$

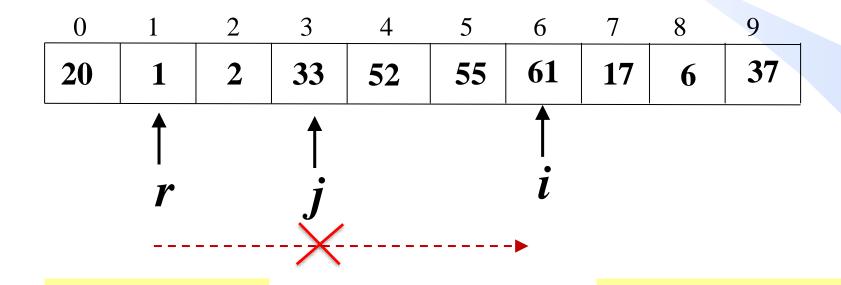
$$r \leftarrow h(T[i])$$

解决方案: 21前移

该种情况:位置j清空后,会阻断r到i的探查路径



情况1



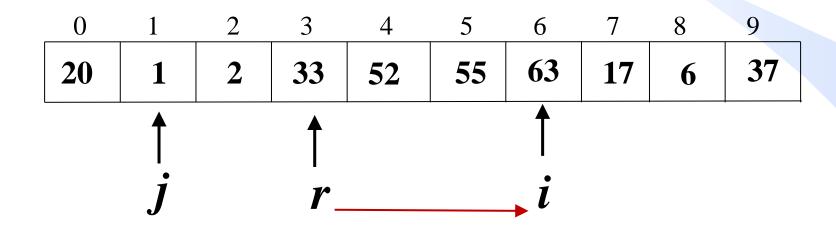
删除T[i] = 33 $r \leftarrow h(T[i])$

该种情况:位置j清空后,会阻断r到i的探查路径

解决方案: $T[j] \leftarrow T[i]$



情况2



删除T[j]=1

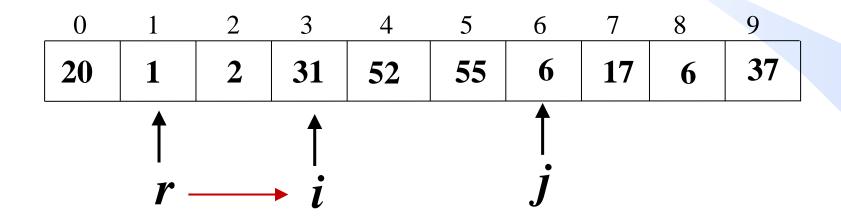
$$r \leftarrow h(T[i])$$

 $T[j] \leftarrow T[i]$? 不需要

该种情况: r沿着探查方向先遇到i, $j < r \le i$ 位置j清空后, 不会影响由r探查到i



情况3

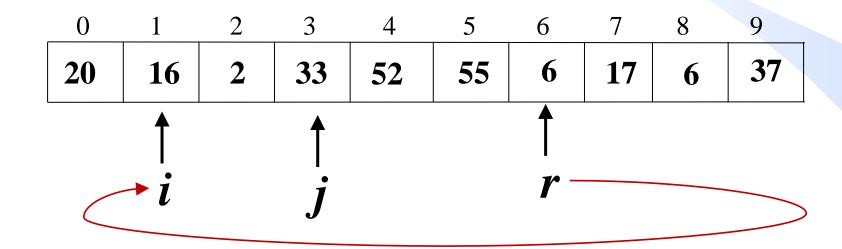


删除T[j]=6 $r \leftarrow h(T[i])$ $T[j] \leftarrow T[i]$? 不需要

该种情况: r沿着探查方向先遇到i, $r \leq i < j$ 位置j清空后, 不会影响由r探查到i



情况4



删除T[j]=33 $r \leftarrow h(T[i])$ $T[j] \leftarrow T[i]$? 不需要

该种情况: r沿着探查方向先遇到i, i < j < r 位置j清空后, 不会影响由r探查到i

散列表的删除——方案2总结



- 》删除T[j]:将位置j清空,然后考察<mark>位置j+1到下一个空位前</mark>的每一个位置i,看将位置j清空后,是否阻碍查找T[i]的探查路径,若是则将T[i]前移至空位。
- >缺点:效率极低,最坏情况甚至需要遍历整个散列表。 void HashDeletion(){ //伪代码 T[j]置为空; //循环考查位置j+1到下一个空位前的每一个位置 for(i=j+1; T[i]!=空; i=(i+1)%M){ r=h(T[i]); if(r到i的探查路径被阻断) { T[j]=T[i]; T[i]置空; j=i; //T[i]前移且位置i变空

散列表的删除——方案2——练习



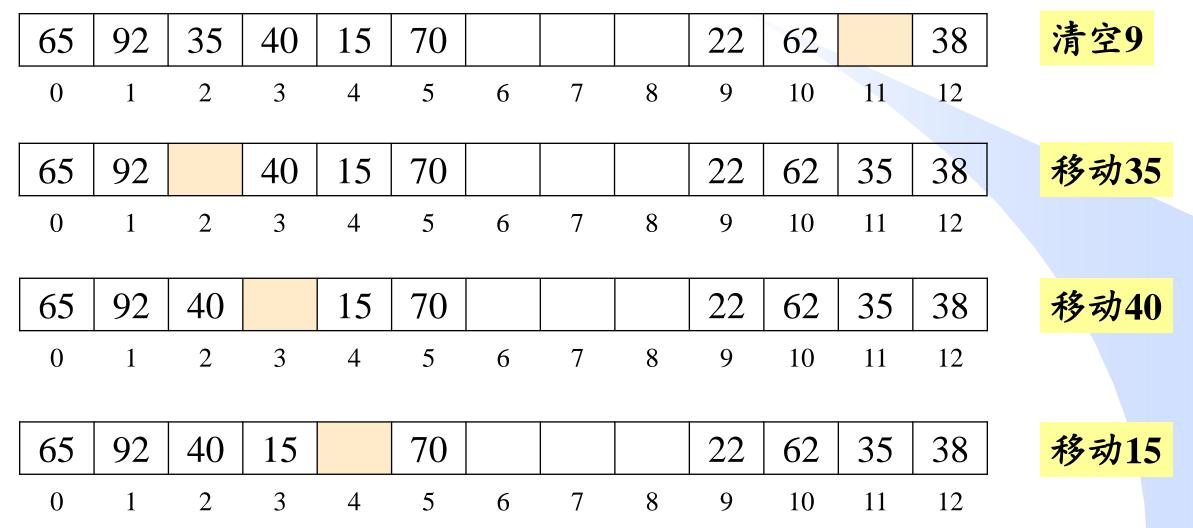
给定长度为13、初始为空的散列表HT[0..12],散列函数h(K)=K%13。在散列表中实时删除关键词9,写出删除过程依次移动了哪些关键词,并画出删除9后的散列表。【2020级期末考试题】

65	92	35	40	15	70				22	62	9	38
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

散列表的删除——方案2——练习



散列函数: h(k)=K % 13



吉林大学计算机科学与技术学院 朱允刚

散列表的删除——方案3: 延迟删除

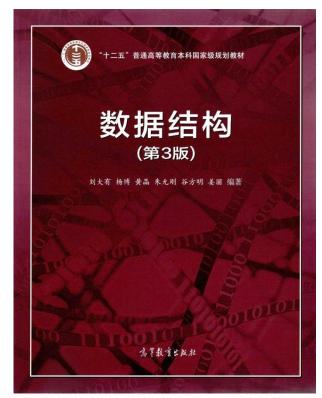


平时采用Lazy Deletion,每隔一段时间定期执行一次真正删除,把标记为"已删除"的结点真正清空:

- ✓可以保存每一个元素的访问次数。
- ✓ 将标记为"已删除"的位置清空,然后把元素按访问次数递减的顺序依次重新插入散列表,使被频繁访问的元素存储在接近其散列函数值的位置,有利于减少平均查找长度。



think.create.solve



散列查找

- > 散列定义
- > 散列函数
- > 冲突处理方法
- > 散列表的删除
- > 性能分析与其他应用



JAN RIT

散列表的性能分析



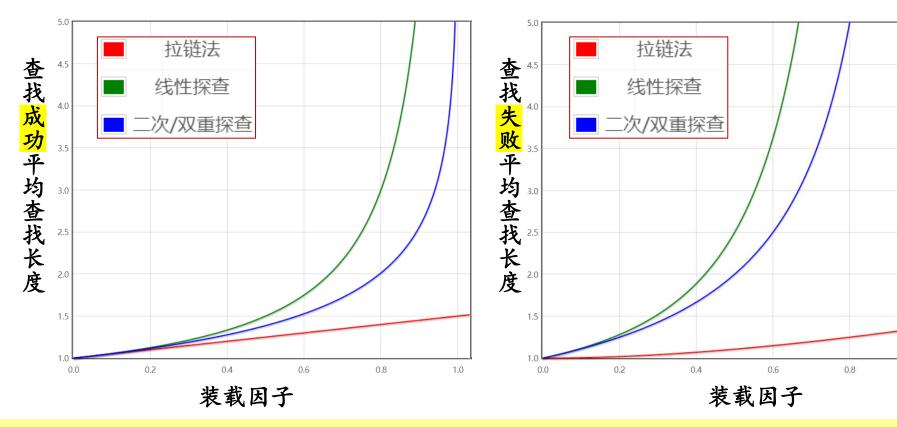
解决冲突的策略	平均查找长度						
一件伏什大的来哈 ————————————————————————————————————	查找成功	查找不成功					
拉链法	$1+\frac{\alpha}{2}$	$\alpha + e^{-\alpha}$					
线性探查	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1-\alpha}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$					
二次探查双重探查	$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$					

当装载因子α=0.5时

- > 对线性探查法,每次成功的查找操作平均需要1.5次探查,每次不成功的查找和插入平均需要2.5次探查。
- 对二次探查和双重探查法,每次成功的查找操作平均需要1.39次探查,每次不成功的查找和插入平均需要2次探查。

散列表的性能分析





- > 装载因子越大,平均探测次数越多。
- > 装载因子超过0.5时, 散列表的性能急剧下降。
- 拉链法效率最高,实际系统中使用的散列大多采用拉链法,而且该方法易于实现,不会产生聚集现象,删除也方便。

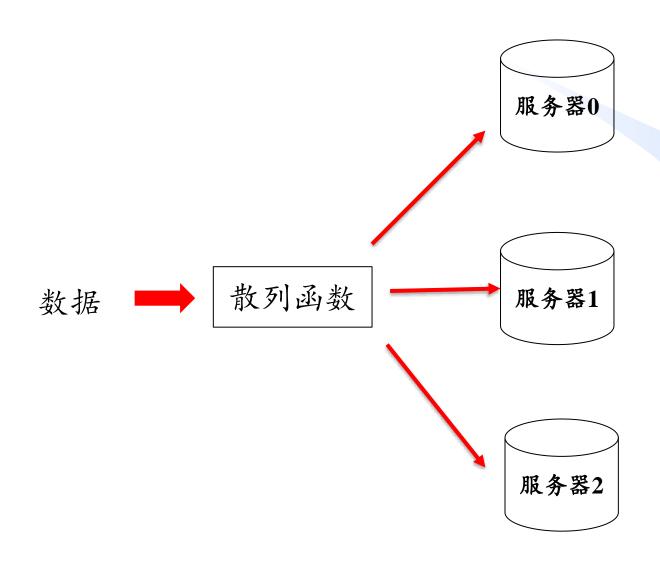
散列表 vs 线性表查找和树形查找



- > 前面介绍的查找算法时间为O(logn),而散列查找的时间理论上为O(1),为什么有如此高效的查找方法还不放弃低效率的查找方法?
- > 平均情况下, 散列表时间更快。
- ➤但O(1)只是散列表理想情况下的性能,实际应用中时间性能随数据量、数据分布情况的变化而变化,最坏情况下时间可达O(n)。
- ▶ 散列表占空间大。需要控制装载因子(保证散列表中有一定的空闲单元),是以牺牲空间来换取时间。
- ▶ 在散列表中,查找失败后,仅能知道所找的关键词K不在表中。而以比较为基础的查找方法还能得到更多额外信息,如小于等于K的最大关键词和/或大于等于K的最小关键词,这在很多应用中是重要的。
- \triangleright 查找树能更好的维护数据的"序"信息,如在BST中找最小元素/第k小元素只需 $O(\log n)$ 时间,而在散列表中则需要O(n)时间。

散列表的其他应用——分布式存储





散列表的其他应用——信息安全



>安全访问(密码散列化后存入数据库)

password ______ 散列函数 _____ 921988ba001dc8e14a3b108f3fa6cb6d

散列表的其他应用——数字指纹



▶数字指纹(网盘秒传, MD5、SHA1)

文件

散列函数



921988ba001dc8e14a3b108f3fa6cb6d



Ronald Rivest 1992年设计MD5散列函数 图灵奖获得者 美国科学院、工程院院士 麻省理工学院教授

虽然我不愿看到MD5倒下,但人们必须推崇真理。

——Ronald Rivest



王小云 2004年首次破解MD5 中国科学院院士 清华大学教授 山东大学教授

散列表的其他应用——区块链技术



▶比特币(SHA256)

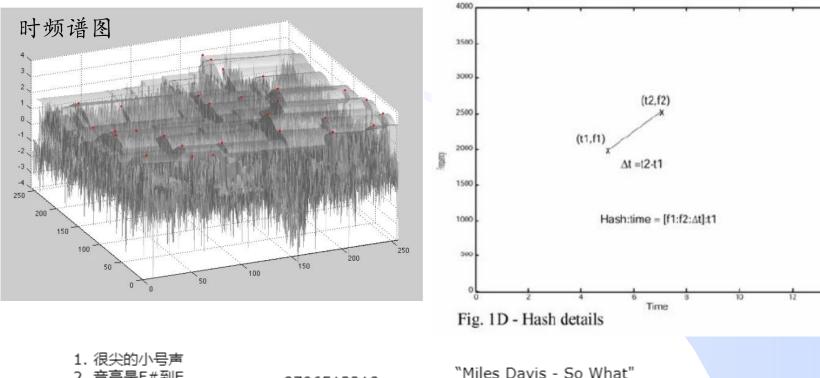
$$h(K) = y$$

散列表的其他应用——听歌识曲



>音频指纹:





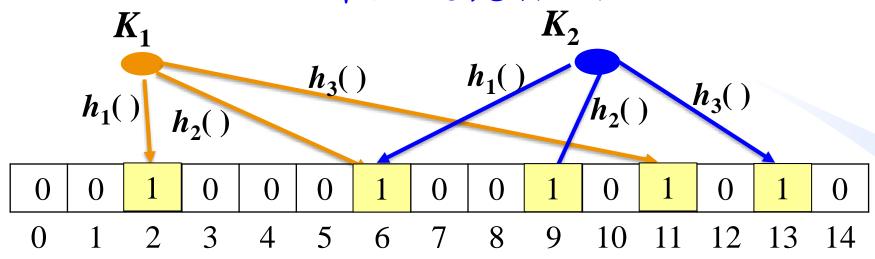


QQ音乐听歌识曲技术分享:基于Landmark的音频指纹系统

- [1] https://zhuanlan.zhihu.com/p/81994831
- [2] https://zhuanlan.zhihu.com/p/82299663

散列表的其他应用——浏览器恶意URL识别 布隆过滤器(Bloom Filter)





将恶意网站的URL存入 散列表,当用户准备访 问某网址时,在哈希表 里查找该网址? 缺点:恶意URL很多, 散列表占较大内存。

- ▶查找成功:哈希值对应位都为1。查找失败:有1位为0。
- >散列表无需存储关键词或数据元素,即可实现散列查找和插入。
- ▶存在误判:若查找结果是某个元素在表中,可能误判。若查找结果是某个元素不在表中,不会误判。
- >不能删除: 因为某位可能多个关键词共用。
- Chrome浏览器: 当用户访问某网址时,在本地Bloom过滤器查找该网址,若不在表中(不存在误判)则网址安全。若在表中(可能误判),则连接远程服务器做进一步检查。





编写程序实现一个散列表。【某年腾讯校园招聘笔试最后一道大题】