综合练习一

一、填空题

$P(A)-P(AB)$

1. 设 A,B 是同一个试验中的两个事件，且 $P(A)=0.61, P(A-B)=0.22$，则

$P(AB)=0.61-0.22=0.39$

$1-P(AB)$

$P(\overline{AB})=$ <u>0.61</u>。

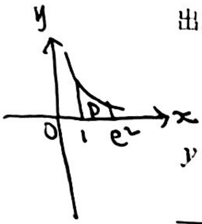
2. 抛掷两颗均匀的骰子，已知两颗骰子点数之和为7点，则其中一颗为1点的概率为 <u>$\frac{1}{3}$</u>。

A　B

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2/36}{6/36}=\frac{1}{3}$

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数在某区间的表达式为 $\frac{1}{x^2+1}$，其余部分为常数，写出此分布函数的完整表达式 <u>$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1} & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$</u>。

形如 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1} & x<a\\ 1 & x\geq a\end{cases}$ $\Rightarrow a=0$



4. 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布，D 由曲线 $y=\frac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$ 所围成，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=e$ 点的值为 <u>$\frac{1}{2e}$</u>。

$S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2$

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$

$f_X(e)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(e,y)dy=\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2e}$

5. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，并且服从同一个分布，期望为 μ，方差为 σ^2，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $D(\overline{X})=$ <u>$\frac{\sigma^2}{n}$</u>。

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，μ 和 σ^2 均未知，则 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

二、单项选择题

1. 设 A、B、C 三个事件两两相互独立，则 A、B、C 相互独立的充要条件是（ A ）。

A与BC独立

$\Leftrightarrow P(ABC)=P(A)P(BC)$

$\Leftrightarrow P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

（A）A与BC独立　（B）AB与$A\cup C$独立　（C）AB与AC独立　（D）$A\cup B$与$A\cup C$独立

2. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，在下列概率中可表示为 $F(a)-F(a-0)$ 的是（ C ）。

$P\{X<a\}=P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\leq a-\frac{1}{n})\}=\lim_{n\to\infty}F(a-\frac{1}{n})=F(a-0)$

（A）$P\{X\leq a\}$ $F(a)$　（B）$P\{X>a\}$ $1-F(a)$　（C）$P\{X=a\}$　（D）$P\{X\geq a\}$ $1-F(a-0)$

3. 设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则（ B ）。

$X+Y\sim N(1,2)$

$X-Y\sim N(-1,2)$

（A）$P\{X+Y\leq 0\}=\frac{1}{2}$　（B）$P\{X+Y\leq 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$ (D) $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

4. 在假设检验中，原假设 H_0，备择假设 H_1，则（ B ）称为第二类错误。

(A) H_0 为真，接受 H_1 (B) H_0 不真，接受 H_0

(C) H_0 为真，拒绝 H_1 (D) H_0 不真，拒绝 H_0

5. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=100$，方差 $D(Y)=10$，则由切比雪夫不等式

$P\{|X-E(X)|<20\}\ge 1-\frac{10}{20^2}=\frac{39}{40}$

$P\{80<X<120\}>$（ D ）。

(A) 0.025 (B) 0.5 (C) 0.96 (D) 0.975

6. 设 X_1,X_2,X_3 是来自总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ 为已知，σ^2 为未知，则下列各式中不是统计量的为（ D ）。

(A) $X_2-2\mu$ (B) $\mu X_1+X_3e^{X_2}$ (C) $\max(X_1,X_2,X_3)$ (D) $\frac{1}{\sigma^2}(X_1+X_2+X_3)$

三、按照要求解答下列各题

1. 在电报通讯中，发送端发出的是由“•”和“-”两种信号组成的序列。由于受到随机干扰，接收端收到的是“•”和“-”及“不清”三种信号组成的序列。假设发送“•”和“-”的概率分别为 0.7 和 0.3；在已知发送“•”时，接收到“•”、“-”和“不清”的概率分别为 0.8、0.1 和 0.1；在已知发送“-”时，接收到“•”、“-”和“不清”的概率分别为 0.2、0.7 和 0.1。

求（1）接收到信号“•”、“-”和“不清”的概率；

（2）在接收到信号“不清”的条件下，发送信号为“-”的概率。

(1) 设 B_1, B_2, B_3 分别表示接收到信号“.”、“-”和“不清”，

A_1, A_2 分别表示发送信号“.”和“-”，

则 $P(A_1)=0.7$ $P(A_2)=0.3$

$P(B_1|A_1)=0.8$, $P(B_2|A_1)=0.1$, $P(B_3|A_1)=0.1$

$P(B_1|A_2)=0.2$. $P(B_2|A_2)=0.7$ $P(B_3|A_2)=0.1$.

由全概率公式，$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=0.7\times0.8+0.3\times0.2=0.62$

$P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)=0.7\times0.1+0.3\times0.7=0.28$

$P(B_3)=P(A_1)P(B_3|A_1)+P(A_2)P(B_3|A_2)=0.7\times0.1+0.3\times0.1=0.1$

(2) $P(A_2|B_3)=\frac{P(A_2B_3)}{P(B_3)}=\frac{P(A_2)P(B_3|A_2)}{P(B_3)}=\frac{0.3\times0.1}{0.1}=0.3$

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$, $-\infty<x<+\infty$,
求（1）常数 A、B；（2）随机变量 X 落在 $(-1,1)$ 内的概率；（3）X 的概率密度函数。

解. 由 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$ 得 $\begin{cases} A-\frac{\pi}{2}B=0 \\ A+\frac{\pi}{2}B=1 \end{cases}$ 解得 $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{\pi}$

(2) $P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=(A+B\arctan 1)-[A+B\arctan(-1)]=2B\arctan 1$

$=2\times\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$

(3) X的概率密度函数为 $f(x)=F'(x)=\frac{B}{1+x^2}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<+\infty$

3. 已知随机变量 X 和 Y 的概率分布分别为

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

并且 $P\{XY=0\}=1$。

（1）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布（只写出计算结果表格）；（2）判别 X 和 Y 是否相互独立。

解. 由 $P\{XY=0\}=1$ 得 $P\{XY=-1\}+P\{XY=1\}=0$ 从而 $P\{XY=-1\}=P\{XY=1\}=0$

即 $P\{X=-1, Y=1\}=0$, $P\{X=1, Y=1\}=0$ 再由X和Y的概率分布可得(X,Y)的概率分布如下：

X \ Y	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(2) 因 $P\{X=-1, Y=1\}=0$, 而 $P\{X=-1\}\cdot P\{Y=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\neq 0$

故X与Y不相互独立.

4. 已知随机变量X、Y分别服从$N(1,0,9,16,-\frac{1}{2})$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，

求（1）Z的数学期望与方差；（2）X与Z的相关系数；（3）X与Z是否相互独立？为什么？解：由已知 $E(X)=1$，$D(X)=9$，$E(Y)=0$，$D(Y)=16$，$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$

(1) $E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{3}$

$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{2})+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$

$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}Cov(X,Y)$

$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\cdot\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

$=\frac{1}{9}\times9+\frac{1}{4}\times16+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times\sqrt{9}\times\sqrt{16}$

$=3$

(2) $Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

$=\frac{1}{3}\times9+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times\sqrt{9}\times\sqrt{16}=0$

故 $\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=0$。(3) (X,Z)服从二维正态分布，由二维正态分布不相关与相互独立的等价性知X与Z相互独立

5. 设总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $\theta>0$为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，求θ的矩估计量和最大似然估计量。

解 $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

令 $\mu_1=A_1=\bar{X}$，即 $\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\bar{X}$ 解得θ的矩估计量 $\hat{\theta}=(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}})^2$

给定一组样本观测值$x_1,x_2,\cdots x_n$，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x_i\le1,\ i=1,2,\cdots n\\ 0 & 其它\end{cases}$$

当$0\le x_i\le1$，$i=1,2,\cdots n$时 $\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$.

从而θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$.

四、按照要求解答下列各题

1．已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度。

解. 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

当 $y<0$ 时. $F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=0$

当 $y>0$ 时 $F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

于是 $Y=X^2$ 的概率密度为 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})$

综上、$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0. \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$

2．设总体 X 在 $(0,\ \theta)$ 内服从均匀分布，$X_1,\ X_2,\cdots,X_n\ (n\ge 2)$ 是取自总体 X 的样本，已知 θ 的两个无偏估计量为 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}$，$\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}\max(X_1,\ X_2,\cdots,X_n)$，判别 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 哪个更有效? 解. $D(\hat{\theta}_1)=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=4.\frac{D(X)}{n}=\frac{4}{n}\cdot\frac{1}{12}\theta^2=\frac{\theta^2}{3n}$.

记 $Y=\max(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 则 $\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}Y$

Y 的分布函数为 $F_Y(x)=(F_X(x))^n=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ (\frac{x}{\theta})^n & 0<x<\theta \\ 1 & x\ge\theta \end{cases}$

概率密度函数为 $f_Y(x)=\begin{cases} \frac{n}{\theta^n}x^{n-1} & 0<x<\theta \\ 0 & 其它 \end{cases}$

由此得 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}y f_Y(y)dy=\int_0^\theta y\cdot\frac{n}{\theta^n}y^{n-1}dy=\frac{n}{n+1}\theta$

$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f_Y(y)dy=\int_0^\theta y^2\cdot\frac{n}{\theta^n}y^{n-1}dy=\frac{n}{n+2}\theta^2$

$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{n}{n+2}\theta^2-(\frac{n}{n+1}\theta)^2=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$

于是 $D(\hat{\theta}_2)=D(\frac{n+1}{n}Y)=\frac{(n+1)^2}{n^2}D(Y)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$.

因 $n\ge 2$. $D(\hat{\theta}_2)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}<\frac{\theta^2}{3n}=D(\hat{\theta}_1)$ 故 $\hat{\theta}_2$ 更有效