广义积分敛散性判别法8-2

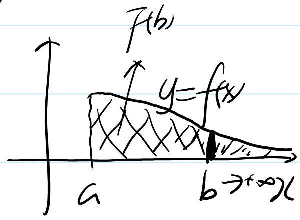
2022年3月25日 7:42

广义积分判别法

- 无穷积分（背 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}dx$ $\begin{cases}\mu>1 \text{ 收}\\ \mu\le 1 \text{ 散}\end{cases}$）
- 瑕积分（背 $\int_0^1\frac{1}{x^\mu}dx$ 或 $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^\mu}dx$ 或 $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^\mu}dx$ $\begin{cases}\mu<1 \text{ 收}\\ \mu\ge 1 \text{ 散}\end{cases}$）

定理1　$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且 $\forall b>a$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积 且 $f(x)\ge 0$

则有 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\iff$ $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ 在 $b\in[a,+\infty)$ 上有界

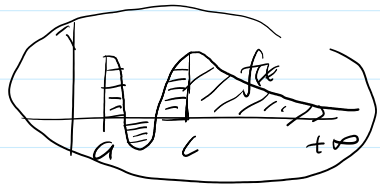


注（$\exists c>a$ 使 $\forall x\in[c,+\infty)$ $f(x)\ge 0$. 也可以）

$$\int_a^{+\infty}=\int_a^c+\int_c^{+\infty}$$

收　定

同敛散



定理2（比较法不等式）$f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，$\forall b>a$ 有 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积

若 $\exists c>a$ 使得 $x\ge c$ 时 有 $\boxed{0\le f(x)\le g(x)}$ 则

(1) $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

(2) $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散

$0\le f(x)\le g(x)$　　$0\le\int_a^{+\infty}f(x)dx\le\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 有上界 M

$+\infty\Leftarrow$

定理3（比较法极限式）$\exists X$，$\forall x>X$ 有 $f(x)\ge 0$，$g(x)>0$，

若 $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l}$ 则

(1) $0<l<+\infty$，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散

(2) $l=0$，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛（注 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 散 无结论）

(3) $l=+\infty$，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散（注 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收，无结论）

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 敛散，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 自备

证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists X,\ \forall x>X \ni \left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon$$

即 $l-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<l+\varepsilon$ 即 $(l-\varepsilon)g(x)<f(x)<(l+\varepsilon)g(x)$

定理4 (取 $g(x)=\frac{1}{x^\mu}$) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^\mu}}=\lim_{x\to+\infty}x^\mu f(x)=l$

(1) $0<l<+\infty$ $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散

(2) $l=0$ $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}dx$ 收 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

(3) $l=+\infty$ $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散

定理5: 若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛，此时称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛

证 $0\le f(x)+|f(x)|\le 2|f(x)|$ 收 ← 收敛　　$f(x)=f(x)+|f(x)|-|f(x)|$

例 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac32}}{1+x^2}dx$　　法一 $\frac{x^{\frac32}}{1+x^2}\overset{x>1}{>}\frac{x^{\frac32}}{2x^2}=\frac12\cdot\frac{1}{x^{\frac12}}$　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac12}}dx$ 发散

$\Rightarrow$ 原式 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac32}}{1+x^2}dx$ 发散

$$\int_0^{+\infty}=\underbrace{\int_0^1}_{\text{定积分}}+\int_1^{+\infty}$$

同敛散

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac32}}{1+x^2}dx$ 发散

法二 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^{\frac32}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^\mu}}=\lim_{x\to+\infty}x^\mu\cdot\frac{x^{\frac32}}{1+x^2}\overset{\mu=\frac12}{=}1$　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac12}}dx$ 发散 $\Rightarrow$ 原式发散

例 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$　　法一 $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}<\frac{1}{x\sqrt{x^2}}=\frac{1}{x^2}$　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收 $\Rightarrow$ 原收

法二 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x^\mu}}=\lim_{x\to+\infty}x^\mu\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\overset{\mu=2}{=}1$，由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收 $\Rightarrow$ 原收

$+\infty$ $\ln x$ … 1 $\ln(x-1+1)$ 1 $\cancel{x-1}$ $\sqrt{x-1}$ …

例 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1+1)}{x\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{x-1}\,\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}\,\cancel{\sqrt{x-1}}}=0$

局部有界性 ⇒ $x=1$ 不是瑕点

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{x^\mu}}=\lim_{x\to+\infty}x^\mu\cdot\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}=$

$\mu<2\Rightarrow l=0$

$\mu>1\Rightarrow\int\frac{1}{x^\mu}dx$ 收, $\mu=\frac{3}{2}$ $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f}{\frac{1}{x^\mu}}=l$
- $0<l<+\infty$ $\int\frac{1}{x^\mu}dx$ 与 $\int f dx$ 同敛散
- $l=0$ $\int\frac{1}{x^\mu}dx$ 收 ⇒ 原收
- $l=+\infty$ $\int\frac{1}{x^\mu}dx$ 散 ⇒ 原散

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收 ⇒ 原收

瑕积分

定理1 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义（b 为瑕点），$\forall c<b$ $f(x)$ 在 $[a,c]$ 可积 且 $f(x)\geq0$

则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $F(c)=\int_a^c f(x)dx$ 当 $c\in[a,b)$ 时有界

定理2 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义，$\forall c<b$，有 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上可积，若 $\exists x_0\geq a$ 使得

$\forall x\geq x_0$ 有 $\boxed{0\leq f(x)\leq g(x)}$，则
- 1) $\int_a^b g(x)dx$ 收 ⇒ $\int_a^b f(x)dx$ 收
- 2) $\int_a^b f(x)dx$ 散 ⇒ $\int_a^b g(x)dx$ 散

定理3 $\exists M$ $(a\leq M<b)$ $\forall x>M$ $f(x)\geq0, g(x)>0$,

若 $\boxed{\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l}$ 则
- (1) $0<l<+\infty$，$\int_a^b g(x)dx$ 与 $\int_a^b f(x)dx$ 同敛散
- (2) $l=0$，$\int_a^b g(x)dx$ 收 ⇒ $\int_a^b f(x)dx$ 收
- (3) $l=+\infty$ $\int_a^b g(x)dx$ 散 ⇒ $\int_a^b f(x)dx$ 散

定理4 取 $g(x)=\frac{1}{(b-x)^\mu}$

(2) $l=0$, $\int_a^b g(x)dx$ 收 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收

(3) $l=+\infty$ $\int_a^b g(x)dx$ 散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 散

定理4 取 $g(x)=\frac{1}{(b-x)^{\mu}}$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^{\mu}}}=\lim_{x\to b^-}(b-x)^{\mu}\cdot f(x)=l$$

(1) $0<l<+\infty$ $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^{\mu}}dx$ 与 $\int_a^b f(x)dx$ 同敛散

(2) $l=0$, $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^{\mu}}dx$ 收 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收

(3) $l=+\infty$ $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^{\mu}}dx$ 散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 散

定理5 若 $\int_a^{b(\text{瑕})}|f(x)|dx$ 收敛，则必有 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，此时称 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛

例 $\int_0^1\frac{dx}{\ln(1+x)}$ $\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\ln(1+x)}}{\frac{1}{x^{\mu}}}=\lim_{x\to 0^+}x^{\mu}\frac{1}{\ln(1+x)}\overset{\mu=1}{=\!=}1$ $\quad \int_0^1\frac{1}{x}dx$ 散 $\Rightarrow$ 原散

例 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $\quad |k|<1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\frac{1}{(1-x)^{\mu}}}=\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\mu}\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-k^2x^2)}}\overset{\mu=\frac{1}{2}}{=\!=}\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

$\int_0^1\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx$ 收 $\Rightarrow$ 原收

例 Euler(欧拉)积分 (Γ(Gamma)函数，B(Beta)函数)

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\underbrace{\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{I(\alpha)}+\underbrace{\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx}_{R(\alpha)}=I(\alpha)+R(\alpha)$$

$$I(\alpha)=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\begin{cases}\alpha\geq 1 & \text{定积分}\end{cases}$$

e^{-x} $\quad x^{\mu}\cdot x^{\alpha-1}$ 令 $\mu=1-\alpha$,

$$I(\alpha)=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \begin{cases} \alpha\geq 1 & \text{定积分} \\ \alpha<1 & x=0\text{瑕点} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^{\mu}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\mu}\cdot x^{\alpha-1}}{e^{x}}\overset{令\mu=1-\alpha}{=\!=}1$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^{1-\alpha}}dx \begin{cases} 1-\alpha<1\text{时收 即 }\alpha>0\text{时收}\Rightarrow\text{原式收} \\ 1-\alpha\geq 1\text{时散 即 }\alpha\leq 0\text{时散}\Rightarrow\text{原式散} \end{cases}$$

$$R(\alpha)=\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^{\mu}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu+\alpha-1}}{e^{x}}\overset{\forall\mu\in\mathbb{R}}{\underset{\forall\alpha\in\mathbb{R}}{=\!=}}0$$

不妨取 $\mu=2$ $\quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收 $\Rightarrow R(\alpha)$ 收敛 $\alpha\in\mathbb{R}$

即 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 当 $\alpha>0$ 时收敛