- 统计推断
  - 统计估计
    - 参数估计
      - 点估计（第7章1-2节）
      - 区间估计（第7章3-5节）
    - 非参数估计（不讲）
  - 假设检验
    - 参数假设检验（第8章1-2节）
    - 非参数（分布）假设检验（第8章3节*）
  - 回归分析（第九章*）
  - 方差分析（第十章*）

第七章　参数估计

“参数”---刻画总体某些概率特征的数量

- 分布中所含的未知参数：如二点分布$B(1, p)$中的概率p
- 分布中所含的未知参数的函数：如X~$N(\mu,\sigma^2)$,则X不超过

  某定值a的概率$P\{X \le a\} = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$是未知参数$\mu,\sigma$的函数.
- 分布的各种数字特征也都是未知参数：如$E(X)$，$D(X)$等.

一般场合, 常用θ表示参数, 参数θ所有可能取值组成的集合称为参数空间, 常用Θ表示.

参数估计问题：讨论如何根据样本对上述各种未知参数作出估计.

- 如何给出估计
- 如何评判不同的估计优劣

参数估计的形式: 点估计与区间估计

第七章　参数估计

一、参数的点估计

二、估计量的评选标准

三、参数的区间估计

四、正态总体参数的区间估计

五、单侧置信区间

第一节　参数的点估计

一、　矩估计法

二、　最大似然估计法

点估计的概念

设总体 X 的分布函数为已知的$F(x,\theta)$,其中x是自变量，θ为未知参数（一个或多个），借助于总体 X 的一个样本来估计未知参数θ的值的问题称为**点估计问题**.

点估计的具体思想

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$, $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$是未知参数,
$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的一个样本值.

构造统计量：(称为θ的点估计量)　用其观测值(称为θ的点估计值)

$$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \vdots \\ \hat{\theta}_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)\end{pmatrix} \qquad \hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \vdots \\ \hat{\theta}_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{pmatrix}$$

来估计未知参数$\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$.

问题:

(1) 如何构造估计量?

(2) 如何评价估计量?

常用构造估计量的方法: (两种)

矩估计法和最大似然估计法.

1. 矩估计法

基本原理："替换原理"

用样本矩代替<u>相应</u>的总体矩,如：令$E(X)=\bar{X}$

用样本矩的连续函数代替<u>相应</u>的总体矩的连续函数，

建立含有待估参数的方程，从而解出待估参数.

矩估计法

这是由英国统计学家<u>K. 皮尔逊</u>最早提出的 .

矩估计的思想方法：

设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)$, 参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r$未知，

总体X的$1,2,\cdots,r$阶矩存在：$\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)=E(X^k)\quad(k=1,2,\cdots,r)$.

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本, 由辛钦大数定律，当$n\to\infty$时有

样本矩$A_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{\text{依概率收敛}}$总体矩$\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r),k=1,2,\ldots r$.

样本矩的连续函数$\xrightarrow{\text{依概率收敛}}$总体矩的连续函数.

因此当n较大时有

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \approx \mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r),(k=1,2,\ldots.,r).$$

$$g(A_1,A_2,\cdots,A_r)\approx g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r).$$

令 $\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r) = A_1, \\ \mu_2 = \mu_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r) = A_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \mu_r = \mu_r(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r) = A_r. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(A_1, A_2, \cdots, A_r), \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(A_1, A_2, \cdots, A_r), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \hat{\theta}_r = \hat{\theta}_r(A_1, A_2, \cdots, A_r). \end{cases}$

以此作为未知参数 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$的估计量, 称为矩估计量.

如果样本观测值为$x_1, x_2, \ldots, x_n$，则得未知参数$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$

的矩估计值为

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(a_1, a_2, \cdots, a_r), \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(a_1, a_2, \cdots, a_r), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \hat{\theta}_r = \hat{\theta}_r(a_1, a_2, \cdots, a_r). \end{cases}$$

其中$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \ldots., r.$

矩估计法的一般步骤(解题方法，重要！！):

(1)根据未知参数的个数求需要的总体矩，

如$\mu_1 = E(X),\ \mu_2 = E(X^2)$等，

(2)用样本矩替换相应的总体矩得到方程组：

如：令$\mu_1 = E(X) = A_1 = \bar{X}, \mu_2 = A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

(3) 解方程组得到参数的矩估计量（值）.

注：一般先找低阶的矩.

例7.1.1 设总体 $X \sim B(m, p)$,其中p $(0<p<1)$未知，又设$X_1, X_2, \ldots, X_n$为X 的样本，求 p 的矩估计量和矩估计值.

因为仅有一个未知参数，仅需要一个方程

解：第一步:求总体矩

——求期望(总体一阶原点矩)：

因$X \sim B(m, p)$, 则$E(X) = mp$,

第二步：用样本矩替换相应的总体矩：

令$\mu_1 = A_1$,即$mp = \overline{X}$,

解得未知参数 p 的矩估计量 $\hat{p} = \dfrac{\overline{X}}{m} = \dfrac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

如果将X_i替换为x_i，则相应的估计称为"矩估计值".

故未知参数 p 的矩估计值为 $\hat{p} = \dfrac{\overline{x}}{m} = \dfrac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

例7.1.2 设总体X服从指数分布，其概率密度为：

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad 其它\end{cases}, \quad \lambda>0未知,$$

因为仅有一个未知参数，仅需要一个方程

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体X的一个样本，求λ的矩估计量.

解：第一步：求总体矩

——求期望（总体一阶原点矩）：

$$\mu_1 = \quad \frac{1}{\lambda},$$

第二步：用样本矩替换相应的总体矩：

如果将X_i替换为x_i，则相应的估计称为“矩估计值”.

$$令\mu_1 = A_1, \quad 即\frac{1}{\lambda}=\bar{X},$$

第三步：求解矩估计量：

$$\Rightarrow \hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}.$$

故$\hat{\lambda}$为真值λ的矩估计量.

例7.1.3 总体X的均值μ及方差σ^2都存在，且有$\sigma^2>0$，但μ和σ^2未知，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是X的一个样本，试求μ和σ^2的矩估计量.

解：第一步：求总体矩：两个未知数，需要两个方程，即二阶矩

$$\begin{cases}\mu_1=E(X)=\mu,\\ \mu_2=E(X^2)=D(X)+\left(EX\right)^2=\sigma^2+\mu^2.\end{cases}$$

第二步：用样本矩替换相应的总体矩：

令$\mu_1=A_1,\mu_2=A_2$. 即$\begin{cases}\mu=\overline{X},\\ \sigma^2+\mu^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2,\end{cases}$

第三步：求矩估计量：解得μ和σ^2的矩估计量为

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X},\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2.\end{cases}$$

故$\hat{\mu}$和$\hat{\sigma}^2$分别为μ和σ^2的矩估计量。

例7.1.3 总体X的均值μ及方差σ^2都存在，且有$\sigma^2>0$，但μ和σ^2未知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是X的一个样本，试求μ和σ^2的矩估计量？

前面得到
$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X}, & \text{样本均值} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2. \end{cases}$$

样本二阶中心矩

故：总体X的均值μ和方差σ^2的矩估计量分别为样本均值$\bar{X}$和样本二阶中心矩B_2，即

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \\ \widehat{\sigma^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \end{cases}.$$

与总体X服从的分布无关

例7.1.4 设总体$X\sim U(a,b)$,a,b均未知,设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体X的一个样本,求a,b的矩估计量.

解: 因为$X\sim U(a,b)$,则有$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$,$D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$$\text{于是}\begin{cases}\mu_1=E(X)=\dfrac{a+b}{2},\\ \mu_2=E(X^2)=D(X)+(EX)^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\end{cases}$$

令$\mu_k=A_k,k=1,2,$ 即$\begin{cases}\frac{a+b}{2}=A_1,\\ \frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4}=A_2,\end{cases}$ 得$\begin{cases}a+b=2A_1,\\ b-a=2\sqrt{3(A_2-A_1^2)},\end{cases}$

解得a和b的矩估计量分别为

$$\begin{cases}\hat{a}=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\bar{X}-\sqrt{3\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2\right)}=\bar{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\bar{X}-\sqrt{3B_2},\\ \hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\bar{X}+\sqrt{3\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2\right)}=\bar{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\bar{X}+\sqrt{3B_2}.\end{cases}$$

例7.1.5 设总体X具有以下概率密度：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, 0<x<1 \\ 0, \quad 其它\end{cases}，\quad \theta>0未知,$$

因为仅有一个未知参数，仅需要一个方程

设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体X的一个样本，求θ的矩估计量.

解：

$$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\int_0^1\theta x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}.$$

令$\mu_1=A_1$,

即$\dfrac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$,

解得矩估计量：

$$\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}.$$

如果将X_i替换为x_i，则相应的估计称为“矩估计值”.

故$\hat{\theta}$为真值θ的矩估计量.

矩估计法小结

求解步骤:

1. 根据未知数个数求解总体矩, 并用总体矩表示未知参数;

2. 替换原理: 用样本矩 A_k 代替总体矩 μ_k;

3. 求未知参数的矩估计量（值）.

优点: 原理直观，简单易行;

缺点: 总体矩要存在;

矩估计基于大数定律，在大样本条件下才有较好的效果。

一般情况下, 矩估计量不具有唯一性.

例如:若总体$X \sim P(\lambda)$,则$E(X) = D(X) = \lambda$,因此λ有两个估计量:

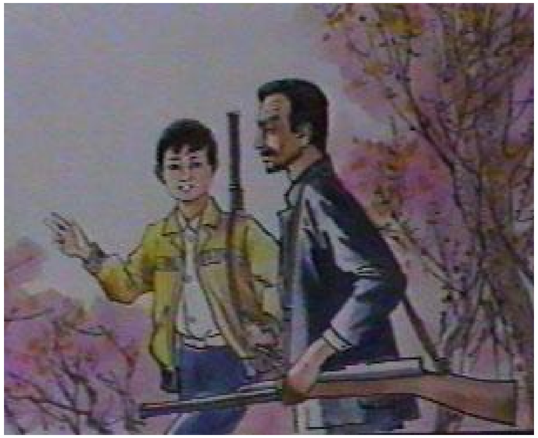
$$\hat{\lambda} = \overline{X}, \qquad \hat{\lambda} = B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

2. 最大似然估计法

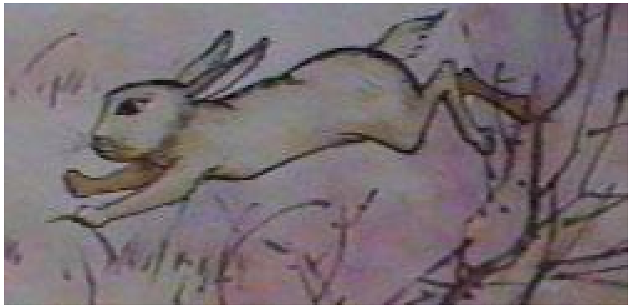
1) 最大似然法的基本思想

先看一个简单例子：

某位新手与一位老猎人一起外出打猎．一只野兔从前方窜过．只听枪响，野兔应声倒下，仅有一个弹痕.



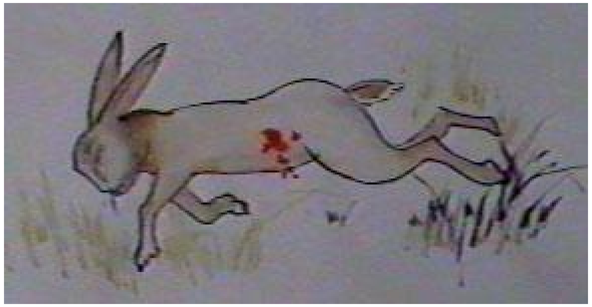
如果要你推测，是谁打中的呢？你会如何想呢?



你就会想，只发一枪便打中, 老猎人命中的概率一般大于这位新手命中的概率. 看来这一枪是猎人射中的 .

这个例子所作的推断已经体现了最大似然法的 基本思想:

概率最大的事件在一次试验中最可能发生，故在已知试验结果的情况下，在未知参数的可能取值范围中，应选择一个使这个结果出现的可能性最大的数值作为这个未知参数的估计值.



利用已知总体的概率密度(或概率分布)及样本, 根据概率较大的事件在一次试验中最有可能出现的原理, 求总体的概率密度(或概率分布)中所含未知参数的点估计的方法叫做最大似然估计法.

1. 离散型总体的概率分布中只含一个未知参数情形

设离散型总体X分布律 $P\{X=k\}=p(x;\theta), \theta$ 为待估参数, $\theta\in\Theta$,

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的样本，相应的样本观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,

样本观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,说明事件$\{X_1=x_1\},\cdots,\{X_n=x_n\}$同时发生。

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且与X同分布，则有

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),\quad \theta\in\Theta,$$

似然函数的定义

记$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),\quad \theta\in\Theta,$

称$L(\theta)$为样本的似然函数.

最大似然估计值（量）

设Θ是θ可能的取值范围，

若有$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$使得对一切$\theta\in\Theta$,有

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})\geq L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta).$$

则称$\boxed{\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$为参数$\theta$的最大似然估计值，

$\boxed{\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)}$ 参数θ的最大似然估计量.

2. 连续型总体的概率密度中只含一个未知参数情形

似然函数的定义

设连续型总体X概率密度为 $f(x;\theta), \theta$ 为待估参数， $\theta \in \Theta$,

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体 X 的样本,

相应的样本观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,

随机点 X_i落在点x_i 的长度为Δx_i的邻域内的概率近似等于 $f(x_i;\theta)\Delta x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$,

则随机点 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$落在点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的邻域

(边长分别为$\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$的$n$维立方体)内的概率

近似地为$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\Delta x_i$.

记$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$,

称$L(\theta)$为样本的似然函数.

最大似然估计值（量）

设Θ是θ可能的取值范围,

若有$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$使得对一切$\theta\in\Theta$,有

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})\geq L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta).$$

则称$\boxed{\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$为参数$\theta$的最大似然估计值,

$\boxed{\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)}$ 参数θ的最大似然估计量.

最大似然估计法是由英国统计学家Fisher引进的.

求最大似然估计值（量）----求似然函数$L(\theta)$的最大值

求似然函数的最大值的步骤:

(一) 写出似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

或 $$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);$$

(二) 取对数

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta) \quad 或 \quad \ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta);$$

(三) 对 θ 求导 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$， 并令 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0}$, 对数似然方程

解方程即得未知参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

最大似然估计法也适用于分布中含有多个未知参数的情况. 此时只需令

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L=0, \qquad i=1,2,\cdots,k.}$$

对数似然方程组

解出由 k 个方程组成的方程组，即可得各未知参数 $\theta_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例7.1.6 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自总体$X \sim B(m, p)$的样本,求参数p $(0 < p < 1)$的最大似然估计量.

解: 设样本取值为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 因为$X_i \sim B(m, p)$,

X_i各自的分布律为$P\{X_i = x_i\} = \binom{m}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}, x_i = 0,1,\cdots,m.$

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}=[\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}]p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

$$\ln[L(p)]=\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{m}{x_i}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(mn-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p),$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\left\{\ln\left[L(p)\right]\right\}}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0,$$

从而解出真值 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}x_i,$

p的最大似然估计量为$\hat{p}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{\bar{X}}{m}.$

例7.1.7 设总体X具有分布律

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中$\theta(0<\theta<1/2)$为未知参数. 已知取得了样本值3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 试求θ的矩估计值和最大似然估计值.

解：矩估计法：

由于$\mu_1 = E(X) = 0\times\theta^2 + 1\times 2\theta(1-\theta) + 2\times\theta^2 + 3\times(1-2\theta) = 3-4\theta$，

令$\mu_1 = A_1$， 即$3-4\theta = \overline{X}$，

解得$\hat{\theta} = \dfrac{1}{4}(3-\overline{X})$为真值$\theta$的矩估计量.

又因为样本值分别为3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3,

所以 $\bar{x} = \dfrac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$,

代替A_1，得到真值θ的矩估计值为$\hat{\theta} = \dfrac{1}{4}(3-\bar{x}) = \mathbf{0.25}$.

例7.1.7 设总体X具有分布律

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1\text{-}\theta)$	θ^2	$1\text{-}2\theta$

其中$\theta(0<\theta<1/2)$为未知参数. 已知取得了样本值3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3,

试求θ的矩估计值和最大似然估计值.

解：最大似然估计法：

对于给定的样本值，似然函数为

$$L(\theta)=\theta^2\times[2\theta(1-\theta)]^2\times\theta^2\times(1\text{-}2\theta)^4=4\theta^6(1\text{-}\theta)^2(1\text{-}2\theta)^4$$

取对数，得到

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

对未知参数θ求导得到

$$\frac{\mathrm{d}\left[\ln L(\theta)\right]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6\text{-}28\theta+24\theta^2}{\theta(1\text{-}\theta)(1\text{-}2\theta)}\overset{令}{=}0,\ 解得\hat{\theta}=\frac{7\text{-}\sqrt{13}}{12},$$

故θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{7\text{-}\sqrt{13}}{12}\approx 0.2829.$

例7.1.8 从一大批产品中随机抽取n件, 发现其中有k件次品, 求这批产品的次品率的最大似然估计.

解: 设该批产品的次品率为p, 从这批产品中随机抽取一件次品时, 对这件产品的检验结果可用随机变量

$$X=\begin{cases}0, & \text{产品是合格品,}\\ 1, & \text{产品是次品}\end{cases}$$

表示, 则X服从(0-1)分布, 概率分布为

$$P\{X=x\}=p(x;p)=p^{x}(1-p)^{1-x},\ x=0,1.$$

以X为总体, 从中抽取样本观测值 x_1, x_2, … x_n, 则似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

取对数得,

例7.1.8 从一大批产品中随机抽取n件，发现其中有k件次品，求这批产品的次品率的最大似然估计.

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p).$$

$$由\ \frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i-\frac{1}{1-p}\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$=\frac{1}{p(1-p)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i-p\sum_{i=1}^{n} x_i-np+p\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$=\frac{1}{p(1-p)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i-np\right)=0,$$

解得p的最大似然估计值为 $\hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\bar{x}.$

由于$\sum_{i=1}^{n} x_i=k$，所以这批产品的次品率的最大似然估计值为$\hat{p}=\dfrac{k}{n}.$

例7.1.9 设 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda > 0)$ 的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一个样本，求 λ 的最大似然估计量.

解 因为 X 的分布律为

$$P\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad (x = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

所以 λ 的似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i!)},$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}(x_i!),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0,$$

解得 λ 的最大似然估计值 $$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$$

λ 的最大似然估计量为 $$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

Q：与矩估计法的结果一样么？

例7.1.10 设总体X服从指数分布，其概率密度为:

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0 \\ 0, \quad 其它\end{cases}, \quad \lambda>0 未知,$$

设$X_1, X_2, ..., X_n$是总体X的一个样本，求λ的最大似然估计量.

解：(1) 作似然函数:

设样本值为$x_1, x_2, ..., x_n$ $(x_i>0, i=1,2,\cdots,n)$.

$$f_{X_i}(x_i)=f(x_i;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x_i}, 0<x_i<1 \\ 0, \quad 其它\end{cases}.$$

$$L(\lambda)=f(x_1, x_2, ..., x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda)$$

$$=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}, 0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n. \\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

$$L(\lambda)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, 0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n.\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

(2) 求对数:

当$0<x_i<1$时，$L(\lambda)>0$,取对数似然函数得到

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i;$$

(3) 求导求驻点:

$$\text{令}\frac{\mathrm{d}\left[\ln L(\lambda)\right]}{\mathrm{d}\lambda}=n\times\tfrac{1}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

(4) 求解:

解得λ的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\overline{x}}$,

最大似然估计量为$\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

例7.1.11 设总体X具有以下概率密度:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, 0<x<1\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}, \quad \theta>0$$

设$X_1, X_2, ..., X_n$是总体X的一个样本,求θ的最大似然估计量.

解:(1) 作似然函数:

设样本值为$x_1, x_2, ..., x_n$.

$$f_{X_i}(x_i)=f(x_i;\theta)=\begin{cases}\theta x_i^{\theta-1}, 0<x_i<1\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}.$$

$$L(\theta)=f(x_1, x_2, ..., x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

$$=\begin{cases}\theta^n\left(x_1\cdots x_n\right)^{\theta-1}, 0<x_i<1\\ 0,\text{其它}\end{cases}, i=1,2,...,n.$$

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^n\left(x_1\cdots x_n\right)^{\theta-1}, 0<x_i<1 \\ 0, \qquad\qquad 其它\end{cases}, i=1,2,\ldots,n..$$

(2) 求对数：

当$0<x_i<1$时，$L(\theta)>0$，取对数似然函数得到

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\left[\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right];$$

(3) 求导求驻点：

$$令\frac{\mathrm{d}\left[\ln L(\theta)\right]}{\mathrm{d}\theta}=n\times\frac{1}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

(4) 求解：

解得θ的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$,

最大似然估计量为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

3. 总体的分布中含有多个未知参数的情形

设总体 X 的分布中含有 r 个参数$\theta_1, \theta_2, \ldots\theta_r$，则似然函数仍然是这些未知参数的函数

$$L = L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r),$$

求L 或$\ln L$关于θ_i 的偏导数, 并令它们等于零, 得似然方程组:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r \quad \text{或} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

解此方程组得θ_i 的最大似然估计值和最大似然估计量.

例 7.1.12 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2为未知参数， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自X的一个样本值，求μ和σ^2的最大似然估计量.

解 X 的概率密度为

$$f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\frac{1}{\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu\right] = 0, \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0, \end{cases}$$

由 $\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right] = 0$ 解得 $\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$

由 $-\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$ 解得

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

故 μ 和 σ^2 的最大似然估计量分别 为

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

例 7.1.13 设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，其中 a, b 未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值，求 a,b 的最大似然估计量.

解 X 的概率密度为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

作为 a,b 的函数的似然函数为

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_i\le b, i=1,\cdots,n.\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$L(a,b)$ 关于 a 单调增，关于 b 单调减。

记 $x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

因为$a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$等价于$a \le x_{(1)}, x_{(n)} \le b$,

所以似然函数可写为

$$L(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{(1)},\ b \ge x_{(n)}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是对于满足条件 $a \le x_{(1)},\ b \ge x_{(n)}$的任意$a,b$有

$$L(a,b) = \frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{(n)} - x_{(1)})^n},$$

即似然函数 $L(a,b)$ 在 $a=x_{(1)}$，$b=x_{(n)}$ 时

取到最大值 $(x_{(n)}-x_{(1)})^{-n}$,

a,b 的最大似然估计值

$$\hat{a}=x_{(1)}=\min_{1\le i\le n} x_i, \qquad \hat{b}=x_{(n)}=\max_{1\le i\le n} x_i,$$

a,b 的最大似然估计量

$$\hat{a}=\min_{1\le i\le n} X_i, \qquad \hat{b}=\max_{1\le i\le n} X_i .$$

4. 最大似然估计的性质

设 θ 的函数 $u=u(\theta), \theta \in \Theta$ 具有单值反函数 $\theta=\theta(u), u \in U$. 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

此性质可以推广到总体分布中含有多个未知参数的情况.

如例7.1.12中, σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,

函数 $u=u(\sigma^2)=\sqrt{\sigma^2}$ 有单值反函数 $\sigma^2=u^2 (u \geq 0)$,

故标准差 σ 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

三、小结

两种求点估计的方法: $\begin{cases} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{cases}$

在统计问题中往往先使用最大似然估计法，在最大似然估计法使用不方便时，再用矩估计法.

似然函数 $L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta)$

或 $L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta);$