Euler(欧拉)积分 $\begin{cases} \Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx & (\backslash\text{Gamma}) \quad \backslash\text{gamma}\ \gamma \\ B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx & (\backslash\text{Beta}) \quad \backslash\text{beta}\ \beta \end{cases}$

1) $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 定义域($\alpha>0$)

2) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \longrightarrow \Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$ 定义

令 $\alpha+1>0$ 即可

$\alpha>-1$ ......

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx = -x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha)$$

只须了解 $\alpha\in(0,1)$ 的$\Gamma(\alpha)$值 即可扩得α取其它范围的值

可查Γ函数表

$$\Gamma(\tfrac{5}{2})=\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

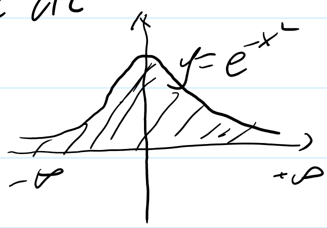
又$\alpha=n$时

$$\begin{cases} \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!\,\Gamma(1)=n! \\ \Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1,\quad \Gamma(2)=1\Gamma(1)=1 \end{cases}$$

3) Γ函数其它形式 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

(1) $x=t^2$, $\Gamma(\alpha)\overset{x=t^2}{=\!=}\int_0^{+\infty}(t^2)^{\alpha-1}e^{-x}dt^2=2\int_0^{+\infty}t^{2\alpha-1}e^{-t^2}dt$

令$\alpha=\frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$



4) $\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}(\ln x)^n e^{-x}dx$ $\qquad (x^{\alpha-1})'_{\alpha}=x^{\alpha-1}\cdot\ln x$

5) 余元公式 $\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ $(0<\alpha<1)$

B函数 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{I(p,q)}+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{K(p,q)}$

$I(p,q)=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ $\begin{cases} p\geq 1, & I(p,q)\text{为定积分} \\ p<1, & x=0\text{为瑕点 } \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\frac{1}{x^{\mu}}}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\mu+p-1}(1-x)^{q-1}\xlongequal{\mu=1-p}1 \end{cases}$

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{1-p}}dx$ 与 $I(p,q)$ 同敛散 $\Rightarrow$ $\mu=1-p<1$ 收，即 $p>0$；$\mu=1-p\geq1$ 散 即 $p\leq 0$　$q\in\mathbb{R}$

即 $p>0$, $q\in\mathbb{R}$ 时 $I(p,q)$ 收敛

$K(p,q)=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ $\begin{cases} q\geq 1 & K(p,q)\text{为定积分} \\ q<1 & x=1\text{为瑕点 } \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\frac{1}{(1-x)^{\mu}}}=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\mu+q-1}x^{p-1}\xlongequal{\mu=1-q}1 \end{cases}$

$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{(1-x)^{1-q}}dx$ 与 $K(p,q)$ 同敛散 $\Rightarrow$ $\begin{cases}\mu=1-q<1 \text{ 即 } q>0\text{时 收} \\ \mu=1-q\geq1 \text{ 即 } q\leq0 \text{ 散}\end{cases}$

即 $q>0$, $p\in\mathbb{R}$ 时 $K(p,q)$ 收敛

1) 即 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 当 $p>0$ 且 $q>0$ 时收敛

2) $B(p,q)=B(q,p)$　（只需设 $x=1-t$ 即可证得）

3) $B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$　$(p>0,\ q>1)$

$=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$　$(p>1,\ q>0)$

$=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1)$　$(p>1,\ q>1)$

4) $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\xlongequal{x=\cos^2\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2p-2}\theta\sin^{2q-2}\theta\, 2\cos\theta(-\sin\theta)d\theta$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\, d\theta$

开

令 $q=1-p$ $\Rightarrow$ $B(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2q-1}\theta \sin^{2p-1}\theta \, d\theta$

令 $q=p \Rightarrow B(p,p) = \cdots \Gamma(\ldots)$

$$B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

5) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $(p>0,\ q>0)$

即 $B\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \pi = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}$

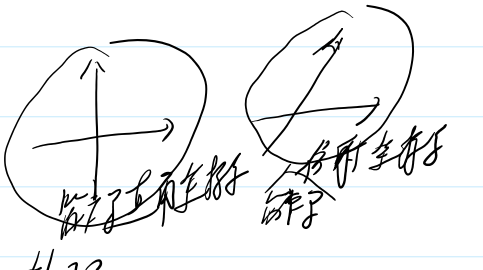
$\Rightarrow \Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

证明：$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p-1} du \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{q-1} dv \xlongequal[v=y^2]{u=x^2} 4\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} y^{2q-1} dy = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy$

$\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} 4\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta \, d\theta \xlongequal[\cos^2\theta = x]{r^2=t} 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p+q-1} dt \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q).$

空间解析几何
1) 向量的运算
   - ① 线性运算 "+" 数乘
   - ② 内积，外积，混合积，双重外积
2) 直线与平面
3) 空间曲线与曲面
   - 柱面
   - 锥面
   - 旋转曲面
4) 二次曲面



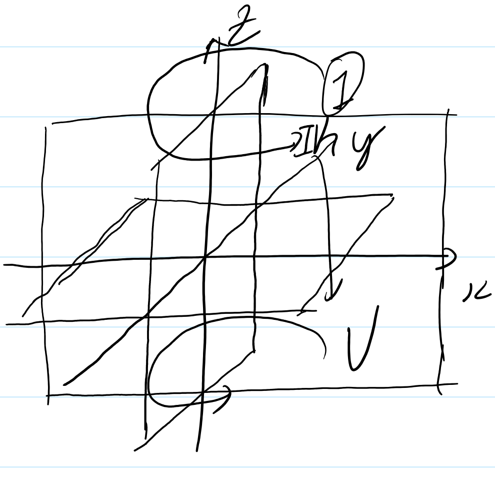
向量及其运算

空间坐标系

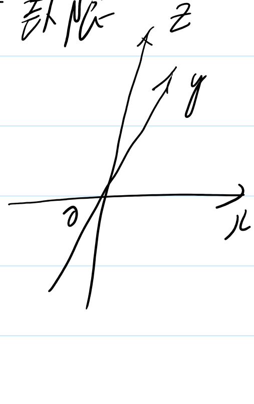
xOy面

yOz面

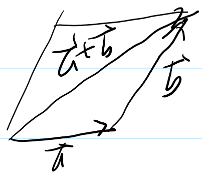
zOx面

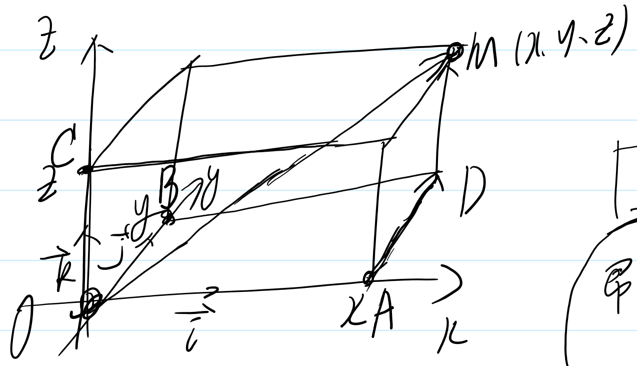


八个卦限



三个 $M(x,y,z)$ $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$





$\overrightarrow{OM}=(x,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}$

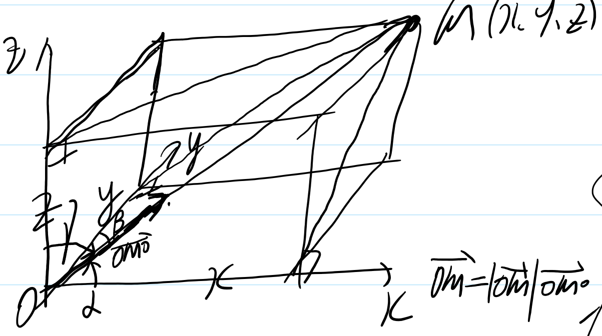
$\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}$

即 $\boxed{\overrightarrow{OM}=x\vec i+y\vec j+z\vec k}$

$\overrightarrow{OM}$ 的基本单位向量分解式

简记 $(x,\ y,\ z)$ 坐标表达式

基本单位向量 $\begin{cases}\vec i=(1,0,0)\\ \vec j=(0,1,0)\\ \vec k=(0,0,1)\end{cases}$ ⇒ $\overrightarrow{OA}=x\vec i$, $\overrightarrow{OB}=y\vec j$, $\overrightarrow{OC}=z\vec k$



$\overrightarrow{OM}=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ 或 (x,y,z)

$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

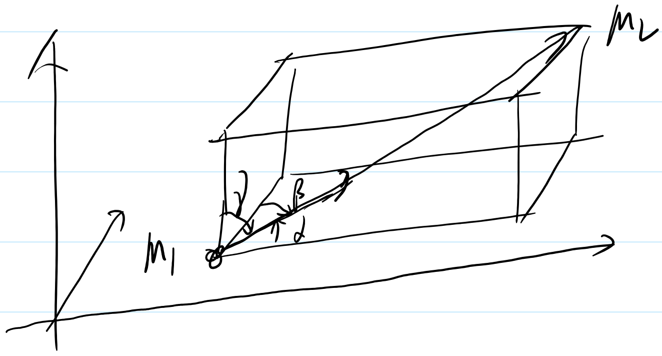
$\overrightarrow{OM}=|\overrightarrow{OM}|\overrightarrow{OM^0}$

$\overrightarrow{OM^0}=\frac{1}{|\overrightarrow{OM}|}\overrightarrow{OM}=\frac{1}{|\overrightarrow{OM}|}(x\vec i+y\vec j+z\vec k)$

$=\left(\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|},\ \frac{y}{|\overrightarrow{OM}|},\ \frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}\right)$

方向余弦 $=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2}{|\overrightarrow{OM}|^2}+\frac{y^2}{|\overrightarrow{OM}|^2}+\frac{z^2}{|\overrightarrow{OM}|^2}=1$$



$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1\ \ y_2-y_1\ \ z_2-z_1)$

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

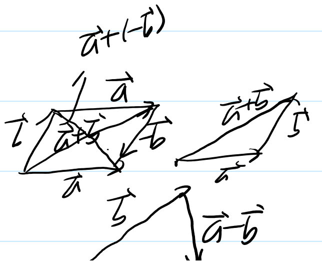
$\overrightarrow{M_1M_2^0}=\left(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{\ }},\ \frac{y_2-y_1}{\sqrt{\ }},\ \frac{z_2-z_1}{\sqrt{\ }}\right)$

$=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$

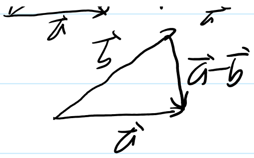
运算

1) "加" 与 "数乘" (线性运算)

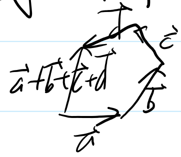
$\vec a+\vec b$ (平行四边形法则 或 三角形法则)



$\vec{a}+\vec{b}$ （平行四边形法则 或三角形法则）



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ （多边形法则



数乘 $\lambda\vec{a}$ $\begin{cases} |\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| \\ \lambda\vec{a} \text{ 方向与 } \vec{a} \text{ 同向}(\lambda>0) \text{ 或反向}(\lambda<0), \ (\lambda\vec{a}=0 \ \lambda=0) \end{cases}$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow a = \lambda\vec{b}$

2) 内积