第五次作业

院(系)__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

一、填空题

PPT有 1、设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，而相关[illegible]据切比雪夫不等式，有 $P\{|X-Y|\ge 6\}\le$ __$\frac{1}{12}$__.

A2. 2、在每次试验中，事件 A 发生的可能性是 0.5，则 1000 次独立试验中，事件 A 发生的次数在 400 次到 600 次之间的概率 $\ge$ __$\frac{39}{40}$ 或 0.975__.

记事件A发生次数为X 则 $X\sim B(1000, 0.5)$ $D(X)=250$ $E(X)=500$

$P\{400\le X\le 600\}=P\{|X-E(X)|\le 100\}\ge 1-\frac{250}{100^2}=\frac{39}{40}=0.975$

3. 将一枚骰子重复抛掷 n 次，所掷出点数的算术平均值为 $\bar{X}_n$，如果对于任意给定 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\bar{X}_n-a|<\varepsilon\}=1$，则常数 $a=$ __$\frac{7}{2}$__.

设 X_i 为第 i 次掷骰子出现的点数 则 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 由辛钦大数定律 $a=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$

$=E(X_i)=\frac{1}{6}(1+2+3+\cdots+6)=\frac{7}{2}$

二、选择题

PPT有 1. 一射击运动员在一次射击中的环数 X 的概率分布如下：

X	10	9	8	7	6
P	0.5	0.3	0.1	0.05	0.05

则在 100 次独立射击所得总环数介于 900 环与 930 环之间的概率是（ B ）

（A）0.8233. （B）0.8230. （C）0.8228. （D）0.8234.

2. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，则根据列维—林德伯格中心极限定理，当 n 充分大时，$X_1+X_2+\cdots+X_n$ 近似服从正态分布，只要（如果）$X_i\,(i=1,2,\cdots)$ 满足条件（ D ）

要求 $X_1,X_2\cdots$ 独立同分布且期望和方差存在

（A）具有相同的数学期望和方差. 不能保证同分布 （B）服从同一离散型分布. 不能保证期望方差存在

（C）服从同一连续型分布. 不能保证期望方差存在 （D）服从同一指数分布.

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i)=\frac{1}{2},D(X_i)=\frac{1}{4}$，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则有（ C ）.

$$(A)\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-2n}{2\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x);\qquad (B)\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-2n}{\sqrt{2n}}\le x\right\}=\Phi(x);$$

$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n}{2}$

$D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\le x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$;　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$.

4．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 相互独立同分布，$E(X_i)=1, D(X_i)=1, i=1,2,\cdots,9$．令

$E(S_9)=\sum_{k=1}^{9}E(X_k)=9$,　$D(S_9)=\sum_{k=1}^{9}D(X_k)=9$

$S_9=\sum_{i=1}^{9} X_i$，则对于任意给定 $\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式可得（ C ）

（A） $P\{|S_9-1|<\varepsilon\}>1-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.　　　（B） $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\ge 1-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

（C） $P\{|S_9-9|<\varepsilon\}>1-\dfrac{9}{\varepsilon^2}$.　　　（D） $P\left\{\left|\dfrac{1}{9}S_9-1\right|<\varepsilon\right\}\ge 1-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{1000}$ 相互独立，且都服从参数为 $p(0<p<1)$ 的 (0-1) 分布，则下列选项不正确的是（ C ）

由大数定律 $\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}E(X_i)=p$.

（A） $\dfrac{1}{1000}\sum\limits_{i=1}^{1000} X_i \approx p$.

（B） $\sum\limits_{i=1}^{1000} X_i \sim B(1000, p)$.

$\sum_{i=1}^{1000}X_i$ 近似服从 $N(1000p,\ 1000p(1-p))$

（C） $P\left\{a<\sum\limits_{i=1}^{1000} X_i<b\right\}\approx\Phi(b)-\Phi(a)$.

（D） $P\left\{a<\sum\limits_{i=1}^{1000} X_i<b\right\}\approx\Phi\left(\dfrac{b-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right)$

三、计算题

1. 一食品店有三种蛋糕出售，由于售出哪一种蛋糕是随机的，因而一只蛋糕的价格是一个随机变量，它取 1 元、1.2 元、1.5 元各个值的概率分别为 0.3, 0.2, 0.5，某天该食品店出售了 300 只蛋糕．试用中心极限定理计算，这天的收入至少为 395 元的概率．

解. 设 X_k 表示该食品店出售的第 k（k=1,2,…,300）只蛋糕的价格．则 X_k 的分布律为

X_k	1	1.2	1.5
P	0.3	0.2	0.5

$E(X_k)=1\times0.3+1.2\times0.2+1.5\times0.5=1.29$

$E(X_k^2)=1^2\times0.3+1.2^2\times0.2+1.5^2\times0.5=1.713$

$D(X_k)=E(X_k^2)-[E(X_k)]^2=1.713-1.29^2=0.0489$

$P\{\sum_{k=1}^{300}X_k\ge395\}=1-P\{\sum_{k=1}^{300}X_k<395\}=1-P\left\{\dfrac{\sum_{k=1}^{300}X_k-\sum_{k=1}^{300}E(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{300}D(X_k)}}<\dfrac{395-\sum_{k=1}^{300}E(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{300}D(X_k)}}\right\}$

$=1-P\left\{\dfrac{\sum_{k=1}^{300}X_k-300\times1.29}{\sqrt{300\times0.0489}}<2.09\right\}\approx1-\Phi(2.09)=1-0.9817=0.0183.$

2. 设某种元件使用寿命（单位：小时）服从参数为λ的指数分布，其平均使用寿命为40小时，在使用中当一个元件损坏后立即更换另一个新的元件，如此继续下去. 已知每个元件的进价为a元，试求在年计划中应为购买此种元件作多少预算，才可以有95%的把握保证一年够用（假定一年按照2000个工作小时计算）.

解. 假设一年需要n个元件，则预算经费为na元.

设每个元件寿命为X_i，则n个元件使用寿命为$\sum_{i=1}^{n}X_i$

由题意 $P\{\sum_{i=1}^{n}X_i \geq 2000\} \geq 0.95$.

又$E(X_i)=\frac{1}{\lambda}=40$、$D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2}=40^2$.

由独立同分布的中心极限定理，$\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(40n, 1600n)$

$P\{\sum_{i=1}^{n}X_i \geq 2000\} = 1-P\{\sum_{i=1}^{n}X_i < 2000\} \approx 1-\Phi\left(\frac{2000-40n}{40\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{n-50}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$.

查表得 $\Phi(1.645)=0.95$. 故 $\frac{n-50}{\sqrt{n}} \geq 1.645$ 从而 $n \geq 63.04$.

故n至少取64. 年预算至少应为$64a$元.

PPT有 3. 一条生产线的产品成箱包装，每箱的重量是随机的. 假设平均重50千克，标准差为5千克. 如果用最大载重量为5吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每量车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于0.977.（$\Phi(2)=0.977$.）

解. 设n是所求箱数. X_i是装运的第i箱重量 $(i=1,2,\cdots n)$

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 独立同分布 且$E(X_i)=50$. $\sqrt{D(X_i)}=5$. $i=1,2,\cdots n$

由中心极限定理 $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-50n}{5\sqrt{n}}$ 近似服从$N(0,1)$

$P\{\sum_{i=1}^{n}X_i \leq 5000\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977$.

查表得 $\Phi(2)=0.977$. 所以 $\frac{1000-10n}{\sqrt{n}} > 2$ 解得 $n<98.0199$.

所以最多可装98箱