综合练习二

一、填空题

$P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.3+0.4-0.3\times0.4=0.58$

1. 设事件 A 与事件 B 相互独立，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)$ <u>0.58</u>.

2. 设随机变量 $X\sim B(2,\ 0.1)$，则 $P\{X=1\}$ = <u>0.18</u>.

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则随机变量

$Y=2X+1$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y-1}{2}. & 1<y<3\\ 0 & 其它\end{cases}$

4. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$ <u>$\frac{1}{9}$</u>.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自总体的样本，其样本均值 $\bar{x}=5.2$，则

$(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})$

未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 <u>(4.71, 5.69)</u>.（$u_{0.025}=1.96$）

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，若 σ^2 已知，检验假设为 $H_0:\mu=\mu_0;H_1:\mu\neq\mu_0$，则应取检验统计量为 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

二、单项选择题

1. 设 A,B 为对立事件，$0<P(B)<1$，则下列概率值为 1 的是（ B ）. $\bar{A}=B$

(A) $P(\bar{A}\mid\bar{B})$ 0 (B) $P(\bar{A}\mid B)$ $\frac{P(B\bar{A})}{P(B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(B)}$ (C) $P(B\mid A)$ 0 (D) $P(AB)$ 0

2. 设随机变量 $X\sim N(0,1), Y=2X+1$，则 Y 服从（ C ）.

(A) $N(0,1)$ (B) $N(1,1)$ (C) $N(1,4)$ (D) $N(0,2)$

3. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$ 是 X 和 Y 相互独立的（ A ）.

(A) 充分必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充分非必要条件 (D) 既不是充分条件也不是必要条件

4. 设随机变量 X 和 Y 的方差存在且都不等于零，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X 和 Y（ C ）.

(A) 不相关的充分非必要条件　(B) 不相关的必要非充分条件

(C) 不相关的充分必要条件　(D) X 和 Y 相互独立的充分必要条件

5. 设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本，其中 μ 已知，σ 未知，则下列不是统计量的是（ D ）.

(A) $\max\limits_{1\le k\le n} X_k$　(B) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-\mu$　(C) $\min\limits_{1\le k\le n} X_k$　(D) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{X_k}{\sigma}$

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列样本函数中不是总体 X 期望 μ 的无偏估计量是（ D ）.

(A) $\overline{X}$　(B) $X_1+X_2-X_3$　(C) $0.2X_1+0.3X_2+0.5X_3$　(D) $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

三、按照要求解答下列各题

1. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 2 件合格品和 2 件次品，乙箱中仅装有 2 件合格品，现从甲箱中随机地取出 2 件放入乙箱，求：（1）乙箱中次品数 X 的概率分布；（2）从乙箱中任取一件是次品的概率.

解.(1) X的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

(2) 设B表示事件"从乙箱中任取一件是次品".

$P(B)=P(B|X=0)\cdot P(X=0)+P(B|X=1)\cdot P(X=1)+P(B|X=2)\cdot P(X=2)$

$=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\ (-\infty<x<\infty)$. 求：(1) X 的分布函数；

(1) 当 $x<0$ 时

(2) $D(X)$. $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|t|}dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$

当 $x\geq 0$ 时

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x}$

故 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$

$D(X)=E[(X-E(X))^2]=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx$

$=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot 2x\,dx=2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}x\,d(-e^{-x})$

$=-2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2.$

3. 某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件，现从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

求：(1) 随机变量 (X_1,X_2) 的概率分布（只写出分布表）；(2) $Cov(X_1,\ X_2)$.

解. $P(X_1=0,\ X_2=0)=\frac{10}{100}=0.1$. $P(X_1=0,\ X_2=1)=\frac{10}{100}=0.1$

$P(X_1=1,\ X_2=0)=\frac{80}{100}=0.8$, $P(X_1=1,\ X_2=1)=0$

所以 (X_1,X_2) 的分布律为

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

(2) X_1X_2 的分布律为

X_1X_2	0	1
P	1	0

$E(X_1X_2)=0$

$E(X_1)=0\times 0.2+1\times 0.8=0.8$

$E(X_2)=0\times 0.9+1\times 0.1=0.1$

$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)\cdot E(X_2)$

$=-0.8\times 0.1$

$=-0.08$

4. 某厂检验保温瓶的保温性能，在保温瓶中灌满沸水，24 小时后测定其保温温度为 T，$T\sim N(62,5^2)$，若独立进行两次抽样测试，各次分别抽取 20 只和 12 只，样本均值分别为 $\overline{T}_1$、$\overline{T}_2$，求样本均值 $\overline{T}_1$ 与 $\overline{T}_2$ 的差的绝对值大于 $1^\circ C$ 的概率. ($\Phi(\sqrt{\frac{3}{10}})=0.7088$)

解. $\overline{T}_1\sim N(62,\frac{25}{20})$, $\overline{T}_2\sim N(62,\frac{25}{12})$

因 $\overline{T}_1$ 与 $\overline{T}_2$ 相互独立, $\overline{T}_1-\overline{T}_2\sim N(0,\frac{10}{3})$

$P\{|\overline{T}_1-\overline{T}_2|>1\}=1-P\{|\overline{T}_1-\overline{T}_2|\le 1\}=1-P\{|\frac{\overline{T}_1-\overline{T}_2}{\sqrt{10/3}}|\le\sqrt{\frac{3}{10}}\}$

$=1-[\Phi(\sqrt{\frac{3}{10}})-\Phi(-\sqrt{\frac{3}{10}})]=2(1-\Phi(\sqrt{\frac{3}{10}}))=2\times(1-0.7088)=2\times 0.2912=0.5824.$

5. 设总体 $X\sim N(1,2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是从总体取的样本. $\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，求 $E(S^2)$、$D(S^2)$ 及 $E[(\overline{X}S^2)^2]$.

解. $E(S^2)=\sigma^2=4$.

由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 得 $D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{2\cdot 2^4}{8}=4.$

因 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立. 故 $\overline{X}^2$ 与 $(S^2)^2$ 也相互独立

$E[(\overline{X}S^2)^2]=E(\overline{X}^2)E((S^2)^2)=[D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2]\cdot[D(S^2)+(E(S^2))^2]$

$=(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)\cdot(4+4^2)$

$=(\frac{4}{9}+1)\times 20$

$=\frac{260}{9}.$

四、解答下列各题

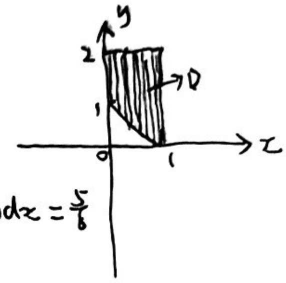
1. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases} Cx, & 0<x<1,\ 0<y<2, \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(1) 求常数 C；(2) 求 $P\{X+Y>1\}$；(3) 求 X 与 Y 的边缘概率密度，并判断 X 与 Y 是否相互独立.

解 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$ 得 $\int_0^1 dx\int_0^2 Cx\,dy=\int_0^1 2Cx\,dx=1$

解得 $C=1$

于是 $f(x,y)=\begin{cases} x, & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$



(2) 如右图所示 $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2 x\,dy=\int_0^1 x(1+x)\,dx=\frac{5}{6}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases} \int_0^2 x\,dy=2x, & 0<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases} \int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2} & 0<y<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$ 易见 $\forall(x,y)$，有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 恒成立

故 X 与 Y 相互独立

2. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0<x<1 \\ 0, & 其他, \end{cases}$，其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数，

又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

解 (1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}}\,dx=\frac{1}{\theta+1}$

令 $\mu_1=A_1$ 因 $\mu_1=E(X)=\frac{1}{\theta+1}$，$A_1=\bar{X}$

则有 $\frac{1}{\theta+1}=\bar{X}$ 解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 为给定的一组样本观察值

似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta^n}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0<x_i<1,\ i=1,2,\cdots n \\ 0 & 其它 \end{cases}$

当 $0<x_i<1$ $(i=1,2,\cdots n)$ 时

$\ln L(\theta)=-n\ln\theta+\frac{1-\theta}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}-\frac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$.

于是 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$.