多元微分25-1

2022年5月24日 8:00

定理 $z=f(x,y)$ $P_0(x_0,y_0)$ 为驻点 $\left(\begin{cases} f_x'(P_0)=0 \\ f_y'(P_0)=0 \end{cases}\right)$，$A=f_{xx}''(P_0)$ $B=f_{xy}''(P_0)$ $C=f_{yy}''(P_0)$

则 1) $AC-B^2>0$，P_0 为极值点 $\begin{cases} A>0, & f(P_0) \text{为极小值} \\ A<0, & f(P_0) \text{为极大值} \end{cases}$

2) $AC-B^2<0$，P_0 不是极值点

3) $AC-B^2=0$，失效（不确定 P_0 是否为极值点，改用定义）

例 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 求 $f(x,y)$ 极值。

$\begin{cases} f_x'(x,y)=3x^2+6x-9=0 & (x^2+2x-3) \\ f_y'(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$ $\quad x=-3,1 \quad y=0,2$ $\quad P_1(-3,0)$ $P_2(-3,2)$ $P_3(1,0)$ $P_4(1,2)$

$A=f_{xx}''=6x+6$ $\quad B=f_{xy}''=0$ $\quad C=f_{yy}''=-6y+6$

(x_0,y_0)	$(-3,0)$	$(-3,2)$	$(1,0)$	$(1,2)$
A	-12	-12	12	12
B	0	0	0	0
C	6	-6	6	-6
$AC-B^2$	-72	72	72	-72
	不取	极大值 $f(-3,2)$	极小值 $f(1,0)$	不取

$f_{max}(-3,2)=$ ——

$f_{min}(1,0)=$ ——

~~$z=xy$ $\begin{cases} z_x'=y=0 \\ z_y'=x=0 \end{cases}$ $P_0(0,0)$ 驻点 $A=z_{xx}''=0$ B z_{xy}''~~

$z=x^4-y^4$ $\quad \begin{cases} z_x'=4x^3=0 \\ z_y'=-4y^3=0 \end{cases}$ $P_0(0,0)$ 驻点 $\quad A=z_{xx}''(P_0)=0$ $\quad B=z_{xy}''=0$ $\quad C=z_{yy}''(P_0)=0$

$P_0(0,0)$ 处，$AC-B^2=0$.

① 令 $y=0$ $\quad z=(x^4-y^4)_{y=0}=x^4$ 在 $(0,0)$ 处取极小值

② 令 $x=0$ $\quad z=(x^4-y^4)_{x=0}=-y^4$ 在 $(0,0)$ 处取极大值

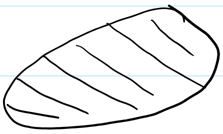
$\Rightarrow z=x^4-y^4$ 在(0,0)处不存在~~极值~~

$z=x^4+y^4$ $\begin{cases} z_x'=4x^3=0 \\ z_y'=4y^3=0 \end{cases}$ $P(0,0)$ $A=B=C=0 \Rightarrow AC-B^2=0$

$z=x^4+y^4 \geq 0$ 仅在(0,0)处取"="

$\Rightarrow P(0,0)$ 取为 $f(x,y)$ 的~~极小值~~

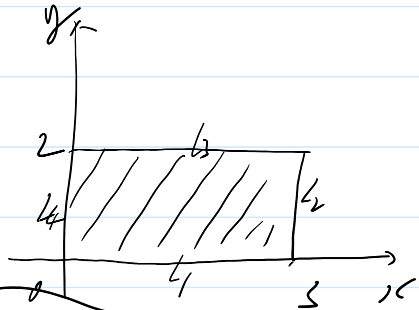
最值



$f(x,y)$ 在有界闭区域D上最值，即 $f(x,y)$ 在D内 + D边界上~~最值~~

例 求 $z=f(x,y)=x^2-2xy+2y$ 在矩形域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\}$ 上~~最值~~

$\begin{cases} f_x'=2x-2y=0 \\ f_y'=-2x+2=0 \end{cases}$ $x=y=1$ 驻点 (1,1)



L_1 $\begin{cases} y=0 \quad (0\le x\le 3) \\ z=x^2-2xy+2y \end{cases}$ $\Rightarrow z=x^2 \ (0\le x\le 3)$, $z_x'=2x=0$ (0,0), (3,0)

L_2 $\begin{cases} x=3 \quad (0\le y\le 2) \\ z=x^2-2xy+2y \end{cases}$ $\Rightarrow z=9-6y+2y=9-4y \ (0\le y\le 2)$ (3,0) (3,2)

L_3 $\begin{cases} y=2 \quad (0\le x\le 3) \\ z=x^2-2xy+2y \end{cases}$ $\Rightarrow z=x^2-4x+4 \ (0\le x\le 3)$ (0,2) (2,2) (3,2)

$z_x'=2x-4=0 \Rightarrow x=2$

L_4 $\begin{cases} x=0 \quad 0\le y\le 2 \\ z=x^2-2xy+2y \end{cases}$ $\Rightarrow z=2y$ (0,0) (0,2)

条件极值 $\begin{cases} \text{目标函数，即所求极值的函数} \\ \text{约束条件，求极值时变量受约束的等式} \end{cases}$

例 求 $\underbrace{z=x^2+y^2}_{\text{目标函数}}$ 在 $\underbrace{y-x=0}_{\text{约束条件}}$ 条件下极值 （$y=x$ 代入 $z=x^2+y^2 \Rightarrow z=2x^2$ 无条件极值）

例 求 $z=f(x,y)$ 在 $F(x,y)=0$ 条件下极值

$$F(x,y) = x-6x+e^y+2\ln y=0$$

以下讨论条件极值 ~~少量条件~~ 及多条件（不实用）

拉格朗日乘数法

1) 目标函数 $W=f(x,y,u,v)$ 约束条件 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 & ① \\ G(x,y,u,v)=0 & ② \end{cases}$

$W_1=f(x,y,u,v)$ 与 $W_2=F(x,y,u,v)$ 与 $W_3=G(x,y,u,v)$ 在 $U(P_0)$ 内可微，$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$

为条件极值点，$F(P_0)=0$，$G(P_0)=0$，且 $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0$，则有 $\nabla \underbrace{L(x,y,u,v,\lambda,\mu)}_{\text{拉格朗日函数}} = f(x,y,u,v)+\lambda F(x,y,u,v)+\mu G(x,y,u,v)=\vec{0}$

法一 证 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0$，在 $U(P_0)$ 内确定唯一具有连续偏导数的隐函数组 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$

$W=f[x,y,u(x,y),v(x,y)]$ 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 处取极值，则由一阶微分形式的不变性

$$\begin{cases} df(P_0)=(f'_x dx+f'_y dy+f'_u du+f'_v dv)_{P_0}=0 & (1) \\ dF(P_0)=(F'_x dx+F'_y dy+F'_u du+F'_v dv)_{P_0}=0 & (2) \\ dG(P_0)=(G'_x dx+G'_y dy+G'_u du+G'_v dv)_{P_0}=0 & (3) \end{cases}$$

（P_0 为 f_{xy} 驻点）

（$\forall x,y$，$dF(x,y,u,v)_{x,y}=0$）$(1)+\lambda(2)+\mu(3)=0$

（$\forall x,y$ $dG(x,y,u,v)_{x,y}=0$）

$$(f_x' + \lambda F_x' + \mu G_x')dx + (f_y' + \lambda F_y' + \mu G_y')dy + \underbrace{(f_u' + \lambda F_u' + \mu G_u')}_{③}du + \underbrace{(f_v' + \lambda F_v' + \mu G_v')}_{④}dv \overset{P_0}{=} 0$$

令 $\begin{cases} f_u' + \lambda F_u' + \mu G_u' \overset{P_0}{=} 0 & ③ \\ f_v' + \lambda F_v' + \mu G_v' \overset{P_0}{=} 0 & ④ \end{cases}$，由 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0} \neq 0 \Rightarrow$ ∃唯一解 $\begin{cases} \lambda = \lambda_0 \\ \mu = \mu_0 \end{cases}$ 代入上式 $\Rightarrow$

$$(f_x' + \lambda F_x' + \mu G_x')dx + (f_y' + \lambda F_y' + \mu G_y')dy \overset{P_0}{=} 0$$ 由 dx, dy 任意性知

$\begin{cases} f_x' + \lambda F_x' + \mu G_x' \overset{P_0}{=} 0 & ① \\ f_y' + \lambda F_y' + \mu G_y' \overset{P_0}{=} 0 & ② \end{cases}$ $\begin{cases} F(x,y,z,u,v) \overset{P_0}{=} 0 & ⑤ \\ G(x,y,z,u,v) \overset{P_0}{=} 0 & ⑥ \end{cases}$ 综合①②③④⑤⑥

即 $\underbrace{L(x,y,u,v,\lambda,\mu)}= \underbrace{f(x,y,u,v)} + \underbrace{\lambda F(x,y,u,v)} + \mu G(x,y,u,v)$ 在 P_0 点处满足 $\nabla L(x,y,z,u,v,\lambda,\mu) = (L_x', L_y', L_z', L_u', L_v', L_\lambda', L_\mu') \overset{P_0}{=} \vec{0}$

$\begin{cases} L_x' = 0 & ① \\ L_y' = 0 & ② \\ L_u' = 0 & ③ \\ L_v' = 0 & ④ \\ L_\lambda' = 0 & ⑤ \\ L_\mu' = 0 & ⑥ \end{cases}$ $\Rightarrow P_0(x_0, y_0, u_0, v_0, \lambda_0, \mu_0)$ 为可能的条件极值点

例 求 $f(x,y,z) = xyz$ 在 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 条件下极值（最值）

解

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-1) + \mu(x+y+z) \qquad \boxed{\nabla L = \vec{0}}$$

$\begin{cases} L_x' = yz + 2\lambda x + \mu = 0 & ① \\ L_y' = zx + 2\lambda y + \mu = 0 & ② \\ L_z' = xy + 2\lambda z + \mu = 0 & ③ \\ L_\lambda' = x^2+y^2+z^2-1 = 0 & ④ \\ L_\mu' = x+y+z = 0 & ⑤ \end{cases}$

①−② $\Rightarrow yz - zx + 2\lambda(x-y) = 0$

$(y-x)(z-2\lambda) = 0$

$\begin{cases} y = x \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \Rightarrow z=-2x \end{cases}$

$6x^2=1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\ }$

$z = 2\lambda$ 代入③④

$zx + zy + \mu = 0 \quad (1)$

$xy + z^2 + \mu = 0 \quad (2)$

$(1)-(2) \Rightarrow$

$x+y+z=0 \Rightarrow z=-2x$

$6x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{1}{\sqrt6} \\ y=x=\pm\frac{1}{\sqrt6} \\ z=-2x=\mp\frac{2}{\sqrt6} \end{cases}$

$xy+z^2+\mu=0 \quad (2)$

$(1)-(2) \Rightarrow$

$2x-xy+zy-z^2=0$

$x(z-y)+z(y-z)=0$

$(y-z)(z-x)=0$

$y=z$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\mp\frac{2}{\sqrt6} \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt6} \\ z=\pm\frac{1}{\sqrt6} \end{cases}$

$z=x$: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{1}{\sqrt6} \\ y=\mp\frac{2}{\sqrt6} \\ z=\pm\frac{1}{\sqrt6} \end{cases}$

$$(xyz)_{max}=\frac{2}{(\sqrt6)^3}$$

$$(xyz)_{min}=-\frac{2}{(\sqrt6)^3}$$

例 求坐标原点到曲线 $\varphi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$ 的最短距离

$d=\sqrt{x^2+y^2}$ 为目标函数

$\varphi=(x-1)^3-y^2=0$ 为约束条件

$\Rightarrow L(x,y,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2}+\lambda[(x-1)^3-y^2]$

$\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_\lambda=0 \end{cases}$ 求驻点

$d^2=x^2+y^2$ 在 $\varphi=0$ 条件下极值点 与 $d=\sqrt{x^2+y^2}$ 的条件极值点相同

$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda[(x-1)^3-y^2]$

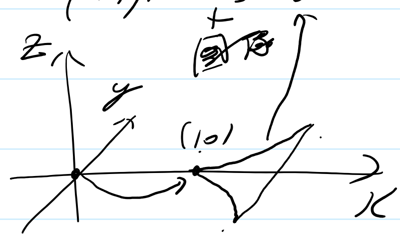
$\begin{cases} L'_x=2x+3\lambda(x-1)^2=0 \quad ① \\ L'_y=2y-2\lambda y=0 \quad ② \\ L'_\lambda=(x-1)^3-y^2=0 \quad ③ \end{cases} \Rightarrow$ 无解 $y=0$, 代入③ $\Rightarrow x=1$ 与①矛盾 或 无解 $\lambda=1$ 代入① $\Rightarrow 3(x-1)^2+2x=0 \Rightarrow x<0$ 与③ $y^2=(x-1)^3$ 矛盾

$\varphi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$

$\begin{cases} \varphi'_x=3(x-1)^2=0 \\ \varphi'_y=2y=0 \\ \varphi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0 \end{cases} \Rightarrow$ 解 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$\varphi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$

尖点



$\varphi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$

则 $P_0(1,0)$ 即为所求的条件极值点，由题目含义可知其也为最值点

$$d_{min}=\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=1$$