第一章　随机事件及其概率

一、随机试验、随机事件

二、随机事件的概率

三、条件概率

四、事件的独立性

五、伯努利（Ｂｅｒｎｏｕｌｌｉ）概型

第一节　随机试验与随机事件

一、　随机试验

二、　随机事件及其运算

一、随机试验

（一）随机现象

自然界所观察到的现象：确定性现象　随机现象

1.确定性现象（必然现象）

在一定条件下必然发生或不发生的现象称为确定性现象. 又称必然现象。

实例 “太阳从东方升起”，

“水从高处流向低处”，

掷一枚均匀的骰子, 出现7点是不可能的

确定性现象的特征 ⟶ 条件完全决定结果

2. 随机现象

在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机现象.

实例1 在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察正反两面出现的情况.

结果有可能出现正面也可能出现反面.

实例2　用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况.

结果: **弹落点可能会不相同.**

实例3　抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

结果有可能为:　**1,　2,　3,　4,　5　或　6.**

实例4　从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品.

结果可能为: 正品、次品.

实例5　过马路交叉口时,可能遇上各种颜色的交通指挥灯.

结果可能为: 红灯、绿灯、黄灯.

实例6　出生的婴儿可能是**男**,也可能是**女**.

实例7　明天的天气可能是**晴**，也可能是**多云**或**雨**.

随机现象的特征 → **条件不能完全决定结果**

保持条件不变，重复试验现象的结果不唯一（不止一个），试验之前不能确定结果。

说明

1. 随机现象揭示了条件和结果之间具有非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述.

2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有一定的规律性。

统计规律性：大量同类随机现象所呈现出的集体规律性。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.

悟道诗 严加安

随机非随意 概率破玄机

无序隐有序 统计解迷离

（二）随机试验

1、随机试验

定义：在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为随机试验.

1）可重复性：可以在相同的条件下重复地进行多次;

2）可观测性：每次试验的所有可能结果都是明确的、可以观测的，并且试验的可能结果有两个或两个以上（不止一个）；

3）随机性：每次试验出现的结果是不确定的，在试验之前无法预先确定究竟会出现哪一个结果。

说明

1. 随机试验简称为试验, 是一个广泛的术语.它包括各种各样的科学实验, 也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或“测量”等.

2. 随机试验通常用 E 来表示.

实例 "抛掷一枚硬币,观察正面,反面出现的情况".

分析 (1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:
正面、反面;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

故为**随机试验**.

同理可知下列试验都为随机试验.

1. 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

2. 从一批零件中,任取三个零件,观察其中次品的件数.

3. 考察某机场一天内收到咨询电话的次数.

4. 从一批同型号电子元件中任取一只,测试其寿命.

随机试验的所有可能结果如何表示?

2、样本空间 样本点

定义：随机试验E 的每一个基本可能结果, 称为**样本点**.记为 ω。

定义：随机试验 E 的所有基本结果（**样本点**）组成的集合称为 E 的**样本空间**, 记为 S 或 Ω .

样本空间具有以下两个**性质**：

(1) 每次试验必有属于样本空间中的某个样本点发生；

(2) 样本空间中的任意两个样本点不会在同一次试验中发生。

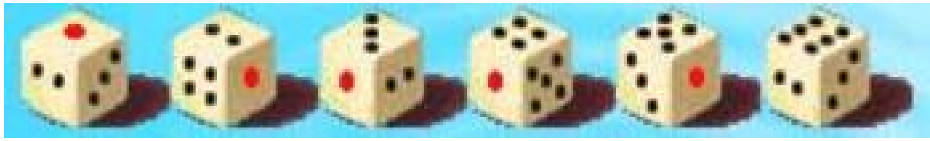
实例1 抛掷一枚硬币,观察正面,反面出现的情况.

H: 正面朝上

T: 反面朝上

$$S_1=\{H,T\}.$$

实例2 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



$$S_2=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

实例3 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的情况.

记 $N\to$ 正品, $D\to$ 次品.

则 $S_3=\{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DDN, DND, DDD\}.$

实例4 考察某地区 12月份的平均气温.

$$S_4 = \{t \mid T_1 < t < T_2\}.$$

其中 t 为平均温度.

实例5 从一批灯泡中任取一只, 测试其寿命.

$$S_5 = \{t \mid t \geq 0\}.$$

其中 t 为灯泡的寿命.

实例6 记录某城市120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

$$S_6 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

课堂练习

写出下列随机试验的样本空间.

1. 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子点数之和.
2. 生产产品直到得到10件正品,记录生产产品的总件数.

答案

1. $S=\{3,4,5,\cdots,18\}$.

2. $S=\{10,11,12,\cdots\}$.

第2页例1.3

在一只罐子中装有大小和形状完全一样的2个白球和3个黑球，依次在2 个白球上标以数字1和2，在3个黑球上标以数字3，4和5，从罐子中任取一个球，观察球上的数字，用 ω_i 表示“取出的是标有数字i的球”（i=1, 2, 3, 4, 5），则试验的样本空间为：

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}.$$

随机试验 $\xleftrightarrow{\text{一一对应?}}$ 样本空间

说明 1. 同一试验, 若试验目的不同,则对应的样本空间也不同.

例如 对于同一试验:“将一枚硬币抛掷三次”.

若观察正面 H、反面 T 出现的情况,则样本空间为

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}.$$

若观察出现正面的次数, 则样本空间为

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

2. 建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此 , 一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如　只包含两个样本点的样本空间

$$S = \{H, T\}$$

3. 在一个样本空间中，如果只有有限个样本点，则称为有限样本空间；如果有无限个样本点，则称为无限样本空间。

二、随机事件及其运算

（一）随机事件

1. 随机事件的概念

随机事件　试验的每一个可能结果. 简称**事件**.

随机事件也就是样本空间 Ω 的子集，即若干样本点构成的集合。

实例 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

试验中,骰子 “出现1点”, “出现2点”, … ,“出现6点”,

“点数不大于4”, “点数为偶数” 等都为随机事件.

基本事件　由一个样本点组成的单点集.

实例　“出现1点”，“出现2点”，…，“出现6点”．

复合事件　由若干样本点组成的点集.

实例　“出现奇数点”，“出现点数不超过4”．

事件发生

设$A\subset\Omega$,如果一次试验结果$\omega\in A$,则称在这次试验中A发生。

事件不发生

设$A\subset\Omega$,如果一次试验结果$\omega\notin A$,则称事件A没有发生。

必然事件 随机试验中必然会出现的结果. 用Ω表示。

实例 上述试验中 “点数不大于6” 就是必然事件.

不可能事件 随机试验中不可能出现的结果. 用Φ表示。

实例 上述试验中 “点数大于6” 就是不可能事件.

必然事件的对立面是不可能事件,不可能事件的对立面是必然事件,它们互称为对立事件.

2. 几点说明

(1) 随机事件简称事件, 以大写英文字母 A, B, C, 等 来表示。

(2) 随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

$$\text{随机事件}\begin{cases}\text{基本事件}\\ \text{复合事件}\\ \left.\begin{array}{l}\text{必然事件}\\ \text{不可能事件}\end{array}\right\}\ \text{互为对立事件}\end{cases}$$

样本空间的分类

样本空间 Ω：

(1) 离散型: 总是可以一个一个数清楚的(可数的)

①有限：例如：掷一次硬币，$\Omega=\{H, T\}$；

②无限：例如：某时刻在车站等车的人数，

$\Omega=\{0, 1, 2, \ldots\ldots\}$.

(2) 连续型: 不可数无穷多(数不清楚的……)

①例如，打靶击中的范围（0.5m*0.5m的靶子）

$$\Omega=\{(x, y)|0\le x, y\le 0.5\}$$

② 例如，灯泡的使用寿命 $\Omega=\{\, t \mid t\ge 0 \,\}$.

（二） 随机事件的关系与运算

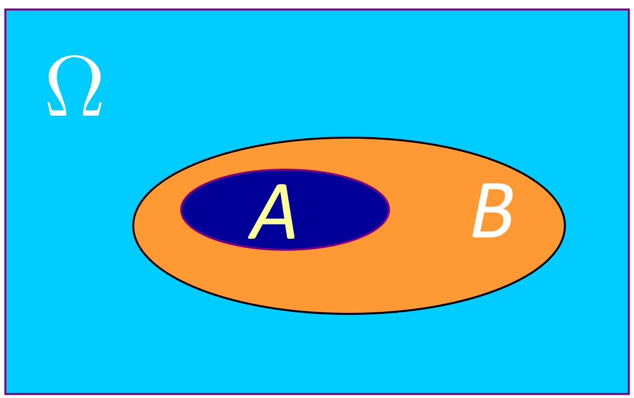
1. 随机事件的关系

试验E的样本空间为Ω，$A, B, A_k\,(k=1,2,\cdots)$ 为E 中的事件.

(1) 事件的包含:

<u>事件B包含事件A</u>, 记 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

$\Leftrightarrow$事件A 发生必然导致事件B 发生.



※ $A \subset B \Leftrightarrow$ 在A中的基本事件, 一定都含在B中

※ 对任一事件A 都有$\Phi \subset A \subset \Omega$.

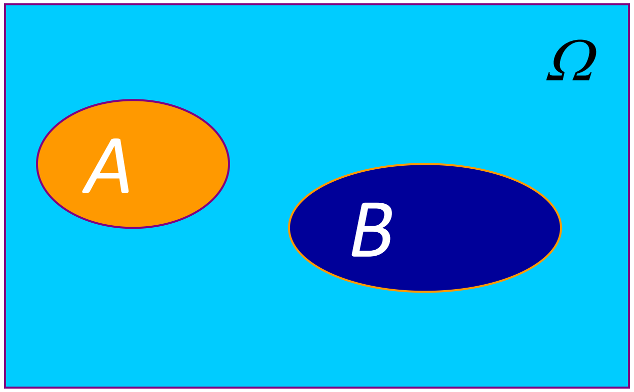
※ $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

(2) 事件的相等

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$

(3) 事件的互斥(互不相容)

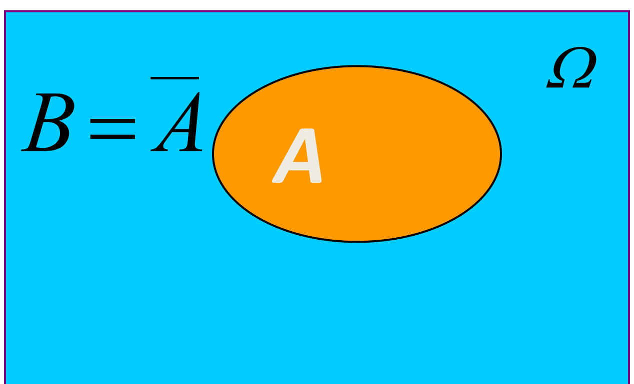
A 与 B 互斥（互不相容） $\Leftrightarrow$ A、B不可能同时发生



※ A 与 B 互斥 $\Leftrightarrow$ A与B不含有公共基本事件.

(4) 事件的互逆（对立）

A 与 B 互逆（对立） $\Leftrightarrow$ 每次试验 A、B中有且只有一个发生



※ A与B互为逆事件. 记为 $A=\overline{B}$ 或

$B=\overline{A}$

※ $\overline{\overline{A}}=A$

关于事件关系的几点说明

(1) 两个基本事件一定互斥，但不一定对立

(2) 不可能事件与任何事件都互斥

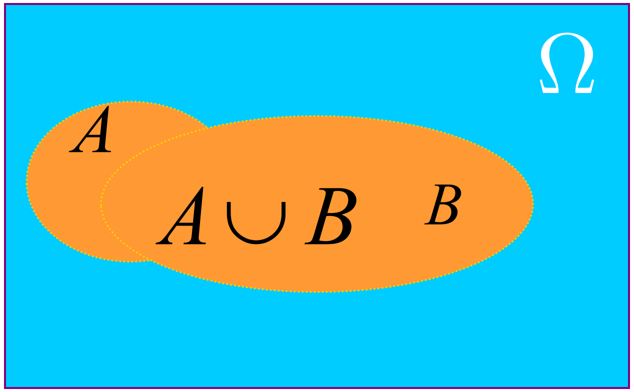
(3) 事件A与B对立，则事件A与B互斥，但反之不一定成立

2. 随机事件的运算

(1) 事件的并(和)

事件A 与事件 B的和或并 (记作 $A \cup B$).

$\Leftrightarrow$ 事件A与事件B至少有一个发生.



※ $A \cup B \Leftrightarrow$ A与B包含的基本事件放在一起作成的事件.

※ $A \cup A = A, A \cup \Phi = A, A \cup B = B \cup A.$

$A \cup \overline{A} = \Omega, A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$

※ $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

例1.1.1 在实例2中，A={2, 4, 6}，C={1, 2, 3}．有$A \cup C$={1, 2, 3, 4, 6}.

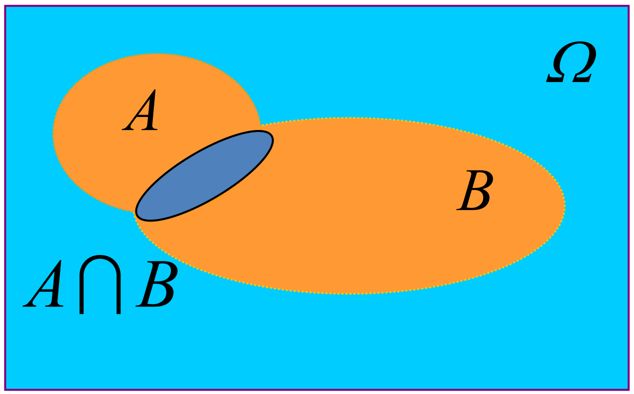
推广 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{$事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生$\}$,

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{$事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$中至少有一个发生$\}$。

(2) 事件的交(积)

<u>A 与 B 的交（积）事件</u>　(记为 $A\cap B$ 或 **AB**)

$\Leftrightarrow$ 事件 A 与事件 B 同时发生.



※ $AB \Leftrightarrow$ 把事件A和事件B所共有的基本事件放在一起作成的事件.

※ $AA = A,\ A\Omega = A,\ A\Phi = \Phi,\ AB = BA.$

$A\overline{A} = \Phi,\ AB \subset A,\ AB \subset B.$

※ $A \subset B \Rightarrow AB = A.$

A 与 B 互不相容 $\Leftrightarrow AB = \Phi$

<u>例1.1.2</u> 在实例2 中, $A=\{2,4,6\}$，$C=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,5\}$. 则 $AC=\{2\}$, $BC=\{1,3\}$,

$AB = \Phi.$

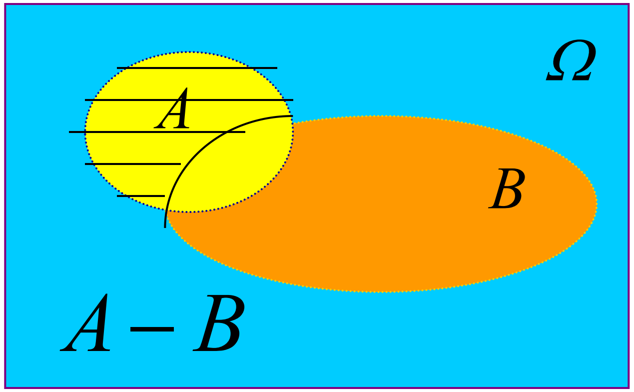
<u>推广</u> $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件 —— $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \{$事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生$\}$,

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件 —— $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \{$事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生$\}$。

(3) 事件的差

<u>A 与 B 的差事件</u> （记为A-B）

$\Leftrightarrow$事件A发生，但事件B不发生.



※ $A-B \Leftrightarrow$ A的基本事件中去掉含在B中的，余下基本事件构成的事件.

※ $A-A=\Phi$, $A-\Phi=A$, $A-\Omega=\Phi$,

$A-B \subset A$, $A-B=A\overline{B}=A-(AB)$,

$\Omega-A=\overline{A}$, $(A-B)\cup B=A\cup B$.

<u>例1.1.3</u> 在实例2中，A={2, 4, 6}，C={1, 2, 3}，B={1, 3, 5}. 则
A-C={4, 6}，
B-C={5}，A-B={2, 4, 6}.

对立事件与互斥事件的区别

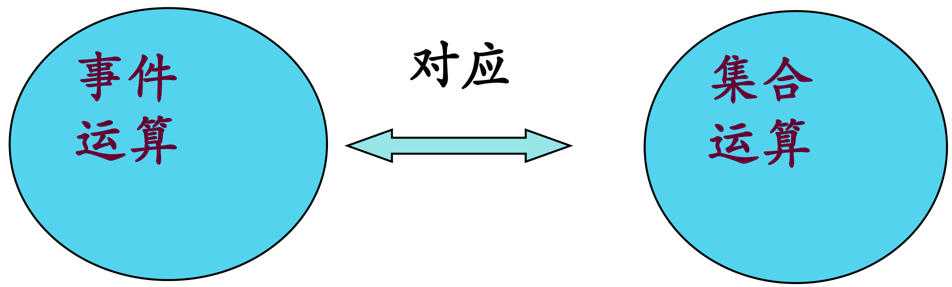
A、B 互斥

$AB=\varnothing$

A、B 对立

$A\cup B=S$ 且 $AB=\varnothing$

互　斥 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 对　立



3. 事件的运算法则： 设 A, B, C 为事件,则有

交换律 $A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(AB)C = A(BC)$$

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C)$$

德·摩根对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

事件运算的常用结论

(1) $\Phi \subset A \subset S(\Omega)$;　　(2) $A \supset AB$;

(3) $A \cup B \supset A \supset A - B$;　　(4) $A - B = A\overline{B}$;

(5) $A \cup B = (A - B) \cup B = (B - A) \cup A$;

(6) $A \cup B = A \cup (B - AB) = B \cup (A - AB)$;

(7) $A - B, AB, B - A$两两互斥，且

$$A \cup B = (A - B) \cup AB \cup (B - A);$$

$$A = (A - B) \cup AB.$$

例1.1.4 设A,B,C表示三个随机事件, 试将下列事件用A,B,C表示出来.

(1) A出现 , B, C不出现; (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) A, B都出现, C不出现; (2) $AB\overline{C}$;

(3) 三个事件都出现; (3) ABC;

(4) 三个事件至少有一个出现; (4) $A\cup B\cup C$;

(5) 三个事件都不出现; (5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(6) A, B至少有一个出现, C不出现;

(6) $(A\cup B)\overline{C}$;

例1.1.4 某工人加工三个零件，设 A_i 表示事件“第 i 个零件是合格品”(i=1,2,3)，试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件:

(1) 只有第一个零件是合格品; (2) 至少有一个零件是合格品;

(3) 只有一个零件是合格品; (4) 最多有一个零件是合格品.

(5) 3个零件全是合格品; (6) 至少有一个零件是不合格品.

解: 用 A, B, C, D, F, G 分别表示(1), (2), (3), (4),(5),(6)所述事件，则有

(1) $A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. (2) $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(3) $C = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

(4) $D = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$,

或 $D = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(5) $F = A_1A_2A_3$.

(6)

$G = \overline{A_1}A_2A_3 \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup A_1A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$,

或 $G = \overline{A_1A_2A_3} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$.

例1.1.5 设 A,B,C是同一试验E的三个事件，化简下列各式:

(1) $(A\cup B)(B\cup C)$;

(2) $(A\cup B)(A\cup \overline{B})(\overline{A}\cup B)$.

解: 根据事件的运算规律，可得

(1) $$(A\cup B)(B\cup C)=[(A\cup B)B]\cup[(A\cup B)C]$$

$$=[(AB)\cup B]\cup[(AC)\cup(BC)]$$

$$=B\cup(AC)\cup(BC)$$

$$=B\cup(AC).$$

也可反用对偶律

(2) $$(A\cup B)(A\cup \overline{B})(\overline{A}\cup B)=\{[A(A\cup \overline{B})]\cup B(A\cup \overline{B})\}(\overline{A}\cup B)$$

$$=[A\cup A\overline{B}\cup AB\cup B\overline{B}](\overline{A}\cup B)$$

$$=[A\cup A\overline{B}\cup AB\cup \Phi](\overline{A}\cup B)$$

$$=A(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB$$

$$=\Phi\cup AB=AB.$$