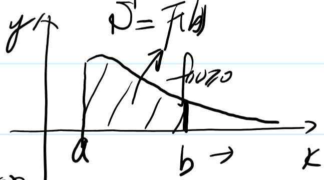
广义积分敛散性判别法8-1

2022年3月25日 7:41

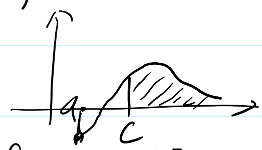
广义积分敛散性判别
- 无穷积分 （储备 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx \begin{cases} p>1 & 收 \\ p\le 1 & 散 \end{cases}$）
- 瑕积分 （储备 $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ 或 $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx$ 或 $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}dx \begin{cases} p<1 & 收 \\ p\ge 1 & 散 \end{cases}$）

定理1 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负有定义，$\forall b>a$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有

$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $F(b)=\int_a^b f(x)dx$ 在 $b\in[a,+\infty)$ 上有界的



$$\Longleftrightarrow \lim_{b\to+\infty}F(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx=A$$



注：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 不满足非负条件时 若 $\exists c>a$，$\forall x\in[c,+\infty)$ $f(x)$ 非负，则可判定

$$\int_a^{+\infty}f\,dx=\int_a^c+\int_c^{+\infty}$$

定理2 $f(x)$，$g(x)$ 皆在 $[a,+\infty)$ 有定义且对 $\forall b>a$ $f(x)$，$g(x)$ 皆在 $[a,b]$ 上可积

（比较准则）

当 x 充分大时

若 $\exists c\ge a$，$\forall x\ge c$ 有 $\boxed{0\le f(x)\le g(x)}$，则有
- (1) $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛
- (2) $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散

$$0\le f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_c^b f(x)dx\le\int_c^b g(x)dx \Rightarrow \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx\le\lim_{b\to+\infty}\int_c^b g(x)dx \Longleftrightarrow \int_c^{+\infty}f(x)dx\le\int_c^{+\infty}g(x)dx\le M$$

收

定理3 $\exists X$，$\forall x>X$ 有 $f(x)\ge 0$，$g(x)>0$，（由 $\int_a^{+\infty}g(x)dx \Rightarrow \int_a^{+\infty}f(x)dx$）

（比较准则极限式）

若 $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l}$ 则
- (1) $0<l<+\infty$，则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散
- (2) $l=0$，则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛
  （$\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 散 $\Rightarrow$?）
- (3) $l=+\infty$ 则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}f(x)dx$ 散

(3) $l=+\infty$ 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 散

($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收 $\Rightarrow$?)

证明：$\forall \varepsilon>0\ \exists X>0\ \forall x>X \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon$

$l-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<l+\varepsilon \iff (l-\varepsilon)g(x)<f(x)<(l+\varepsilon)g(x)$

$g(x)=\frac{1}{x^{\mu}}$

定理4：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\mu}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\mu}f(x)=l$
$\begin{cases} 0<l<+\infty & \int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\mu}}dx \text{ 与 } \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 同敛散} \\ l=0 & \int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\mu}}dx \text{ 收} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收} \\ l=+\infty & \int_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\mu}}dx \text{ 散} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 散} \end{cases}$

[定理5 Cauchy 收敛准则（略）]

定理5：若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，此时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛

$0\le f(x)+|f(x)|\le 2|f(x)|$

收 $\Longleftarrow$ 收

$f(x)+|f(x)|$ 收 $\Rightarrow f(x)$ 收敛

$f(x)=f(x)+|f(x)|-|f(x)|$

判别敛散性

例1 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}dx$ $\qquad \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\le g(x)$?

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{\mu}}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\mu}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}dx \xlongequal{\mu=\frac{3}{2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}}{1+x^2}=1$$

由 $\int^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收 $\Rightarrow$ 原式收

x

由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收 ⇒ 原式收

例 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$　比较原式 $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x^2}$　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收

或 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\mu}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{\mu=2} 1$ / 由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收 ⇒ 原式收敛

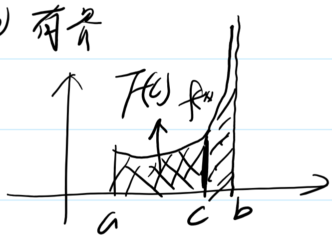
例 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$　$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1+1)}{x\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{\cancel{x-1}^{\sqrt{x-1}}}{x\cancel{\sqrt{x-1}}\sqrt{x+1}} = 0$

⇒ $x=1$ 不是瑕点

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\mu}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal[\mu=\frac{3}{2}]{\mu>1,\ \mu<2} 0$　由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收 ⇒ 原式收敛

定理1：$\left(\int_a^{b(瑕)} f(x)dx\right)$，$f(x)$ 在 $[a,b)$ 有定义，$\forall c<b$，有 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上可积且 $f(x)\geq 0$

则 $\int_a^b f(x)$ 收敛 ⇔ $F(c)=\int_a^c f(x)dx$ 在 $c\in[a,b)$ 有界



定理2：$f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义，$\forall c<b$ 有 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 可积且 $\exists x_0\geq a$ 使得 $x\geq x_0$ 时有 $0\leq f(x)\leq \overset{k}{g(x)}$ 则

(1) $\int_a^b g(x)dx$ 收 ⇒ $\int_a^b f(x)dx$ 收

(2) $\int_a^b f(x)dx$ 散 ⇒ $\int_a^b g(x)dx$ 散

定理3：$\exists M$ $(a\leq M<b)$　$\forall x>M$ 有 $f(x)\geq 0$，$g(x)>0$，

若 l $f(x)$　(1) $0<l<+\infty$　$\int_a^b g(x)dx$ 与 $\int_a^b f(x)dx$ 同敛散

若 $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ 则 $\begin{cases} 1)\ 0<l<+\infty, & \int_a^b g(x)dx \text{ 与 } \int_a^b f(x)dx \text{ 同敛散} \\ 2)\ l=0, & \int_a^b g(x)dx \text{ 收} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收} \\ 3)\ l=+\infty, & \int_a^b g(x)dx \text{ 散} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 散} \end{cases}$

定理4： 令 $g(x)=\frac{1}{(b-x)^{\mu}}$

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^{\mu}}}=\lim_{x\to b}x^{\mu}f(x)=l \begin{cases} 1)\ 0<l<+\infty & \int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\mu}}dx \text{ 与 } \int_a^b f(x)dx \text{ 同敛散} \\ 2)\ l=0 & \int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\mu}}dx \text{ 收} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收} \\ 3)\ l=+\infty & \int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\mu}}dx \text{ 散} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 散} \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)dx \to \int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\mu}}dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \to \int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\mu}}dx$$

$$> \int_0^1 \frac{1}{x^{\mu}} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx$$

例 $\int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\ln(1+x)}}{\frac{1}{x^{\mu}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\mu}\frac{1}{\ln(1+x)}\xlongequal{\mu=1}1$

由 $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ 发散 $\Rightarrow$ 原式散

例 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $\quad |k|<1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}}{\frac{1}{(1-x)^{\mu}}}=\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\mu}\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-k^2x^2)}}\xlongequal{\mu=\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

由 $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx$ 收 $\Rightarrow$ 原式收敛

例 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ $\quad$ (反之拓展系)

例 $\Gamma(\alpha) = \int_0 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ （讨论敛散性）

$$= \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$= I(\alpha) + K(\alpha)$$

$I(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ① $\alpha \geq 1$ 时 $I(\alpha)$ 为正常积分

② $\alpha < 1$ $x=0$ 为瑕点

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\frac{1}{x^{\mu}}} = \lim_{x \to 0^+} x^{\mu} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{e^x} \overset{\mu = 1-\alpha}{=\!=} 1$$

而 $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$ $\begin{cases} \mu = 1-\alpha < 1 \text{ 收} \Rightarrow \alpha > 0 \text{ 收} \\ \mu = 1-\alpha \geq 1 \text{ 散} \Rightarrow \alpha \leq 0 \end{cases}$

$K(\alpha) = \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ $\lim_{x \to +\infty} x^{\mu} \cdot x^{\alpha-1} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\mu+\alpha-1}}{e^x} \overset{\mu \in \mathbb{R}}{=\!=} 0$

不妨取 $\mu = 2$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收 $\Rightarrow$ $K(\alpha)$ 收敛 $(\alpha \in \mathbb{R})$

即 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 当 $\alpha > 0$ 时收敛