最小生成树

吉林大学计算机学院
谷方明
fmgu2002@sina.com

学习目标

- 掌握（自由）树的概念、性质和等价定义
- 掌握最小生成树的定义
- 掌握求解最小生成树问题的**Prim**算法和**Kruskal**算法

(自由)树

- (自由)树是一个连通无环图。
  - 无向图
  - 省略“自由”(图论)
- 有根树是一棵自由树，有一个特别的称为根的结点。
  - 无根树
- 自由树转换成有根树
  - 定根
  - 定向

树的等价性定义

令 G = (V,E) 是一个无向图，下面描述是等价的

1. G是自由树
2. G无环，且 | E | = | V | - 1
3. G连通，且 | E | = | V | - 1
4. G无环，但增加任意一条边后均有环
5. G连通，但移除任意一条边后均不连通
6. G中任意两点之间有唯一一条路

- **1=>2:数学归纳法（n是结点数）**
  - n=1时成立
  - n=k时成立，n=k+1时：无环，一定存在度为1的点u，设该边(u,v)，删掉该点及边，得到k个点的连通无环图
- **2=>3: 反证法**
  - 假设G不连通，设有k个连通分支，k>1。每个分支连通无环，$e_i = v_i-1$，整个图有 $e = v-k$，与$e=v-1$矛盾

- **3=>4: 数学归纳法（n是结点数）**
  - n=2时，e=1，显然无环，增加一条边，有且仅有1个环
  - n<k成立，n=k时：G连通，每个结点d(u)≥1。至少有一个结点u，d(u)=1。否则，2e≥ 2n,与 e =n-1矛盾；删掉u及其关联边得G’，利用归纳假设，G’无环，增加一条边均有环，补回u及其关联边，T也无环，任意增加一条边就会增加唯一的环
- **4=>5:反证法**
  - 若G不连通，设u与v之间无路，增加边(u,v)不会产生环路，与假设矛盾。由于G中无环路，删除任意一条边，T就不连通。

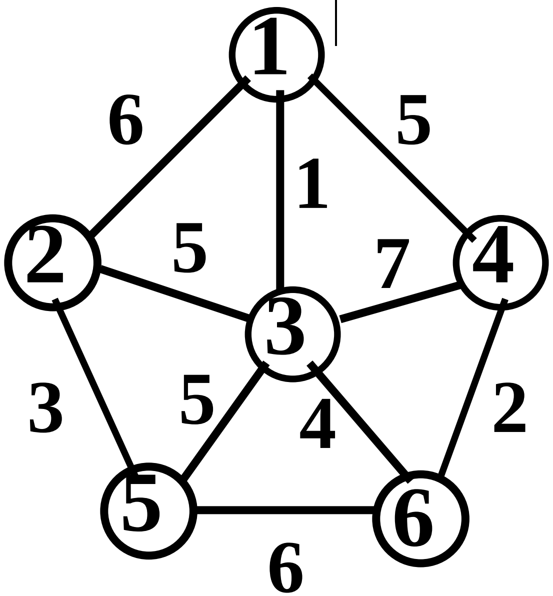
- **5=>6:**
  - ✓ 由连通性可知，任意两点之间都至少有一条路；
  - ✓ 如有两点间有多于一条路，则必有环路，删除该环路上任意一条边，图仍然连通，矛盾。
- **6=>1:**
  - ✓ 任意两点之间都有唯一一条路，则G必连通
  - ✓ 如有环路，则环路上任意两点都有两条路，矛盾

树的性质（图论）

1. **n-1** 条边
2. 连通
3. 无环

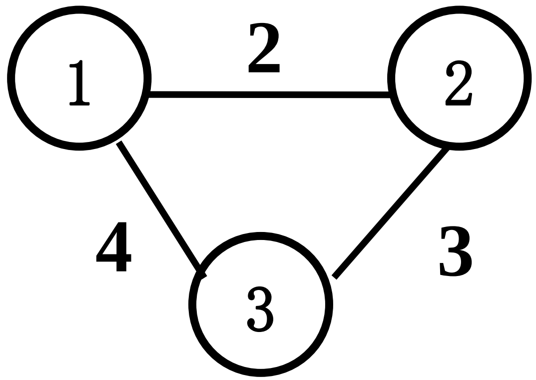
引例：网络工程规划

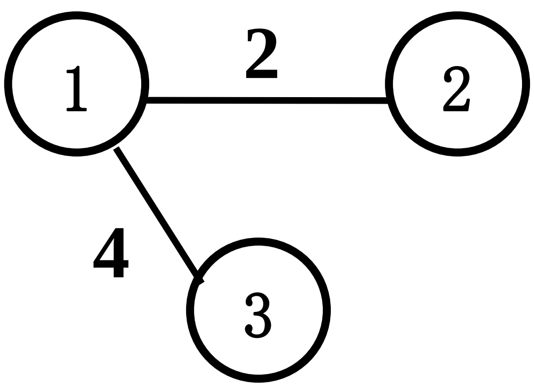
- 网络工程布线
  - ✓ 顶点表示服务器或基站
  - ✓ 边表示光纤或铜缆
  - ✓ 边上的权值表示铺线的代价



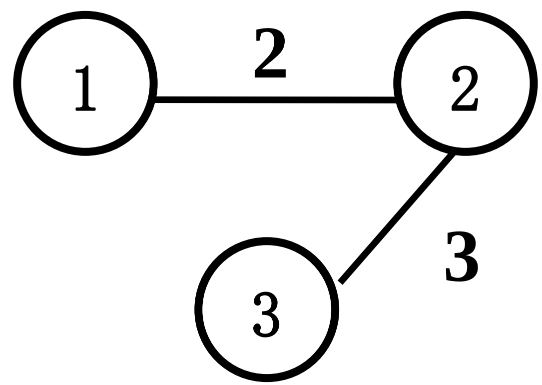
- 问题：构造任意两点都能通信且代价最小的网络。代价指边的权值和。

所求问题不是最短路问题





源为1的单源最短路



实际要求的问题

分析

- **问题是寻找包含全部n个顶点的连通子图，且代价最小。**
  - **n个顶点的子图：**支撑子图或生成子图
  - **连通：**连通n个顶点至少要n-1条边，代价最小要求只能是n-1条边；n-1条边的连通图就是树。
  - **代价最小：最小支撑（生成）树（Minimum Spanning Tree, MST）。**

最小生成（支撑）树

- 设连通无向网络**G=(*V*, *E*, *W*)**，***W*** 是 **G** 的边上权值集合。设**G** 的顶点数为***n***，若从***E***中选出 ***n*–1**条边, 满足:
  1. 这 *n*–1条边和 V 构成一个连通子图*G*′。
  2. *G*′具有最小代价。

则称*G* ′为网络*G*的最小生成（支撑）树。

求解策略

- 策略：每次生长**MST**的一条边
- 实施过程：管理遵循 循环不变式的边集合**A**。
  - ✓ 每一步增加边前，**A都是某棵MST的子集**。
  - ✓ 每一步增加边时，选择一条边(u,v)加入A中，使A不违反循环不变式，即**A∪ (u,v) 也是某棵MST的子集。**由于加入(u,v)不会破坏循环不变式，称其为A的安全边。

```
GENERIC-MST(G,w)
1  A=∅
2  while A does not form a spanning tree
3        find an edge(u,v)that is safe for A
4        A=A∪{(u,v)}
5  return A
```

奥妙：第3步安全边必然存在。
关键：寻找安全边

普里姆(Prim)算法思想

- **将顶点集 V 分成两组**
  - 一组为U，表示已在最小生成树的顶点集合；
  - 另一组为V-U，不在最小生成树的顶点集合；

- **每次从 V- U中，选择一个顶点v，放入U中，通过加入边(u,v)，(u,v)满足 weight(u,v)＝min{weight(u_1,v_1)|u_1∈U, v_1∈V-U}**
  - 标记法

Prim算法描述（自然语言）

设G=(V,E,W)为连通网，TE是G的最小生成树MST的边的集合，U为MST顶点集。

① 初始化：$U=\{u_0\}$ ($u_0 \in V$)，TE= Φ ；

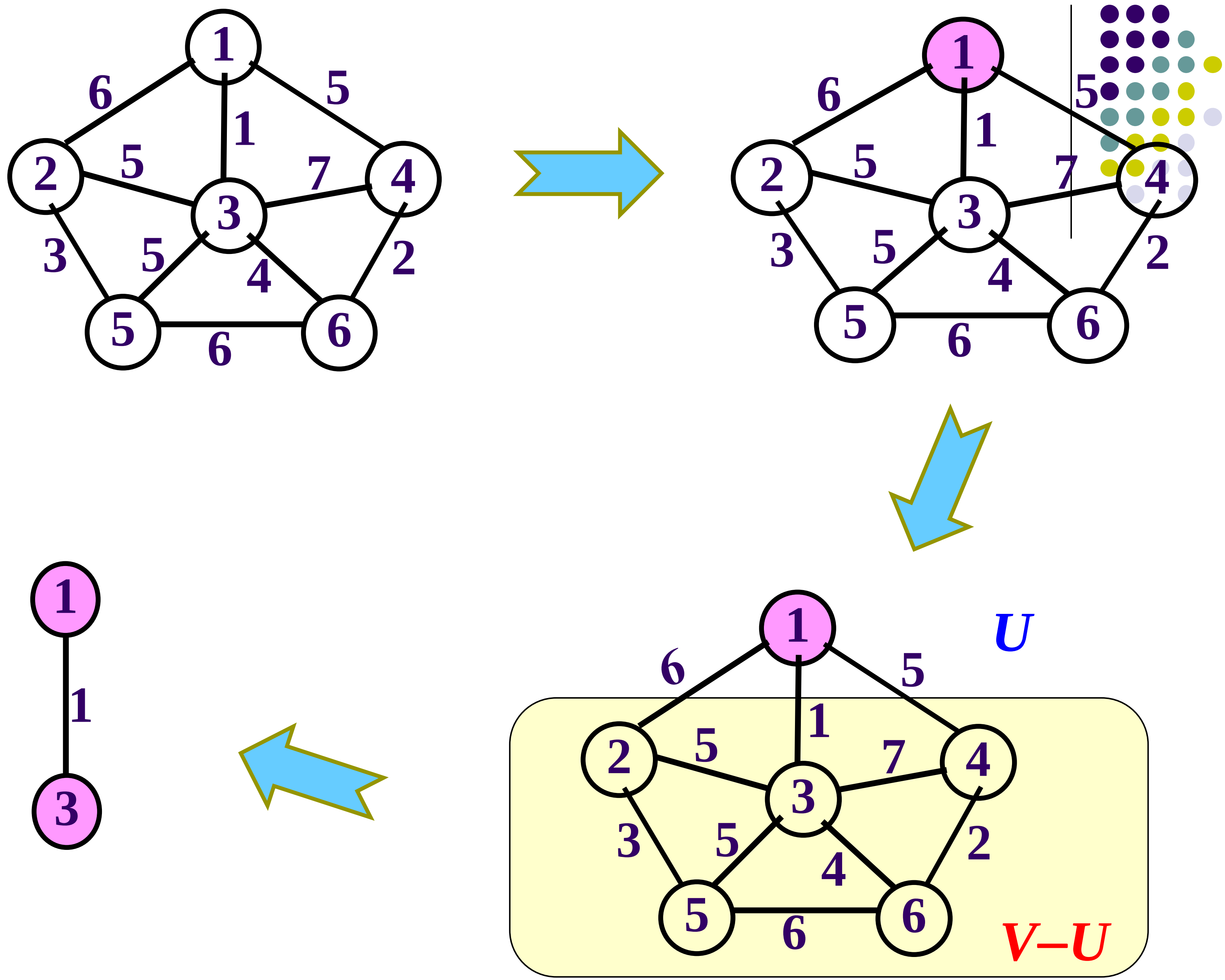
② 找到满足

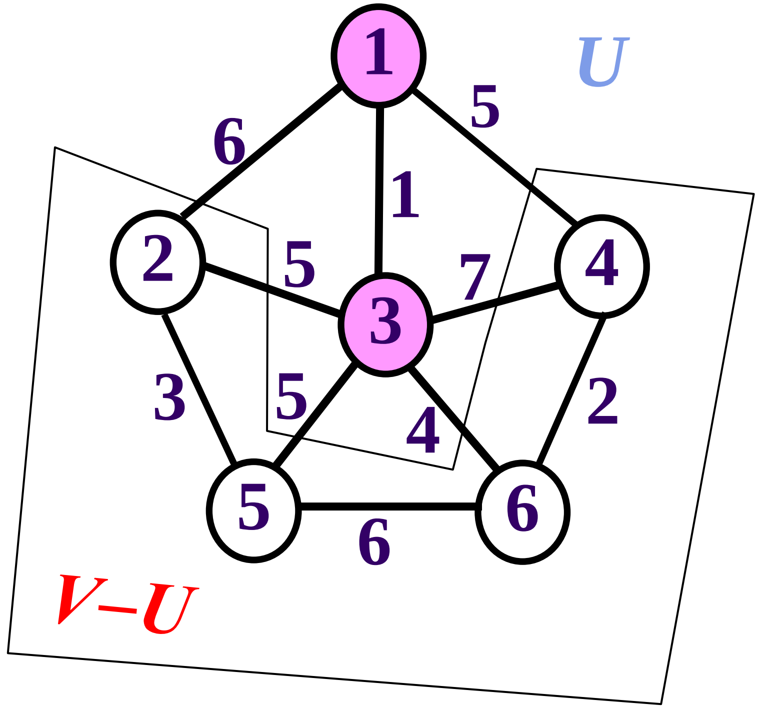
$weight(u,v)=min\{weight(u_1,v_1)|u_1 \in U, v_1 \in V-U\}$,

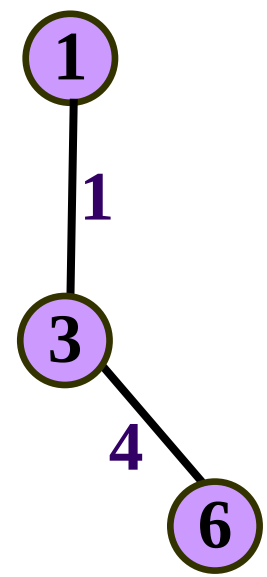
的边，把它并入TE，同时v并入U;

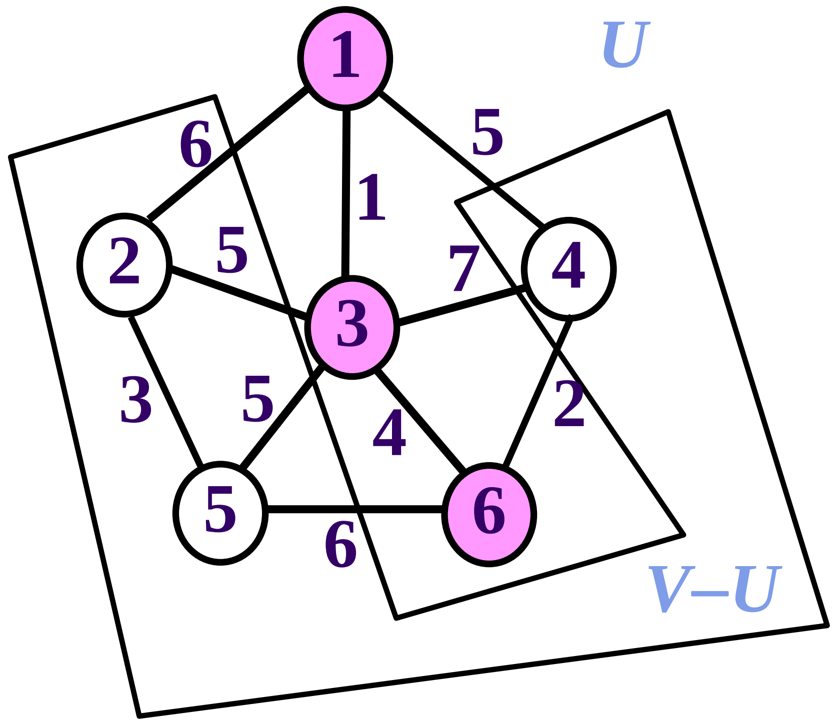
③ 反复执行② ,直至 V=U , 算法结束。

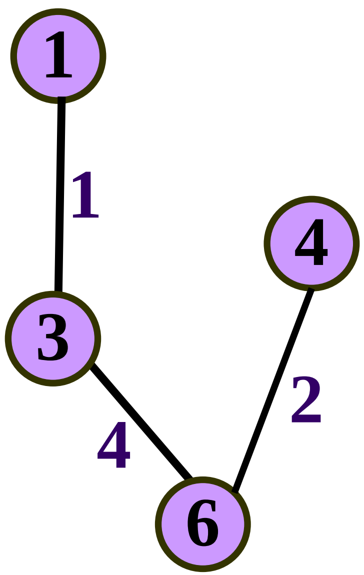
[例]

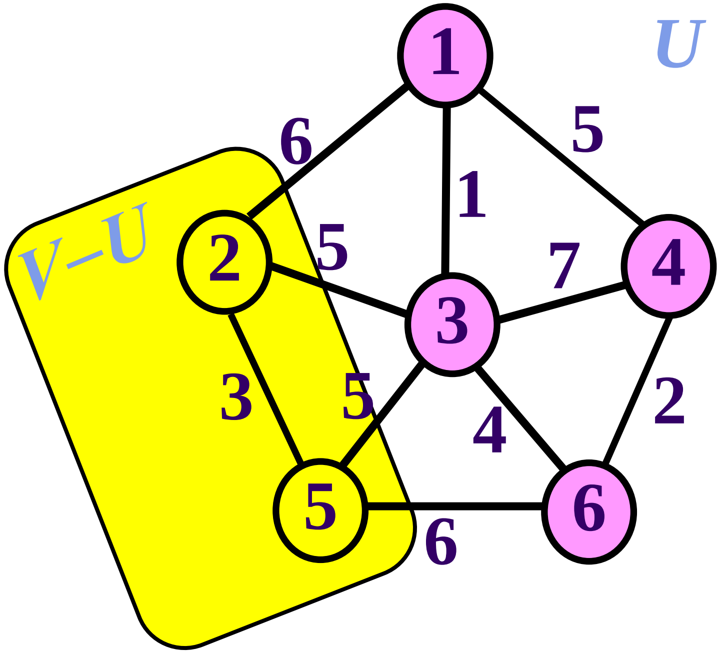


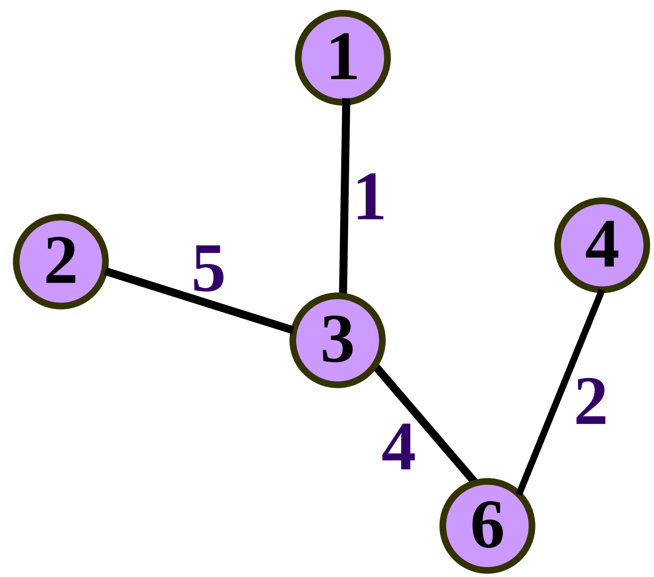

1
U
6
5
1
2
5
7
4
3
3
5
4
2
5
6
6
V–U

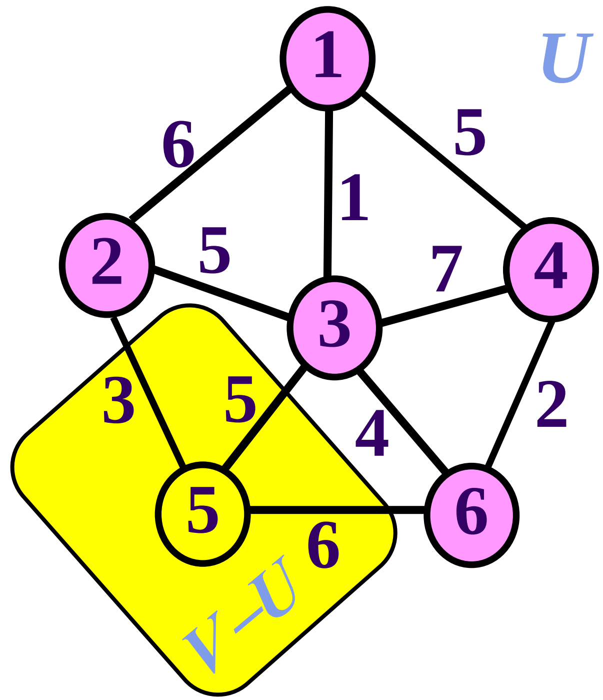

1
1
3
4
6

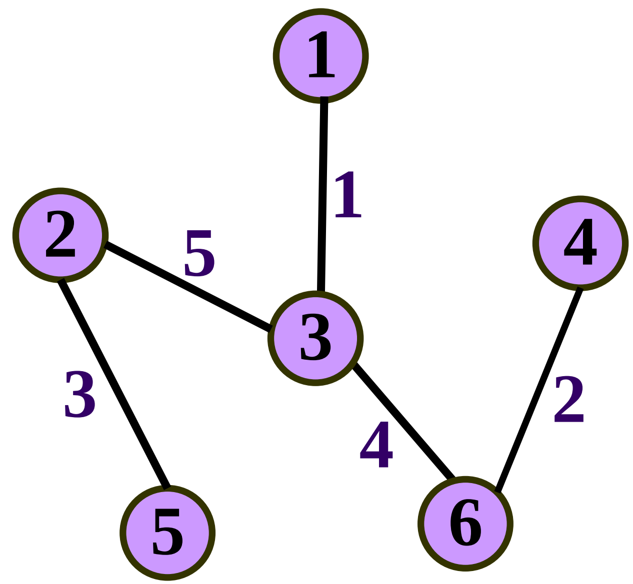

U
V–U
1
2
3
4
5
6
6
5
1
5
7
3
5
4
2
6


1
3
4
6
1
4
2


U
V–U
1
2
3
4
5
6
6
5
1
5
7
3
5
4
2
6


1
2
3
4
6
1
5
4
2


U
1
2
3
4
5
6
6
5
1
5
7
3
5
4
2
6
V−U


1
2
3
4
5
6
1
5
3
4
2

Prim算法的正确性（方法一）

- 相关术语
  - 无向图G(V,E)的一个切割(S,V-S)是V的一个划分
  - 如果一条边(u,v)∈E的一个端点在S中，另一个端点在V-S中，称该边横跨切割(S,V-S)
  - 若A中不存在横跨切割(S,V-S)的边，则称该切割尊重A
  - 在横跨一个切割的所有边中，权重最小的边称为轻边。
- **定理：设G=(V,E)是一个连通无向图，W定义了边上权值。设集合A是E的一个子集，且A包含在G的某棵最小生成树中。设(S,V-S)是G中尊重A的任意一个切割，(u,v)是横跨(S,V-S)的一条轻边，(u,v)对于A是安全的。**

- 设T是一课包含A的最小生成树。假定T不包含轻边(u,v)，否则已经证明完毕。
- 剪切粘贴：边(u,v)与T中从u到v的简单路径p形成一个环路。由于u,v分别处在(S,V-S)的两端，T中至少有一边属于简单路径且横跨该切割。设(x,y)是这样一条边。因为切割(S,V-S)尊重A，边(x,y)不在A中。由于(x,y)位于T中从u到v的唯一简单路上，删除(x,y)导致T被分解为两个连通分量。将(u,v)加上去，可将这两个连通分量连接起来一棵新的生成树T' = T-{(x,y)}∪ {(u,v)}.
- T'是一棵MST. 由于(u,v)是横跨切割(S,V-S)的一条轻边，且(x,y)也横跨切割(S,V-S),有W(u,v)≤W (x, y)。因此W(T') ≤ W(T)。 由于T是MST, T'一定也是一棵MST.
- (u,v)对于A是安全的。因为A⊆T且(x,y)∉A，所以A⊆T'。因此A ∪ {(u,v)} ⊆T'. T'是一棵MST，所以(u,v)对于集合A是安全的。

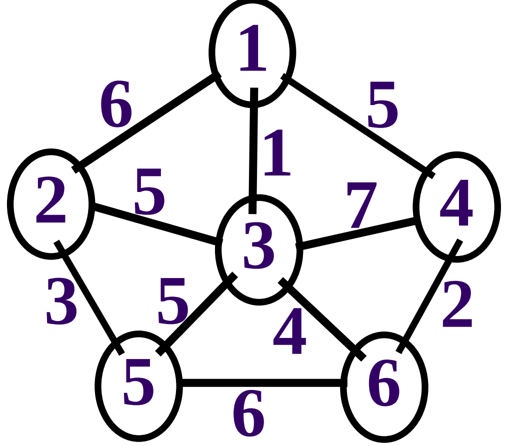
Prim算法的正确性（方法二）

- 记Prim产生的生成树为T，图G的最小生成树为T*。设T与T*有x>0 条边不同，否则问题得证。
- 按Prim产生边的顺序逐一判断：T的当前边e是否在T*中，若在，则继续比较；若不在，设e跨割[U，V-U]，在T*中查找跨割[U，V-U]的边f（T*连通一定能找到），记T*’ = T* – f + e.
- 一方面，w(e)≤w(f)，则W(T*’) <= W(T*)；另一方面，T*是最小生成树，则W(T*) <= W(T*’)。故W(T*’) = W(T*)，T*’也是最小生成树。
- 接下来，对T和T*’继续比较。最终，所有的边都替换完成，可以得出T也是最小生成树。

算法设计

- 图用邻接矩阵或邻接链表存储
- 跨集合边的最小值
  - Lowcost[v] = min{*weight*(*u*, *v*)|*u*∈*U*}
  - Vex[v] = u， min{*weight*(*u*, *v*)|*u*∈*U*}的顶点；
- 树边的存储
  - 直接存放到Vex中，引入标记数组mark；
  - 存放在TE[n-1]中；*TE*[*i*]表示一条边, 由 *head*、*tail* 和 *cost* 三个域构成, 分别存放边的始点、终点和权值.

例



	1	2	3	4	5	6
lowcost	0	6	1	5	max	max
vex	-1	1	1	1	1	1
mark	1	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6
lowcost	0	5	1	5	5	4
vex	-1	3	1	1	3	3
mark	1	0	1	0	0	0

Prim算法描述（ADL）

算法Prim(head,n. vex)/* 连通图G使用邻接链表存储*/

Prim1[初始化]

```
for( i =1 ; i <= n ; i ++) {
    lowcost[i] = max;
    mark[i] = 0;  // mark[ i ] 记录 i 是否已在MST
     vex[i] = -1;
}
mark[1] = 1; lowcost[1] = 0 ;
for( p =head[1].adjacent ; p; p=p->link){
        k = p->VerAdj;
        lowcost[k] = p->cost; vex[k] = 1;
 }
```

Prim2[构造MST]

```
for( j =1 ; j < n ; j ++){
    ldist = INF; //确定轻边
    for( i =1 ; i <= n ; i ++)
        if ( lowcost[i] < ldist&& mark[v]==0) {
            ldist = lowcost[i] ;  u = i ;}
    mark[u] = 1;
    for( p = Head[u].adjacent ; p ; p = p->link ){
        v =  p -> VerAdj ;
        if (p->cost < lowcost[v] && mark[v] == 0){
            lowcost[v] = p->cost ;  vex[v] = u; }
    }//更新;若vex存MST，需判mark[v]防止污染
}
```

时间效率分析

- 普里姆算法的时间复杂度为$O(n^2)$
- 使用堆优化，可达到O(e * logn)

- 适用于求边稠密网的最小生成树。

克鲁斯卡尔(Kruskal)算法思想

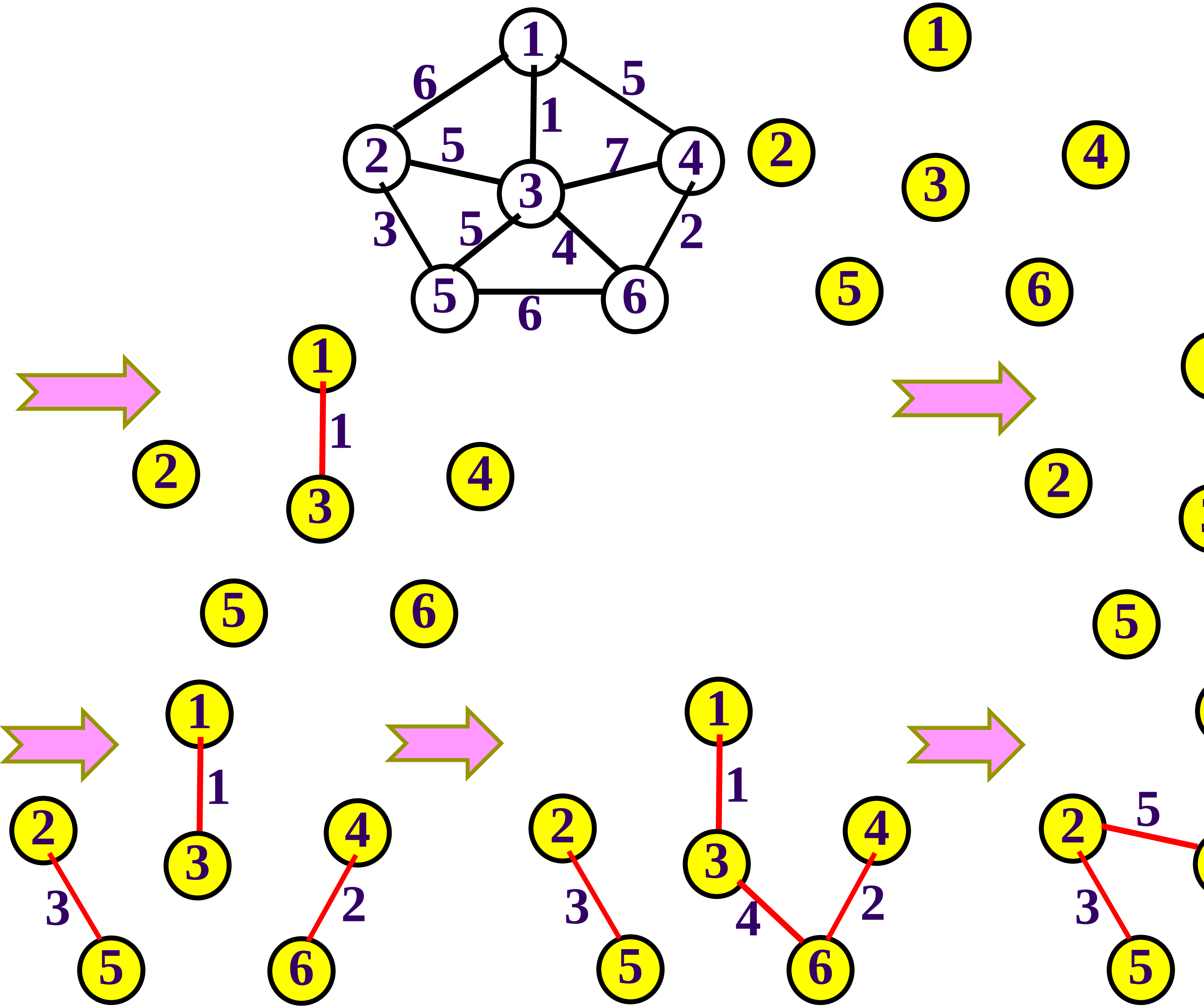
设连通网G=(V,E,W)，T为N的最小生成树。

初始时T={V,Φ}，即T中没有边，只有n个顶点

①在E中选择权值最小的边.

②如果将此边加入T中，不形成环，就加入；否则，不加入；

重复执行① ②，直至选够 n-1 条边。



Kruskal算法的正确性

- 定义： 图G = (V,E)的生成森林是各个不相交生成树T_i=(V_i,E_i)的集合，其中 $\cup V_i = V$, $\cup E_i \leqslant E$
- 定理：设G=(V,E)是一个连通无向图，W定义了边上权值。设集合A是E的一个子集，且A包含在G的某棵最小生成树中。设C=(V_C,E_C)为森林G_A(V,A)中的一个连通分量（生成树）。如果(u,v)是连接C和G_A中其它某个连通分量的一条轻边，则(u,v)对于集合A是安全的。
- 证明：切割(V_C,V-V_C)尊重集合A，(u,v)是横跨该切割的一条轻边，由前面定理可知，(u,v)对于集合A是安全的。

实现有多种方式

- 边取最小
  - 堆
  - 有序边表（权值递增）
- 判环（无向图）
  - 使用并查集判环
  - 遍历判环
  - ……
- 图的存储结构选取
  - 邻接表
  - 边表

Kruskal算法描述 (有序边表+并查集，ADL)

算法Kruskal(E, n,m. TE)/* 连通图G用边表E(u,v,w)存储*/

```
Kruskal1[初始化]
    sort(E，less). //按w递增排序，less：元素比较函数
    for( i =1 ; i <= n ; i ++) MAKE_SET(i)
Kruskal2[构造MST]
    for( i =1, j = 0  ; i <=m ; i ++) {
        u= E[i].u; v= E[i].v
        if( FIND(u) != FIND(v)){
            TE[++j] = E[i];  UNION(u, v); }
        if (j == n-1) break;
}
```

Kruskal算法时间效率分析

- 边表+并查集
  - 排序：O(eloge)
  - 判环：O(e*α(e))
  - 整体时间复杂度O(eloge)

- 堆实现
  - 取最小 O(eloge)

- 克鲁斯卡尔算法适用求边稀疏网的最小生成树;

小结

- 最小生成树基于无向图（连通）

- MST的其它方法
  - ✓ 避圈法/破圈法
  - ✓ ……

扩展

- 最大生成树
  - 边权取相反数，利用最小生成树方法
  - 仿照MST，修改最小生成树方法
- 次小生成树？（课后）
- 指定点度为k的最小生成树？（课后）