第七次作业

院(系)__________ 班级________ 学号________ 姓名________

一、填空题

1．设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，其中 $\lambda>0$ 为未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，则 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=$ $\overline{X}$.

2．设总体 X 在区间 $[\theta, 2]$ 上服从均匀分布，$\theta<2$ 为未知参数；从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，则参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=$ $2\overline{X}-2$.

$E(X)=\frac{1}{2}(\theta+2)$ 令 $\mu_1=E(X)=\overline{A_1}$

得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-2$

PPT有

3．设总体 $X\sim\pi(\lambda), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，则未知参数 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=$ $\overline{X}$.

4．该总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，一组样本值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其平均值 $\bar{x}=9.0$，若参数 μ 的置信水平为 0.9 的双侧置信区间的下限为 7.8，则置信上限为 10.2 .

5．设总体 $X\sim N(\mu, 3^2)$，要使未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信间的长度 $L\le 2$，样本容量 n 至少为 35 .

$L=2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=2\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}\cdot 1.96\le 2$

$\Rightarrow n\geq 34.5744$

二、选择题

1．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，总体 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	θ	$1-2\theta$	θ

$E(X)=0$

$E(X^2)=2\theta$

令 $\mu_2=A_2$ 得 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}A_2$

其中 $\theta>0$ 未知，则未知参数 θ 的矩估计量为（ D ）

（A）$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.　　（B）$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.

（C）$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.　　（D）$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

2．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则总体方差的无偏估计量为（ C ）

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.　　（B）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i-E(X)\right]^2$（$E(X)$ 未知）. 不是估计量

（C）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.　　（D）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i-E(X)\right]^2$（$E(X)$ 未知）. 不是估计量

3．设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本观察值，则σ^2的最大似然似计值为$\sigma^2=$（ D ）

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$　　（B）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^k,k=1,2,\cdots$.

（C）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$　　（D）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$.

4．设总体$X\sim N(\mu,4)$，μ未知，$X_1,X_2,\cdots,X_9$为总体X的样本，测得样本均值为$\bar{x}=9$，则参数μ的置信水平为0.90的置信区间为（ A ）

（A）$\left(9-\frac{2}{3}u_{0.05},\ 9+\frac{2}{3}u_{0.05}\right)$.　（B）$\left(9-\frac{1}{3}u_{0.05},\ 9+\frac{1}{3}u_{0.05}\right)$.

（C）$\left(9-\frac{2}{3}u_{0.1},\ 9+\frac{2}{3}u_{0.1}\right)$.　（D）$\left(9-\frac{1}{3}u_{0.1},\ 9+\frac{1}{3}u_{0.1}\right)$.

5．设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中σ^2已知，则总体均值μ的置信区间长度L与置信度$1-\alpha$的关系是（ A ）

（A）当$1-\alpha$缩小时，L缩短.　（B）当$1-\alpha$缩小时，L增大.

（C）当$1-\alpha$缩小时，L不变.　（D）以上说法都不对.

三、计算题

A2　1．设总体X具有概率分布

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$是未知参数，已知来自总体X的样本值为1，2，1.求θ的矩估计值和最大似然估计值.

解 (1) $\mu_1=E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta$

令$\mu_1=A_1$得$3-2\theta=\bar{X}$　解得θ的矩估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{2}(3-\bar{X})$

由样本值得$\bar{x}=\frac{1}{3}(1+2+1)=\frac{4}{3}$. 所以$\theta$的矩估计值为$\hat{\theta}=\frac{1}{2}(3-\bar{x})=\frac{5}{6}$

(2) 由最大似然估计法

似然函数$L(\theta)=P\{x_1=1\}\cdot P\{x_2=2\}\cdot P\{x_3=1\}=\theta^2\cdot2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$

$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$

令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=\frac{5-6\theta}{\theta(1-\theta)}=0$　得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{5}{6}$.

堂作Ab

2．设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta,\\ 0, & x<\theta.\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

解. 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i\geq\theta \quad i=1,2,\cdots n\\ 0 & 其它\end{cases}$$

当 $x_i\geq\theta$ $(i=1,2,\cdots n)$ 时，$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$

$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0$. 故当 $x_i\geq\theta$ $(i=1,2,\cdots n)$ 时 $L(\theta)>0$ 且 $L(\theta)$ 关于 θ 单增

当 $\theta=\min(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 时 $L(\theta)$ 取最大值

故 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots x_n)$.

3．设总体 X 的分布函数为

教程例4

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\beta}, & x>1,\\ 0, & x\le 1.\end{cases}$$

其中参数 $\beta>1$ 是未知参数，又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的随机样本，（1）求 X 的概率密度函数 $f(x;\beta)$；（2）求参数 β 的矩估计量；（3）求参数 β 的最大似然估计量.

解. (1) $f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0 & x\leq 1\end{cases}$

(2) $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\beta}{x^{\beta}}dx=\dfrac{\beta}{\beta-1}$.

令 $\mu_1=A_1$ 即 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\bar{X}$ 得 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$.

(3) 设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 为一组样本观测值、似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i>1,\ i=1,2,\cdots n\\ 0 & 其它\end{cases}$$

当 $x_i>1$ $(i=1,2,\cdots n)$ 时

$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得 β 的最大似然估计值为 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

从而 β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

上课讲过 四、证明题

不讲！1. 设总体 X 的均值 $\mu=E(X)$ 及方差 $\sigma^2=D(X)>0$ 都存在，μ 与 σ^2 均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，试证明不论总体 X 服从什么分布，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 都是总体方差 $\sigma^2=D(X)$ 的无偏估计.

证 $E(S^2)=\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$

$=\frac{1}{n-1}(nE(X_i^2)-nE(\overline{X}^2))$

$=\frac{n}{n-1}(D(X_i)+(E(X_i))^2-D(\overline{X})-(E(\overline{X}))^2)$

$=\frac{n}{n-1}(\sigma^2+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2)$

$=\sigma^2$.

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计.

2. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 并求其方差 $D(\hat{\theta})$.

教程例1

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_0^\theta x\cdot\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{\theta}{2}$.

令 $\mu_1=A_1$ 得 $\frac{\theta}{2}=\overline{X}$ 从而 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}$.

又因 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,\theta)dx=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{3}{10}\theta^2$.

则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{10}\theta^2-(\frac{\theta}{2})^2=\frac{1}{20}\theta^2$

所以 $D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{5n}$

3. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1 \\ 0, & 其它\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值. 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，说明理由。

解. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x.\theta)dx=\int_0^\theta x\cdot\frac{1}{2\theta}dx+\int_\theta^1 x\cdot\frac{1}{2(1-\theta)}dx=\frac{1}{4}\theta+\frac{1+\theta}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta.$

$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4[D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2]=4\cdot\frac{1}{n}D(X)+4(E(X))^2$

$=\frac{4}{n}D(X)+4(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta)^2>\theta^2$

因此可以判断 $4\overline{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，统计量 $T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

证明. $E(T)=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)=D(\overline{X})+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n}E(S^2)$

$=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2$

$=\mu^2$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量