一单项选择题

1. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 共线, 且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$, 则 $\boldsymbol{x}=($　　$)$.

(A) $(6,-3,3)$;　　(B) $(-6,3,-3)$;　　(C) $(6,3,-3)$;　　(D) $(-6,3,3)$.

选(B).

2. 设有直线 $L:\left\{\ x+3y+2z+1=0, 2x-y-10z+3=0\right.$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 $L($　　$)$.

(A) 平行于 π;　　(B) 在 π 上;　　(C) 垂直于 π;　　(D) 与 π 斜交.

选(C).

3. 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的交线在 Oxy 平面上的投影曲线是(　　).

(A) 抛物线;　　(B) 双曲线;　　(C) 椭圆;　　(D) 圆.

选(D)

4. 过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与 $x^2-y^2-z^2=0$ 的交线,母线平行于 z 轴的柱面方程为(　　).

(A) $5x^2-3y^2=1$;　(B) $5x^2+3y^2=1$;　(C) $3x^2-5y^2=1$;　(D) $3x^2+5y^2=1$.

选(A).

5. 方程 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=z$ 所表示的曲面为(　　).

(A) 椭球面;　　(B) 柱面;　　(C) 双曲抛物面;　　(D) 旋转抛物面.

选(C).

二、填空题

1. 若 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间夹角为 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$______________, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$______________.

答案 $\sqrt{5}$, $\quad 3$.

2. 过点 $(1,1,-1),(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程为______________.

答案 $x-3y-2z=0$.

3. 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,4,-1)$ $\boldsymbol{b}=(0,-2,2)$ 同时垂直的单位向量为______________.

答案 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2)$.

4. 点 $(2,1,3)$ 到直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的距离为______________.

答案 $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

5. 曲线 $\begin{cases} z=6-x^2-y^2, \\ 2y+z-3=0 \end{cases}$ 在 Oxy 面上的投影曲线方程为______________.

答案 $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

三、计算题

1. 设直线 L_1 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$, 直线 L_2 的方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

(1)证明 L_1 与 L_2 为异面直线; (2) 计算 L_1与 L_2 的距离.

解 (1) 设 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$. L_1,L_2 上分别取点 $M_1=(1,1,0),M_2=(2,0,1)$, 则$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-1,1)$.

由于

$$[s_1,s_2,\overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

因此 L_1 与 L_2 为异面直线.

(2) L_1 与 L_2 的距离 $d=\dfrac{[s_1,s_2,\overrightarrow{M_1M_2}]}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$. $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3(-1,1,1)$.

$$d=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. 求过直线 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{-2}$, 且平行于直线 $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ 的平面 π 的方程.

(方法一)直线 L 的一般方程为 $\begin{cases} y-1=0, \\ 2x+z-2=0. \end{cases}$ 过直线 L 的平面束方程为

$$(2x+z-2)+\lambda(y-1)=0,$$

即 $2x+\lambda y+z-(\lambda+2)=0$. 由已知有 $4-\lambda-2=0$, 解得 $\lambda=2$,
所求平面方程为

$$2x+2y+z-4=0.$$

(方法二)　设 L_1, L_2的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$, 则 $\boldsymbol{s}=(1,0,-2), \boldsymbol{s}_2=(2,-1,-2)$.
所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-(2,2,1)$.
所求平面的方程为 $2(x-2)+2(y-1)+z+2=0$, 即 $2x+2y+z-4=0$.

3. 求过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程.

解　设交点为 (x_0,y_0,z_0), 由已知

$$\begin{cases} \dfrac{x_0-1}{1}=\dfrac{y_0-1}{-1}=\dfrac{z_0}{2}, \\ x_0-(y_0-1)+2(z_0-2)=0. \end{cases}$$

解得 $x_0=\dfrac{3}{2}, y_0=\dfrac{1}{2}, z_0=1$.所求直线方程为 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

4. 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

解　直线 L 的一般方程为 $\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$ 过直线 L 的平面束方程为

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0,$$

即 $x+(\lambda-1)y+\lambda z-(\lambda+1)=0$, 垂直于平面 π 的方程满足

$$1-(\lambda-1)+2\lambda=0,$$

解得 $\lambda=-2$. 从而垂直于 π 的方程为 $x-3y-2z+1=0$, 因此 L_0 的方程为

$$\begin{cases} x-3y-2z+1=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$$

L_0 的方程可改写为 $\begin{cases} x=2y, \\ z=\dfrac{1-y}{2}. \end{cases}$ 设 (x,y,z) 是旋转曲面上任意一点,由 L_0 上点 (x_0,y_0,z_0) 旋转而来,因此有 $x^2+z^2=x_0^2+z_0^2, y=y_0$. 旋转曲面方程为

$$x^2+z^2=(2y)^2+\left(\frac{1-y}{2}\right)^2,$$

即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$