第三章　多维随机变量及其概率分布

在实际问题中，一些随机试验的结果往往同时需要两个或两个以上的随机变量来描述.

要研究这些随机试验，就应同时考虑若干个随机变量，即多维随机变量及其取值规律. 本章引进多维随机变量的概念，重点讨论二维随机变量的分布及其性质.

本章主要内容

一、二维随机变量的分布函数

二、二维离散型随机变量及其概率分布

三、二维连续型随机变量及其概率密度

四、条件分布

五、二维随机变量的函数的分布

六、n维随机变量

第一节　二维随机变量的分布函数

一、　二维随机变量及其分布函数

二、　边缘分布

三、　随机变量的独立性

1.1 二维随机变量及其分布函数

实例:

1、对一目标进行射击:

X: 表示弹着点与目标的水平距离;

Y: 表示弹着点与目标的垂直距离;

则$(X，Y)$就是一个二维随机变量.

2、考察某幼儿园的儿童的身体发育情况:

H: 表示该幼儿园儿童的身高;

W: 表示该幼儿园儿童的体重;

则(H, W)就是一个二维随机变量.

1.1 二维随机变量及其分布函数

定义1.1

设随机试验 E 的样本空间为Ω， X和Y是定义在Ω上的两个随机变量, 由它们构成的向量(X, Y)叫做二维随机变量或二维随机向量.

说明

二维随机变量(X,Y)可以看作是xoy平面上的随机点的坐标，其取值在xoy平面上。

二维随机变量(X,Y)的性质不仅与X有关，与Y有关，还依赖这两个随机变量的关系。

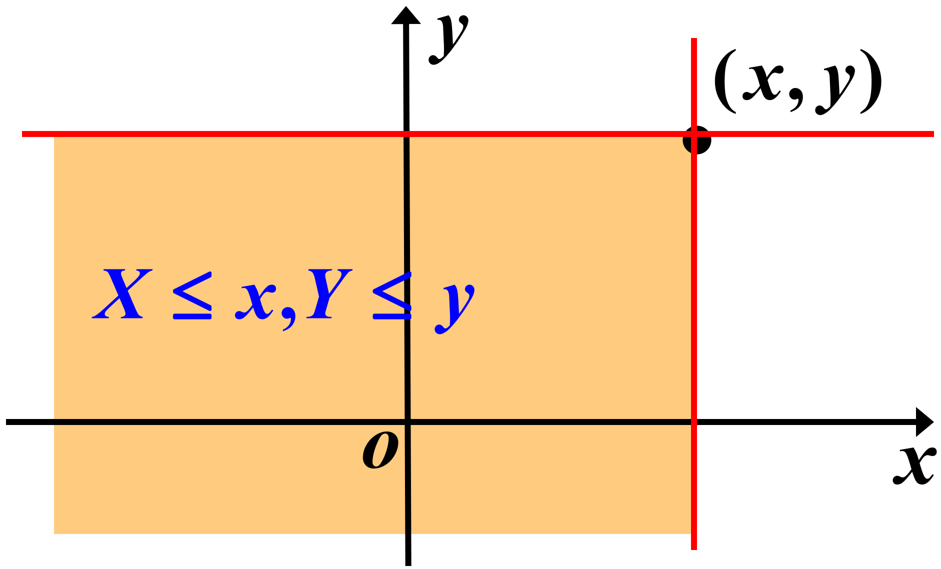
定义1.2 设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 x, y,
二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=}P\{X\le x, Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

分布函数的几何意义

$F(x,y)$在点(x,y)的函数值就是随机点(X,Y)落在以(x,y)为顶点的左下方无穷矩形区域内的概率.



分布函数的基本性质

(1) $0 \le F(x,y) \le 1$, 且有

对于任意固定的 y, $F(-\infty, y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$,

对于任意固定的 x, $F(x, -\infty) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$,

$$F(-\infty,-\infty) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0,$$

$$F(+\infty,+\infty) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1.$$

(2) $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数 ,即对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$,

对于任意固定的 x,当$y_2 > y_1$时$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.

(3) $F(x,y)=F(x+0,y), F(x,y)=F(x,y+0)$,

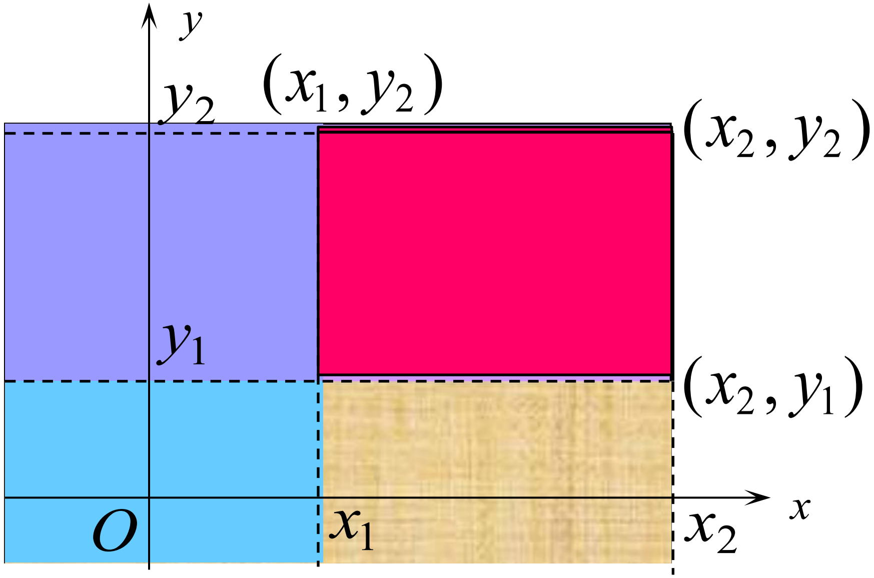
即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续,关于 y 也右连续.

(4) 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1<x_2$, $y_1<y_2$,

有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$

(5) $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$



性质(1)-(4)是构成分布函数的充分必要条件.

性质(5) 是利用分布函数计算概率的公式.

(5)证明

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$
$$= P\{X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} - P\{X \le x_1, y_1 < Y \le y_2\}$$
$$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_2, Y \le y_1\}$$
$$- P\{X \le x_1, Y \le y_2\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\}$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0$$

例3.1.1 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{2}),$$

其中A,B,C为常数， $-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$

(1) 求A,B,C的值； (2) 求 $P\{0<X\le 2,\ 0<Y\le 2\}$

解

$$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$$

$$F(-\infty,+\infty)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=0$$

$$F(+\infty,-\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$$

$$A=\frac{1}{\pi^2}$$

$$B=C=\frac{\pi}{2}$$

$$P\{0<X\le 2,\ 0<Y\le 2\}$$

$$=F(2,2)-F(0,2)-F(2,0)+F(0,0)$$

$$=\frac{9}{16}-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

1.2 边缘分布

设二维随机变量(*X*,*Y*)的分布函数为 $F(x,y)$.

定义1.3 称*X*的分布函数$F_X(x)$为二维随机变量(*X*,*Y*)关于*X*的边缘分布函数.

称*Y*的分布函数 $F_Y(y)$ 为(*X*,*Y*)关于*Y*的边缘分布函数.

问题： $F(x,y), F_X(x), F_Y(y)$ 是什么关系？

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x,+\infty)$$
$$= \lim_{y\to+\infty} F(x,y)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} F(x,y)$$

(1) $F(x,y), F_X(x), F_Y(y)$ 的关系

关于**X**的边缘分布函数为 $F_X(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y)$,

关于Y的边缘分布函数为 $F_Y(y) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x,y)$

(2) 二维随机变量(X,Y)的边缘分布函数完全由联合分布函数$F(x,y)$确定.

(3) 一般地，由边缘分布函数不能确定联合分布函数。

例3.1.2 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1+e^{-(x+y)}-e^{-x}-e^{-y}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布函数。

解 关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$$

关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$$

1.3 随机变量的独立性

事件A, B相互独立 $\Longleftrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$

定义1.4 若(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)$，关于X,Y的边缘分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$，若

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

则称X与Y相互独立。

说明

(1) X与Y相互独立就是 $\forall\, x, y\in R$，两事件 $\{X\le x\}$和$\{Y\le y\}$相互独立.

$$\because F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

$$\therefore P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}\cdot P\{Y\le y\}$$

(2) X 与 Y 相互独立, 也就是一个随机变量取值的概率对另一个取值的概率没有影响.

(3) 若X与Y相互独立,

联合分布函数 $\xleftrightarrow{\text{确定}}$ 边缘分布函数

若X与Y不相互独立,

联合分布函数 $\xrightarrow{\text{确定}}$ 边缘分布函数

(4) 若X与Y相互独立, 对任意连续函数h, g， 则$h(X)$与$g(Y)$也相互独立.