一、单项选择题

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{x+y}$ =(　D　)

(A) 1;　　(B) 0;　　(C) $\dfrac{1}{2}$;　　(D) 不存在.

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　A　).

(A) 不连续, 偏导数存在;　　(B) 不连续, 偏导数不存在;

(C) 连续, 偏导数存在;　　(D) 连续, 偏导数不存在.

3. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2), \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{0}$ 之间的夹角为(　C　).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$;　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$;　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$;　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

4. 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$, 则(　D　).

(A) $f'_x-f'_y=0$;　　(B) $f'_x+f'_y=0$;　　(C) $f'_x-f'_y=f$;　　(D) $f'_x+f'_y=f$.

5. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　C　).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$;

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$;

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, ;

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

二、填空题

1. 函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ 连续区域是______________

答案 $\{(x,y)|x^2+y^2>1\}$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} =$ ______________.

答案 0.

3. 设函数 $z=\sqrt{x^4+y^4}$, 则 $z'_x(0,0)=$ ______________.

答案 0.

4. 设函数 $z=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} =$ ______________.

答案 $\dfrac{\pi^2}{\mathrm{e}^2}$.

5. 设 $z=\mathrm{e}^{\sin(xy)}$, 则 $\mathrm{d}z=$______________.

答案 $\mathrm{e}^{\sin(xy)}\cos(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$.

三、计算题

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$, 证明:当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在.

解 令 $y=x$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0,y=x}\dfrac{x^2+x^2}{x^2+x^2}=1$,

令 $y=2x$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0,y=2x}\dfrac{x^2+2x^2}{x^2+4x^2}=\dfrac{3}{5}$,

因此, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在.

2. 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

3. 设 $z=\ln\left(\tan\dfrac{y}{x}\right)$, 求 $\mathrm{d}z$.

解

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\sec^2\frac{y}{x}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\sec^2\frac{y}{x}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{2}{\sin\left(\dfrac{2y}{x}\right)}\left(-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

4. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明:当 $r\neq 0$ 时, 有 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

解 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}&=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{2}{r}.\end{aligned}$$

5. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续, 问:

(1) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时, 才能使偏导数 $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 存在?

(2) 在 $\varphi(x,y)$ 满足上述条件时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微?

解 (1)由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}$, 而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\varphi(0,0),\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=-\varphi(0,0).$$

要使 $f_x(0,0)$ 存在, 必须 $\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$. 因此当 $\varphi(0,0)=0$ 时, $f_x(0,0)$ 存在.

同理, $\varphi_y(0,0)$ 存在, 只需 $\varphi(0,0)=0$. 因此当 $\varphi(0,0)=0$ 时, $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 存在.

(2) 由(1)知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 故

$$\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant 2,$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varphi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(0,0)=0.$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.