第五节　单侧置信区间

一、　问题的引入

二、　基本概念

三、　小结

一、问题的引入

在以上各节的讨论中,对于未知参数θ,我们给出两个统计量θ_1, θ_2,得到θ的双侧置信区间(θ_1, θ_2).

但在某些实际问题中,例如,对于设备、元件的寿命来说,平均寿命长是我们希望的,我们关心的是平均寿命θ的“下限”;与之相反,在考虑产品的废品率p时,我们常关心参数p的“上限”,这就引出了单侧置信区间的概念.

二、基本概念

1. 单侧置信区间的定义

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ，对于给定值$\alpha\,(0<\alpha<1)$，若由样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$确定的统计量$\theta_1=\theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对于任意$\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta>\theta_1\}=1-\alpha,$$

则称随机区间$(\theta_1, +\infty)$是θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间，θ_1称为θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限.

又如果统计量 $\theta_2=\theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,对于任意$\theta\in\Theta$满足 $P\{\theta<\theta_2\}=1-\alpha$,

则称随机区间 $(-\infty,\theta_2)$ 是θ的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间,θ_2 称为θ的置信水平为 $1-\alpha$的单侧置信上限.

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体 X 的均值是μ, 方差是σ^2 (均为未知),

(1) 均值μ的单侧置信区间

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，由 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

有 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\mu > \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),+\infty\right),$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限 $\mu_1=\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1).$

同理，由 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$, 有 $P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>-t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha,$

即 $P\left\{\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha,$

也可得到μ的另一个置信水平为1-α的单侧置信区间

$$\left(-\infty,\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right),$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信上限 $\mu=\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1).$

双侧置信区间与单侧置信区间的联系

双侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right),$$

单侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),\ +\infty\right),$$

或

$$\left(-\infty,\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right),$$

例7.5.1

已知某种绿化用草皮的成活率服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，在6个绿化用地的成活率(%)分别为90.5，93.2，95.8，91.2，89.3，92.6，求μ的置信水平为0.95的单侧置信下限.

解 $1-\alpha=0.95$，$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(5)=2.015$，

$$n=6,\quad \bar{x}=92.1,\quad s^2=5.272,$$

μ的置信水平为0.95的置信下限

$$\mu_1=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=92.1-\sqrt{\frac{5.272}{6}}\times 2.015=90.2.$$

(2) 方差σ^2的单侧置信区间

又根据 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

有 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$,

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\sigma_2^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

同理，根据 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

有 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_\alpha^2(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\sigma^2 > \dfrac{(n-1)S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}\right\} = 1-\alpha$,

于是得 σ^2 的另一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}, +\infty\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限

$$\sigma_1^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}.$$

双侧置信区间与单侧置信区间的联系

双侧置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

或

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)},+\infty\right),$$

例7.5.2

从某种型号的晶体管中抽取容量为10的样本，测量其寿命。得到寿命的标准差为$s=45(h)$. 假设这批晶体管的寿命服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2均未知，求σ^2的置信水平为0.95的单侧置信上限。

解 $1-\alpha=0.95,$

查χ^2分布表得$\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(9)=3.325,$

$$n=10,\quad s^2=45^2=2025,$$

于是得到σ^2的置信水平为0.95的单侧置信上限为

$$\sigma_2^2=\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}=\frac{9\times 2025}{3.325}=5481.2.$$

三、小结

正态总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(-\infty, \boxed{\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)}\right), \quad \left(\boxed{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)}, +\infty\right),$$

单侧置信上限 μ_2　　　单侧置信下限 μ_1

正态总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \boxed{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}}\right). \quad \boxed{\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right.}, +\infty\left.\right).$$

单侧置信上限 σ_2^2　　　单侧置信下限 σ_1^2