第二次作业

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

一、填空题

1．一实习生用一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格产品的概

$p_1=\frac{1}{2},\ p_2=\frac{1}{3},\ p_3=\frac{1}{4}$ $\qquad (1-p_1)(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)(1-p_3)=P\{X=2\}$

率为 $p_i=\dfrac{1}{i+1}$ $(i=1,2,3)$，X 表示 3 个零件中合格的个数，则 $P\{X=2\}=$ $\underline{\frac{11}{24}}$．

2. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\le x<1,\\ 0.8, & 1\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

则 X 的分布律为

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

3．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1,\end{cases}$ 在 $x=0$ 点不连续，X 不是连续型 r.v.

$F(1)-F(1^-)=(1-e^{-1})-\frac{1}{2}$

$F(\frac{1}{2}^-)=\frac{1}{2}$

则 $P\{X=1\}=$ $\underline{\frac{1}{2}-e^{-1}}$，$P\left\{X<\dfrac{1}{2}\right\}=$ $\underline{\frac{1}{2}}$．

4．设随机变量 X,Y 服从同一分布，X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$ $\qquad P(A)+P(B)-P(A)P(B)=2P(A)-[P(A)]^2=\frac{3}{4}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$. 即 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_a^2\frac{3}{8}x^2dx=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{8}(8-a^3)=\frac{1}{2}$

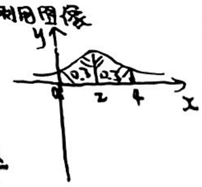
设 $A=\{X>a\}$ 与 $B=\{Y>a\}$ 相互独立，且 $P\{A\cup B\}=\dfrac{3}{4}$，则 $a=$ $\underline{\sqrt[3]{4}}$．

$P\{2<X<3\mid X\ge 1\}=\dfrac{P\{2<X<3\}}{P\{X\ge 1\}}=\dfrac{F(3)-F(2)}{1-F(1)}=\dfrac{(1-e^{-3})-(1-e^{-2})}{1-(1-e^{-1})}=e^{-1}-e^{-2}$

5. 设随机变量 X 服从参数 $\theta=1$ 的指数分布，则 $P\{2<X<3\mid X\ge 1\}=$ $\underline{e^{-1}-e^{-2}}$．

分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

法2 利用图像

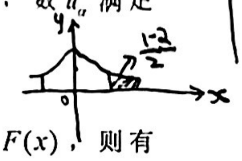


6. 设随机变量 X 服从 $N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$ $\underline{0.2}$．

法1. $P\{2<X<4\}=P\{\frac{2-2}{\sigma}<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{4-2}{\sigma}\}=\Phi(\frac{2}{\sigma})-\Phi(0)=0.3\Rightarrow\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.3+0.5=0.8$

$P\{X<0\}=P\{\frac{X-2}{\sigma}<\frac{-2}{\sigma}\}$
$=\Phi(-\frac{2}{\sigma})=1-\Phi(\frac{2}{\sigma})=1-0.8=0.2$

7．设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足



$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于 $\underline{u_{\frac{1-\alpha}{2}}}$．

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，其分布函数为 $F(x)$，则有

$F(\mu+\sigma x)=P\{X\le\mu+\sigma x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le x\}=\Phi(x)$

$F(\mu-\sigma x)=P\{X\le\mu-\sigma x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le -x\}=\Phi(-x)$

$=1-\Phi(x)$

$F(\mu+\sigma x)+F(\mu-\sigma x)=$ 1 .

二、选择题

1．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且有 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，则对于任意实数 a，有（ B ）

$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(t)dt \overset{t=-u}{=\!=} \int_{+\infty}^{a}f(-u)(-du)=\int_a^{+\infty}f(u)du$

$=1-F(a)$

另一方面 $F(-a)=\int_a^{+\infty}f(u)du$

$=\int_0^{+\infty}f(u)du-\int_0^a f(u)du$

$=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

（A） $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$． （B） $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$．

（C） $F(-a)=F(a)$． （D） $F(-a)=2F(a)-1$．

2．设 $f(x)=\sin x$，要使 $f(x)=\sin x$ 能为某随机变量 X 的概率密度，则 X 的可能取值的区间是（ D ）

$\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2.$

（A）$[\pi,\frac{3}{2}\pi]$．不满足非负 （B）$[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$．不满足非负 （C）$[0,\pi]$． （D）$[0,\frac{1}{2}\pi]$． $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

3．设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取（ A ）

$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$

$\lim_{x\to+\infty}(aF_1(x)-bF_2(x))=1$

$\Rightarrow a-b=1$

（A） $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$． （B） $a=\frac{2}{3},b=-\frac{2}{3}$．

（C） $a=\frac{1}{2},b=\frac{2}{3}$． （D） $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$．

4．已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ kx+b, & 0\le x<\pi,\\ 1, & x\ge\pi,\end{cases}$$

$F(x)$在$x=0$连续

$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}(kx+b)=b$

$\lim_{x\to0^-}F(x)=\lim_{x\to0^-}0=0 \quad\Rightarrow b=0$

则参数 k 和 b 分别为（ B ）

$F(x)$在$x=\pi$连续

$\lim_{x\to\pi^-}F(x)=\lim_{x\to\pi^-}(kx+b)=k\pi$

$F(\pi)=1 \quad\Rightarrow k\pi=1 \quad\Rightarrow k=\frac{1}{\pi}$

（A） $k=0,b=\frac{1}{\pi}$． （B） $k=\frac{1}{\pi},b=0$．

（C） $k=\frac{1}{2\pi},b=0$． （D） $k=0,b=\frac{1}{2\pi}$．

5．设随机变量 X 的分布函数和概率密度函数分别为 $F(x)$和$f(x)$，则随机变量 $-X$ 的分布函数和概率密度函数分别为（ C ）

$P\{-X\le x\}=P\{X\ge -x\}$

$=1-F(-x)$

$\frac{d}{dx}[1-F(-x)]=-f(-x)\cdot(-1)$

$=f(-x)$

（A） $F(-x)$和$f(-x)$。 （B） $F(-x)$和$f(x)$。

（C） $1-F(-x)$和$f(-x)$。 （D） $1-F(-x)$和$f(x)$。

$1-P\{X<1\}=1-P\{\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{1-\mu}{\sigma}\}$

$\parallel$ $=1-\Phi(\frac{1-\mu}{\sigma}) \Rightarrow \Phi(\frac{1-\mu}{\sigma})=\frac{1}{2} \Rightarrow \mu=1$

6．设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $P\{X\geq 1\}=\frac{1}{2}$，$f(1)=1$，则（ C ）

（A）$\mu=1,\sigma^2=1$．　　（B）$\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$．

$1=f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(1-1)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

（C）$\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{2\pi}$．　　（D）$\mu=0,\sigma^2=1$．

$\Rightarrow \sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

7．设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ^2 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$（ C ）

$\parallel$ $P\{|\frac{X-\mu}{\sigma}|<1\}=\Phi(1)-\Phi(-1)$

（A）单调增大．　　（B）单调减少．

（C）保持不变．　　（D）增减性不定．

8．设随机变量 $X\sim U(0,1), Y=kX^{\alpha}(\alpha>0)$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，则（ A ）．

$f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|$　　$x=(\frac{y}{k})^{\frac{1}{\alpha}}=h(y)$

$h'(y)=\frac{1}{\alpha}(\frac{y}{k})^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot\frac{1}{k}$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}-1=1 \quad \alpha=\frac{1}{2}$　　$\frac{1}{\alpha k}=2 \Rightarrow k=1$

（A）k=1, $\alpha=\frac{1}{2}$　（B）k=1, $\alpha=2$　（C）k=2, $\alpha=\frac{1}{2}$　(D) k=2, $\alpha=2$

三、计算题

同课后习题A.3

1．一批产品由 9 个正品和 3 个次品组成，从这批产品中每次任取一个，取后不放回，直到取得正品为止．用 X 表示取到的次品个数，写出 X 的分布律和分布函数．

解 X的可能取值为0.1.2.3

$P\{X=0\}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

$P\{X=1\}=\frac{3\times 9}{12\times 11}=\frac{9}{44}$

$P\{X=2\}=\frac{3\times 2\times 9}{12\times 11\times 10}=\frac{9}{220}$

$P\{X=3\}=\frac{3\times 2\times 1\times 9}{12\times 11\times 10\times 9}=\frac{1}{220}$

所以X的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{3}{4} & 0\leq x<1\\ \frac{21}{22} & 1\leq x<2\\ \frac{219}{220} & 2\leq x<3\\ 1 & x\geq 3\end{cases}$$

课后题A.19

2．设随机变量 X 的概率分布为

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10

（1）求 $Y=-2X$ 的概率分布；（2）求 $Z=X^2$ 的概率分布.

解. (1) $Y=-2X$ 的概率分布为

Y	-6	-4	-2	0	2	4
P	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.10

(2) $Z=X^2$ 的概率分布为

Z	0	1	4	9
P	0.25	0.40	0.25	0.10

与A.12题类似，PPT也有类似题

3．设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ k(2-x), & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求：（1）k 的值；（2）X 的分布函数.

解(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 可得 $\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 k(2-x)dx=1$ 解得 $k=1$.

(2) 当 $x<0$ 时. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$

当 $0\le x<1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_0^x f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2$

当 $1\le x<2$ 时. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$

$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_0^1 t\,dt+\int_1^x (2-t)dt=\frac{1}{2}+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

当 $x\ge 2$ 时. $F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+\int_2^x f(t)dt$

$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_0^1 t\,dt+\int_1^2 (2-t)dt+\int_2^x 0\,dt$

$=1$

综上. X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0. & x<0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1 \\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1 & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2. \end{cases}$

4．设在一电路中，电阻两端的电压(V)服从$N(120,4)$，今独立测量了5次，试确定有2次测定值落在区间$[118,122]$之外的概率.

解 设随机变量X表示电阻两端的电压,Y表示5次测量中电压测量值落在[118.122]之外的次数. $P\{118\le X\le 122\}=P\{\frac{118-120}{2}\le\frac{X-120}{2}\le\frac{122-120}{2}\}$

$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$

于是 $P\{\{X<118\}\cup\{X>122\}\}=1-P\{118\le X\le 122\}=1-0.6826=0.3174$

由题意 $Y\sim B(5,0.3174)$

故 $P\{Y=2\}=\binom{5}{2}\times(0.3174)^2\times(0.6826)^3\approx 0.32$

5．设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a,\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x<a,\ (a>0)\\ 1, & x\ge a,\end{cases}$$

求：(1) 常数A、B．(2) 随机变量X落在$\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$内的概率．(3) X的概率密度函数.

解 (1) 由 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-a)^+}F(x)=F(-a)\\ \lim\limits_{x\to a^-}F(x)=F(a)\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}A-\frac{\pi}{2}B=0\\ A+\frac{\pi}{2}B=1\end{cases}$ 解得 $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{\pi}$.

(2) $P\{-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\}=F(\frac{a}{2})-F(-\frac{a}{2})=(A+\frac{\pi}{6}B)-(A-\frac{\pi}{6}B)=\frac{\pi}{3}B=\frac{1}{3}$

(3) X的概率密度函数 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

6. 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

且 $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{8}$，求（1）常数 a,b 的值；（2）$P\left\{\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2}\right\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 可得 $\frac{1}{2}a+b=1$ ①

再由 $P\{X>\frac{1}{2}\}=\frac{5}{8}$ 可得 $\frac{3}{8}a+\frac{1}{2}b=\frac{5}{8}$ ②

①、② 联立解得 $a=1$、$b=\frac{1}{2}$

(2) $P\{\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})dx=\frac{7}{32}$

7. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$，又设 $Y=\begin{cases}1, X>0, \\ -1, X\le 0.\end{cases}$

求：（1）Y 的分布律；（2）计算 $P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}$.

解 (1) $P\{Y=-1\}=P\{X\le 0\}=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx=\frac{1}{2}$.

$P\{Y=1\}=P\{X>0\}=1-P\{X\le 0\}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

故 Y 的分布律为

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(2) $P\{Y>\frac{1}{2}\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$.

同课后习题B.7

8．已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<0\\ \frac{1}{4} & 0\le x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度函数．

解：设Y的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$.

当 $y<0$ 时, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P(\varnothing)=0$

当 $0\le y<1$ 时. $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}f_X(x)dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}$.

当 $1\le y<4$ 时. $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$=\int_{-\sqrt{y}}^{-1}f_X(x)dx+\int_{-1}^{0}f_X(x)dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\sqrt{y}+\frac{1}{2}$

当 $y\ge4$ 时. $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-1}^{0}f_X(x)dx+\int_{0}^{2}f_X(x)dx$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

因此Y的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}} & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}} & 1\le y<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

四、证明题

上课讲过,PPT有

1. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，证明：$Y=aX+b\ (a\ne0)$ 仍然服从正态分布，并指出参数.

证明. 设 $f_X(x)$ 为X的概率密度. $f_Y(y)$ 为Y的概率密度. $y=ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调且反函数为 $x=\frac{1}{a}(y-b)$. 于是

$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\left|\left(\frac{y-b}{a}\right)'\right|$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\cdot|a|}e^{-\frac{(y-a\mu-b)^2}{2\sigma^2a^2}}$

所以 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$.

2. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)$ $(i=1,2)$. 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

解 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}\cdot P\{Y\le y|X=2\}$

$=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $0\le y<1$ 时 $F_Y(y)=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$

$=\frac{1}{2}\int_0^y 1\,dy+\frac{1}{2}\int_0^y\frac{1}{2}dy=\frac{3}{4}y.$

当 $1\le y<2$ 时 $F_Y(y)=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 1\,dy+\frac{1}{2}\int_0^y\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}.$

当 $y\ge 2$ 时 $F_Y(y)=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 1\,dy+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2}dy=1.$

综上. $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}y, & 0\le y<1\\ \frac{1}{4}y+\frac{1}{2}, & 1\le y<2\\ 1. & y\ge 2\end{cases}$