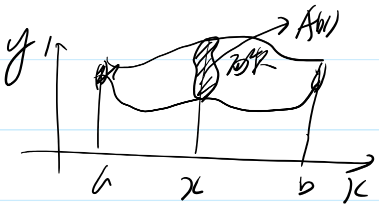
二重积分
1) 曲顶柱体体积 $V_{曲顶柱体} = \iint_{D_{底}} \underbrace{f(x,y)}_{曲顶} d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i,\eta_i)}_{高}\underbrace{\Delta\sigma_i}_{小区域面积}$

2) 平面薄板质量 $M_{薄板D} = \iint_{D_{板}} \underbrace{f(x,y)}_{面密度}\underbrace{d\sigma}_{小面积} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i,\eta_i)}_{面密度}\underbrace{\Delta\sigma_i}_{面积}$

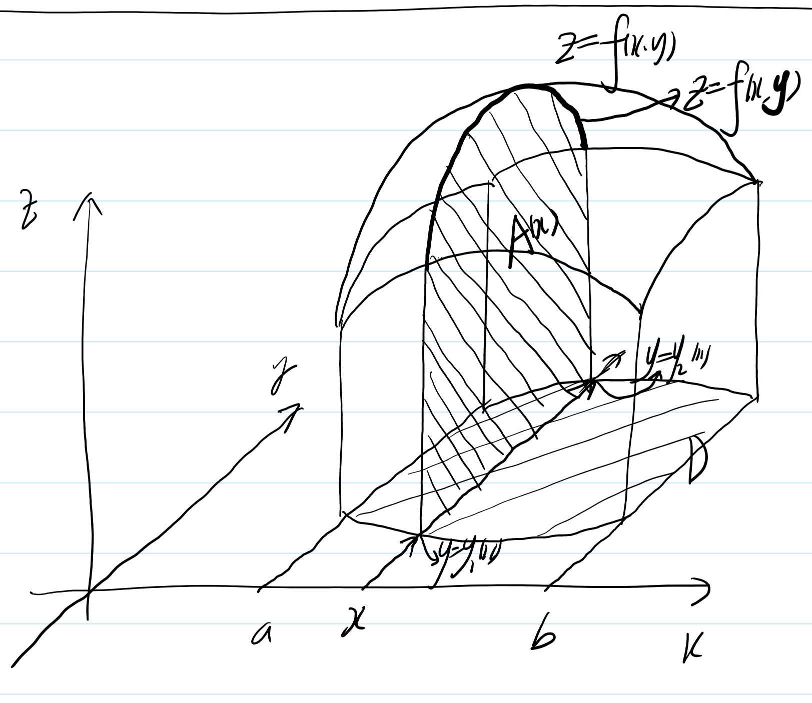
抛去 $z=f(x,y)$ 与 D 的实际含义，仅将 $z=f(x,y)$ 看作定义在区域 D 上的抽象函数，若经以上四步（分割 近似 求和 取极限），还有 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则称 $f(x,y)$ 在 D 上二重可积

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}$$

计算 （截面积已知 立体体积）



$V=\int_a^b A(x)\,dx$



曲面 $z=f(x,y)$ 在xoy面投影为 D

$D:\begin{cases} a\le x\le b \\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\end{cases}$

将 D 或曲顶柱体投影到 x 轴上 $[a,b]$

在 (a,b) 内任取一点 x，则有 $y_1(x)\le y\le y_2(x)$

$V=\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b A(x)\,dx$

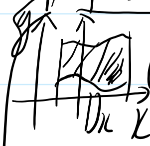
其中 $A(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \xlongequal{d\sigma=dxdy} \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

即 $\boxed{\iint f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}$

即 $\left[\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]$

步骤

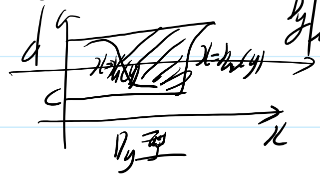


D_x

(1) 画图 (2) $D_x \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$ (3) 代入公式计算

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}$$

(1) 画图 (2) $D_y \begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$



D_y型

第四次作业 三 1.

$f(1,2) = 4$, $df(1,2) = \underbrace{16}_{f'_1(1,2)} dx + \underbrace{4}_{f'_2(1,2)} dy$, $df(1,4) = \underbrace{64}_{f'_1(1,4)} dx + \underbrace{8}_{f'_2(1,4)} dy$, $z = f[x, f(x,y)]$

求 z 在 $(1,2)$ 处 对 x 偏导

$z = f\begin{cases} x \\ f\begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$

$$z'_x = f'_1[x, f(x,y)] + f'_2[x, f(x,y)] \cdot f'_1(x,y)$$

$$z'_x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = f'_1[1,4] + f'_2[1,4] \cdot f'_1(1,2)$$

$$= 64 + 8 \cdot 16$$

第五次作业

一、设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 可微, $\varphi'_y(x,y) \neq 0$, 已知 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 下极值点, 则 ( )

⇒ $y=y(x)$ 隐函数可导

A $f'_x(P_0) \neq 0 \Rightarrow f'_y(P_0) = 0$

B $f'_x(P_0) \neq 0 \Rightarrow f'_y(P_0) \neq 0$

C ... $\Rightarrow f'_y(P_0) \neq 0$

即 $f[x, y(x)]$ 以 P_0 为极值点

$f'_1(P_0) + f'_2(P_0) \cdot y'(P_0) = 0$

$\rightarrow$ B $f_x'(P)\neq 0 \Rightarrow f_y'(P)\neq 0$

C $f_x'(P)=0 \Rightarrow f_y'(P)=0$

D $f_x'(P)=0 \Rightarrow f_y'(P)\neq 0$

$$f_x'(P) + f_y'(P)\cdot y_x'(P) = 0$$

一.4

$z = x + f(y-z)$ 上在任意一点处的切平面（ ）

A ⊥坐标　B // 平面　C 不与坐标轴平行　D 不与 // 坐标

切平面法向量
① $z=z(x,y)$　$\vec{n}=(-z_x', -z_y', 1)$
② $F(x,y,z)=0$，$\vec{n}=(F_x', F_y', F_z')$
③ $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v)\end{cases}$　$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v'\end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

① $\vec{n}=(-z_x', -z_y', 1)$　$z=z(x,y)$

$z = x + f(y-z)$
$$\begin{cases} z_x' = 1 + f_1'(-z_x') \Rightarrow z_x' = \dfrac{1}{1+f_1'} \\ z_y' = f_1'\cdot[1-z_y'] \Rightarrow z_y' = \dfrac{f_1'}{1+f_1'}\end{cases}$$

$$\vec{n} = (-z_x', -z_y', 1) = \left(\frac{-1}{1+f_1'}, \frac{-f_1'}{1+f_1'}, \frac{1+f_1'}{1+f_1'}\right)$$

$\vec{n}\cdot(1,1,1)=0$　　$\vec{n}\perp(1,1,1)$

② $z = x + f(y-z)$　（Σ　$F(x,y,z)=0$　$\vec{n}=(F_x', F_y', F_z')$）

$F(x,y,z) = z - x - f(y-z)$

$\vec{n} = (F_x', F_y', F_z') = (-1, -f_1', 1-f_1'(-1)) = (-1, -f_1', 1+f_1')$

习题2.6 (B) 4. 证明所有与曲面 $z = x f(\frac{y}{x})$ 相切的平面都交于一点

证 设切平面与曲面切于 $P_0\left(x_0, y_0, \underbrace{x_0 f(\frac{y_0}{x_0})}_{z_0}\right)$ 处

$F(x,y,z) = z - x f(\frac{y}{x})$

$\vec{n} = (F_x', F_y', F_z') = \left(-f(\frac{y}{x}) + (-x) f_1' \cdot (-\frac{y}{x^2}), -x f_1' \cdot \frac{1}{x}, 1\right)_{P_0}$

$= \left(-f(\frac{y_0}{x_0}) + \frac{y_0}{x_0} f'(\frac{y_0}{x_0}), -f_1'(\frac{y_0}{x_0}), 1\right) = (A, B, C)$

切平面 $A(X-x_0) + B(Y-y_0) + C(Z-z_0) = 0$

$\left(-f + \frac{y_0}{x_0} f'\right)(X-x_0) - f_1'(Y-y_0) + Z - x_0 f = 0$

$\left(-f + \frac{y_0}{x_0} f'\right)X - f_1' Y + Z + \underbrace{x_0 f - y_0 f' + y_0 f' - x_0 f}_{0} = 0$

$(X, Y, Z) = (0,0,0)$ 适合方程，平面过原点