第四次作业

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

一、填空题

习题17. 1．设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

$D(3X^2+5)=9D(X^2)=30.24$

$D(-2X^2-1)=4D(X^2)=13.44$

$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2=11.2-2.8^2$

$=3.36$

则 $E(X)=$ -0.2，$E(X^2)=$ 2.8，$E(3X^2+5)=$ 13.4．

2．设随机变量 X 服从区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布，且 $Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y)=$ $\frac{2}{\pi}$．

$E(X)=0$　$E(XY)=E(X\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\sin x f(x)dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}$

3．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$Y\sim B(4,P)$

$P=P\{X>\frac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$

$E(Y)=2.$ $D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

对 X 独立重复地观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，则 $E(Y^2)=$ 5．

4．设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim\pi(4)$，并且 X 与 Y 的相关系数为 0.5，则有 $D(3X-2Y)=$ 13．

$D(X)=1.$ $D(Y)=4.$ $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=0.5\cdot1\cdot2=1.$

$D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)-12cov(X,Y)=9\cdot1+4\cdot4-12=13.$

5．对一批圆木的直径进行测量，设其服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，则圆木截面面积的数学期望为 $\frac{1}{12}\pi(a^2+ab+b^2)$

$d\sim U[a,b]$　$S=\frac{1}{4}\pi d^2.$　$E(S)=\frac{1}{4}\pi E(d^2)$

$E(d^2)=D(d)+[E(d)]^2=\frac{1}{12}(b-a)^2+\frac{1}{4}(a+b)^2$

$=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)$

6．设随机变量 X 在 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，设随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ 0, & X=0,\\ -1, & X<0.\end{cases}$$

$E(Y)=P\{X>0\}-P\{X<0\}=1-2P\{X<0\}=1-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$E(Y^2)=P\{X>0\}+P\{X<0\}=1.$

则 $D(Y)=$ $\frac{8}{9}$．

7．已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},-\infty<x<+\infty$，则 $E(X)=$ 1，$D(X)=$ $\frac{1}{2}$．

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}$

$f(x)=0.2f_1(x)+1.6f_1(2x)$ $f_1(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 设 $X_1\sim f_1(x)$ 则 $E(X_1)=1$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}0.2xf_1(x)dx+\int_0^{+\infty}1.6xf_1(2x)dx$

$=0.2\int_0^{+\infty}xf_1(x)dx+0.4\int_0^{+\infty}tf_1(t)dt$

$=0.2E(X_1)+0.4E(X_1)=0.6$

*8. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.2F_1(x)+0.8F_1(2x)$，其中 $F_1(x)$ 是服从参数为 1 的指数分布的随机变量的分布函数，则期望 $E(X)=$ __0.6__.

二、选择题

1. 设 X 是一随机变量，且 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$（$\mu,\sigma>0$ 为常数），则对于任意常数 C,必有（ D ）

$E[(X-C)^2]=E(X^2)+C^2-2CE(X)$

$(X-C)^2=(X-\mu)^2+(\mu-C)^2+2(\mu-C)(X-\mu)$

$E[(X-C)^2]=E[(X-\mu)^2]+(\mu-C)^2+2(\mu-C)E(X-\mu)$ $\overset{\shortparallel}{0}$

$\ge E[(X-\mu)^2]$

（A）$E\left[(X-C)^2\right]=E(X^2)-C^2$.　　（B）$E\left[(X-C)^2\right]=E\left[(X-\mu)^2\right]$.

（C）$E\left[(X-C)^2\right]<E\left[(X-\mu)^2\right]$.　　（D）$E\left[(X-C)^2\right]\ge E\left[(X-\mu)^2\right]$.

$E(X)=1,\ D(X)=2.\Rightarrow E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=3.$

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2), Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)=$（ C ）

$E(Y)=1.\ D(Y)=4\Rightarrow E(Y^2)=5.$

$D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2$

$=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2$

$=3\cdot5-(1\cdot1)^2=14$

（A）6.　　（B）8.

（C）14.　　（D）15.

3. 对于以下各数字特征都存在的任意两个随机变量 X 和 Y，如果 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则有（ B ）.

$E(XY)=E(X)E(Y)\Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关

$\Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

（A）$D(XY)=D(X)D(Y)$.　　（B）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

（C）X 和 Y 相互独立.　　（D）X 和 Y 不相互独立.

4. 设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0$，则为使 $E(a+bX)=0, D(a+bX)=1$，则 a 和 b 分别是（ A ）

$E(a+bX)=a+bE(X)=a+b\mu=0$

$D(a+bX)=b^2D(X)=b^2\sigma^2=1$ $\Rightarrow b=\frac{1}{\sigma}$ $a=-\frac{\mu}{\sigma}$

（A）$a=-\dfrac{\mu}{\sigma}, b=\dfrac{1}{\sigma}$.　　（B）$a=-\dfrac{\mu}{\sigma}, b=\dfrac{\mu}{\sigma}$.

（C）$a=-\mu, b=\sigma$.　　（D）$a=\mu, b=\dfrac{1}{\sigma}$.

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且方差 $D(X)>0, D(Y)>0$，则（ A ）

$Cov(X,X+Y)=D(X)+Cov(X,Y)=D(X)>0\Rightarrow X$ 与 $X+Y$ 相关

（A）X 与 $X+Y$ 一定相关　　（B）X 与 $X+Y$ 一定不相关.

（C）X 与 XY 一定相关.　　（D）X 与 XY 一定不相关.

$Cov(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)=E(X^2)E(Y)-E(X)E(X)E(Y)=D(X)E(Y)$

无法判断 X 与 XY 是否相关

6. 若随机变量 X 与 Y 满足 $Y=1-\dfrac{X}{2}$，且 $D(X)=2$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$（ C ）

（A）1.　　（B）2.

（C）-1.　　（D）-2.

$Cov(X,Y)=Cov(X,1-\frac{X}{2})=-\frac{1}{2}Cov(X,X)=-\frac{1}{2}D(X)=-1$

$\rho_{XY}=1 \Rightarrow P\{Y=a+bX\}=1$ 且$b>0$. 其中 $E(Y)=E(a+bX)=a+bE(X)=a=1$

$D(Y)=D(a+bX)=b^2D(X)=b^2=4 \Rightarrow b=2$

7．设随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（ C ）

$E(X)=0, D(X)=1, E(Y)=1, D(Y)=4$

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$.　　　　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$.

（C）$P\{Y=2X+1\}=1$.　　　　（D）$P\{Y=-2X+1\}=1$.

三、计算题

A5 1．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ cx+b, & 2\le x<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

已知 $E(X)=2, P\{1<X<3\}=\dfrac{3}{4}$，求 a,b,c 的值.

解 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 得 $\int_0^2 ax\,dx+\int_2^4 (cx+b)\,dx=1$ 即 $2a+2b+6c=1$ ①

由 $E(X)=2$ 得 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=2$ 即 $\int_0^2 ax^2dx+\int_2^4 x(cx+b)\,dx=2$

亦即 $\frac{8}{3}a+6b+\frac{56}{3}c=2$ ②

由 $P\{1<X<3\}=\frac{3}{4}$ 得 $\int_1^2 ax\,dx+\int_2^3 (cx+b)\,dx=\frac{3}{4}$ 即 $\frac{3}{2}a+b+\frac{5}{2}c=\frac{3}{4}$ ③

①.②.③ 联立解得 $a=\frac{1}{4}$　$b=1$　$c=-\frac{1}{4}$

A17 2．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其　它}, \end{cases}$

求 $E(X), E(Y), \operatorname{cov}(X,Y), \rho_{XY}$ 和 $D(X+Y)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 \frac{1}{8}x(x+y)dy=\frac{7}{6}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 \frac{1}{8}y(x+y)dy=\frac{7}{6}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 \frac{1}{8}x^2(x+y)dy=\frac{5}{3}$

$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 \frac{1}{8}y^2(x+y)dy=\frac{5}{3}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}$

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{4}{3}$

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-(\frac{7}{6})^2=-\frac{1}{36}$

$\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$.

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\cdot(-\frac{1}{36})=\frac{5}{9}$

3．设二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中a,b,c为常数，且$E(X)=-0.2, P\{Y\le 0|X\le 0\}=0.5$，记$Z=X+Y$，求：（1）$a,b,c$的值；（2）$Z$的概率分布；（3）$P\{X=Z\}$.

解. (1) 由 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}P_{ij}=1$ 得 $a+b+c=0.4$ ①

由 $E(X)=-0.2$ 得 $(-1)\times(a+0.2)+1\times(0.1+c)=-0.2$ 即 $-a+c=-0.1$. ②

由 $P\{Y\le 0|X\le 0\}=0.5$ 得 $\dfrac{P\{X\le 0, Y\le 0\}}{P\{X\le 0\}}=\dfrac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5$ 即 $a+b=0.3$ ③

①.②.③联立解得 $a=0.2$. $b=0.1$. $c=0.1$

(2) Z的分布律为

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(3) $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=b+0.1=0.2$.

B1　4．在数轴上的区间$[0,a]$内任意独立地选取两点M与N，求线段MN长度的数学期望和方差.

解 设M、N两点的坐标分别为X,Y 则(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^a dx\int_0^a|x-y|\cdot\frac{1}{a^2}dy$$

$$=\int_0^a dx\int_0^x(x-y)\cdot\frac{1}{a^2}dy+\int_0^a dx\int_x^a(y-x)\cdot\frac{1}{a^2}dy$$

$$=\frac{a}{6}+\frac{a}{6}=\frac{a}{3}.$$

$$E(|X-Y|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^a dx\int_0^a(x-y)^2\cdot\frac{1}{a^2}dy=\frac{1}{6}a^2$$

$$D(|X-Y|)=E(|X-Y|^2)-[E(|X-Y|)]^2=\frac{1}{6}a^2-\left(\frac{a}{3}\right)^2=\frac{1}{18}a^2$$

5. 已知二维随机变量$(X,Y)\sim N(1,0,3^2,4^2,-\frac{1}{2})$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，求（1）$Z$的数学期望与方差；（2）$X$与$Z$的相关系数；（3）$X$与$Z$是否相互独立？为什么？

解. 由已知，$E(X)=1$. $D(X)=3^2$. $E(Y)=0$. $D(Y)=4^2$. $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$

(1) $E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$.

$$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{2})+2\mathrm{cov}(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\mathrm{cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot 9+\frac{1}{4}\cdot 4^2+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=3.$$

(2). $\mathrm{cov}(X,Z)=\mathrm{cov}(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}\mathrm{cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3^2+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 3\cdot 4=0$$

所以 $\rho_{XZ}=0$

(3) (X,Z)仍服从二维正态分布，由二维正态随机变量相关与相互独立等价知

X和Z相互独立

6. 随机变量X和Y相互独立，都服从$(0,1)$上的均匀分布，以X和Y为边长做一个长方形，用S和C分别表示长方形的周长和面积，求S和C的相关系数。

解. (X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$E(X)=E(Y)=\frac{1}{2}$. $D(X)=D(Y)=\frac{1}{12}$

$E(X^2)=[E(X)]^2+D(X)=\frac{1}{3}$. $E(Y^2)=\frac{1}{3}$

$C=2(X+Y)$, $S=XY$

$\mathrm{cov}(C,S)=\mathrm{cov}(2(X+Y),XY)=2\mathrm{cov}(X,XY)+2\mathrm{cov}(Y,XY)$

$\mathrm{cov}(X,XY)=E(X\cdot XY)-E(X)E(XY)=E(X^2)E(Y)-[E(X)]^2E(Y)=D(X)E(Y)=\frac{1}{24}$

$\mathrm{cov}(Y,XY)=E(Y\cdot XY)-E(Y)E(XY)=E(X)E(Y^2)-E(X)\cdot[E(Y)]^2=E(X)D(Y)=\frac{1}{24}$

于是 $\mathrm{cov}(C,S)=2\mathrm{cov}(X,XY)+2\mathrm{cov}(Y,XY)=\frac{1}{6}$.

$D(S)=D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{4})^2=\frac{7}{144}$

$D(C)=4D(X+Y)=4[D(X)+D(Y)]=\frac{2}{3}$.

于是 $\rho_{CS}=\frac{\mathrm{cov}(C,S)}{\sqrt{D(S)}\cdot\sqrt{D(C)}}=\sqrt{\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$.