一、单项选择题

1. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}, y=x$ 及 $x=2$ 所围成的图形面积为 S, 则 $S=($ B $)$.

(A) $\displaystyle\int_1^2\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$; (B) $\displaystyle\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$; (C) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2(2-y)\,\mathrm{d}y$; (D) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\left(2-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$.

2. 设点 $A(x,\sin x)$ 是曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 上一点,记 $S(x)$ 是直线 OA (O 为原点)与曲线 $y=\sin x$ 所围成图形的面积, 则当 $x\to 0^+$ 时, $S(x)$ 与(D).

(A) x 为同阶无穷小; (B) x^2 为同阶无穷小;

(C) x^3 为同阶无穷小; (D) x^4 为同阶无穷小.

3. 设 $0<g(x)<f(x)<m$(常数), 则由 $y=f(x), y=g(x) x=a, x=b$ 所围成图形绕直线 $y=m$ 旋转所形成的立体的体积等于(B)

(A) $\displaystyle\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(B) $\displaystyle\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(C) $\displaystyle\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(D) $\displaystyle\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

4. 下列反常积分发散的是(A).

(A) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (B) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (C) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; (D) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e},\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant\mathrm{e},\end{cases}$ 若反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 (C).

(A) $\alpha<-2$; (B) $\alpha>2$; (C) $0<\alpha<2$; (D) $-2<\alpha<0$.

二、填空题

1. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[1,\sqrt{3}]$ 上的平均值为______________.

答案 $\dfrac{(1+\sqrt{3})\pi}{24}$.

2. 抛物线 $y^2=ax(a>0)$ 与 $x=1$ 所围图形面积为 $\dfrac{4}{3}$, 则 $a=$______________.

答案 $a=1$.

3. 曲线 $y=x^2, x=y^2$ 围成图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积为______________.

答案 $\dfrac{3\pi}{10}$.

4. 已知反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{ax^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 且值为 1 ,则 $a=$______________.

答案 $-\dfrac{1}{2}$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$______________.

答案 1.

三、计算题

1. 计算由 x 轴,曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 及其经过原点的切线围成的平面图形面积及该图形绕 x 轴旋转一周所得立体体积.

解 设切点为 (x_0,y_0) , 则过切点的切线方程为 $Y-y_0=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(X-x_0)$,
令 $X=0,Y=0,$, 得 $x_0=2,y_0=1$.

围成平面图形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1-\displaystyle\int_1^2\sqrt{x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

旋转体体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times 1^2\times 2-\pi\displaystyle\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$.

2. 设 $A>0, D$ 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0, x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域. V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转而成旋转体的体积, 若 $V_1=V_2$, 求 A 的值.

解 $V_1=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}A^2\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{A^2\pi^2}{4}$. $V_2=2\pi A\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=2\pi A$.

由已知有 $\dfrac{A^2\pi^2}{4}=2\pi A$, 解得 $A=\dfrac{8}{\pi}$.

3. 求曲线 $r^2=\cos 2\theta$ 所围成图形的面积.

解 $S=4S_1=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta=1.$

4. 求摆线 $\left\{\begin{array}{l} y=1-\cos t, \\ x=t-\sin t\end{array}\right.$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的弧长.

解 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'42(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t,$

弧长 $s=\int_0^{\pi}2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4.$

5. 某水坝中有一个三角形的闸门,这闸门笔直竖立在水中,它的底边与水平面相齐,已知三角形底边长为10米,高8米,求闸门所受的水压力.

解 三角形顶点向底边作垂线. 垂足为坐标原点,向下过顶点为 x 轴,则 $x\in[0,8]$.

水压力为

$$\int_0^8\rho g x\frac{5(8-x)}{4}\mathrm{d}x=\frac{5\rho g}{4}\int_0^8 x(8-x)\mathrm{d}x=\frac{320\rho g}{3}.$$

四、判断下列反常积分的收敛性

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x;$ (2) $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

解 (1) 由于 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛, 从而 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\mathrm{d}x$ 收敛,

因此$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 当 $p<1$ 时, $x=0$ 是暇点. $p\geqslant 1$ 时,该积分为无穷积分.

当 $p\geqslant 1$ 时,由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}=0$, 因此 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $p<1$ 时, $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}x^{1-p}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}=1,$$

当 $1-p<1$, 即 $p>0$ 时,级数收敛,当$1-p\geqslant 1$ 即 $p\leqslant 0$ 时,级数发散.

综上, 当 $p>0$ 时,积分收敛.