第二节　方差

一、　方差的概念

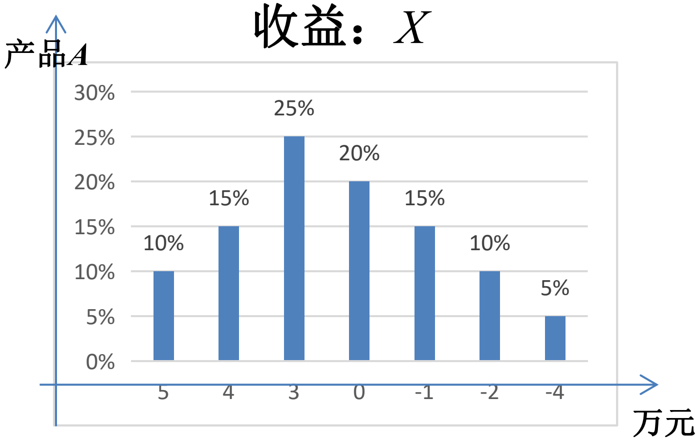
二、　方差的性质

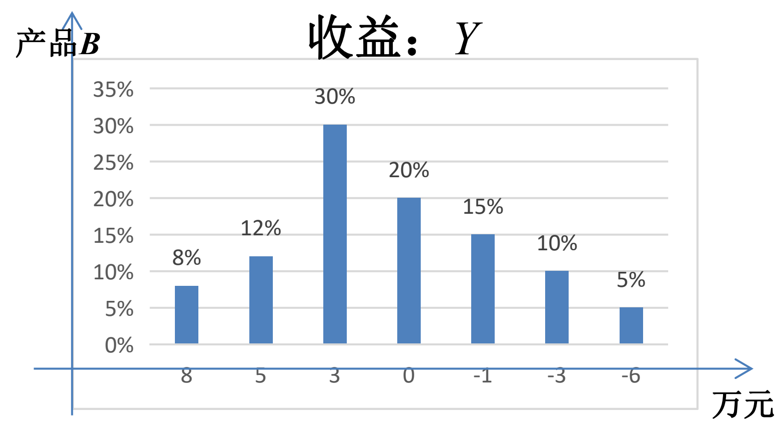
三、　随机变量的标准化

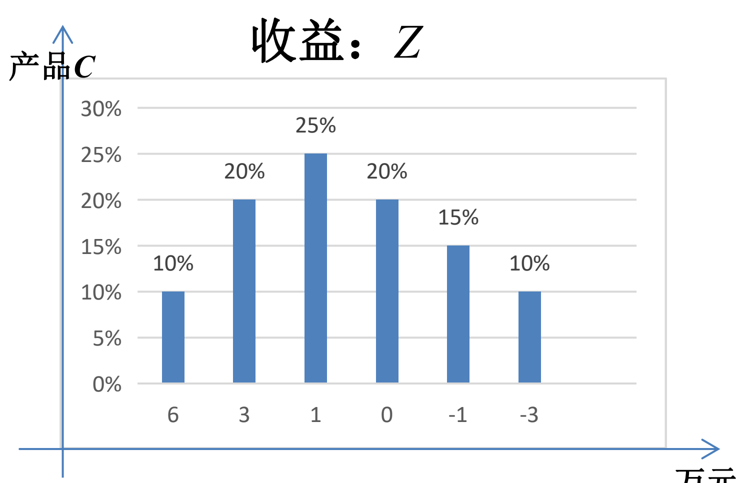
四、　小结

一、方差的概念

1. 引例 某人有20万元，若存银行一年可获得利息收益4000元。若购买理财产品，有3种产品A,B,C可选。预期收益图如下图，此人应如何选择呢？







X: 理财产品A的收益

X	5	4	3	0	-1	-2	-4
P	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05

$$E(X)=\sum_{i=1}^{7}x_i p_i=1.3(\text{万元}).$$

Y: 理财产品B的收益

Y	8	5	3	0	-1	-3	-6
P	0.08	0.12	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05

高收益

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{7}x_i p_i=1.39(\text{万元}).$$

Z: 理财产品C的收益

Z	6	3	1	0	-1	-3
P	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=1.0(\text{万元}).$$

投资选择标准

高收益　　低风险

收益的偏差 $\Delta x_k = [x_k - E(X)]^2.$

收益的平均偏差 $E(\Delta x) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k = E[X - E(X)]^2.$

理财产品A收益的平均偏差 $E[X - E(X)]^2 = 6.81,$

理财产品B收益的平均偏差 $E[Y - E(Y)]^2 = 11.74,$ 高收益 选B

理财产品C收益的平均偏差 $E[Z - E(Z)]^2 = 5.71,$ 低风险 选C

产品	预期收益（万元）	预期风险（万元）	收益增幅/风险增幅
A	$E(X)=1.30$ 30%↑	$\sigma(X)=2.61$ 9.2%↑	3.26
B	$E(Y)=1.39$ 39%↑	$\sigma(Y)=3.43$ 43.5%↑	0.9
C	$E(Z)=1.00$ 0	$\sigma(Z)=2.39$ 0	1

选择标准

高收益 **选B**

低风险 **选C**

综合标准

选A

2. 方差的定义

设 X 是随机变量，若 $E(X-EX)^2$ 存在，

称其为随机变量 X 的方差，记作 D(X) 或 Var (X) ,

即：$D(X)=Var\,(X)=E(X-EX)^2$

注：(1)方差的本质是均值，它描述了随机变量的取值与其均值的偏离程度.
方差越小，说明X取值的稳定性越好。

(2) 并不是所有的随机变量都有方差。

(3)$D(X)\geq 0$,但$E(X)$不一定.

(4)$\sqrt{D(X)}$称为标准差或均方差，记为$\sigma(X)$.

3. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为X的概率密度.

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \Leftrightarrow \begin{cases} E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2 \\ [E(X)]^2=E(X^2)-D(X) \end{cases}$$ 知二推一

证明 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-E^2(X).$$

例4.2.1 设 X 服从参数为 p 的(0-1)分布，

求$D(X)$.

解

X	0	1
p	$1-p$	p

$E(X)=p$,

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

例4.2.2 设 $X \sim P(\lambda)$ ，求$D(X)$.

解

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \cdots \quad E(X) = \lambda$$

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X] = E[X(X-1)] + E(X)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda^2,$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda,$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

例4.2.3 设$X \sim B(n, p)$，求$D(X)$.

解 $P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$ $\quad E(X)=np$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1+1)n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\boxed{\sum_{k=1}^{n} np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}}+\boxed{\sum_{k=2}^{n} n(n-1)p^2\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-2-(k-2)}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} np\binom{n-1}{k}p^{k}(1-p)^{n-1-k}+\sum_{k=0}^{n-2} n(n-1)p^2\binom{n-2}{k}p^{k}(1-p)^{n-2-k}$$

$$=np+n(n-1)p^2$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=np+n(n-1)p^2-n^2p^2=np(1-p).$$

例4.2.4 设X ~参数为 p 的几何分布，求$D(X)$.

解 $$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots,n,\cdots$$

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2p\left(1-p\right)^{k-1}$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}\left(k+1\right)k\left(1-p\right)^{k-1}-p\sum_{k=1}^{\infty}k\left(1-p\right)^{k-1}$$

$$=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}\left(\text{利用}\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\right)$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1-p}{p^2}$$

例4.2.5 设 X 在 (a, b)上服从均匀分布, 求$D(X)$.

解

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它,\end{cases} \qquad E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

例4.2.6　设X服从参数为λ的指数分布，求 $D(X)$.

解

$$X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}, \lambda>0.$$

$$EX=\frac{1}{\lambda}$$

$$DX=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^2 d\left(e^{-\lambda x}\right)=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx$$

$$=-(0-0)+\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda}E(X)=\frac{2}{\lambda^2},$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

例4.2.7 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求$D(X)$.

解 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty < x < +\infty \qquad E(X)=\mu$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \overset{\text{令}\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=\!=\!=\!=}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}td(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}[te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt]$$

$$=\sigma^2$$

六种一维常见分布的期望与方差

背！

特殊分布		EX	DX
离散型	两点分布 $B(1,p)$	p	$pq=p(1-p)$
	二项分布 $B(n,p)$	np	$npq=np(1-p)$
	泊松分布	λ	λ
连续型	均匀分布	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
	指数分布	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
	正态分布	μ	σ^2

二、 方差的性质

性质1　设 C 为常数，则 $D(C)=0$.

证　$$D(C)=E[C-E(C)]^2=E(C-C)^2=E(0)=0$$

性质2　$$D(CX)=C^2D(X)$$

证　$$D(CX)=E[CX-E(CX)]^2=E\{C^2[X-E(X)]^2\}=C^2D(X)$$

性质3　$$D(X+C)=D(X)$$

证　$$D(X+C)=E[X+C-E(X+C)]^2=E[X+C-E(X)-E(C)]^2$$

$$=E[X-E(X)]^2=D(X)$$

性质4

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

若X与Y相互独立, 则有

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

证

$$D(X \pm Y) = E\{[X \pm Y - E(X \pm Y)]^2\}$$

$$= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2$$

$$= E\{[X - E(X)]^2 \pm 2[X - E(X)][Y - E(Y)] + [Y - E(Y)]^2\}$$

$$= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

$$= D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

若X与Y相互独立, 则X-E(X)与Y−E(Y)也相互独立.

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]=0$$

则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$

推广　若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,则有

$$D(X_1\pm X_2\pm\cdots\pm X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n).$$

性质5 随机变量X的方差$D(X)$=0的充分必要条件是:

X以概率1取常数C=$E(X)$,即 $P\{X=C\}=1$

注 $D(X)=0 \not\longrightarrow$ X恒取常数

正态分布的相关结论

(1)若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

(2)设$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,并且$X$与$Y$相互独立,则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

$$X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

例4.2.8 设$X \sim B(n, p)$，求$D(X)$.

解一 前面已求解.

解二 引入随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次试验事件 } A \text{ 发生} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次试验事件 } \bar{A} \text{ 发生} \end{cases}$$

$$D(X_i) = p(1-p) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

故

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p).$$

三、随机变量的标准化

设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$

及方差 $D(X)=\sigma^2>0$，则称

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

为X的标准化随机变量。

易证： $E(X^*)=0, D(X^*)=1.$

若$X\sim N(\mu,\sigma^2),\sigma>0,$ 则$X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

例4.2.9 设$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n$相互独立，并且具有相同的期望$\mu$与方差$\sigma^2$，

$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，求$E(\overline{\mathbf{X}}), D(\overline{\mathbf{X}}), \overline{\mathbf{X}}^*$.

解

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\bar{X}^* = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

例4.2.10 设 $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$, 求 $D(2X^3+5)$.

解 $D(2X^3+5) = D(2X^3)$

$$= 4D(X^3)$$

$$= 4[E(X^6) - (E(X^3))^2]$$

$$E(X^6) = (-2)^6 \times \frac{1}{3} + 0^6 \times \frac{1}{2} + 1^6 \times \frac{1}{12} + 3^6 \times \frac{1}{12} = \frac{493}{6},$$

$$[E(X^3)]^2=\left[(-2)^3\times\frac{1}{3}+0^3\times\frac{1}{2}+1^3\times\frac{1}{12}+3^3\times\frac{1}{12}\right]^2$$

$$=(-\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9},$$

故 $D(2X^3+5)=4[E(X^6)-(E(X^3))^2]$

$$=4\times(\tfrac{493}{6}-\tfrac{1}{9})$$

$$=\frac{2954}{9}.$$

例4.2.11 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\,\mathrm{d}x$

$=0,$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6},$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}.$$

四、小结

1. 方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示 X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

2. 方差的计算公式

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$$

3. 方差的性质

1° $D(C)=0$;

2° $D(CX)=C^2 D(X)$;

3° $D(X \pm Y)=D(X)+D(Y)$. (当X与Y相互独立时)

4° $D(X)=0$的充要条件是 X 以概率1 取常数 C,即 $\boldsymbol{P\{X=C\}=1}$.