第二节　正态总体参数的假设检验

一、　单个正态总体均值与方差的假设检验

（一）、单个总体均值的检验

（二）、单个总体方差的检验

二、　两个正态总体均值差与方差比的假设检验

（一）、两个总体均值差的检验

（二）、两个总体方差比的检验

一、 单个正态总体均值与方差的假设检验

假设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本，样本均值为$\overline{X}$,样本方差为S^2.

(一)、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的检验

1. σ^2 为已知, 关于μ的检验(u检验)

当σ^2为已知时, 关于$\mu=\mu_0$的检验问题:

(1) 假设检验 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$;

(2) 假设检验 $H_0:\mu\leq\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$;

(3) 假设检验 $H_0:\mu\geq\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$.

取检验统计量$u=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$,

以下讨论中都是利用统计量 $u=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域的,

这种检验法称为 **u 检验法.**

(1) 假设检验 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$.

当H_0成立时，检验统计量

$$u=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

对于给定的显著性水平 α，拒绝域为 $W=\{u \mid |u|\geq u_{\alpha/2}\}$.

(2) 假设检验 $H_0: \mu \le \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$.

对于给定的显著性水平 α，拒绝域为 $W = \{u \mid u \ge u_\alpha\}$.

分析： $\overline{X}$是μ的无偏估计量,$\overline{X}$的取值在μ的附近波动，

若H_0成立，则$\overline{X} - \mu_0$偏小于0.

因此可求一常数C，当$\overline{X} - \mu_0 \ge C$时拒绝$H_0$. 当$\overline{X} - \mu_0 < C$时接受$H_0$.

$$P\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu \le \mu_0\} = P\{\frac{\overline{X}-\mu-(\mu_0-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu \le \mu_0\}$$

$$= P\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu \le \mu_0\} \le P\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu \le \mu_0\},$$

故若$P\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu \le \mu_0\} = \alpha$,则$P\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu \le \mu_0\} \le \alpha$,

当H_0成立时，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,可取$\frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} = u_\alpha$, 从而$P_{H_0}\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge u_\alpha\} \le \alpha$,

因此拒绝域为$W = \{u \mid u = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge u_\alpha\}$.

(3) 假设检验 $H_0: \mu \ge \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$.

对于给定的显著性水平 α，拒绝域为 $W = \{u | u \le -u_\alpha\}$.

分析： $\overline{X}$是μ的无偏估计量，$\overline{X}$的取值在μ的附近波动，

若H_0成立，则$\overline{X} - \mu_0$偏大于0.

因此可求一常数C，当$\overline{X} - \mu_0 \le C$时拒绝$H_0$. 当$\overline{X} - \mu_0 > C$时接受$H_0$.

$$P\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu \ge \mu_0\} = P\{\frac{\overline{X}-\mu-(\mu_0-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu \ge \mu_0\}$$

$$= P\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu \ge \mu_0\} \le P\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu \ge \mu_0\},$$

故若$P\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu \ge \mu_0\} = \alpha$，则$P\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} | \mu \ge \mu_0\} \le \alpha$,

当H_0成立时，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，可取$\frac{C}{\sigma/\sqrt{n}} = -u_\alpha$，从而$P_{H_0}\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -u_\alpha\} \le \alpha$,

因此拒绝域为 $W = \{u | u = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -u_\alpha\}$.

一个有用的结论

当显著性水平均为α时,

检验问题 $H_0: \mu \le \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$和检验问题

$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ 有相同的拒绝域.

检验问题 $H_0: \mu \ge \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$和检验问题

$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$有相同的拒绝域.

例8.2.1 一种元件，要求其平均寿命不小于1000h，现在从一批这种元件中随机抽取25件，测得平均寿命为 950 h，已知这种元件寿命服从 σ =100 h 的正态分布，试在显著性水平$\alpha = 0.05$ 的条件下,确定这批元件是否合格.

解 H_0: $\mu = 1000$，H_1: $\mu < 1000$.

当H_0为真时，检验统计量

$$u = \frac{\overline{X} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

对于给定的显著性水平$\alpha = 0.05$, 查表得$u_\alpha = u_{0.05} = 1.645$.

此题是一个左边检验的问题，拒绝域为 $u \le -u_\alpha = -1.645$

现在 $n = 25$，$\sigma = 100$，$\overline{x} = 950$,

$$u = \frac{\overline{x} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}} = -2.5 < -1.645,$$

所以拒绝H_0，而接受H_1，即认为这批元件不合格.

2. σ^2为未知, 关于μ的检验(t检验)

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,其中μ,σ^2未知,显著性水平为α.

(1)求检验问题$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$的拒绝域.

因为σ^2未知, 不能利用$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$来确定拒绝域.

因为S^2是σ^2的无偏估计,故用S来取代σ,

即采用$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$来作为检验统计量.

当观察值 $|t| = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|$ 过分大时就拒绝 H_0,

拒绝域的形式为 $|t| = \left|\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq k$.

根据第六章定理知,

当H_0为真时, $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

$$P\{拒绝\ H_0 \mid H_0\ 为真\} = P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq k\right\} = \alpha,$$

得 $k = t_{\alpha/2}(n-1)$,

$$\text{拒绝域为} |t| = \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1).$$

上述利用 t 统计量得出的检验法称为t 检验法.

类似1中的讨论，对于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$,当σ^2未知时,可得关于μ的单边检验的拒绝域.

(2)检验问题 $H_0: \mu \leq \mu_0(\mu = \mu_0), H_1: \mu > \mu_0$.

$$\text{拒绝域为} t = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha}(n-1).$$

(3)检验问题 $H_0: \mu \geq \mu_0(\mu = \mu_0), H_1: \mu < \mu_0$.

$$\text{拒绝域为} t = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha}(n-1).$$

例8.2.3 某车间加工一种零件，要求长度为150mm，今从一批加工后的这种零件中抽取 9 个，测得长度如下：

147，150，149，154，152，153，148，151，155

假设零件长度服从正态分布,问这批零件是否合格？ $\alpha = 0.05$

解 这里是在总体方差σ^2未知的情况下，检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 150,\quad H_1: \mu \neq 150.$$

当H_0为真时，检验统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$,拒绝域为$|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$.

这里 $n = 9$, $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$.

由给定的样本值求得 $\bar{x} = \dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 151$, $s^2 = \dfrac{1}{9-1}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2 = 7.5$

$$s = \sqrt{7.5} = 2.739,\qquad |t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} = 1.096 < 2.306.$$

所以接受H_0，即在显著性水平α=0.05下认为这批零件合格.

(二)、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$方差σ^2的检验

1. μ为已知, 关于σ^2的检验(χ^2检验)

(1) 要求检验假设: $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$,

其中σ_0为已知常数. 设显著水平为α,

由于$\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(X_i-\mu)^2$是$\sigma^2$的无偏估计, 当$H_0$为真时,

比值$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$在$n$附近摆动, 不应过分大于$n$或过分小于$n$,

由第六章定理知，当 H_0 为真时，$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$，

取 $\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ 作为统计量，

拒绝域的形式 $\chi^2 \le k_1$ 或 $\chi^2 \ge k_2$，

此处 k_1 和 k_2 的值由下式确定：

$$P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\}$$

$$= P_{\sigma_0^2}\{(\chi^2 \le k_1) \cup (\chi^2 \ge k_2)\} = \alpha.$$

为了计算方便, 习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\left\{\chi^2 \le k_1\right\} = \frac{\alpha}{2}, \quad P_{\sigma_0^2}\left\{\chi^2 \ge k_2\right\} = \frac{\alpha}{2},$$

故得 $k_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n), \; k_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n).$

拒绝域为:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n) \text{或} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n).$$

指它们的和集

(2)单边检验问题的拒绝域 (设显著水平为 α)

右边假设检验: $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$,

因为 H_0 中的全部 σ^2 都比 H_1 中的 σ^2 要小,

当 H_1为真时, $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ 的观察值 往往偏大,

拒绝域的形式为: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \ge k.$

此处 k 的值由下式确定：

$$P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \ge k\right\} \le \alpha$$

$$P_{\sigma^2\le\sigma_0^2}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\ge k\right\}\le P_{\sigma^2\le\sigma_0^2}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\ge k\right\}.\quad (因为\sigma^2\le\sigma_0^2)$$

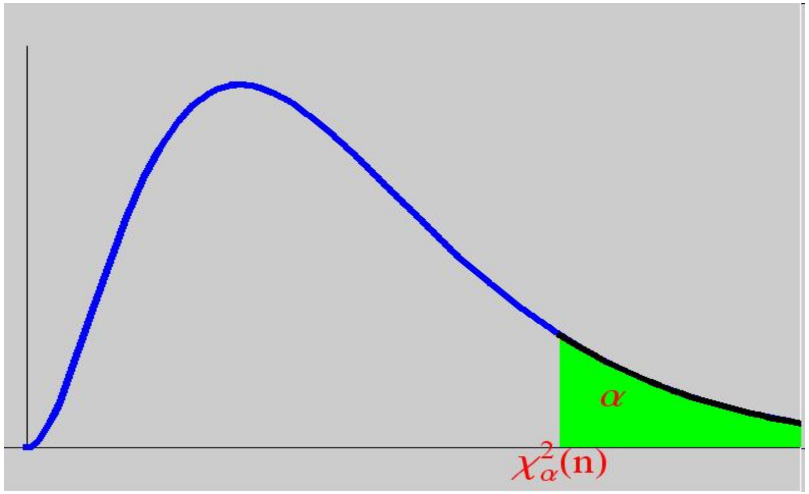
只需令 $P_{\sigma^2\le\sigma_0^2}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\ge k\right\}=\alpha.$

即可使 $P\{$拒绝$H_0\mid H_0$为真$\}\le\alpha,$

因为 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n),$ 所以 $k=\chi_\alpha^2(n),$

右边检验问题的拒绝域为

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^{\ 2}} \geq \chi_\alpha^2(n).$$



同理左边检验问题：$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^{\ 2}$， $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^{\ 2}$，

拒绝域为 $$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^{\ 2}} \leq \chi_{1-\alpha}^2(n).$$

上述检验法称为 χ^2 检验法.

(二)、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$方差σ^2的检验

2. μ为未知, 关于σ^2的检验(χ^2检验)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$ ($\sigma^2\ge\sigma_0^2$)	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$ ($\sigma^2\le\sigma_0^2$)	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha}(n-1)$

例8.2.5 某无线电厂生产的一种高频管，其中一项指标服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$.

从一大批这种产品中随机地抽取8只管子，测得该指标数据如下：

68, 43, 70, 65, 55, 56, 60, 72,

(1) 当总体均值$\mu = 60$时，检验$\sigma^2 = 8^2$（取$\alpha = 0.05$）;

(2) 当总体均值μ未知时，检验$\sigma^2 = 8^2$（取$\alpha = 0.05$）.

解

本题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$下检验假设$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 8^2$, $H_1 : \sigma^2 \neq 8^2$.

(1) 当总体均值 $\mu = 60$时，检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{8}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(8)$,

拒绝域为 $W = \{\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(8)$或$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(8)\}$.

对于显著性水平α=0. 05, 查表得$\chi^2_{\alpha/2}(8) = \chi^2_{0.025}(8) = 17.535$,

$\chi^2_{1-\alpha/2}(8) = \chi^2_{0.975}(8) = 2.18$.

由样本值计算得 $\chi^2 = \dfrac{1}{8^2}\sum_{i=1}^{8}(x_i - 60)^2 = 10.3594$.

由于2. 18 $< \chi^2 = 10.3594 < 17.535$,所以接受$H_0$.即认为$\sigma^2 = 8^2$.

(2) 当总体均值 μ未知时，检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(8-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(7)$,

拒绝域为 $W = \{\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(7)$或$\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(7)\}$.

对于显著性水平α=0. 05, 查表得

$$\chi^2_{\alpha/2}(7) = \chi^2_{0.025}(7) = 16.013,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(7) = \chi^2_{0.975}(7) = 1.69.$$

由样本值计算得 $\overline{x} = \dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = 61.125, s^2 = \dfrac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2 = 93.268.$

从而有$\chi^2 = \dfrac{(8-1)s^2}{8^2} = 10.2012$,

由于1. 69 $< \chi^2 = 10.2012 < 16.013$, 所以接受$H_0$. 即认为$\sigma^2 = 8^2$.

二、 两个正态总体均值差与方差比的假设检验

(一)、两个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

设总体 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 分别为来自总体 X 与 Y 的相互独立的样本．$\bar{X},\bar{Y}$ 分别是样本均值，S_1^2,S_2^2 分别是样本方差。

1 方差已知时，均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的假设检验—u 检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$u=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$\lvert u\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1-\mu_2=\delta$ $(\mu_1-\mu_2\geq\delta)$	$\mu_1-\mu_2<\delta$		$u\leq -u_\alpha$
$\mu_1-\mu_2=\delta$ $(\mu_1-\mu_2\leq\delta)$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	(σ_1^2， σ_2^2 已知)	$u\geq u_\alpha$

方差齐性

2.方差$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知时，均值差$\mu_1-\mu_2$的假设检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}S_w}$	$\lvert t\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$
$\mu_1-\mu_2=\delta$ $(\mu_1-\mu_2\geq\delta)$	$\mu_1-\mu_2<\delta$		$t\leq -t_{\alpha}(m+n-2)$
$\mu_1-\mu_2=\delta$ $(\mu_1-\mu_2\leq\delta)$	$\mu_1-\mu_2>\delta$		$t\geq t_{\alpha}(m+n-2)$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}$

以双边检验为例，推导拒绝域如下：

求检验问题 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta,\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$ (δ 为已知常数)的拒绝域.

取显著性水平为 α.

引入 t 统计量作为检验统计量：

$$t = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - \delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}},\qquad \text{其中 } S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^{\,2} + (n-1)S_2^{\,2}}{m+n-2}.$$

当 H_0 为真时，根据**第六章定理**知，

$$t \sim t(m+n-2).$$

其拒绝域的形式为 $\left|\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\right| \geq k,$

$$P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = P_{\mu_1-\mu_2=\delta}\left\{\frac{|(\overline{X}-\overline{Y})-\delta|}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \geq k\right\} = \alpha$$

得 $k = t_{\alpha/2}(m+n-2).$

故拒绝域为 $t = \dfrac{\left|(\overline{X}-\overline{Y})-\delta\right|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}} \geq t_{\alpha/2}(m+n-2).$

例8.2.7 有甲、乙两台机床加工相同的产品, 从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干件, 测得产品直径(单位:mm)为

机床甲: 20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9

机床乙: 19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2,

试比较甲、乙两台机床加工的产品直径有无显著差异? 假定两台机床加工的产品直径都服从正态分布, 且总体方差相等. $(\alpha = 0.05)$

解 依题意, 两总体 X 和 Y 分别服从正态分布

$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$, μ_1, μ_2, σ^2均为未知,

需要检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

$$n_1 = 8, \quad \bar{x} = 19.925, \quad s_1^2 = 0.216,$$

$$n_2 = 7, \quad \bar{y} = 20.000, \quad s_2^2 = 0.397,$$

且 $s_w^2 = \dfrac{(8-1)s_1^2 + (7-1)s_2^2}{8+7-2} = 0.547$,

查表可知 $t_{0.025}(13) = 2.1604$,

$|t| = \left| \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{7}}} \right| = 0.265 < 2.1604$, 所以接受 H_0,

即甲、乙两台机床加工的产品直径无显著差异.

例8.2.6 在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率, 试验是在同一只平炉上进行的. 每炼一炉钢时除操作方法外, 其它条件都尽可能做到相同.先采用标准方法炼一炉, 然后用建议的新方法炼一炉, 以后交替进行, 各炼了10炉, 其钢的得率分别为(1)标准方法:

78.1, 72.4, 76.2, 74.3, 77.4, 78.4, 76.0, 75.5, 76.7, 77.3;

(2)新方法:

79.1, 81.0, 77.3, 79.1, 80.0, 79.1, 79.1, 77.3, 80.2, 82.1;

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体

$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$, μ_1,μ_2,σ^2均为未知,

问建议的新操作方法能否提高得率? (取$\alpha=0.05$)

解 需要检验假设 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

检验统计量为 $$t = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - 0}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

其拒绝域为 $W = \{t \le -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)\}$. 查表可知 $t_{0.05}(18) = 1.7341$,

$$n_1 = 10, \quad \overline{x} = 76.23, \quad s_1^2 = 3.325,$$

$$n_2 = 10, \quad \overline{y} = 79.43, \quad s_2^2 = 2.225,$$

且 $$s_w^2 = \frac{(10-1)s_1^2 + (10-1)s_2^2}{10+10-2} = 2.775,$$

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -4.295 < -t_{0.05}(18) = -1.7341,$$

所以拒绝 H_0, 即认为建议的新操作方法较原来的方法为优.

（二）两个正态总体方差比的假设检验

1．均值μ_1, μ_2已知时，方差比σ_1^2 / σ_2^2的假设检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2} \cdot \dfrac{n}{m}$	$F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)$ 或 $F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $(\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2)$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F \le F_{1-\alpha}(m,n)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $(\sigma_1^2 \le \sigma_2^2)$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F \ge F_{\alpha}(m,n)$

2．均值μ_1, μ_2未知时，方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的假设检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ 或 $F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ($\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$)	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F \le F_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ($\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$)	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F \ge F_{\alpha}(m-1, n-1)$

以右边假设为例，推导拒绝域如下：

需要检验假设：$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$， $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$，

当 H_0 为真时，$E(S_1^2) = \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 = E(S_2^2)$,

当 H_1 为真时，$E(S_1^2) = \sigma_1^2 > \sigma_2^2 = E(S_2^2)$,

当 H_1 为真时，观察值 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ 有偏大的趋势，

故拒绝域的形式为 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \ge k$,

此处 k 的值由下式确定：

$$P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}\} = P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \ge k\right\} \le \alpha$$

$$P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \ge k\right\}$$

$$\le P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \ge k\right\}, \quad (\text{因为} \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \le 1)$$

只需令 $P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \ge k\right\} = \alpha.$

即可使 $P\{$ 拒绝 $H_0 \mid H_0$ 为真 $\} \le \alpha,$

根据第六章定理知

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(m-1,\ n-1).$$

即 $k = F_\alpha(m-1,\ n-1)$.

检验问题的拒绝域为 $\boxed{F = \dfrac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}} \geq F_\alpha(m-1,\ n-1).}$

上述在双正态总体均值已知或未知两种情形下，对方差比进行检验的方法称为 *F* **检验法**.

例8.2.8 从甲乙两个煤矿各随机地抽样数次，分析煤的含灰率(%)如下：

甲矿：24.3, 20.8, 23.7, 21.3, 17.4;

乙矿：18.2, 16.9, 20.2, 16.7.

假定各煤矿煤的含灰率都服从正态分布，问甲乙两煤矿煤的含灰率有无显著差异（取$\alpha=0.05$）？

解 设甲乙两煤矿煤的含灰率分别为X和Y,

且有$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$均未知,

需检验$\mu_1=\mu_2,\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

先检验假设$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

取检验统计量为$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$. $n_1=5$, $n_2=4$,

拒绝域为$W=\{F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或$F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\}$.

对于显著性水平**α=0.05**, 查表得 $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(4,3)=15.1$,

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(4,3)=\frac{1}{F_{0.025}(3,4)}=\frac{1}{9.98}=0.1002.$$

$$\bar{x} = 21.5, \quad s_1^{\,2} = 7.505,$$

$$\bar{y} = 18, \qquad s_2^{\,2} = 2.593,$$

从而可得$F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 2.894.$

由于$0.1002 < F = 2.894 < 15.1$,所以接受$H_0$. 即认为$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

再检验假设$H_0^{'}: \mu_1 = \mu_2, H_1^{'}: \mu_1 \neq \mu_2$.

取检验统计量为$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, 拒绝域为

$W = \{|t| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\}$.

对于显著性水平α=0. 05, 查表得$t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(7) = 2.3646$,

$$由于 s_W^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 5.4, s_W = \sqrt{s_W^2} = 2.32,$$

$$于是 t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 2.245,$$

由于$|t| = 2.245 < 2.3646$, 所以接受$H_0^{'}$. 即认为甲乙两煤矿煤的含灰率没有显著差异。

三、小结

正态总体均值的假设检验有:

1. 单个总体均值μ的检验——u 检验, t检验;

2. 两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的检验——u检验, t 检验;

正态总体方差的假设检验有:

1. 单个正态总体方差的检验法——χ^2 检验法;

2. 两个正态总体方差比的检验法——F 检验法;

正态总体均值、方差的检验法见下表

(显著性水平为α)

附表8.1

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$\boldsymbol{u} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0}{\boldsymbol{\sigma} / \sqrt{\boldsymbol{n}}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$\boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{u}_\alpha$ $\boldsymbol{u} \le -\boldsymbol{u}_\alpha$ $\lvert\boldsymbol{u}\rvert \ge \boldsymbol{u}_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2已知)	$\boldsymbol{u} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{X}} - \overline{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{\delta}}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\boldsymbol{n}_1} + \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\boldsymbol{n}_2}}}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$\boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{u}_\alpha$ $\boldsymbol{u} \le -\boldsymbol{u}_\alpha$ $\lvert\boldsymbol{u}\rvert \ge \boldsymbol{u}_{\alpha/2}$
4	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$\boldsymbol{t} \ge \boldsymbol{t}_\alpha(\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 - 2)$ $\boldsymbol{t} \le -\boldsymbol{t}_\alpha(\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 - 2)$ $\lvert\boldsymbol{t}\rvert \ge \boldsymbol{t}_{\alpha/2}(\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 - 2)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ已知)	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$
6	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
7	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1,μ_2未知)	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或 $F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
8	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1,μ_2已知)	$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\cdot\frac{n_2}{n_1}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1,n_2)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$或 $F \le F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)$