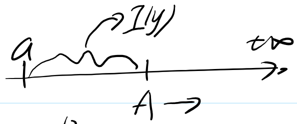
含参量积分34-1

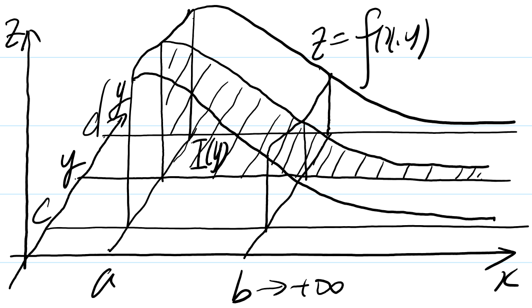
2022年6月10日 7:52



$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y)\,dx \qquad D=\{(x,y)\mid a\le x<+\infty,\ c\le y\le d\}$$

定义1 $\forall\varepsilon>0$, $\underbrace{\forall y\in[c,d]}$, $\underbrace{\exists X\ge a}_{与y有关}$, $\forall A>X \Rightarrow \left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon \Leftrightarrow I(y)$在$y\in[c,d]$上逐点收敛

定义2 $\forall\varepsilon>0$, $\underbrace{\exists X\ge a}_{与y无关}$, $\underbrace{\forall y\in[c,d]}$, $\forall A>X \Rightarrow \left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon \Leftrightarrow I(y)$在$y\in[c,d]$上一致收敛



与y无关X
最大的X
通用的X
} 对$\forall y\in[c,d]$

定理6 (Weierstrass—M判别法) $f(x,y)$在$D=\{(x,y)\mid a\le x<+\infty,\ c\le y\le d\}$上连续

若$\exists M>0$, $\forall x>M$, $\forall y\in[c,d] \Rightarrow |f(x,y)|\le G(x)$ 且 $\int_a^{+\infty}G(x)\,dx$收敛, 则有

$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ 在$y\in[c,d]$上一致收敛

证明:
$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\,dx-0\right|\le\int_A^{+\infty}|f(x,y)|\,dx\le\underbrace{\int_A^{+\infty}G(x)\,dx}_{与y无关}<\varepsilon$$

定理7 $f(x,y)$在$D=\{(x,y)\mid a\le x<+\infty,\ c\le y\le d\}$上连续且$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$在$y\in[c,d]$上一致收敛 则有

(1) $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ 在$y\in[c,d]$上连续

或 $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)\,dx$

(2) $\int_c^d dy\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty}dx\int_c^d f(x,y)\,dy$

定理 8 $f(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid a\le x<+\infty,\ c\le y\le d\}$ 上连续，且

$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在 $y\in[c,d]$ 上收敛 且 $\int_a^{+\infty}f_y'(x,y)dx$ 在 $y\in[c,d]$ 上一致收敛，

则 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在 $y\in[c,d]$ 上一致收敛且有连续的导数 且 求导与积分可换序

即 $$I'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f_y'(x,y)dx$$

例4 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \quad (a>0,\ b>0)$

解 $$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b e^{-yx}dy\right)dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-yx}dy$$

$$\underbrace{e^{-yx}}_{f(x,y)}\le\underbrace{e^{-y_0x}}_{g(x)}\quad(0\le x<+\infty,\ y\ge y_0\quad y_0=\min\{a,b\}),\ 且\int_0^{+\infty}e^{-y_0x}dx=\frac{1}{y_0}收敛$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}e^{-yx}dx$ 在 $y\in[y_0,+\infty)$ 上一致收敛 由定理7

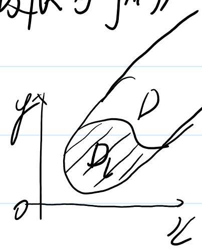
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-yx}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx=\int_a^b\frac{1}{y}dy=\ln\frac{b}{a}$$

广义重积分

定义 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中无界区域，$f(x,y)$ 在 D 上有定义且在 D 的每个有界子区域 D_0 上常义可积

其中D_l可通过以面积为零的曲线l分割D所得到，令$d=\inf\{\sqrt{x^2+y^2}:(x,y)\in l\cap D\}$

若$\lim\limits_{d\to+\infty}\iint_{D_l} f(x,y)d\sigma$存在，则称$f(x,y)$在$D$上的广义二重积分收敛，并称此极限为$f(x,y)$在无界区域$D$上的广义二重积分，记为$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{d\to+\infty}\iint_{D_l}f(x,y)d\sigma$，否则称$\iint_D f(x,y)d\sigma$发散

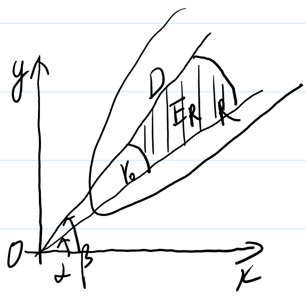


定理 函数$f(x,y)$在无界区域D上广义二重积分收敛 $\Longleftrightarrow$ $|f(x,y)|$在D上广义二重积分收敛

定理(Cauchy判别法) $f(x,y)$在无界区域D的任意子区域D_l上常义可积，令$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D$,

则 (1) r充分大时，$|f(x,y)|\le C\frac{1}{r^p}$，$C$为常数，$p>2$时$\iint_D f(x,y)d\sigma$收敛

(2) 若D中含有Δ: $\alpha\le\theta\le\beta$, $r\ge r_0$ (r_0为常数)且$r>r_0$时$|f(x,y)|\ge C\frac{1}{r^p}$ (C为常数, $p\le 2$), 则$\iint_D f(x,y)d\sigma$发散



证明 (1) 设$r\ge r_0$时$|f(x,y)|\le C\frac{1}{r^p}$ ($p>2$)，作$A_R: x^2+y^2\le R^2$，记$D_R=A_R\cap D$，则$R>r_0$时

$$\iint_{D_R}|f(x,y)|dxdy=\iint_{D_r}|f(x,y)|dxdy+\iint_{D_R\setminus D_r}|f(x,y)|dxdy\le\iint_{D_r}|f(x,y)|d\sigma+\iint_{A_R\setminus A_r}\frac{C}{r^p}dxdy$$

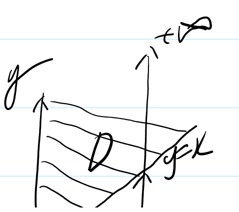
而$\iint_{A_R\setminus A_r}\frac{C}{r^p}dxdy=C\int_0^{2\pi}d\theta\int_{r_0}^{R}\frac{1}{r^p}rdr\le 2\pi C\frac{1}{p-2}\left(\frac{1}{r_0}\right)^{p-2}\stackrel{p>2}{=}K$，则$\iint_{D_R}|f(x,y)|d\sigma$有界，则其收敛$\Rightarrow\iint_D f(x,y)d\sigma$收敛

(2) 记$E_R=\{(r,\theta)\mid\alpha\le\theta\le\beta,\ r_0\le r\le R\}$，则有

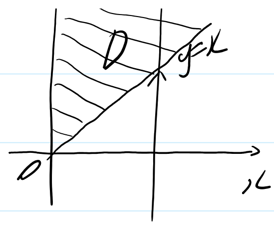
$$\iint_{D_R}|f(x,y)|dxdy=\iint_{D_r}|f(x,y)|d\sigma+\iint_{D_R\setminus D_{r_0}}|f(x,y)|d\sigma\ge\iint_{D_r}|f(x,y)|d\sigma+\iint_{E_R}|f(x,y)|d\sigma$$

而$\iint_{E_R}|f(x,y)|d\sigma\ge\int_\alpha^\beta d\theta\int_r^R\frac{C}{r^p}rdr=(\beta-\alpha)\int_r^R\frac{C}{r^{p-1}}dr$，$p-1\le1$，则当$R\to+\infty$时此积分发散，则$\iint_D|f(x,y)|d\sigma$发散，则$\iint_D f(x,y)d\sigma$发散

例 证明 $I=\iint_{0\le x\le y}e^{-(x+y)}dxdy$ 收敛，并求值



例 证明 $I=\iint\limits_{0\le x\le y} e \quad dxdy$ 收敛 并求值



$$f(x,y)=e^{-(x+y)} \xlongequal{\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{(x+y)^2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}=e^{-r} \xlongequal{r充分大} \frac{1}{r^{\alpha}}\ (\alpha>2)$$

由定理9. 原式收敛，$I=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$

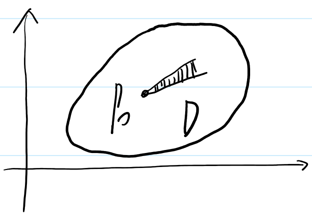
无界函数的广义二重积分

定义 设P_0为有界闭域D的一个聚点，$f(x,y)$在$D\setminus\{P_0\}$上有定义且在$\forall\,\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$内无界，$f(x,y)$在任意$D\setminus U(P_0,\delta)$内常义可积，对$\forall\,U(P_0,\delta)$，若$\lim\limits_{\delta\to0}\iint\limits_{D\setminus U(P_0,\delta)}f(x,y)dxdy$存在，则称$f(x,y)$在$D$上的广义二重积分收敛，记为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\delta\to0}\iint\limits_{D\setminus U(P_0,\delta)}f(x,y)dxdy$

定理 $f(x,y)$在有界闭域D上除P_0外处处有定义，且在$\forall\,\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$上无界，则有

1) 若在$U(P_0)$内有$|f(x,y)|\le C\frac{1}{r^p}$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，$C$为常数，$p<2$则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$收敛

2) 若D内含有以P_0为顶点的扇形区域且在P_0点附近有$|f(x,y)|\ge C\frac{1}{r^p}$，$p\ge2$则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$发散



例 证明 $I=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{|x|+|y|}}d\sigma$ (D: $x^2+y^2\le1$) 收敛

证明：$\forall\,P(x,y)\in D\setminus O(0,0)$，$\frac{1}{\sqrt{|x|+|y|}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{r}$，则$I=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{|x|+|y|}}d\sigma$收敛