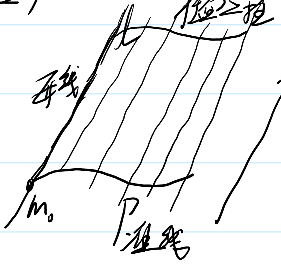
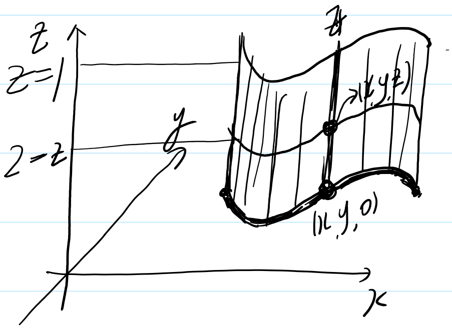
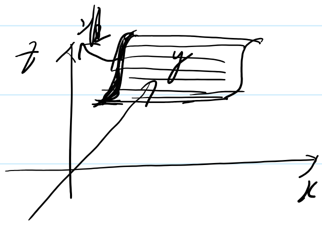
空间曲面（柱面 锥面 旋转曲面 二次曲面）



1) 柱面（S // 轴，Γ 坐标面上的曲线）



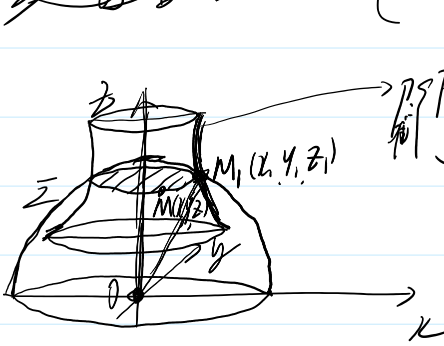
$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 准线（在 xOy 面上） 母线平行 z 轴的柱面 $F(x,y)=0$

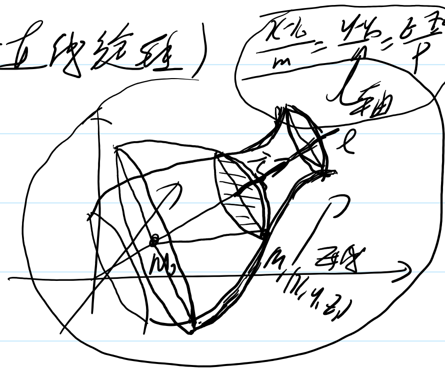


$\begin{cases} H(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 准线（在 yOz 面上） 母线平行 x 轴 柱面 $H(y,z)=0$

$\begin{cases} G(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 准线（在 xOz 面上） 母线平行 y 轴柱面 $G(x,z)=0$

旋转曲面（空间曲线 绕任意一条直线旋转）





前 $\Gamma \begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 为 xOz 面上的曲线

以 Γ 为母线绕 z 轴旋转一周

所得旋转曲面

$\forall M(x,y,z) \in \Sigma_{旋转}$，过 M 点作 z 轴垂平面 $z=z$，此平面交旋转面 Σ 为一个纬圆，交于母线 Γ 上的 $M_1(x_1,y_1,z_1)$

纬圆 $\begin{cases} z=z_1 \\ (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = (x_1-0)^2+(y_1-0)^2+(z_1-0)^2 \end{cases}$ ① 消去参数 ...

$$\begin{cases} \text{球面} \begin{cases} z=z_1 \\ (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=(x_1-0)^2+(y_1-0)^2+(z_1-0)^2 \end{cases} \\ \text{圆} \begin{cases} F(x_1,z_1)=0 \\ y_1=0 \end{cases} \end{cases}$$

① ② 消去参数 M_1 ③ 用参数 (x,y,z) ④

$$\begin{cases} z=z_1 \\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+(y_1)^2+z_1^2 \\ y_1=0 \\ F(x_1,z_1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=z \\ x_1=\pm\sqrt{x^2+y^2} \\ F(x_1,z_1)=0 \end{cases} \Rightarrow F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

即 {母线曲线 $F(x,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

{xOz 面上曲线 $F(x,z)=0$ 绕 x 轴 —— $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

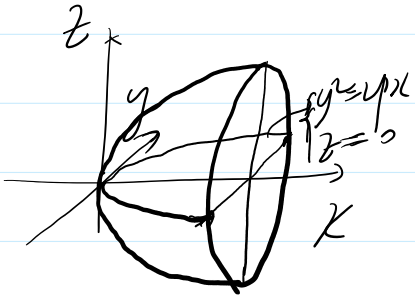
{母线曲线 $H(y,z)=0$，绕 z 轴 —— $H_1(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

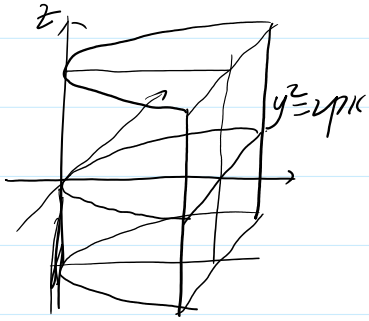
—— y —— $H(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

{xOy 面上曲线 $G(x,y)=0$ —— 绕 x —— $G(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

—— 绕 y —— $G(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$

例 $y^2=2px$ 在 xOy 面上抛物线，求其绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面



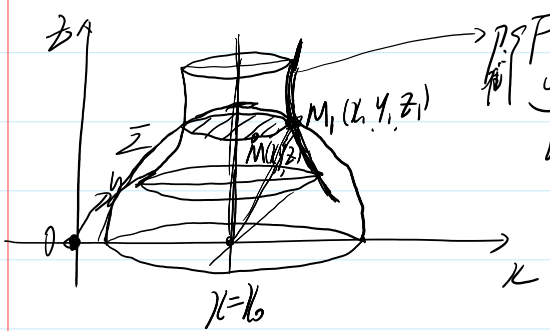


$\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2=2px$

$y^2+z^2=2px$ 即为所求

$z=0$ 为 xOy 面的平面方程

为个 —— 即 $F(x,z)=0$ 为 xOz 面上的曲线



设 $\begin{cases}F(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$ 为 xOz 面上一条曲线

以 P 为母线绕 $\begin{cases}x=x_0\\ y=0\end{cases}$ 旋转一周

形成旋转曲面

纬圆 $\begin{cases}z=z_1\\ (x-x_0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-0)^2+(z_1-0)^2\end{cases}$

P 点 $\begin{cases}F(x_1,z_1)=0\\ y_1=0\end{cases}$

① ② 消去参数 M_1 ③ 由参数 (x,y,z_1) ④

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+y^2+z^2=(x_1-x_0)^2+y_1^2+z_1^2\\ y_1=0\\ z=z_1\\ F(x_1,z_1)=0\end{cases}$$

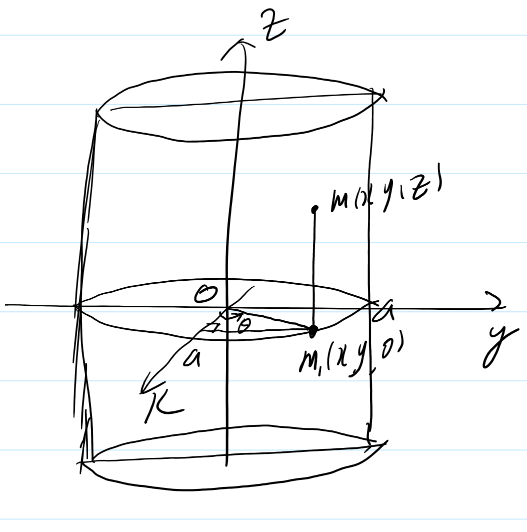
$$\begin{cases}(x-x_0)^2+y^2=(x_1-x_0)^2 \Rightarrow x_1=x_0\pm\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}\\ z_1=z\\ F(x_1,z_1)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow F\left(x_0\pm\sqrt{(x-x_0)^2+y^2},\ z\right)=0$$

曲面参数方程

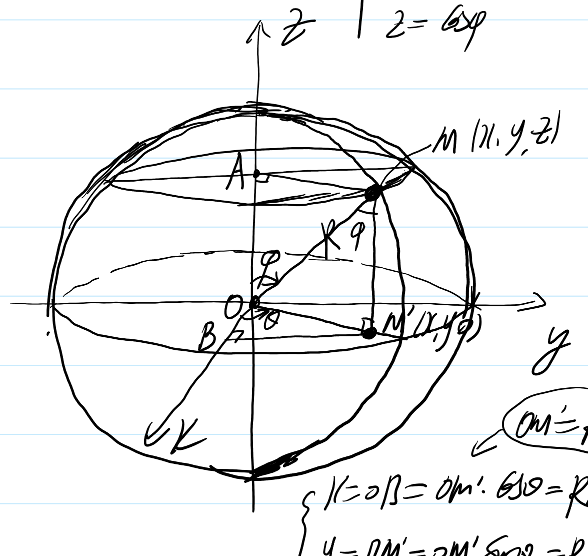
① 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=z\end{cases}\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ z\in R$$



② 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\ y=R\sin\varphi\sin\theta\\ z=\cos\varphi\end{cases}\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi$$



$OM'=R\sin\varphi$

$$\begin{cases}x=OB=OM'\cos\theta=R\sin\varphi\cos\theta\\ y=BM'=OM'\sin\theta=R\sin\varphi\sin\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases} y = BM' = OM' \sin\theta = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = OA = OM\cos\varphi = R\cos\varphi \end{cases}$$

Σ $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ 若 $Ax+By+C(u,v)+D=0$

$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \frac{1}{C}(-Ax-By-D) \end{cases}$ 以 x, y 为参数

曲线的方程 (1) 一般式方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

(2) 参数式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \Sigma_1: z = z_1(x,y) \\ \Sigma_2: z = z_2(x,y) \end{cases}$

曲面 ① $z = f(x,y)$

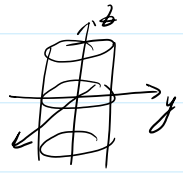
② $F(x,y,z)=0$

③ $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

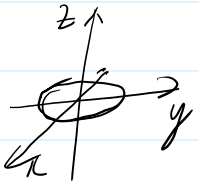
$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$

$\hookrightarrow$ $\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} & \Pi_1 \\ \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} & \Pi_2 \end{cases}$

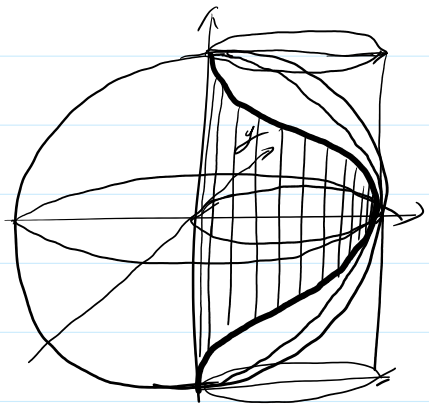
(4) $x^2+y^2=1$



(5) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$



(6) Viviani (维维安尼) 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=Rx \\ (x-\frac{R}{2})^2+y^2=(\frac{R}{2})^2 \end{cases}$

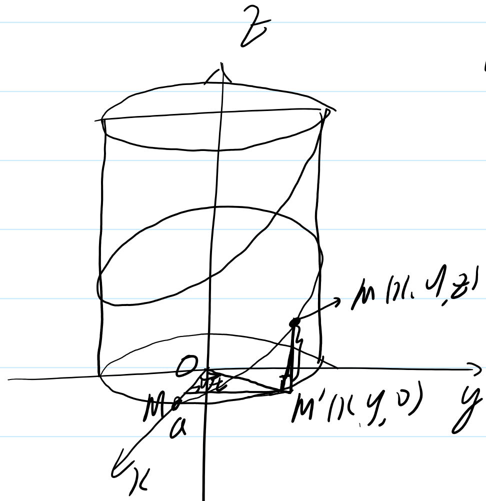


(7) 投影柱面

(8) 锥面

5) 螺旋线

$$\begin{cases} x = a\cos \omega t \\ y = a\sin \omega t \\ z = v_0 t \end{cases}$$



ω_0角速度

v_0线

$\omega_0 t = \theta$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = v_0 \frac{\theta}{\omega_0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

$b = \frac{v_0}{\omega_0}$

$\theta \in (0, +\infty)$