第六次作业

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

一、填空题

1．设总体 X 的数学期望和方差都存在，且 $E(X)=\mu, DX=\sigma^2$. 来自总体 X 的样本

$E(\frac{n-1}{n}S^2)=\frac{n-1}{n}E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$，则 $E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=$ $\underline{\sigma^2}$，$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$ $\underline{\frac{n-1}{n}\sigma^2}$.

2．设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，记随机变量 $X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$，则当 $a=$ $\underline{\frac{1}{20}}$，$b=$ $\underline{\frac{1}{100}}$ 时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为 $\underline{2}$.

$X_1-2X_2\sim N(0,20)$　$\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$

$3X_3-4X_4\sim N(0,100)$　$\frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1)$

3．设总体 $X\sim B(m,p)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，样本均值为 $\overline{X}$，则 $E(\overline{X})=$ $\underline{mp}$，$D(\overline{X})=$ $\underline{\frac{1}{n}mp(1-p)}$.

$E(X_i)=mp$　$D(X_i)=mp(1-p)$

PPT有 上课已讲

4．设 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2), i=1,2,\cdots,n+1$，是相互独立的，记

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2,$$

则 $Y=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}\sim$ $\underline{t(n-1)}$.

$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\overline{X}_n\sim N(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2)$

$X_{n+1}-\overline{X}_n\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$

$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　$X_{n+1}, \overline{X}_n$ 与 S_n^2 独立

$\Rightarrow \frac{(X_{n+1}-\overline{X}_n)/\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}{\sqrt{(n-1)S_n^2/\sigma^2\cdot(n-1)}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n}\sim t(n-1)$

5．来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，设总体 $X\sim B(1,\frac{1}{2})$. 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

$P(\overline{X}=\frac{k}{n})$ $\underline{=\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n}$.

$P(\overline{X}=\frac{k}{n})=P(\sum_{i=1}^{n}X_i=k)=\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n$

6．设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<\infty$，来自总体 X 的简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其样本方差为 S^2，则 $E(S^2)=$ $\underline{2}$.

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-|x|}dx$
$=0$

$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$
$=2\int_0^{+\infty}x^2\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$
$=2$

二、选择题

1．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记

$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,=\frac{n-1}{n}S_1^2$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\quad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

则下列随机变量中服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的是（ B ）

$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S_1^2/\sigma^2}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

$\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

(A) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$. (B) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$. (C) $\dfrac{\overline{X}\ \ \mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$. (D) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$.

2．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则 $P\left\{\dfrac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{0.025}\right\}=$（ C ）

$P\left\{\dfrac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant u_{0.025}\right\}=2\times0.025=0.05$

（A）0.025. （B）0.975. （C）0.95. （D）0.05.

3. 设随机变量 $X\sim t(n)\,(n>1)$, $Y=\dfrac{1}{X^2}$，则（ D ）

记 $X=\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$ 其中 $X_1\sim N(0,1)$　X_1与X_2独立

$X_2\sim\chi^2(n)$

（A）$Y\sim\chi^2(n)$. （B）$Y\sim\chi^2(n-1)$. （C）$Y\sim F(1,n)$. （D）$Y\sim F(n,1)$.

$Y=\dfrac{1}{X^2}=\dfrac{X_2/n}{X_1^2}=\dfrac{X_2/n}{X_1^2/1}$

4. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 $N(1,2^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是（ D ）

$X_i\sim N(1,2^2)$

$\dfrac{X_i-1}{2}\sim N(0,1)$

（A）$\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim t(n)$. ×　$\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　（B）$\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim F(n,1)$.

（C）$\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. ×　（D）$\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim\chi^2(n)$.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是两个来自总体的独立的样本，它们的样本方差分别记为 S_X^2 和 S_Y^2，则统计量 $T=(n-1)(S_X^2+S_Y^2)$ 的方差 DT 是（ D ）

$D(S_X^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

$D(S_Y^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

S_X^2与S_Y^2独立

（A）$2n\sigma^4$. （B）$2(n-1)\sigma^4$. （C）$4n\sigma^4$.（D）$4(n-1)\sigma^4$.

6. 设总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, $\overline{X}$ 和 S^2 分别是容量为 n 的样本的均值和方差，则下列选项服从自由度为 n-1 的 T 分布的随机变量是(A).

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

(A) $\dfrac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S}$. (B) $\dfrac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S^2}$. (C) $\dfrac{n\overline{X}}{S}$. (D) $\dfrac{n\overline{X}}{S^2}$.

7. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$, $X_1,X_2\cdots,X_{11}$ 是来自总体的简单随机样本，$Y^2=\dfrac{1}{10}\sum\limits_{i=2}^{11}X_i^2$，则(C).

$\dfrac{X_1-0}{\sigma}\sim N(0,1)$　$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=2}^{11}X_i^2\sim\chi^2(10)$　$\dfrac{X_1^2/(\sigma^2\cdot1)}{\sum\limits_{i=2}^{11}X_i^2/(\sigma^2\cdot10)}=\dfrac{X_1^2}{Y^2}\sim F(1,10)$

$\dfrac{X_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$　$\dfrac{10Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(10)$　$\dfrac{X_1/\sigma}{\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{11}X_i^2/(\sigma^2\cdot10)}}=\dfrac{X_1}{Y}\sim t(10)$

(A) $X_1^2\sim\chi^2(1)$; (B) $Y^2\sim\chi^2(10)$; (C) $\dfrac{X_1}{Y}\sim t(10)$; (D) $\dfrac{X_1^2}{Y^2}\sim F(10,1)$.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 为来自正态总体 $X\sim N(1,4)$ 的简单随机样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}X_i$，$T=\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-\overline{X})^2$,如果 $a\dfrac{(X_5-\overline{X})^2}{T}\sim F(1,3)$，则 $a=$(C).

$X_5\sim N(1,4)$　$X_5-\overline{X}\sim N(0,5)$

$\overline{X}\sim N(1,\frac{4}{4})$

$\dfrac{X_5-\overline{X}}{\sqrt{5}}\sim N(0,1)$

记 $S_4^2=\dfrac{1}{4-1}\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-\overline{X})^2$, $\dfrac{(4-1)S_4^2}{\sigma^2}=\dfrac{T}{4}\sim\chi^2(3)$

$\dfrac{(X_5-\overline{X})^2/5}{T/4\cdot3}\sim F(1,3)$

(A) 2.　　(B) $\frac{2}{5}$.　　(C) $\frac{12}{5}$.　　(D) 1.

三、计算题

此题数理统计门

1．设 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本，样本均值为 $\bar{X}$，试确定 σ 的值，使得 $P\{1<\bar{X}<3\}$ 最大．

解. $\bar{X}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{9})$. $P\{1<\bar{X}<3\}=P\{\frac{1-0}{\sigma/3}<\frac{\bar{X}-0}{\sigma/3}<\frac{3-0}{\sigma/3}\}=\Phi(\frac{9}{\sigma})-\Phi(\frac{3}{\sigma})\triangleq f(\sigma)$

$f'(\sigma)=-\frac{9}{\sigma^2}\varphi(\frac{9}{\sigma})+\frac{3}{\sigma^2}\varphi(\frac{3}{\sigma})$ 令 $f'(\sigma)=0$ 解得 $\sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$. 且 $f''(\sigma)\big|_{\sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}}<0$

故当 $\sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时. $P\{1<\bar{X}<3\}$ 最大

2．设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\cos 2x, & 0<x<\frac{\pi}{4},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，求样本容量 n，使 $P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\frac{\pi}{12}\}\ge\frac{15}{16}$．

解. X的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \sin 2x, & 0<x<\frac{\pi}{4}\\ 1 & x\ge\frac{\pi}{4}\end{cases}$

令 $P\{\min(X_1, X_2, \cdots X_n)<\frac{\pi}{12}\}=1-[1-F(\frac{\pi}{12})]^n=1-(\frac{1}{2})^n\ge\frac{15}{16}$.

解得 $n\ge 4$.

故样本容量n取4即可.

3．设 $X_1、X_2、\cdots、X_8$ 是来自正态总体 $N(0,0.2)$ 的样本，试求 k，使 $P\left\{\sum_{i=1}^{8} X_i^2 < k\right\} = 0.95$．

解 因 $X_i \sim N(0,0.2)$，则 $\frac{X_i}{\sqrt{0.2}} \sim N(0,1)$，$\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{X_i}{\sqrt{0.2}}\right)^2 \sim \chi^2(8)$

$P\left\{\sum_{i=1}^{8} X_i^2 < k\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{8} \frac{X_i^2}{0.2} < 5k\right\} = P\{\chi^2(8) < 5k\} = 0.95$.

查表得 $5k = 15.507$，即 $k = 3.1014$.

4．(a) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2),D(S^2)$.

(b) 如果总体服从泊松分布 $P(\lambda)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，计算 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$.

解 (a) $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ $E(\overline{X}) = \mu$. $D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. $E(S^2) = \sigma^2$.

因 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 则 $D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2) = 2(n-1)$ 从而 $D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

(b) 若 $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X) = \lambda$，$D(X) = \lambda$，从而 $E(\overline{X}) = \lambda$，$D(\overline{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{\lambda}{n}$

$E(S^2) = D(X) = \lambda$

5. 设总体 X 服从正态分布 $N(-1,\sigma^2)$，$\sigma>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，对于统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，比较 $E(T_1)$和$E(T_2)$ 以及 $D(T_1)$和$D(T_2)$ 的大小关系.

解 $E(T_1)=E(\bar{X})=-1$. $D(T_1)=D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

$E(T_2)=E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i)+\frac{1}{n}E(X_n)=-1+\frac{-1}{n}=-1-\frac{1}{n}$

$D(T_2)=D(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n)=D(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i)+D(\frac{1}{n}X_n)$

$=\frac{1}{(n-1)^2}D(\sum_{i=1}^{n-1}X_i)+\frac{1}{n^2}D(X_n)$

$=\frac{\sigma^2}{n-1}+\frac{\sigma^2}{n^2}$

显然 $E(T_1)>E(T_2)$

$D(T_1)<D(T_2)$

6. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,1,2^2,3^2,0)$，判断 $F=\frac{9X^2}{4(Y-1)^2}$ 服从的概率分布.

解 由题意 $X\sim N(0,4)$. $Y\sim N(1,9)$ 且 X 与 Y 相互独立

于是 $\frac{X}{2}\sim N(0,1)$. $\frac{Y-1}{3}\sim N(0,1)$

从而 $\frac{X^2}{4}\sim\chi^2(1)$. $\frac{(Y-1)^2}{9}\sim\chi^2(1)$ 且 $\frac{X^2}{4}$ 与 $\frac{(Y-1)^2}{9}$ 相互独立

由F分布的定义, $F=\frac{9X^2}{4(Y-1)^2}\sim F(1,1)$