递归

吉林大学计算机学院
谷方明
fmgu2002@sina.com

学习目标

- 理解递归的定义
- 利用递归求解问题
- 理解递归的实现机制
- 能够消递归
- 掌握记忆化搜索
- 掌握递归树和主定理

例1

- 从前有座山，山上有座庙，庙里有一个老和尚在给小和尚讲故事，故事里说，从前有座山，山上有座庙，庙里有一个老和尚在给小和尚讲故事，故事里说，……

```
void story( ) {
   printf("从前有座山，山里有座庙，庙里有一个老和尚在给小和尚讲故事，故事里说，");

    story();
}

int main( ) {
   story();
}
```

如何终止

```
#define MAX 10000
void story(int n)
{
   if(n < MAX){
      printf("从前有座山，山里有座庙，庙里有一个老和尚在给小和尚讲故事，故事里说，");
      story( n+1 );
   }
 else printf("都讲%d遍了！你烦不烦哪？\n",MAX);
}
```

递归的定义

- 如果一个对象部分地包含自身，或者利用自身定义自身的方式来定义或描述，则称这个对象是递归的；
- 如果一个过程直接或间接地调用自身，则称这个过程是一个递归过程。直接递归和间接递归
- 递归构成：递归定义+递归出口(终止条件)

例2

- 自然数集合的定义
  - ✓ 1 是 自然数;
  - ✓ 若 s 是自然数，则 s + 1 也是自然数；（+1：后继）

- 数列的定义
  - ✓ $a_{n+1} = a_n + \color{red}{d}$
  - ✓ $a_1 = 1$

递归求解问题

- 递归是一种重要的问题求解工具(魔法)

- 适用条件
  - ✓ 问题的定义是递归的；
  - ✓ 问题涉及的数据结构是递归的；
  - ✓ 问题的解法满足递归性质(与问题规模n有关)

1、问题的定义是递归的

- 例： 阶乘 n! = 1*2*……*n

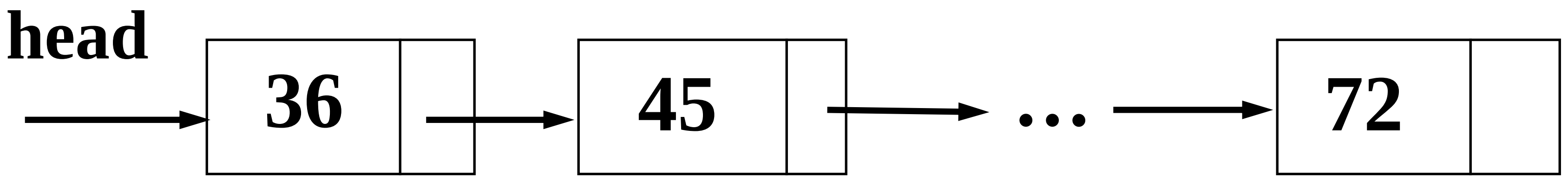
$$n! = \begin{cases} 1 & \mathbf{n = 0} \\ n * (n-1)! & \mathbf{n > 0} \end{cases}$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \mathbf{n = 0} \\ n*(n-1)! & \mathbf{n > 0} \end{cases}$$

```
long long Fac (long long n)
{
   if (n==0)   return 1;
   else   return n * Fac (n-1);
}
```

2、问题涉及的数据结构是递归的

例:　单链表



头指针为**head**的单链表的递归定义:

（1）**head**指向空是一个单链表(空单链表);

（2）**head**指向一个非空结点，该结点的指针域指向一个单链表，这样的数据结构是一个单链表。

打印单链表的所有数据

```
void print（Node  *p）
{
   if（p = = NULL）return;
   else {
         printf(“%d\n“, p->data) ;
         print（p->next）；
   }
}
```

打印单链表最后一个数据

```
void findLast (Node * f ) {
    if ( f ==  NULL)  return;
    if ( f →next == NULL )
        printf("%d\n", f -> data) ;
    else findLast ( f →next ) ;
}
```

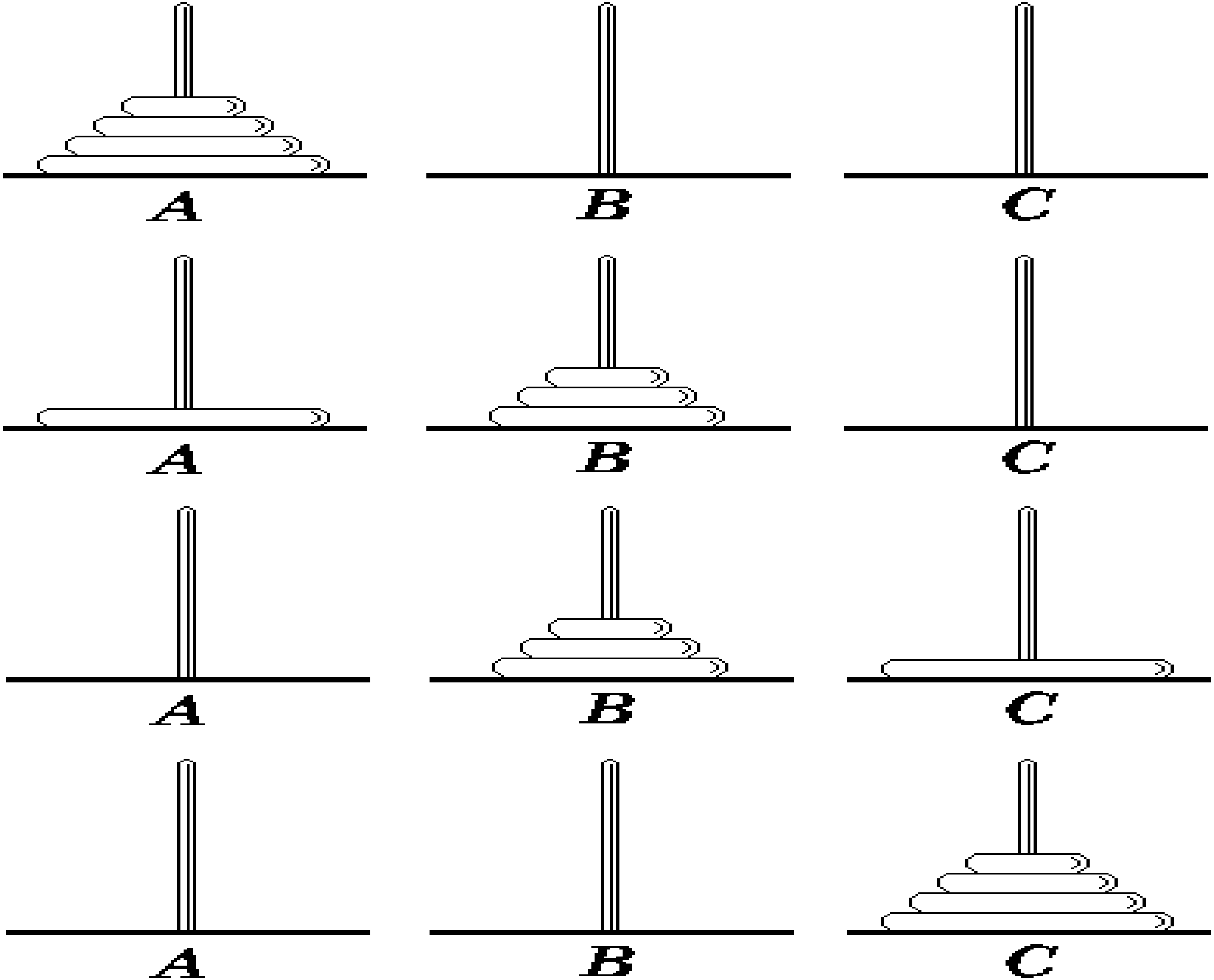
3、问题的解法满足递归性质

- **例：汉诺塔(Tower of Hanoi)问题**

  在世界中心贝拿勒斯（印度北部）的圣庙里，一**块黄铜板上插着三根宝石针**。印度教的主神梵天创世时，**在其中一根针上从下到上地穿好了由大到小的64片金片**，**这就是所谓的汉诺塔**。不论白天黑夜，总有一个僧侣在按照下面的法则移动这些金片：**一次只移动一片，不管在哪根针上，小片必须在大片上面。**

  僧侣们**预言**，当所有的金片都从梵天穿好的那根针上移到另外一根针上时，世界就将在一声霹雳中消灭，而梵塔、庙宇和众生也都将同归于尽。


FOLLOW YOUR NOSE
BALANCE BEAM
HEARING!


A
B
C
A
B
C
A
B
C
A
B
C

解决规模为n的汉诺塔

- 即将 n 个金片 从 A 移到 C 利用 B

- 第一步：将 n-1 个金片从 A 移到 B 利用 C；
- 第二步：将第 n 个金片从 A 移到 C；
- 第三步：将 n-1个 金片从 B 移到 C 利用A ；

汉诺塔的实现

```
void hanoi (int  n, char a, char b, char c)
{
     if(n>0){
          hanoi(n-1,a,c,b);
          printf("%c -> %c\n", a , c );
          hanoi(n-1,b,a,c);
     }
}
```

证明：所述方法移动的步数最少

- 数学归纳法
- 当n=1时，所述方法只要1步完成，步数最少。
- 设当n=k时，所述方法移动的步数最少。

当n=k+1时，必然要出现一种局面：最大的盘子在A柱上，其它k个盘子在B柱上，C柱为空。根据假设，所述方法把A上k个盘子利用C柱移动到B柱的步数最少；最大的盘子移动到C上需要1步；所述方法把B柱上的k个盘子利用A柱移动到C柱的步数也最少，因此所述方法在k+1个盘子的情况下移动步数最少。

移动的最少步数f_n

- 移动的最少步数f_n形成一个数列

- $f_1 = 1$
- $f_n = f_{n-1} + 1 + f_{n-1}$
- 解得： $f_n = 2^n - 1$

- $f_{64} =$ 1.84467440*10^19
- 假设每秒移动1次，超过5800亿年

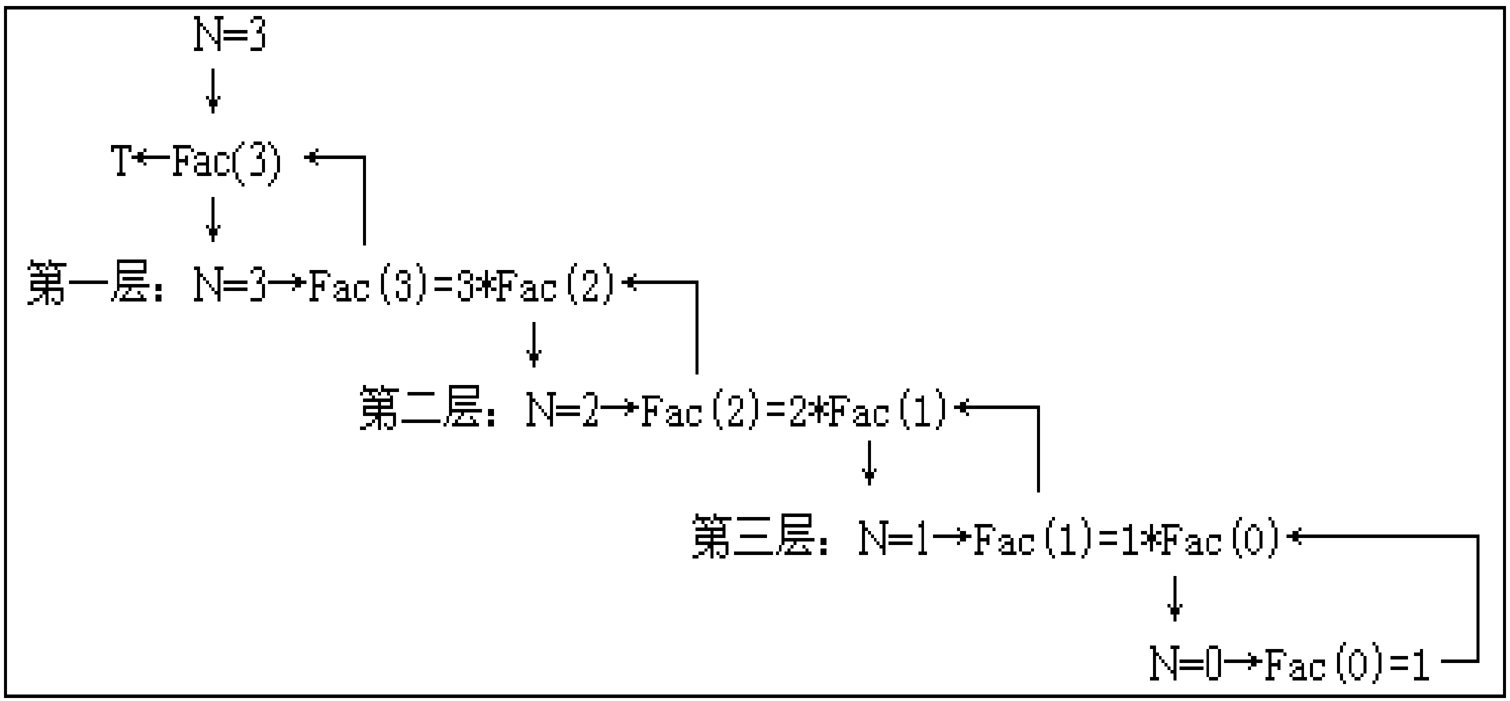
课堂练习

- 输入一个整数，用递归算法将整数倒序输出。
- $x^n = x \times x \times \ldots \times x$ （n 个x 连乘）
  - ✓ $x^n = x^{n-1} \times x$
  - ✓ $x^n = x^{n/2} \times x^{n/2}$ n是偶数

    $= x^{n/2} \times x^{n/2} \times x$ n是奇数
- gcd (a , b)
  - ✓ **gcd(a,b) = gcd(b, a%b)**
  - ✓ **gcd(a,0) = a**

递归的执行过程

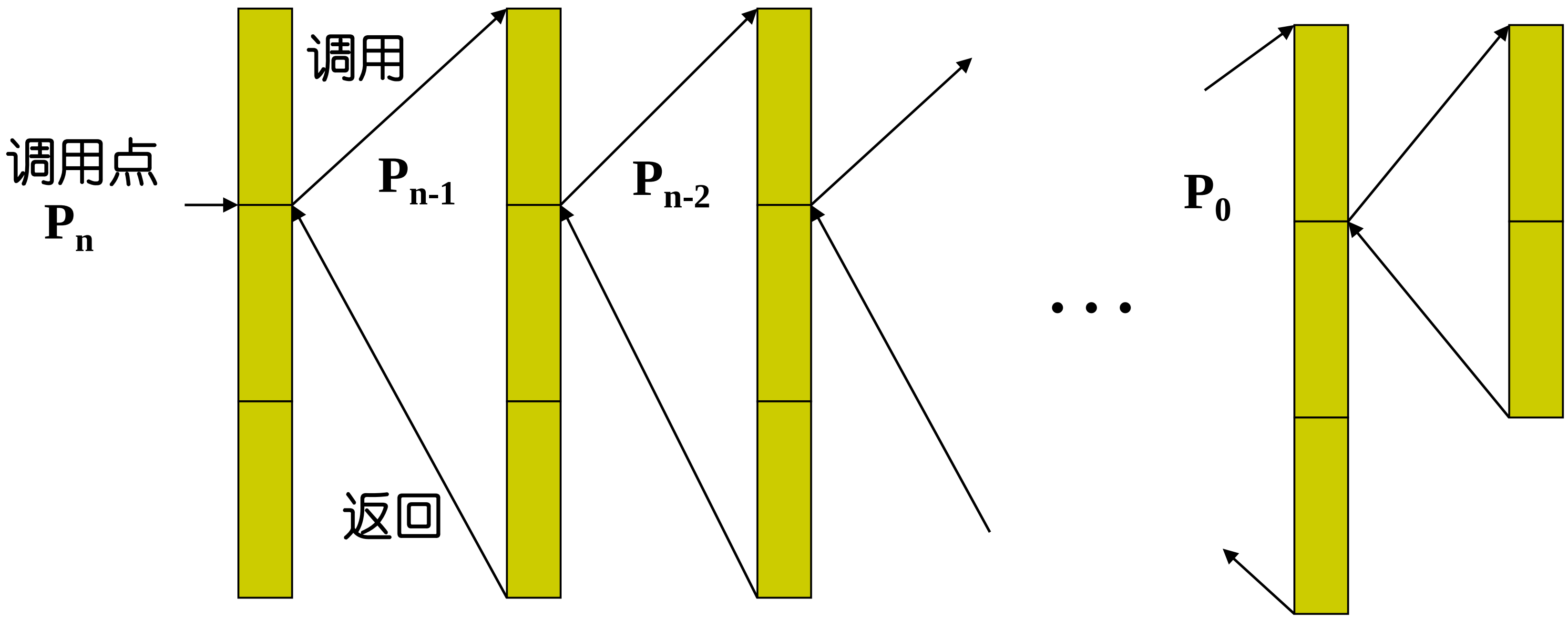
- 以阶乘为例



递归过程分递推和回归两个阶段

- **在递推阶段，把较复杂问题（规模为n）的求解推到比原问题简单的问题（规模小于n）来求解。**
  - 例：求n!转化为求(n-1)!,依次类推，直至计算到n=0时；在递推阶段，必须有终止的情况。
- **在回归阶段，当获得最简单问题的解后，逐级返回，依次得到稍复杂问题的解。**
  - 例如知道0！=1，可以得到1！=1，2！=2，…，直到n！

- main()　　f(n)　　f(n-1)　　　　f(1)　　f(0)



递归的实现(栈)

- 为保证递归或函数调用执行正确，系统使用 栈 来管理实现。
- 调用（进层）
  - ✓ 保存本层参数和返回地址
  - ✓ 分配空间，参数传递
  - ✓ 程序转移到被调函数入口
- 返回(退层)
  - ✓ 保存计算结果
  - ✓ 释放空间，恢复上层参数
  - ✓ 依照返回地址转移

活动记录k

局部变量

参数

返回地址

……

活动记录1

局部变量

参数

返回地址

消递归

- 递归由系统的工作栈管理实现；因此，使用递归解题简洁；

- 但有些情况下，要实现递归与非递归的转换
  - ✓ 系统空间栈崩溃（ **64K** ）
  - ✓ 不是所有的语言都支持递归（升级前的**FORTRAN**）
  - ✓ 提高程序的效率 （函数调用和返回代价略大）

原理

- 简单的，直接使用循环结构代替
  - 尾递归：递归发生在最后一步；
  - 例：阶乘

- 更多的，要基于栈的方式，按照递归机制模拟
  - 转换规则
  - 技巧

```
void hanoi_1(int n,int a,int b,int c){
        int t,addr;
        top=0;
L1: if(n>0){
          push(n,a,b,c); push(2); n--;t=b;b=c;c=t;
          goto L1;
        L2:printf("%d->%d\n",a,c);
          push(n,a,b,c);push(3); n--;t=a;a=b;b=t;
          goto L1;
        }
L3: if(top){
                pop(addr); pop(n,a,b,c);
                if(addr==2) goto L2;
                else if(addr==3) goto L3;
        }
}
```

使用技巧转换

Hanoi (n， a， b， c)

问题分解

Hanoi（n-1， a， c， b）

MOVE（a， c） => Hanoi（1，a，b，c）

Hanoi（n-1， b， a， c）

消递归压栈

S⇐（n-1，b，a，c）.

S⇐（1，a，b，c） .

S⇐（n-1，a，c，b） .

非递归汉诺塔： 算法HI（n）

HI1[建立堆栈]

CREATS（S）.

HI2[堆栈初始化]

S⇐（n，a，b，c）.

HI3[利用栈实现递归]

WHILE NOT（StackEmpty（S））DO

(（n,a,b,c）⇐ S.

IF n = 1 THEN MOVE（a,c）.

ELSE（S⇐(n-1, b, a, c).

S⇐(1, a, b, c).

S⇐(n-1, a, c, b) .)

```
void hanoi_2(int n,int a,int b,int c){
        top=0;
        push(n,a,b,c);
        while(top){
                pop(n,a,b,c);
                if(n==1) printf("%d->%d\n",a,c);
                else{
                        push(n-1,b,a,c);
                        push(1,a,b,c);
                        push(n-1,a,c,b);
                }
        }
}
```

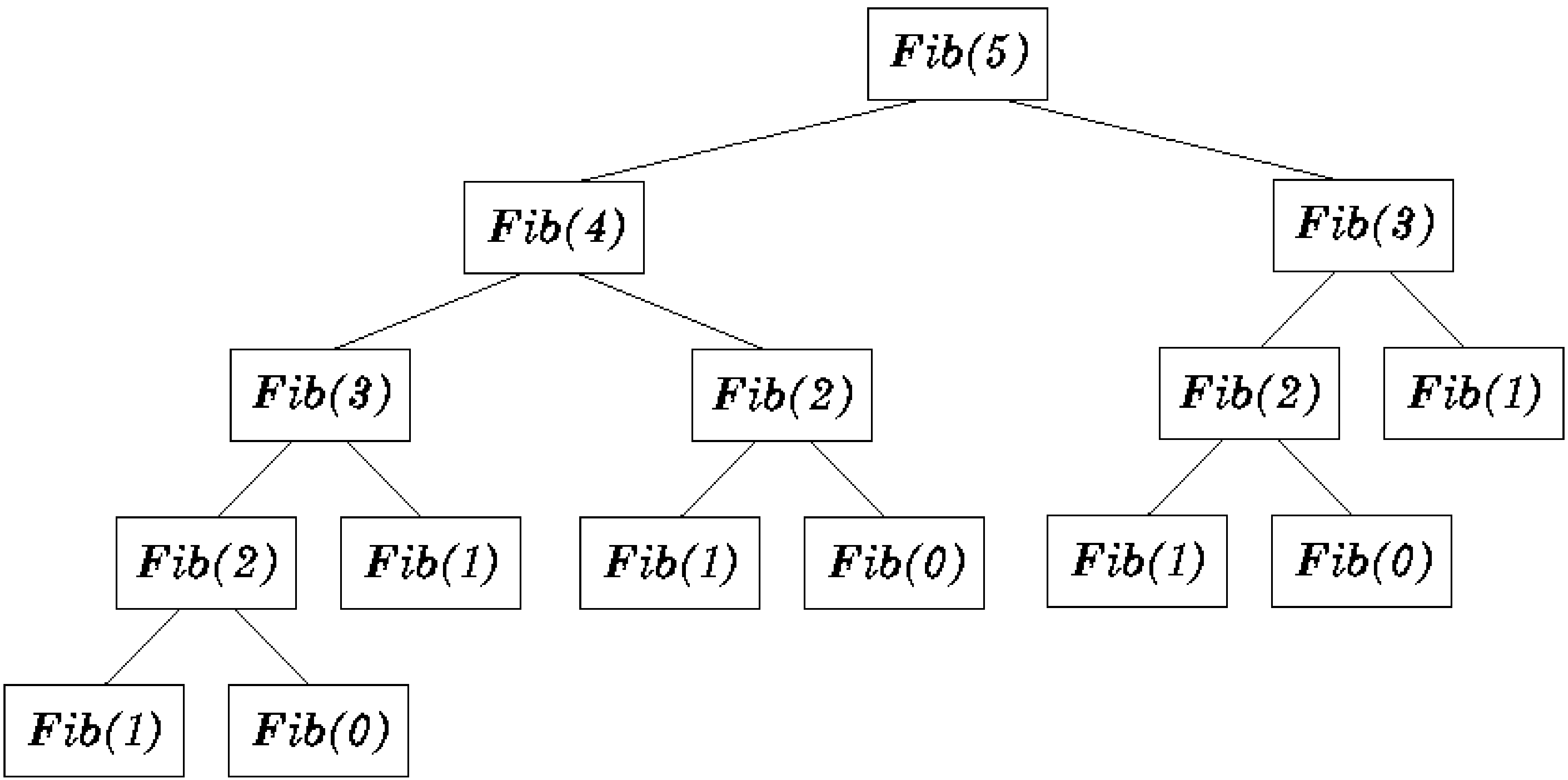
递归的效率

- 递归方法在解决某些问题时是最直观、最方便的方法，但未必是高效的方法。
- 例 斐波那契数列

  假定一对大兔子每一个月可以生一对小兔子，而小兔子出生后两个月就有生殖能力．问从一对大兔子开始，一年后能繁殖成多少对兔子？

$$Fib(n) = \begin{cases} n, & n = 0,1 \\ Fib(n-1) + Fib(n-2), & n > 1 \end{cases}$$

```
long Fib ( long n ) {
    if ( n <= 1 ) return n;
    else return Fib (n-1) + Fib (n-2); }
```



效率：相同子问题的重复计算

- 斐波那契数列的递归调用树，调用次数 $O(2^k)$

- 使用循环迭代法，只需要 $O(n)$

  long long $f_1 = 1$，$f_2 = 0$，$f = 0$；
  for (int i=2； i<=n； i++) { f=f_1+f_2； f_2=f_1； f_1=f； }

- 当 **n = 35** 时，斐波那契数迭代函数需进行**33**次加法，而递归函数需要进行**185万**次函数调用！

```
long Fib ( long n ) {
if ( n <= 1 ) return n;
else return Fib (n-1) + Fib (n-2); }
```

原理：用空间换时间

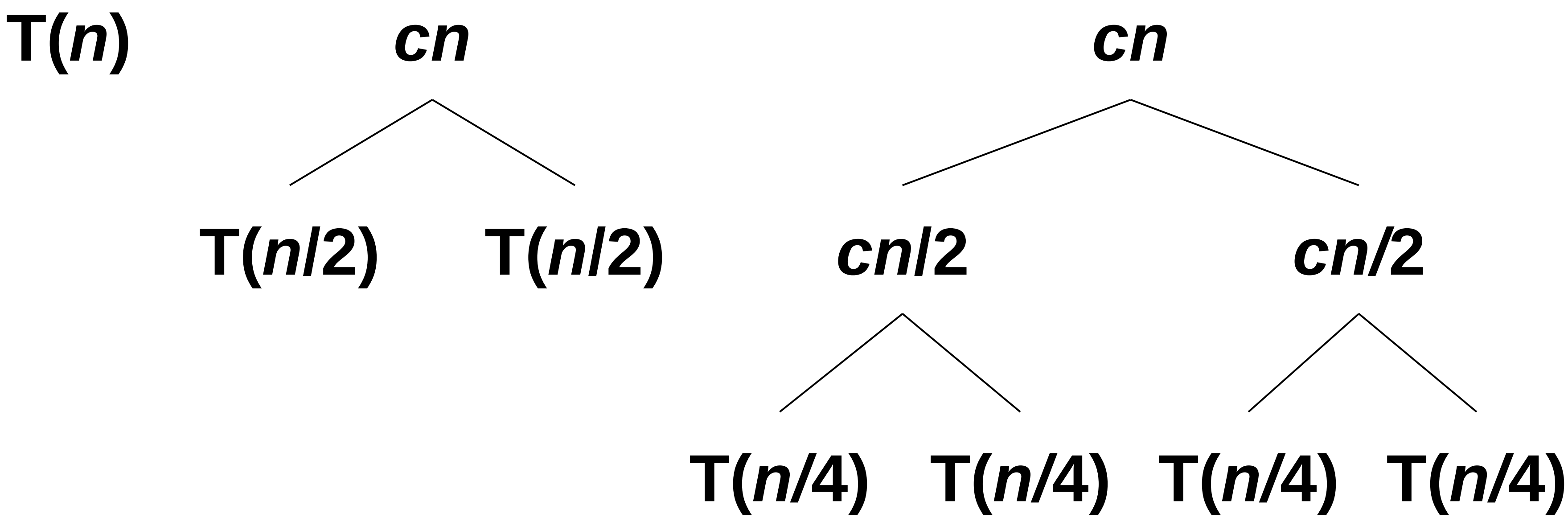
```
int f[MAXN];//初始化为-1.
long fibo (long n)
{
    if(f[n]>=0) return f[n];
    if (n < = 1)  return f[n]=n；
    else return f[n]=fibo(n-1)+fibo(n-2) ；
}
```

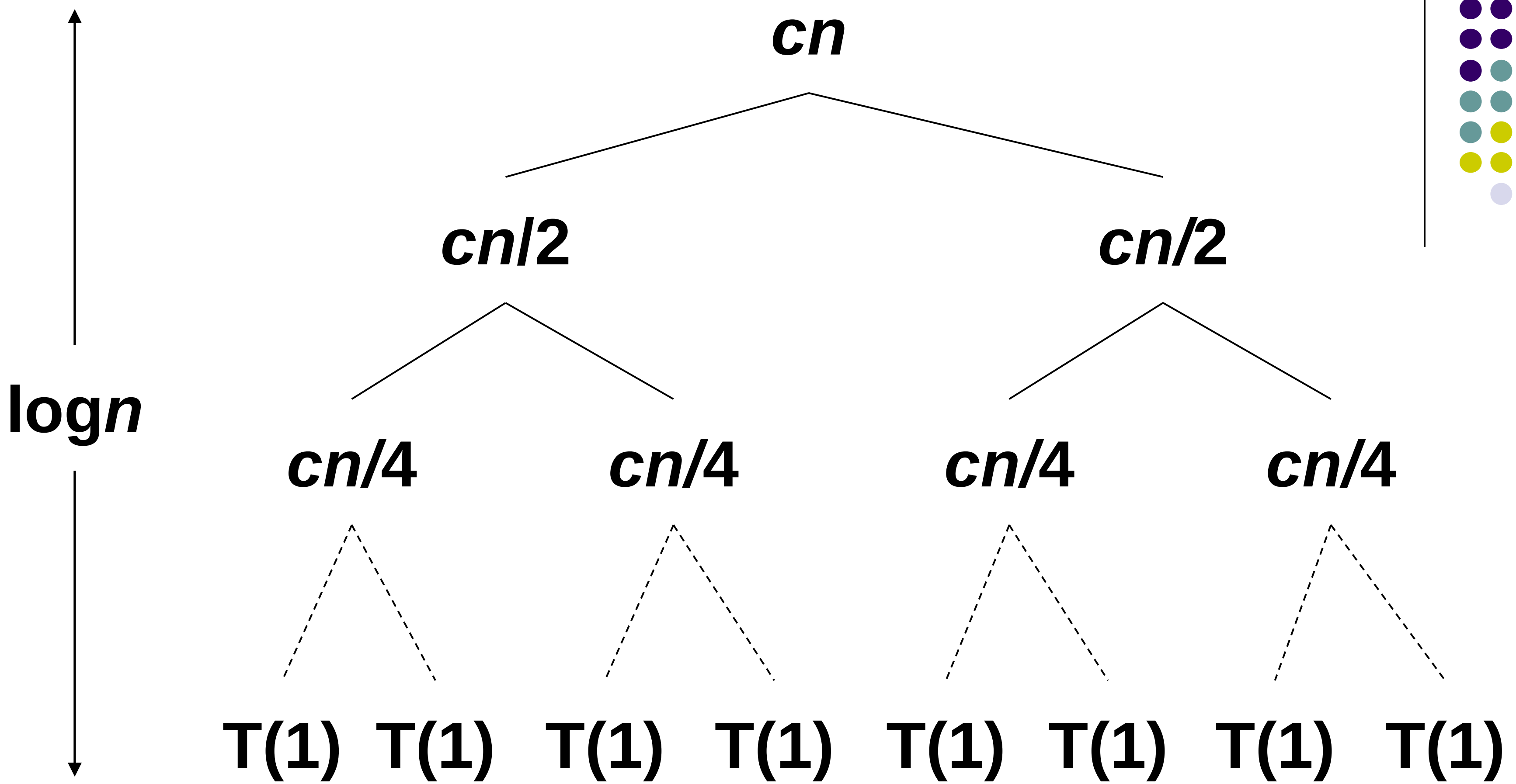
- 记忆化搜索

递归树方法

- 在递归树中，每个结点表示一个单一子问题的代价，每个子问题对应某次递归调用。
- 将树中每层中的代价求和，得到每层代价。
- 然后将所有层的代价求和，得到所有层次的递归调用的总代价。
- 主要用途
  - ✓ 猜测/估算递归方法的渐进上界
  - ✓ 准确计算递归方法的时间复杂度

例：T(n) = 2T(n/2) + O(n) 上界





设T(1)是常量，O(n)使用cn(精度损失)，

$T(n) \leqslant cn * \log n + \Theta(n) = O(n \log n)$

- 正确性：存在d，*n*足够大,使得T(n)⩽d*n*logn.

  $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

  $\leqslant 2*d*(n/2)*\log(n/2) + cn$

  $\leqslant dn\log n + (c-d)n$

  当d⩾c时，T (n) ⩽dnlogn

- 代入法
  - ✓ 猜测解的形式（递归树等方法）
  - ✓ 用数学归纳法求出解的常数，并证明解是正确的

例：BS算法——递归树

- 为尽量精确易算，递归树最好是满二叉树。
- 左右子树结点最多差1，最下一层有两种情况
  - ✓ 由T(2)和T(3)构成
  - ✓ 由T(3)和T(4)构成
- 第一种情况
  - ✓ $2i + 3j = n$
  - ✓ $i + j = 2^k$
  - ✓ $T(n) = 2+\ldots+2^k + i + 3j$

    $\leqslant (5/3)n - 2$

主定理（Master Theorem）

- 令 a ≥ 1 和 b>1 是常数，f(n) 是一个函数，T(n) 是定义在非负整数上的递归式：

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$$

可将n/b解释为 $\lfloor n/b \rfloor$或 $\lceil n/b \rceil$。那么：

1. 有常数ε>0, 使$f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, 则$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$
2. 若 $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$, 则$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$
3. 有常数ε>0, 使$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, 且存在c<1和 所有足够大的n, 有 $af(n/b) \le cf(n)$, 则$T(n)=\Theta(f(n))$

例：主方法（Master Method）

- **$T(n) = 9T(n/3) + n$**
  - ✓ $n^{\log_b a} = n^2$, $f(n) = n = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$， $T(n) = \Theta(n^2)$
- **$T(n) = T(3n/2) + 1$**
  - ✓ $n^{\log_b a} = 1$, $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_b a})$， $T(n) = \Theta(\log n)$
- **$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$**
  - ✓ $n^{\log_b a} = O(n^{0.793})$，取$c = 3/4$，正则条件成立，$T(n)= \Theta(n\log n)$
- **$T(n) =2T(n/2) + n\log n$**
  - ✓ 没有适合情况。可证明$T(n)= \Theta(n\log^2 n)$

总结

- 递归的定义（递归定义+递归出口）
- 递归求解问题
  - 问题的定义是递归的；
  - 问题涉及的数据结构是递归的；
  - 问题的解法满足递归性质消递归
- 消递归（转换规则和技巧）
- 递归的效率（尾递归和记忆化搜索）
- 递归算法的时效分析工具（递归树、主定理）