第四节　条件分布

一、　离散型随机变量的条件分布

二、　连续型随机变量的条件分布

三、　小结

在事件***B***发生的条件下事件***A***发生的条件概率

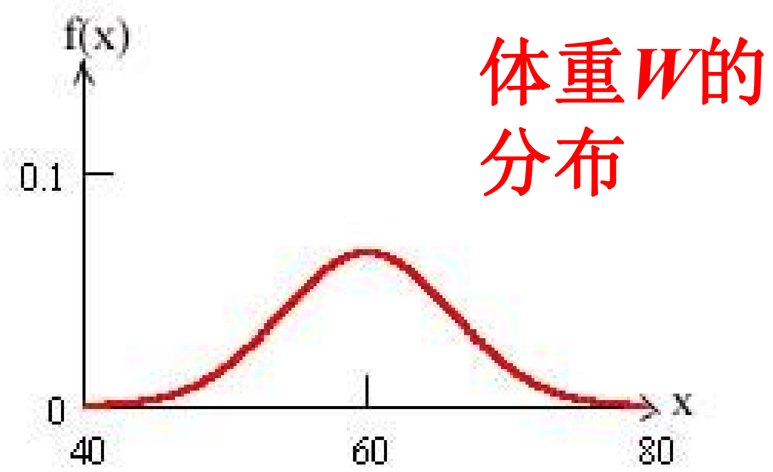
$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

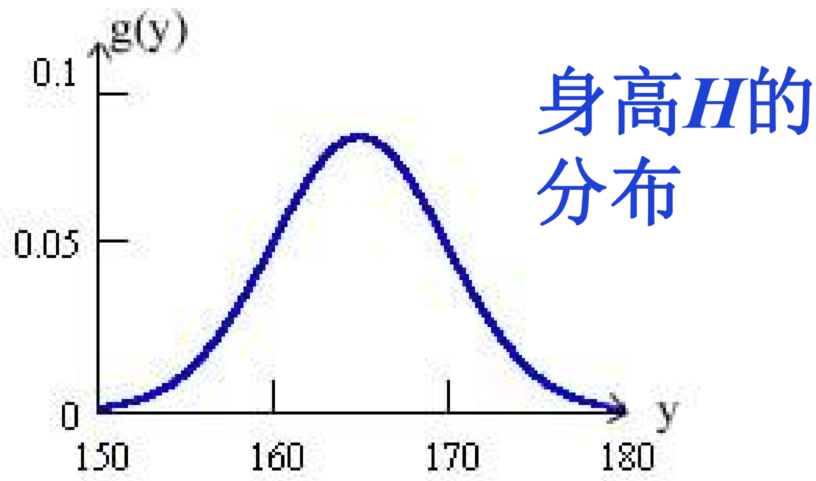
推广到随机变量

设有两个随机变量*X*,*Y*,在给定*Y*取某个或某些值的条件下，求X的概率分布。

这个分布就是条件分布。

例如 考虑某大学的全体学生， 分别用W和H表示其体重和身高。 则W和H都是随机变量，它们都有一定的概率分布。





现在限制 $1.80<H<1.85$（米）， 在这个条件下求 W 的分布，这就要从该校学生中把身高在1.80-1.85米之间的那些人都挑出来，然后求其体重的分布。

显然，这个分布与不加这个条件时的分布会很不一样。

4.1 离散型随机变量的条件分布

定义　设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若 $P(Y=y_j)>0$，则称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\quad i=1,2,\ldots$$

为在 $Y=y_j$ 条件

作为条件的那个 $r.v$,认为取值是给定的，在此条件下求另一 $r.v$ 的概率分布.

类似定义在$X=x_i$条件下
随机变量Y的条件概率分布.

对于固定的i, 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, j=1,2,\cdots,$$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律.

例3.4.1 袋中有3个黑球, 2个白球. 每次从中任意取出1个球,不放回连抽两次,令

$$X=\begin{cases}0, & \text{第一次取到白球,}\\ 1, & \text{第一次取到黑球.}\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}0, & \text{第二次取到白球,}\\ 1, & \text{第二次取到黑球.}\end{cases}$$

求条件概率分布。

解: 联合分布律和边缘概率分布律为

X \ Y	0	1	$P\{X=x_{i\bullet}\}$
0	0.1	0.3	**0.4**
1	0.3	0.3	**0.6**
$P\{Y=y_{\bullet j}\}$	**0.4**	**0.6**	**1**

$$P\{X=0\mid Y=0\}=\frac{p_{00}}{p_{\cdot 0}}=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1\mid Y=0\}=\frac{p_{10}}{p_{\cdot 0}}=\frac{0.3}{0.4}=\frac{3}{4},$$

$$P\{X=0\mid Y=1\}=\frac{p_{01}}{p_{\cdot 1}}=\frac{0.3}{0.6}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1\mid Y=1\}=\frac{p_{11}}{p_{\cdot 1}}=\frac{0.3}{0.6}=\frac{1}{2},$$

在Y=0条件下X的条件概率分布为

$X=i$	0	1
$P\{X=i\mid Y=0\}$	0.25	0.75

在Y=1条件下X的条件概率分布为

$X=i$	0	1
$P\{X=i\mid Y=1\}$	0.5	0.5

例3.4.1 袋中有3个黑球, 2个白球. 每次从中任意取出1个球,不放回连抽两次,令

$$X=\begin{cases}0, & 第一次取到白球,\\ 1, & 第一次取到黑球.\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}0, & 第二次取到白球,\\ 1, & 第二次取到黑球.\end{cases}$$

求条件概率分布。

解: 联合分布律和边缘概率分布律为

X \ Y	0	1	$P\{X=x_{i\bullet}\}$
0	0.1	0.3	**0.4**
1	0.3	0.3	**0.6**
$P\{Y=y_{\bullet j}\}$	**0.4**	**0.6**	**1**

$$P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{p_{00}}{p_{0\cdot}}=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{p_{01}}{p_{0\cdot}}=\frac{0.3}{0.4}=\frac{3}{4},$$

$$P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{p_{10}}{p_{1\cdot}}=\frac{0.3}{0.6}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{p_{11}}{p_{1\cdot}}=\frac{0.3}{0.6}=\frac{1}{2}.$$

在X=0条件下Y的条件概率分布为

$Y=j$	0	1
$P\{Y=j\mid X=0\}$	0.25	0.75

在X=1条件下Y的条件概率分布为

$Y=j$	0	1
$P\{Y=j\mid X=1\}$	0.5	0.5

4.2 连续型随机变量的条件分布

注: 当X,Y连续时, 条件分布函数不能用P{X ≤ x|Y=y $_j$}来定义.

因为$P\{Y=y_j\}=0$. 而应该用极限方式来定义.

设$\varepsilon>0$, 若

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\left\{X\le x \middle| y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\right\}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{\ X\le x, y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\ \}}{P\left\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\right\}}$$

存在，则称此极限为在$Y=y$条件下X的条件分布函数,

记为$F_{X|Y}(x\,|\,y)$, 即

$$F_{X|Y}(x\,|\,y)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\left\{X\le x, y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\right\}}{P\left\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\right\}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\dfrac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}+\dfrac{F(x,y)-F(x,y-\varepsilon)}{\varepsilon}}{\dfrac{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)}{\varepsilon}+\dfrac{F_Y(y)-F_Y(y-\varepsilon)}{\varepsilon}}=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}}.$$

当 $f(x, y)$连续, 边缘概率密度 $f_Y(y)$ 连续, 且 $f_Y(y)>0$时, 有

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}}=\frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\mathrm{d}u}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}u,$$

则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为 $Y=y$时, X的条件概率密度, 记为 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

类似地, 在$X=x$ 的条件下Y 的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,v)}{f_X(x)}\mathrm{d}v,\ f_X(x)>0$$

$X=x$ 的条件下Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{x}[f(u,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}u.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)\,\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{y}[f(x,v)/f_X(x)]\,\mathrm{d}v.$$

说明

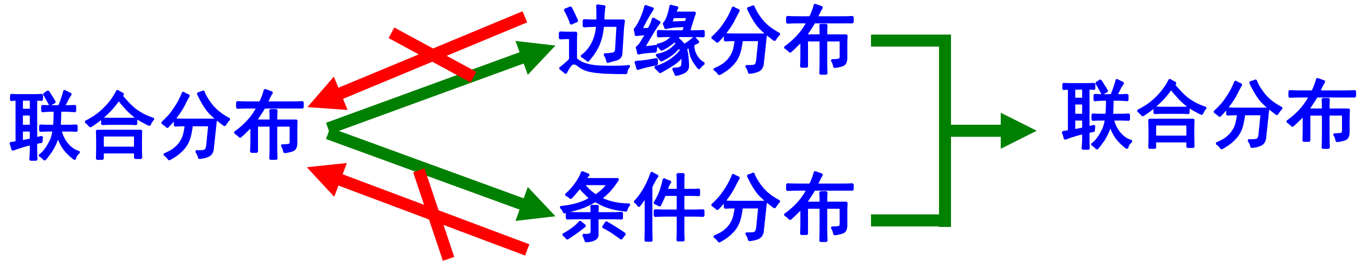
(1)一般地，$F_{X|Y}(x|y), F_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$

表达式中既有*x*也有*y*. 圆括号内竖线前的变量为自变量, 竖线后的变量可取定值。

(2) 当*X*与*Y*不相互独立时,

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}\left(y|x\right) \quad 或 \quad f(x,y)=f_Y(y)f_{X|Y}\left(x|y\right)$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



(3) $$P\left\{c<Y\le \mathrm{d}\,\middle|\,X=x_0\right\}=\int_c^d f_{Y|X}\left(y\middle|x_0\right)dy$$

$$P\left\{a<X\le \mathrm{b}\,\middle|\,Y=y_0\right\}=\int_a^b f_{X|Y}\left(x\middle|y_0\right)dx$$

$$P\left\{a<X\le \mathrm{b}\,\middle|\,c<Y\le \mathrm{d}\right\}=\frac{P\left\{a<X\le \mathrm{b},c<Y\le \mathrm{d}\right\}}{P\left\{c<Y\le \mathrm{d}\right\}}$$

例3.4.2

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求$f_{X|Y}(x\mid y)$, $f_{Y|X}(y\mid x)$, 及概率$P\{Y>1|X=3\}$.

解:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}y=e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x(1+y)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(y+1)^2}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

例3.4.2 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求$f_{X|Y}(x\mid y)$, $f_{Y|X}(y\mid x)$, 及概率$P\{Y>1|X=3\}$.

解: 当$y>0$时，有

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \dfrac{xe^{-x(1+y)}}{\frac{1}{(y+1)^2}}=x(y+1)^2e^{-x(1+y)}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

当$x>0$时，有

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{xe^{-x(1+y)}}{e^{-x}}=xe^{-xy}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

当$x=3$时，有

$$P\{Y>1\mid X=3\}=\int_1^{+\infty} f_{Y|X}(y\mid 3)dy=\int_1^{+\infty}3e^{-3y}dy=e^{-3}.$$

例3.4.3

设随机变量X在区间(0,1)内服从均匀分布，在条件$X=x$ ($0<x<1$)下，随机变量Y在区间$(0, x)$内服从均匀分布，求(1)X和Y的联合概率密度;(2)Y的概率密度;(3) 概率P{X+Y>1}.

解(1) X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

在条件$X=x$ ($0<x<1$)下，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当$0<y<x<1$时，X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x},$$

在其他点处，$f(x,y)=0$. 即有

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, 0<y<x<1,\\ 0, \text{其它}。\end{cases}$$

例3.4.3

设随机变量X在区间(0,1)内服从均匀分布，在条件$X=x$ $(0<x<1)$下，随机变量Y在区间$(0, x)$内服从均匀分布，求(1)X和Y的联合概率密度;(2)Y的概率密度;(3) 概率$P\{X+Y>1\}$.

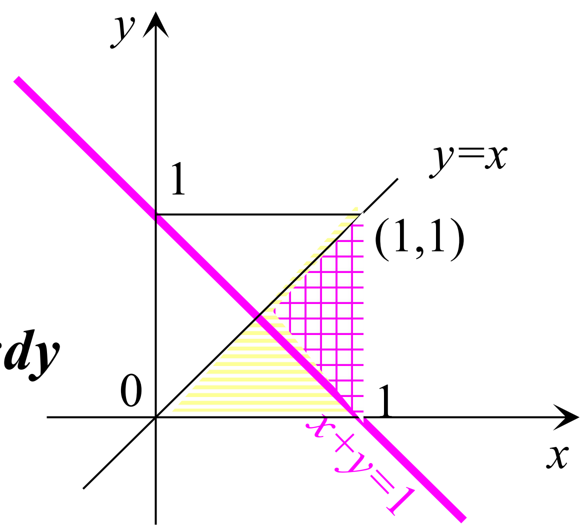
解(2) 当$0<y<1$时，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln y,$$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$时，$f_Y(y)=0$.

因此 $f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0,其它.\end{cases}$

(3) 利用概率密度的性质可得



$$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x+y>1,0<y<x<1}\frac{1}{x}dxdy$$

$$=\int_{1/2}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}dy=\int_{1/2}^{1}(2-\tfrac{1}{x})dx=1-\ln 2.$$

例3.4.4 设 G 是平面上的有界区域,其面积为 A. 若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设 (X,Y) 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布,求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 由题意知随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

又知边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是当 $-1<y<1$ 时,有

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

三、小结

1. 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，$p_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots)$ 为其联合分布律,在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

在给定 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中 $i,j=1,2,\cdots$.

2. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量,则有

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$