第一次作业

院(系)__________ 班级________ 学号________ 姓名________

一、填空题

$\frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2}$

1、袋中装有 2 红 4 白共 6 只乒乓球，从中任取 2 只，则取得 1 只红球 1 只白球的概率为 $\frac{8}{15}$.

正3反2或正2反3

2. 将一枚硬币重复投 5 次，则正、反面都至少出现 2 次的概率 $\frac{5}{8}$. $2(C_5^2\cdot(\frac{1}{2})^5$

$P(AB)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

3. 已知事件 A 和 B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=0.4$，则 $P(B)=$ 0.6 .

4. 设 A 与 B 是两个互不相容的随机事件，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})=$ 0.2 .

$P(\bar A|\bar B)=\frac{P(\bar A\bar B)}{P(\bar B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-0.4-0.5}{1-0.5}=0.2$

*5、甲乙两个射手独立地射击同一目标，他们击中目标的概率分别是 0.8 和 0.6. 若每人射击一次，目标被击中的概率为 0.92 .

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
$=0.8+0.6-0.48$
$=0.92$

6. 两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率是 $\frac{1}{9}$，且 A 发生 B 不发生和 A 不发生 B 发生的概率相等，则 $P(A)=$ $\frac{2}{3}$.

$P(\bar A\bar B)=\frac{1}{9}$ $\Rightarrow P(\bar A)=P(\bar B)=\frac{1}{3}$
$P(A\bar B)=P(\bar A B)\Rightarrow P(A)=P(B)$

7. 在 4 重伯努利试验中，已知事件 A 至少出现一次的概率为 0.5，则在一次试验中 A 出现的概率为 $1-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.

$1-(1-p)^4=0.5$

8. 考虑抛物线 $y=x^2+Bx+C$, 其中 B 和 C 分别是将一枚骰子连着掷两次先后出现的点数，求抛物线与 x 轴没有交点的概率为 $\frac{17}{36}$.

$B^2<4C$

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,5) (4,6)

二、选择题

1. 下列等式不成立的是（ D ）

（A）$A=AB\cup A\overline{B}$.　　（B）$A-B=A\overline{B}$.

（C）$(AB)(A\overline{B})=\Phi$.　　（D）$(A-B)\cup B=A$.

$A\cup B$

2. 设 A,B,C 是同一个实验的三个事件，则事件 $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$ 可化简为（ C ）

（A）$A\cup B$.　（B）$A-B$.　（C）AB .　（D）Φ .

$[A\cup(B\bar B)](\bar A\cup B)$
$=A\cap(\bar A\cup B)$
$=(A\bar A)\cup(AB)=AB$

3. 设随机事件 A 和 B 互不相容，则（ D ）。

（A）$P(\overline{A}\overline{B})=0$;.　$P(\bar A\bar B)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)$　（B）$P(\overline{A}\overline{B})\neq 0$..

（C）$P(A\cup\overline{B})=P(A)$;.　$P(A)+P(\bar B)-P(A\bar B)$　（D）$P(A\cup\overline{B})=P(\overline{B})$.

$=P(A)+P(\bar B)-P(A)+P(AB)=P(\bar B)$

4. 设事件 A，B，C 两两独立，则 A，B，C 相互独立的充分必要条件是（ C ）。

$P(A\bar{B}B\bar{C})=P(\phi)=0$

$P(A-B)P(B-C)\neq 0$

$P(ABC)=P(AB)P(BC)$　　$P[(A\cup B)\cap(B\cup C)]=P[B\cup(A\cap C)]$

$=P(B)+P(AC)-P(ABC)$

（A）AB 和 BC 独立.　　（B）$A\cup B$ 和 $B\cup C$ 独立　　$=P(B)+P(A)P(C)-P(ABC)$

$P(A\bar{B}C)=P(AC)-P(ABC)=P(A)P(C)-P(ABC)$

（C）$A-B$ 和 C 独立.　　（D）$A-B$ 和 $B-C$ 独立.

$P(A\cup B)P(B\cup C)=[P(A)+P(B)-P(AB)][P(B)+P(C)-P(B)P(C)]$

$P(A-B)P(C)=[P(A)-P(A)P(B)]P(C)$

5．设有 4 张卡片分别标以数字 1，2，3，4，今任取一张；设事件 A 为取到 1 或 2，事件 B 为取到 1 或 3，则事件 A 与 B 是（ C ）　　$P(A)=\frac{1}{2}$　$P(B)=\frac{1}{2}$　$P(AB)=\frac{1}{4}$

（A）互不相容．　（B）互为对立．　（C）相互独立．　（D）互相包含．

6．设每次试验成功的概率为 $p\,(0<p<1)$，则重复进行试验直到第 n 次才取得成功的概率为（ A ）

（A）$p\,(1-p)^{n-1}$．　（B）$np\,(1-p)^{n-1}$．　（C）$(n-1)p\,(1-p)^{n-1}$．　（D）$(1-p)^{n-1}$．

若推广为n次：

$$\frac{C_n^i p^i (1-p)^{n-i}}{C_n^{i-1} p^{i-1}(1-p)^{n-i+1}}=\left(\frac{n+1}{i}-1\right)\frac{p}{1-p}$$

$i<(n+1)p$ 时 比值大于1 ↑

$i>(n+1)p$ 时 比值小于1 ↓

$i=[(n+1)p]$ 时 取值最大

$(n+1)p$ 为整数时

$i=(n+1)p$ 或 $i=(n+1)p-1$ 时

取值最大

7．独立地投了 3 次篮球，每次投中的概率为 0.3，则最可能投中的次数为（ B ）

（A）　0　（B）1　（C）2　（D）3.　0次 $0.7^3=0.343$　$\binom{3}{1}0.3\cdot0.7^2=0.441$　$\binom{3}{2}0.3^2\cdot0.7=0.189$

3次 $0.3^3=0.027$

8．设 A，B 为随机事件，若 $0<P(A)<1,\ 0<P(\bar{B})<1$，则 $P(A\mid B)>P(A\mid\bar{B})$ 的充要条件是（ A ）

$$\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

$\Leftrightarrow P(AB)>P(A)P(B)$

（A）$P(B\mid A)>P(B\mid\bar{A})$．✓　　（B）$P(B\mid A)<P(B\mid\bar{A})$．X

（C）$P(\bar{B}\mid A)>P(B\mid\bar{A})$．　（D）$P(\bar{B}\mid A)<P(B\mid\bar{A})$．

(C).(D) 无法判断

$\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}$　$\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

$P(B\mid A)=\frac{P(BA)}{P(A)}$

$P(B\mid\bar{A})=\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

三、计算题

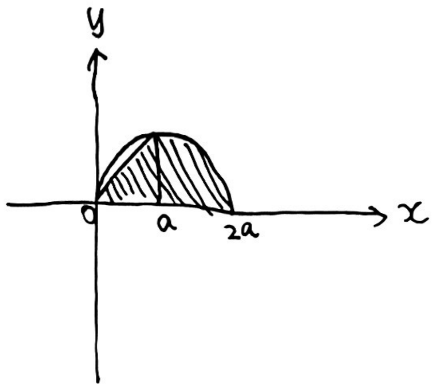
1．随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}\,(a>0)$ 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点与该点的连线与 x 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率．

解 此为几何概型问题

$\Omega=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}$

设 A 表示事件"原点与该点的连线与x轴夹角小于$\frac{\pi}{4}$".

则 $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.



2. 仪器中有三个元件，它们损坏的概率都是 0.2，并且损坏与否相互独立. 当一个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.25，当两个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.6，当三个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.95，当三个元件都不损坏时，仪器不发生故障. 求：（1）仪器发生故障的概率；（2）仪器发生故障时恰有二个元件损坏的概率.

解 设A_i表示事件"有i个元件损坏"，i=1,2,3 B表示"仪器发生故障"

由已知 $P(B|A_1)=0.25$，$P(B|A_2)=0.6$，$P(B|A_3)=0.95$.

由题意 $P(A_1)=\binom{3}{1}\times0.2\times(0.8)^2=0.384$. $P(A_2)=\binom{3}{2}\times(0.2)^2\times0.8=0.096$. $P(A_3)=(0.2)^3=0.008$.

(1) 由全概率公式. $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.384\times0.25+0.096\times0.6+0.008\times0.95$
$=0.1612$.

(2) 由贝叶斯公式 $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.096\times0.6}{0.1612}=0.3573$

3. 学生做一道有四个选项的单项选择题，如果他不知道正确答案就随机猜测。现从卷面上看到学生此次选择题做对了，两种原因导致：做对或蒙对 试求在以下两种情况下学生确实知道正确答案的概率。

（1）学生知道正确答案和胡乱猜测的概率为 1/2.

（2）学生知道正确答案的概率为 0.2。

解. 设事件A表示"此学生知道正确答案" 事件B表示"此学生做对了选择题"

(1) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$. $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{4}{5}$.

(2) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.2\times1+0.8\times\frac{1}{4}=0.4$.

$P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0.2\times1}{0.4}=\frac{1}{2}$.

4. 在 100 件产品中有 10 件次品；现在进行 5 次放回抽样检查，每次随机地抽取一件产品，求下列事件的概率：（1）抽到 2 件次品；（2）至少抽到 1 件次品.

解. 设A_i表示"抽到i件次品". i=0,1,2,3,4,5

(1) 则 $P(A_2)=\binom{5}{2}\times(0.1)^2\times(0.9)^3=0.0729$.

或用古典概率公式计算

$P(A_2)=\dfrac{\binom{5}{2}\times10^2\times90^3}{100^5}=0.0729$.

(2) $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5)=1-P(A_0)=1-(0.9)^5=0.4095$.

四、证明题

设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，证明事件 A 与 B 相互独立.

证明：由 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$ 可得 $P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$

即 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$

整理得 $P(AB)-P(AB)P(B)=P(A)P(B)-P(B)P(AB)$

从而 $P(AB)=P(A)P(B)$

故事件 A 与 B 相互独立.