

Exercices de Physique Fondamentale

(niveau L3-M1)

Ryan Artero

Email : ryanartero2005@gmail.com

Version du 24 juin 2025

Table des matières

Résumé	7
1 Introduction	9
2 Informations	11
2.1 Notations	11
2.2 Constantes fondamentales	12
2.3 Formulaire	13
2.3.1 Électromagnétisme	13
2.3.2 Relativité restreinte	13
2.3.3 Mécanique quantique	14
2.3.4 Physique statistique	15
2.3.5 Mécanique analytique	16
2.3.6 Physique subatomique	17
2.3.7 Optique ondulatoire	18
2.3.8 Thermodynamique	19
2.3.9 Opérateurs en coordonnées curvilignes	20
2.3.10 Identités trigonométriques	20
2.4 Légende des notations thématiques	21
2.5 Parcours suggéré en fonction du niveau	21
3 Exercices	23
3.1 Problème à deux corps et quantification de l'atome de Bohr	23
3.1.1 Centre de masse	24
3.1.2 Intégration des équations du mouvement	24
3.1.3 Quantification de Bohr	24
3.2 Section efficace de Rutherford	26
3.2.1 Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome	26

3.2.2	Section efficace de Rutherford	26
3.3	Effet Cherenkov	27
3.4	Machine à champ magnétique pulsé	28
3.5	Métrie sur une sphère	30
3.6	Rayonnement du Corps Noir	31
3.6.1	Nombre de modes excités par unité de fréquences	31
3.6.2	Catastrophe Ultraviolette	31
3.6.3	Loi de Planck	32
3.6.4	Flux énergétique émis par un corps noir	32
3.6.5	Loi de Stefan	33
3.6.6	Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique	33
3.7	Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule	34
3.7.1	Formule de Hadamard	34
3.7.2	Lien avec le potentiel gravitationnel	35
3.7.3	La sphère ?	35
3.8	Mouvement relativiste d'une particule chargée	37
3.8.1	Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	37
3.8.2	Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane	38
3.8.3	Théorie des Champs	38
3.8.4	Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant	39
3.8.5	Physique des collisionneurs relativistes	40
3.9	Hydrodynamique relativiste \triangle	41
3.9.1	Hydrodynamique classique	41
3.9.2	Introduction à l'hydrodynamique relativiste	41
3.9.3	Hydrodynamique relativiste	42
3.9.4	Application aux collisions de noyaux lourds	43
3.10	Atome d'hydrogène et équation radiale	44
3.10.1	Séparation des variables et équation radiale	44
3.10.2	État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales	45
3.11	Vers un formalisme relativiste \triangle	46
3.12	Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$	48
3.13	Instabilité électrodynamique de l'atome classique	50
3.13.1	Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad}	50
3.13.2	Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad}	50

3.14	Géodésiques dans un milieu optique \triangle	52
3.14.1	Principe de Fermat et métrique optique	52
3.14.2	Calcul d'un indice $n(\mathbf{r}, \lambda)$	52
3.14.3	Calcul de $N(\mathbf{r})$ pour un gaz et un liquide	53
3.14.4	Géodésiques optiques dans un milieu sphérique	53
3.14.5	1 ^{ère} application : l'arc-en-ciel comme manifestation géométrique de la dispersion	54
3.14.6	2 ^{ème} application : couleurs des bulles de savon (interférences en lame mince) [†]	56
3.14.7	3 ^{ème} application : les mirages [†]	58
3.14.8	4 ^{ème} application : étude du phénomène du coucher de Soleil via $N(z)$ et $n(z, \omega)$	59
3.15	Condensation de Bose-Einstein	61
3.16	Chaîne de désintégration	63
3.16.1	Modélisation physique de la chaîne de désintégration	63
3.16.2	Étude mathématique du système différentiel	63
3.16.3	Modèle non linéaire avec dépendance saturante des constantes de décroissance	64
4	Correction des exercices	66
4.1	Problème à deux corps	66
4.1.1	Centre de masse	66
4.1.2	Intégration des équations du mouvement	66
4.1.3	Quantification de Bohr	69
4.2	Section efficace de Rutherford	71
4.2.1	Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome	71
4.2.2	Section efficace de Rutherford	71
4.3	Effet Cherenkov	72
4.4	Machine à champ magnétique pulsé	74
4.4.1	Champ magnétique de la bobine	74
4.4.2	Champ électrique induit dans le tissu biologique	74
4.4.3	Effet sur les neurones moteurs	75
4.4.4	Effet du courant oscillant	76
4.4.5	Effet du champ magnétique pulsé sur les muscles	76
4.5	Métrique d'une sphère	77
4.6	Rayonnement du Corps Noir	79
4.6.1	Nombre de modes excités par unité de fréquences	79
4.6.2	Catastrophe Ultraviolette	80

4.6.3	Loi de Planck	80
4.6.4	Flux énergétique émis par un corps noir	81
4.6.5	Loi de Stefan	83
4.6.6	Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique	83
4.7	Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule	85
4.7.1	Formule de Hadamard	85
4.7.2	Lien avec le potentiel gravitationnel	87
4.7.3	La sphère ?	87
4.8	Mouvement relativiste d'une particule chargée	89
4.8.1	Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	89
4.8.2	Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane – Correction	92
4.8.3	Théorie des Champs	96
4.8.4	Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant	97
4.8.5	Physique des collisionneurs relativistes	98
4.9	Hydrodynamique relativiste \triangle	100
4.10	Atome d'hydrogène et équation radiale	101
4.10.1	Séparation des variables et équation radiale	101
4.10.2	État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales	103
4.11	Vers un formalisme relativiste \triangle	105
4.12	Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$	106
4.13	Instabilité électrodynamique de l'atome classique	109
4.13.1	Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad}	109
4.13.2	Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad}	110
4.14	Géodésiques dans un milieu optique \triangle	111
4.15	Condensat de Bose-Einstein	112
4.16	Chaîne de désintégration	115
4.16.1	Modélisation physique	115
4.16.2	Étude mathématique	116
4.16.3	Modèle non linéaire	117

Résumé

Ce document rassemble une sélection d'exercices originaux de physique fondamentale, construits dans une perspective transversale et progressive, allant de la Licence 3 au Master 1. Chaque exercice est accompagné d'un corrigé détaillé (lorsqu'il est disponible), et se place dans un contexte historique, théorique ou applicatif rigoureux. Les thématiques abordées incluent la relativité restreinte, la mécanique quantique, la physique statistique, l'électrodynamique, ainsi que des incursions en physique mathématique. Une classification par niveau est proposée pour guider le lecteur dans sa progression.

Chapitre 1

Introduction

Ce document est une compilation d'exercices de Physique Fondamentale que j'ai conçus avec passion, dans l'esprit d'un cours de fin de Licence 3 / Master 1, et plus. L'objectif est double : proposer des problèmes rigoureux, inspirants, faisant appel à la beauté formelle et conceptuelle de la physique, et offrir une base solide pour les étudiants souhaitant approfondir les grandes théories classiques et modernes. Je souhaite partager ma passion pour la physique qui sort du cadre imposé en cours, utilisant des notions transverses aux différents domaines de la physique.

Chaque exercice mobilise des notions précises (indiquées entre parenthèses, comme **(RR)** pour Relativité Restreinte, **(MQ)** pour Mécanique Quantique, etc.), et est accompagné, progressivement, d'une correction détaillée, qui est accessible en cliquant sur la parenthèse "(Correction)". Les exercices sont notés avec des étoiles (c.f. [2.1](#)), vous êtes libre de faire l'exercice qui vous intrigue le plus.

Étant en première année de Master 1 de Physique Fondamentale à la Sorbonne, (campus Pierre et Marie Curie), je souhaite que cette fiche soit vivante : les corrections seront complétées régulièrement. Enfin, dans la partie correction, en cliquant sur les titres d'exercice (que ce soit en entête ou au début de la correction), vous pouvez retourner sur l'exercice en question.

J'espère qu'en lisant et en travaillant ces exercices, vous y trouverez autant de plaisir que j'en ai eu à les écrire.

Chapitre 2

Informations

2.1 Notations

1. Les quantités vectorielles sont notées en gras, sauf l'opérateur ∇ , qui ne sera jamais noté en gras. Les quantités 4-vectorielles (en relativité) seront noté avec une lettre grecque soit en exposant si contravariant, et en indice si covariant.

Exemple : \mathbf{v} pour la vitesse, ∇p pour le gradient de pression (qui est vectoriel !) et x^μ pour la position dans l'espace temps en contravariant. A contrario, en Mécanique Quantique, on notera les vecteurs avec des ket et les opérateurs en gras. **Exemple :** $|\psi\rangle$ pour un vecteur ψ et \mathbf{H} pour l'Hamiltonien.

2. La notation d désigne l'opérateur différentiel.

3. L'écriture ∂_u signifie implicitement $\frac{\partial}{\partial u}$ si u est une variable, et $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ en relativité.

4. $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ en coordonnées cartésiennes, est un opérateur qui définit proprement le gradient, divergence et rotationnel. En effet, ∇f désigne le gradient de f , $\nabla \cdot \mathbf{F}$ désigne la divergence de \mathbf{F} , et $\nabla \times \mathbf{F}$ désigne le rotationnel de \mathbf{F} . L'opérateur $\partial_\mu \partial^\mu = \square$ désigne l'Alembertien, invariant sous transformations de Lorentz.

5. La notation \dot{x} désigne une dérivée par rapport au temps t c'est à dire $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Dans un exercice de relativité, la notation privilégiée sera $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, τ le temps propre et $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

6. La notation f' désigne la dérivée par rapport à la variable x soit, $f' = \frac{df}{dx}$

7. La notation $[A]$ désigne l'unité de la grandeur A .

8. La notation $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}$ désigne respectivement les ensembles des nombres réels, complexes et naturels.

9. La métrique de la relativité restreinte utilisée sera $g_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$. Par ailleurs, on rappelle que $a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu$.

10. Les étoiles évaluent le niveau de difficulté des exercices. Cela va de 1 : ★ à 5 étoiles : ★★★★★.

Les critères d'évaluation de difficulté sont liés à la longueur de l'exercice, sa difficulté technique et mathématique et du niveau nécessaire (L3, M1, M2) pour être à l'aise avec les notions utilisées.

11. La croix † signifie que l'exercice est soit tiré, soit inspiré d'un exercice déjà existant. Une

note de bas de page est également présente dans ce cas.

12. La notation \triangle indique que la correction de l'exercice est en cours de rédaction.

2.2 Constantes fondamentales

Constante	Valeur exacte	Unités
Constante de Planck	$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$	J s
Constante de Dirac	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571817 \times 10^{-34}$	J s
Vitesse de la lumière	$c = 299792458$	m s ⁻¹
Charge élémentaire	$e = 1.602176634 \times 10^{-19}$	C
Masse de l'électron	$m_e = 9.1093837015 \times 10^{-31}$	kg
Masse du proton	$m_p = 1.67262192369 \times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	$m_n = 1.675 \times 10^{-27}$	kg
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$	F m ⁻¹
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$	N A ⁻²
Constante gravitationnelle	$G = 6.67430 \times 10^{-11}$	m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$	J K ⁻¹
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6.02214076 \times 10^{23}$	mol ⁻¹
Constante des gaz parfaits	$R = 8.314462618$	J mol ⁻¹ K ⁻¹
Température de référence (0°C)	$T_0 = 273.15$	K

TABLE 2.1 – Constantes fondamentales de la physique avec leurs valeurs exactes.

2.3 Formulaire

2.3.1 Électromagnétisme

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Absence de monopôles magnétiques}) \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Loi d'Ampère-Maxwell}) \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \varphi = \mathbf{E} \quad (\text{Lien potentiel vecteur et champ EM}) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{Déplacement électrique}) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (\text{Polarisation}) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (\text{Champ magnétique auxiliaire}) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (\text{Aimantation}) \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e, \quad \mu_r = 1 + \chi_m \quad (\text{Relations aux susceptibilités}) \quad (2.10)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (\text{Vitesse dans le milieu}) \quad (2.11)$$

$$\square \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Équation d'onde dans le vide}) \quad (2.12)$$

$$\gamma = \sigma + i\omega\varepsilon \quad (\text{Conductivité complexe}) \quad (2.13)$$

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \quad (\text{Puissance de Larmor}) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{Vecteur de Poynting}) \quad (2.15)$$

2.3.2 Relativité restreinte

$$E = \gamma m c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (\text{Énergie relativiste}) \quad (2.16)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{Facteur de Lorentz}) \quad (2.17)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (\text{Transformation de Lorentz}) \quad (2.18)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (\text{Transformation du temps}) \quad (2.19)$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (\text{Vecteur impulsion relativiste}) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (\text{Vecteur impulsion du photon}) \quad (2.22)$$

2.3.3 Mécanique quantique

$\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$	(Opérateur quantité de mouvement)
	(2.23)
$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi\rangle = \mathbf{H} \psi\rangle$	(Équation de Schrödinger)
	(2.24)
$[\mathbf{X}_i, \mathbf{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}$	(Commutation canonique)
	(2.25)
$\langle\psi \mathbf{A} \psi\rangle = \langle A \rangle$	(Valeur moyenne)
	(2.26)
$(\Delta A)^2 = \langle\psi (\mathbf{A} - \langle A \rangle)^2 \psi\rangle$	(Variance d'un observable)
	(2.27)
$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \langle\psi [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \psi\rangle $	(Inégalité de Heisenberg)
	(2.28)
$\mathbf{U}(t) = e^{-i\mathbf{H}t/\hbar}$	(Évolution unitaire)
	(2.29)
$\mathbf{H} E_n\rangle = E_n E_n\rangle$	(États propres stationnaires)
	(2.30)
$\mathbb{P}(a_n) = \langle a_n \psi \rangle ^2$	(Probabilité par la règle de Born)
	(2.31)
$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger), \quad \mathbf{P} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a})$	(Oscillateur harmonique)
	(2.32)
$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{1}$	(Commutateur)
	(2.33)
$\mathbf{H} = \hbar\omega \left(\mathbf{N} + \frac{1}{2} \right)$	(Hamiltonien oscillateur)
	(2.34)
$\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \quad \mathbf{N} n\rangle = n n\rangle$	(Nombre de quanta)
	(2.35)
$\mathbf{L}_i = \varepsilon_{ijk} \mathbf{X}_j \mathbf{P}_k$	(Moment cinétique orbital)
	(2.36)
$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \mathbf{J}_k$	(Algèbre de Lie de $SU(2)$)
	(2.37)
$[\mathbf{H}, \mathbf{A}] = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \text{constante d'évolution}$	(Symétrie et conservation)
	(2.38)

2.3.4 Physique statistique

Ensemble canonique (système en contact avec un thermostat, à nombre de particules fixés)

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (\text{Énergie de température}) \quad (2.39)$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (\text{Fonction de partition}) \quad (2.40)$$

$$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \quad (\text{Probabilité d'occupation du niveau } n) \quad (2.41)$$

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n P_n = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (\text{Énergie moyenne}) \quad (2.42)$$

$$\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \quad (\text{Fluctuation de l'énergie}) \quad (2.43)$$

$$S = -k_B \sum_n P_n \ln P_n \quad (\text{Entropie statistique de Shannon}) \quad (2.44)$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad (\text{Énergie libre de Helmholtz}) \quad (2.45)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad (\text{Lien avec la thermodynamique}) \quad (2.46)$$

Ensemble grand-canonique (système en contact avec un réservoir de particules et de chaleur) :

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_n e^{-\beta(E_{n,N} - \mu N)} \quad (\text{Grande fonction de partition}) \quad (2.47)$$

$$\mathcal{Z} = \prod_i \xi_i \quad (\text{Factorisation sur les états}) \quad (2.48)$$

$$\xi_i = \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i} \quad (\text{Partition pour l'état } i) \quad (2.49)$$

$$\mathcal{J} = -k_B T \ln \mathcal{Z} \quad (\text{Grand potentiel}) \quad (2.50)$$

$$\mathcal{J} = -k_B T \sum_i \ln \xi_i \quad (\text{Grand potentiel, version factorisée}) \quad (2.51)$$

$$P = -\left(\frac{\mathcal{J}}{V}\right) \quad (\text{Pression}) \quad (2.52)$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \quad (\text{Nombre moyen de particules}) \quad (2.53)$$

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} + \mu \langle N \rangle \quad (\text{Énergie moyenne}) \quad (2.54)$$

$$S = -\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial T}\right)_{V,\mu} \quad (\text{Entropie}) \quad (2.55)$$

$$F = \langle E \rangle - TS = \mathcal{J} + \mu \langle N \rangle \quad (\text{Lien avec l'énergie libre}) \quad (2.56)$$

2.3.5 Mécanique analytique

$$\mathcal{L} = T - V \quad (\text{Lagrangien}) \quad (2.57)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\text{Équations de Lagrange}) \quad (2.58)$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF(q, t)}{dt} \quad (\text{Non-unicité du Lagrangien}) \quad (2.59)$$

$$\mathcal{S}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (\text{Action}) \quad (2.60)$$

$$\delta \mathcal{S} = 0 \quad (\text{Principe de moindre action}) \quad (2.61)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\text{Moment conjugué}) \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \Rightarrow p_\alpha = \text{Cte} \quad (\text{Variable cyclique}) \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha - \mathcal{L} = \text{Cte} \quad (\text{Identité de Beltrami}) \quad (2.64)$$

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - \mathcal{L} \quad (\text{Hamiltonien}) \quad (2.65)$$

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \quad (\text{Équations de Hamilton}) \quad (2.66)$$

$$\{f, g\} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right) \quad (\text{Crochet de Poisson}) \quad (2.67)$$

$$\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{Évolution temporelle}) \quad (2.68)$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial F}{\partial P_\alpha}, \quad p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \quad (\text{Transformation canonique via } F_2(q, P, t)) \quad (2.69)$$

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{Nouvel Hamiltonien}) \quad (2.70)$$

2.3.6 Physique subatomique

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (\text{Angle solide élémentaire}) \quad (2.71)$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (\text{Section efficace totale}) \quad (2.72)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (\text{Section efficace différentielle}) \quad (2.73)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2 \sin \theta} \left| \frac{db^2}{d\theta} \right| \quad (\text{Section efficace différentielle classique}) \quad (2.74)$$

$$B = [Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)] c^2 \quad (\text{Énergie de liaison du noyau}) \quad (2.75)$$

$$Q = [m_{\text{initial}} - m_{\text{final}}] c^2 \quad (\text{Énergie libérée dans une réaction}) \quad (2.76)$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (\text{Loi de décroissance radioactive moyenne}) \quad (2.77)$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (\text{Durée de vie moyenne et demi-vie}) \quad (2.78)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = -\lambda_i N_i + \lambda_{i-1} N_{i-1} \quad (\text{Désintégration en chaîne}) \quad (2.79)$$

2.3.7 Optique ondulatoire

$$j^2 = -1 \quad (\text{Nombre imaginaire}) \quad (2.80)$$

$$\psi(x) = \psi_0 e^{jk\delta} \quad (\text{Onde plane monochromatique}) \quad (2.81)$$

$$d\psi = \psi_0 e^{j\varphi(x)} dx \quad (\text{Élément de champ diffracté}) \quad (2.82)$$

$$\psi(M) = \int \psi_0(x) e^{j\varphi(x)} dx \quad (\text{Champ diffracté - intégrale de Fresnel}) \quad (2.83)$$

$$\varphi(x) = \frac{(x - x')^2}{2z} \quad (\text{Phase dans l'approximation de Fresnel}) \quad (2.84)$$

$$I(x) = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(x) \right) \right] \quad (\text{Interférences à deux ondes}) \quad (2.85)$$

$$I = \left| \int_A^B d\psi \right|^2 \quad (\text{Principe de superposition - intensité}) \quad (2.86)$$

$$L_{AB} = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds \quad (\text{Chemin optique}) \quad (2.87)$$

$$\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda} L_{AB} \quad (\text{Déphasage associé}) \quad (2.88)$$

$$i = \frac{\lambda D}{a} \quad (\text{Interfrange en approximation de Fraunhofer}) \quad (2.89)$$

2.3.8 Thermodynamique

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \quad (\text{Premier principe}) \quad (2.90)$$

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (\text{Second principe}) \quad (2.91)$$

$$F = U - TS \quad (\text{Énergie libre de Helmholtz}) \quad (2.92)$$

$$G = U + pV - TS = \mu N \quad (\text{Énergie libre de Gibbs}) \quad (2.93)$$

$$H = U + pV \quad (\text{Enthalpie}) \quad (2.94)$$

$$pV = Nk_B T = nRT \quad (\text{Gaz parfait}) \quad (2.95)$$

$$U = \frac{f}{2} Nk_B T \quad (\text{Énergie interne, } f \text{ degrés de liberté}) \quad (2.96)$$

$$= \frac{3}{2} Nk_B T \quad (\text{Gaz parfait monoatomique}) \quad (2.97)$$

$$= \frac{5}{2} Nk_B T \quad (\text{Gaz parfait diatomique à haute } T) \quad (2.98)$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{f}{2} Nk_B \quad (\text{Chaleur spécifique à volume constant}) \quad (2.99)$$

$$C_P = C_V + Nk_B = \frac{f+2}{2} Nk_B \quad (\text{Chaleur spécifique à pression constante}) \quad (2.100)$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f} \quad (\text{Coefficient adiabatique}) \quad (2.101)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,p} \quad (\text{Potentiel chimique}) \quad (2.102)$$

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (\text{Pression via énergie libre}) \quad (2.103)$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad (\text{Entropie via énergie libre}) \quad (2.104)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (\text{Relation de Maxwell}) \quad (2.105)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \quad (\text{Relation de Maxwell}) \quad (2.106)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T \quad (\text{Définition de la température}) \quad (2.107)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -p \quad (\text{Définition de la pression}) \quad (2.108)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (\text{Équilibre hydrostatique}) \quad (2.109)$$

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \quad (\text{Atmosphère isotherme}) \quad (2.110)$$

2.3.9 Opérateurs en coordonnées curvilignes

Coordonnées cylindriques :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (2.111)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.112)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \quad (2.113)$$

$$+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (2.114)$$

$$+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.115)$$

Coordonnées sphériques :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (2.116)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (2.117)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \quad (2.118)$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta \quad (2.119)$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi \quad (2.120)$$

2.3.10 Identités trigonométriques

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1, \quad 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}. \quad (2.121)$$

Formules d'addition

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b), \quad (2.122)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b). \quad (2.123)$$

Formules de duplication

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta), \quad (2.124)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta). \quad (2.125)$$

Ces formules sont très utiles pour les changements de variables en intégration.

Expression de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}. \quad (2.126)$$

Changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Ce changement de variable est souvent utilisé pour simplifier les intégrales trigonométriques. On a également :

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt. \quad (2.127)$$

2.4 Légende des notations thématiques

- (RR) : Relativité Restreinte
- (MQ) : Mécanique Quantique
- (EM) : Électromagnétisme
- (MA) : Mécanique Analytique
- (PS) : Physique Statistique
- (FS) : Physique Subatomique
- (OO) : Optique Ondulatoire
- (TH) : Thermodynamique

2.5 Parcours suggéré en fonction du niveau

Pour aider les lecteurs à naviguer dans cette collection dense d'exercices, voici quelques suggestions de parcours selon votre niveau et vos objectifs. Bien entendu, chaque étudiant reste libre d'explorer les problèmes qui l'inspirent.

Niveau	Exercices recommandés
Début Licence 3	3.1 – Problème à deux corps 3.2 – Section efficace de Rutherford 3.4 – Machine à champ magnétique pulsé 3.13 - Instabilité électrodynamique de l'atome classique
Fin de Licence 3 / Début Master 1	3.3 – Effet Cherenkov 3.5 – Métrique sur une sphère 3.6 – Rayonnement du corps noir 3.10 – Atome d'hydrogène et équation radiale 3.12 – Potentiel de Pöschl-Teller 3.14 - Géodésiques dans un milieu optique 3.15 - Condensat de Bose-Einstein 3.16 - Chaîne de désintégration
Master 1 avancé	3.7 – Minimisation du potentiel gravitationnel 3.8 – Particule chargée relativiste 3.9 – Hydrodynamique relativiste 3.11 – Vers un formalisme relativiste

Chapitre 3

Exercices

Ce recueil d'exercices a été conçu avec l'ambition de dépasser la simple pratique mécanique des méthodes. Chaque énoncé vise à faire émerger une certaine forme d'élégance mathématique ou de profondeur physique — un regard attentif y découvrira, derrière les équations et les techniques, une cohérence subtile, parfois même une beauté formelle. Certains exercices sont exigeants, tant par leur longueur que par leur structure : ils s'inspirent parfois de sujets de concours ou de situations physiques réalistes, et peuvent nécessiter plusieurs heures de réflexion. Leur objectif n'est pas seulement de renforcer les compétences techniques, mais de faire ressentir, à travers la résolution progressive, l'unité profonde entre la rigueur mathématique et la réalité physique qu'elle décrit. Ce chapitre est évolutif : de nouveaux problèmes y seront ajoutés régulièrement, dans le même esprit d'élégance, de clarté, et de profondeur.

3.1 Problème à deux corps et quantification de l'atome de Bohr[†] (MA) ★★★

¹ (Correction)

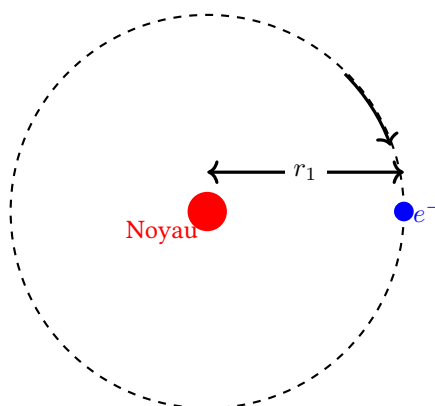


FIGURE 3.1 – Schéma de l'atome de Bohr.

1. [†] Inspiré de Claude Aslangul, *Mécanique Quantique 1*, Chapitre 7.

Considérons un système de deux particules de masses m_1 et m_2 interagissant via un potentiel central $V(r) = -\frac{C}{r} = -\frac{\vartheta^2}{r}$, où r est la distance entre les deux particules et C est une constante réelle. Ici on utilise le potentiel coulombien, mais on pourrait très bien utiliser un potentiel gravitationnel. On essaiera ici d'étudier en détail les états liés de l'atome d'hydrogène d'après l'ancienne théorie des quanta et d'obtenir en particulier l'énergie associée à une trajectoire donnée de l'électron de masse m_1 autour du noyau de masse m_2 .

3.1.1 Centre de masse

On désigne $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ les rayons vecteurs de l'électron et du noyaux par rapport à un repère quelconque, et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ les vitesses correspondantes.

1. Écrire le lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
2. On introduit \mathbf{R} le rayon vecteur du centre de masse et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Montrer que le Lagrangien peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathcal{L}_G(\mathbf{V}) + \mathcal{L}_r(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (3.1)$$

3. Expliquer pourquoi le moment cinétique total du centre de masse G, \mathbf{J} , est une constante du mouvement. En tirer une conclusion sur la trajectoire.

Dans la suite, on examine exclusivement le mouvement interne par \mathcal{L}_r en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan perpendiculaire à \mathbf{J} .

3.1.2 Intégration des équations du mouvement

1. Écrire l'hamiltonien \mathcal{H} du mouvement interne et écrire les équation d'Hamilton. Retrouver la conservation du mouvement cinétique et interpréter l'équation où ne figurent que $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$.
2. Déterminer la relation entre r, θ , c'est à dire, de trouver la trajectoire. Pour cela, éliminer le temps des équations obtenus précédemment en posant $u = \frac{1}{r}$, et montrer que,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = K, \quad K = \frac{\mu \vartheta^2}{J^2} \quad (3.2)$$

3. En déduire finalement que la trajectoire est une conique, dont l'équation peut toujours être mise sous la forme,

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (3.3)$$

Donner l'expression de p paramètre de la conique et de ε , l'excentricité. Vérifier que la valeur de ε par rapport à 1 conditionne la nature de l'état correspondant (lié ou non lié).

3.1.3 Quantification de Bohr

Dans cette partie, ne considérant que les états liés ($E < 0$), on applique les règles de Bohr afin de faire le tri parmi toutes les trajectoires classiquement envisageables. Ces règles portent sur les

2. On notera $\vartheta^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

variables d'actions J_θ, J_r et s'écrivent,

$$J_\theta := \oint p_\theta d\theta = n_\theta h \quad (3.4)$$

$$J_r := \oint p_r dr = n_r h \quad (3.5)$$

$$n_\theta, n_r \in \mathbb{Z} \quad (3.6)$$

1. Trouver les valeurs possibles du moment cinétique J en conséquence de la quantification de J_θ . Préciser les valeurs possible de l'entier n_θ correspondant.
2. Quantifier J_r et en déduire la relation entre ε et les entiers n_r, n_θ ³. On donne,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (3.7)$$

3. En déduire que l'énergie E est quantifiée, avec $n \in \mathbb{N}^*$ dépendant de n_θ, n_r et que,

$$E_n = -\frac{\mu v^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (3.8)$$

3. A première vu, on pourrait dire que $J_r = 0$, il faudra forcer une intégration par partie.

3.2 Section efficace de Rutherford[†] (FS) ★★

⁴ (Correction)

On se place dans le même cas que l'exercice précédent avec deux particules, dont une est immobile, interagissant avec un potentiel de la forme $V(r) = \frac{C}{r}$. En effet, ici $C = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}$, $Q = Ze$, $q = 2e$. On va utiliser quelques résultats de l'exercice précédent. Il est donc préférable de l'avoir fait en amont.

3.2.1 Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome

On se place dans le repère polaire (r, φ) perpendiculairement au moment cinétique, puisque le mouvement est plan. La particule α arrive avec une vitesse initiale \mathbf{v}_0 . On se place dans le cas $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \pi$.

1. Déterminer la composante non nulle de \mathbf{J} en fonction de r, φ . Déterminer cette même composante en fonction de b, v_0 , b paramètre d'impact.
2. Écrire l'équation du mouvement. Décomposer $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ en un vecteur parallèlement à l'axe polaire et un autre perpendiculaire à l'axe polaire. En déduire que,

$$m\dot{v}_\perp = \frac{C}{r^2} \sin \varphi \quad (3.9)$$

3. On veut faire apparaître l'angle de déviation θ . En intégrant l'équation, en déduire que,

$$v_0 \sin \theta = \frac{C}{mbv_0} (\cos \theta + 1) \quad (3.10)$$

4. En utilisant quelques formules trigonométriques, en déduire que,

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{C}{2E_0 b} \quad (3.11)$$

Où $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$.

3.2.2 Section efficace de Rutherford

1. Rappeler la formule de la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.
2. En déduire que,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{C^2}{16E_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3.12)$$

3. En déduire ce modèle n'est pas valable pour les petits angles de déviation.
4. Expliquer pourquoi cette expérience démontre l'existence des noyaux d'atome.

⁴ [†] Inspiré de Claude Aslangul, *Mécanique Quantique 1*, Chapitre 3.

3.3 Effet Cherenkov[†] (RR, FS) ★★

⁵ (Correction)

L'effet Cherenkov se produit lorsqu'une particule chargée traverse un milieu diélectrique à une vitesse v supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu c/n , où n est l'indice de réfraction du milieu.

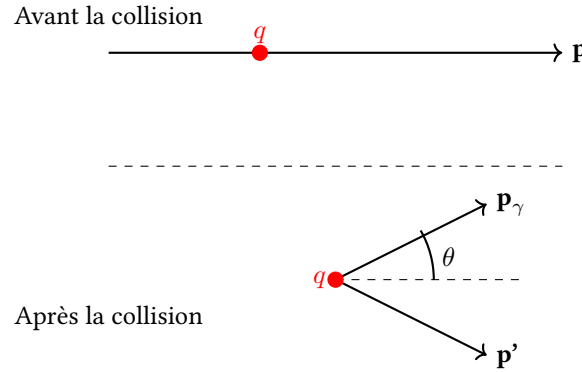


FIGURE 3.2 – Schéma de l'effet Cherenkov.

L'impulsion de la particule chargée est \mathbf{p} avant la collision, et \mathbf{p}_γ l'impulsion du photon après collision, et \mathbf{p}' l'impulsion de la particule chargée après la collision, (c.f fig 3.2). L'angle θ est l'angle formé entre \mathbf{p} et \mathbf{p}_γ . On rappelle que $\lambda = \frac{c}{n\nu}$.

1. Exprimer p_γ en fonction de h, ν, c, n . En déduire la relation entre p_γ, E_γ dans un milieu d'indice n .
2. Pour l'événement élémentaire, écrire la conservation de l'impulsion.
3. En utilisant la question précédente, donner l'expression de \mathbf{p}'^2 en fonction des modules des impulsions p, p_γ et de l'angle θ .
4. Écrire la conservation de l'énergie.
5. En déduire que,

$$p'^2 = p^2 - 2\frac{E}{c^2}h\nu + \frac{p_\gamma^2}{n^2} \quad (3.13)$$

Où E désigne l'énergie initiale de l'électron.

6. Obtenir $\cos \theta$ en fonction de $p, p_\gamma, E, h, n, c, \nu$.
7. Montrer ainsi que,

$$\cos \theta = \frac{c}{nv} \left[1 + \frac{h\nu}{2E} (n^2 - 1) \right] \quad (3.14)$$

8. A quelle condition l'effet Cherenkov se produit-il ?
9. Dans quel intervalle de fréquence les photons sont-ils émis ?
10. Dans quelle direction les photons les plus énergétiques sont-ils émis ?
11. Tous les photons sont émis dans un cône ; quel est le demi-angle au sommet de ce cône ϕ ? Calculer ϕ approximativement pour $n = \frac{4}{3}$ et $v = \frac{4}{5}c$.
12. Comparer l'énergie cinétique minimale de la particule pour que l'effet se produise suivant qu'il s'agit d'un électron ou un proton, $n = \frac{4}{3}$.

5. [†] Inspiré de Claude Aslangul, *Mécanique Quantique 1*, Chapitre 5.

3.4 Machine à champ magnétique pulsé (EM) ★★

(Correction)

La machine de stimulation magnétique est une technologie non invasive utilisée en kinésithérapie et en rééducation. Son principe repose sur la génération de champs magnétiques pulsés à l'aide d'une bobine circulaire. Concrètement, la machine envoie des impulsions de courant à travers la bobine, ce qui crée un champ magnétique variable dans le temps. Selon la loi de Faraday, cette variation induit automatiquement un champ électrique dans les tissus environnants.

Ce champ électrique induit agit directement sur les membranes cellulaires des muscles en activant les canaux ioniques. En conséquence, un potentiel d'action se déclenche, entraînant une contraction musculaire. Ce mécanisme permet non seulement de stimuler des muscles affaiblis ou atrophiés, mais aussi d'améliorer la circulation sanguine et de réduire la douleur. De plus, l'absence de contact direct avec la peau rend le traitement confortable et sécuritaire pour le patient.

La machine de stimulation magnétique est notamment utilisée pour :

Favoriser la rééducation musculaire après une blessure ou une chirurgie. Soulager des douleurs chroniques associées à des troubles musculosquelettiques. Améliorer le tonus musculaire et prévenir l'atrophie. Stimuler la circulation sanguine et lymphatique pour accélérer la récupération. En résumé, grâce à une approche basée sur des principes physiques fondamentaux d'induction électromagnétique, cette technologie permet de traiter efficacement diverses affections musculaires et nerveuses, offrant une solution complémentaire aux thérapies conventionnelles en rééducation.

Pour modéliser cette machine, on considère une bobine circulaire de rayon R parcourue par un courant variable

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t), \quad (3.15)$$

où I_0 est l'amplitude du courant, τ le temps caractéristique d'amortissement, et ω la fréquence d'oscillation. L'axe de la bobine est supposé coïncider avec l'axe z . La bobine est considérée comme mince et peut être modélisée par une spire unique.

1. Champ magnétique de la bobine

- En supposant que la bobine se comporte comme un dipôle magnétique, exprimer le champ magnétique \mathbf{B} sur l'axe central (à une distance z du centre) en fonction de $I(t)$, R , z et des constantes fondamentales.
- Montrer que pour $z \gg R$, le champ s'approche à celui d'un dipôle et donner son expression asymptotique.

2. Champ électrique induit dans le tissu biologique

On considère un tissu conducteur modélisé par un disque mince de rayon a , placé sous la bobine.

- À partir de la loi locale de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

exprimer le champ électrique induit \mathbf{E} en fonction de $\frac{dB}{dt}$.

- En supposant une symétrie cylindrique (champ purement azimutal), déduire l'expression du champ électrique induit $E_\theta(r, t)$ dans le plan du disque, en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$.

3. Effet sur les neurones moteurs

Un neurone moteur est supposé être activé lorsque la tension induite dépasse un seuil V_{seuil} .

- (a) Exprimer V en fonction des paramètres du problème.
 - (b) Déterminer une condition sur I_0 , τ , ω , et les paramètres géométriques pour assurer l'activation du neurone.
 - (c) En utilisant des valeurs numériques réalistes ($R = 5$ cm, $a = 2$ cm, $I_0 = 100$ A, $\tau = 1$ ms, $\omega = 10^4$ rad/s, et $V_{\text{seuil}} = 10$ mV), vérifier si l'activation du neurone est possible.
4. **Effet du champ magnétique pulsé sur les muscles** Expliquez pourquoi un champ magnétique pulsé, en induisant un champ électrique dans les tissus, peut provoquer une contraction musculaire. Décrivez brièvement le mécanisme physiologique (activation des canaux ioniques, génération d'un potentiel d'action, contraction musculaire).

3.5 Métrique sur une sphère (MA) ★★

(Correction)

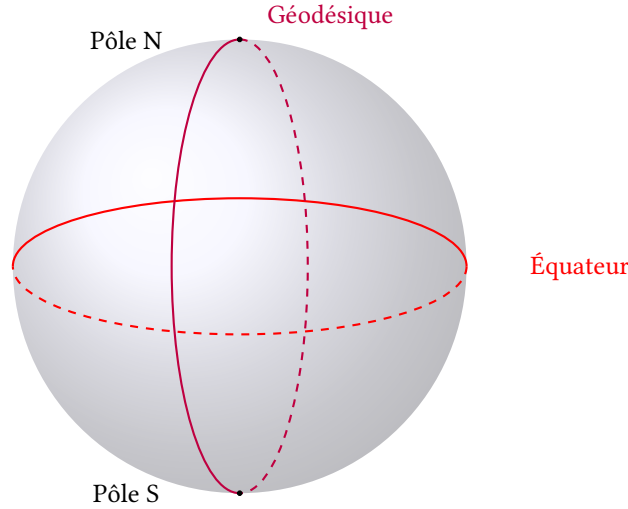


FIGURE 3.3 – Schéma d'une sphère et de ses géodésiques.

Notre but va être de déterminer la métrique de la sphère et ses géodésiques. Cela nous permettra de comprendre quelles sont les meilleures trajectoires à suivre pour un avion. On rappelle qu'en coordonnées sphériques, pour un rayon constant R ,

$$x = R \cos \varphi \sin \theta \quad (3.17)$$

$$y = R \sin \varphi \sin \theta \quad (3.18)$$

$$z = R \cos \theta \quad (3.19)$$

1. Calculer l'élément de longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ en fonction de R, θ et φ .
2. Grâce à l'action $S = \int ds = \int \mathcal{L} d\lambda$, λ un paramètre bien choisi et au principe variationnel, déterminer les équations des géodésiques.
3. Résoudre les équations en utilisant des symétries. On pourra utiliser que,

$$\int \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \alpha}}} \text{ poser } u = \cot \alpha \quad (3.20)$$

$$\int -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + C \quad (3.21)$$

Démontrer que les géodésiques sont de la forme suivante,

$$(x, y, z) \in S^2, ax + by + cz = 0 \quad (3.22)$$

C'est à dire que les géodésiques sont des intersections entre des plans passant par l'origine et la sphère, ou dit encore autrement des arcs de cercles.

3.6 Rayonnement du Corps Noir (PS) ★★★★★

(Correction)

On cherche à avoir la densité spectrale d'énergie, c'est à dire la fonction,

$$u(\nu, T) = \frac{d^2 W}{d\nu d\mathcal{V}} = \frac{dN}{d\nu} \frac{\langle W \rangle}{\mathcal{V}}, \quad (3.23)$$

Avec W l'énergie, et $\langle W \rangle$ l'énergie moyenne. On va également se placer dans un cadre historique, sans utiliser la mécanique quantique qui a été découverte, en partie grâce aux résultats que l'on va démontrer.

3.6.1 Nombre de modes excités par unité de fréquences

1. Soit un corps noir, représenté par une cavité cubique de côté L et de volume \mathcal{V} . Écrire l'équation de propagation du champ \mathbf{E} dans la cavité.
2. Calculer la solution de l'équation. Expliquer pourquoi le champ \mathbf{E} dépend de trois modes $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \quad (3.24)$$

4. Par un comptage de cubes joints, de volume unitaire, empilés le long des axes n_x, n_y, n_z , on peut énumérer le nombre total N de modes excités. Chaque cube peut être repéré de la manière suivante : $\mathbf{r} = n_\mu \mathbf{e}^\mu$. Lorsque les cubes sont très nombreux, c'est à dire que L est très grand devant λ , il suffit de calculer le volume de d'une boule de rayon r . Or, la condition que les entiers soient strictements positif impose le fait de ne prendre que 1/8 du volume total de la boule. Un facteur 2 est également à considérer dû aux deux plans de polarisations possibles pour le champ \mathbf{E} . Avec ces informations, en déduire que,

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \mathcal{V} \quad (3.25)$$

3.6.2 Catastrophe Ultraviolette

1. Expliquer pourquoi un ensemble associé à ce problème, *de calcul de u* est l'ensemble canonique.
2. Calculer l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique.
3. Donner la probabilité d'être dans l'état d'énergie W . En déduire la fonction de partition Z d'un gaz d'oscillateurs harmonique.
4. Ainsi, démontrer que,

$$\langle W \rangle = k_B T \quad (3.26)$$

5. En déduire que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T \quad (3.27)$$

Et expliquer le titre de cette sous partie.

3.6.3 Loi de Planck

L'idée révolutionnaire est d'estimer que l'énergie des photons est quantifiée. Ainsi, on passe de l'idée de distribution d'énergie continue à discrète. Son idée vint du fait que l'énergie moyenne d'un oscillateur ne dépendait pas de la fréquence ν . Il suspecta alors une simple relation de proportionnalité entre W et ν :

$$W_n = nh\nu \quad (3.28)$$

Vint alors l'idée de quanta, que l'énergie n'est pas une donnée continue mais qu'elle se distribue comme paquet indivisible, nommé **quanta**⁶.

1. Recalculer la fonction de partition Z .
2. En déduire que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (3.29)$$

$$\text{Avec } \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

Et la catastrophe ultra violette fut résolu, ce résultat s'accordait parfaitement à l'expérience. Cette fonction devint ainsi intégrable, ce qui donnera ensuite la Loi de Stefan.

3.6.4 Flux énergétique émis par un corps noir

On considère une cavité en équilibre thermique, remplie d'un gaz de photons à température T . Le rayonnement est **isotrope** et caractérisé par une densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$, telle que :

$$u(\nu) d\nu = \text{énergie électromagnétique par unité de volume, entre les fréquences } \nu \text{ et } \nu + d\nu. \quad (3.30)$$

Soit I l'intensité totale (flux d'énergie par unité de surface perpendiculaire, toutes directions confondues) émise par le corps noir.

1. Rappeler l'expression du flux énergétique monochromatique émis dans une direction d'angle θ par rapport à la normale à une surface, en fonction de l'intensité spectrale directionnelle I_ν et du solide d'angle $d\Omega$.
2. Montrer que le flux énergétique total émis à la fréquence ν par unité de surface est donné par :

$$I(\nu) = \int_{\Omega_+} I_\nu \cos \theta d\Omega, \quad (3.31)$$

où Ω_+ désigne l'hémisphère sortant ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

3. En supposant que le rayonnement est isotrope, c'est-à-dire que I_ν est indépendant de la direction, montrer que :

$$I(\nu) = \pi I_\nu. \quad (3.32)$$

4. En intégrant sur toutes les fréquences, en déduire que l'intensité totale émise est :

$$I = \int_0^\infty \pi I_\nu d\nu. \quad (3.33)$$

6. Albert Einstein utilisa lors de l'année 1905, *annus mirabilis*, l'idée de Plank pour expliquer l'effet photoélectrique, qui lui vaudra le prix Nobel en 1921.

5. Montrer que la densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$ est donnée par :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) d\Omega. \quad (3.34)$$

En supposant que le rayonnement est isotrope, en déduire :

$$u(\nu) = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \quad (3.35)$$

6. En déduire que :

$$I = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu. \quad (3.36)$$

3.6.5 Loi de Stefan

La loi de Stefan affirme, que pour un corps noir,

$$I(T) = \sigma \times T^4 \quad (3.37)$$

Avec σ la constante de Stefan. Nous allons le démontrer.

1. En utilisant les parties précédentes, montrer que,

$$I = \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (3.38)$$

2. Vérifier la convergence de l'intégrale, et exprimer l'intégrale comme une série.
3. Démontrer enfin que,

$$I(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} T^4 \quad (3.39)$$

On reconnaîtra la loi de Stefan⁷,

$$I = \sigma T^4 \quad (3.40)$$

3.6.6 Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique

En supposant que le Soleil est un corps noir, déterminer \dot{m} la perte de masse par unité de temps. A combien de kg.s cette perte de masse s'élève-t-elle ? Sachant que notre Soleil à 4.6×10^9 ans, combien de masses terrestres environ notre Soleil a-t-il déjà perdu ?

AN : $R = 6.96 \times 10^8$ m, $T = 5775$ K, $m = 1.98 \times 10^{30}$ kg, $m_T = 6 \times 10^{24}$ kg.

7. On a donc $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$ et franchement, on ne l'aurait pas deviné.

3.7 Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule

(MA) ★★★★★

(Correction)

Cet exercice fait appel à des notions de calcul différentiel.

On s'intéresse au problème variationnel suivant : trouver parmi les domaines bornés et ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de volume fixé, celui qui minimise l'**interaction gravitationnelle interne** définie par la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}[\Omega] = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x' \quad (3.41)$$

On note que cette expression est proportionnelle au potentiel d'auto-interaction gravitationnelle d'un corps de densité uniforme. En effet, pour $x \in \mathbb{R}^3$,

$$U(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho}{|x - x'|} d^3x \quad (3.42)$$

L'énergie potentielle gravitationnelle totale du système est alors :

$$E[\Omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho U(x) d^3x = -\frac{G}{2} \rho^2 \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'. \quad (3.43)$$

– On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un ouvert borné de classe \mathcal{C}^2 , avec frontière $\partial\Omega$.

– Le volume de Ω est défini par :

$$V := \int_{\Omega} d^3x \quad (3.44)$$

– On considère une déformation infinitésimale normale de la frontière de Ω , paramétrée par $\varepsilon \in \mathbb{R}$, selon :

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x)n(x), \quad \text{pour } x \in \partial\Omega \quad (3.45)$$

où $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ est une fonction lisse et $n(x)$ est le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$.

– Le domaine déformé est noté Ω_ε , et désigne l'ouvert borné obtenu par cette déformation :

$$\Omega_\varepsilon := \{x + \varepsilon f(x)n(x) \mid x \in \Omega\} + o(\varepsilon) \quad (3.46)$$

(La déformation est supposée prolongée en l'intérieur de Ω pour définir rigoureusement Ω_ε .)

3.7.1 Formule de Hadamard

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et soit Ω_ε une déformation lisse de Ω telle que pour $x \in \partial\Omega$,

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x)n(x) \quad (3.47)$$

et on suppose que cette déformation est prolongée lisse sur tout Ω .

On souhaite démontrer que :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x) \quad (3.48)$$

Avec dS élément de surface associé à $\partial\Omega$.

1. Nous allons faire une étude de la fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Justifier que $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \det M$ est différentiable.

(b) Démontrer que,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(I + \varepsilon M) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} M + o(\varepsilon) \quad (3.49)$$

En déduire que $\frac{d}{d\varepsilon} \det(I + \varepsilon M) = \operatorname{Tr} M$.

(c) Soit $X \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R}), H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que,

$$d(\det(H))(X) = \operatorname{Tr}({}^t \operatorname{Com}(X)H) \quad (3.50)$$

2. Poser le changement de variable $x(u) = u + \varepsilon f(u)n(u)$, et calculer le jacobien $\det(\frac{\partial x}{\partial u})$ au premier ordre en ε , c-à-d à l'ordre $o(\varepsilon)$.

3. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^1, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon \in U$ un voisinage de 0. En posant une fonction bien choisie, démontrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, F(x + \varepsilon v(x)) = F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F + o(\varepsilon) \quad (3.51)$$

4. En déduire le résultat voulu grâce au théorème de la Divergence.

3.7.2 Lien avec le potentiel gravitationnel

1. Montrer que $E[\Omega] < 0$, et que minimiser l'énergie revient à maximiser la quantité suivante :

$$\mathcal{I}[\Omega] := \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'. \quad (3.52)$$

2. On suppose que $\Omega = B(0, R)$ est une boule centrée à l'origine, de rayon R tel que $\operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi R^3 = V$. Montrer que le potentiel gravitationnel au centre est donné par :

$$U(0) = -G\rho \int_{\Omega} \frac{1}{|x'|} d^3x'. \quad (3.53)$$

Calculer explicitement cette intégrale.

3.7.3 La sphère?

1. Démontrer que,

$$\delta \mathcal{F} = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x) \quad (3.54)$$

On pourra utiliser ou démontrer (*pour les plus courageux*) que,

$$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\partial(\Omega^2)} \varphi(x) d\mu(x) = 2 \int_{\Omega \times \partial\Omega} \varphi(x) d\mu(x) \quad (3.55)$$

2. On cherche à minimiser \mathcal{F} à volume constant et fixé V . Pour cela on cherche à minimiser $\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{F} - \lambda V, \lambda \in \mathbb{R}$. En déduire que la variation première de la fonctionnelle \mathcal{F} s'écrit :

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial\Omega} \left(2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda \right) f(x) dS(x) \quad (3.56)$$

3. En utilisant la symétrie sphérique, montrer que si Ω est une boule de rayon R , alors pour tout $x \in \partial\Omega$, la quantité :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3 x' \quad (3.57)$$

est constante. En déduire que la boule satisfait la **condition stationnaire** : $\delta\mathcal{L} = 0$ pour tout f .

4. (*Bonus*) Montrer que la boule est bien un *minimum* local pour \mathcal{F} sous contrainte de volume constant en étudiant la variation seconde.
5. Conclure et expliquer pourquoi les grands objets de l'Univers sont sphériques.

3.8 Mouvement relativiste d'une particule chargée (RR, MA, EM, FS) ★★★★★

(Correction)

3.8.1 Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

1. Montrer qu'en utilisant le principe de moindre action et l'invariance de Lorentz, l'action d'une particule libre de masse m peut s'écrire $S = -mc \int ds$ où $ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2$. En déduire que le Lagrangien du système est

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}, \quad (3.58)$$

où $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$.

2. En introduisant le quadripotential électromagnétique $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$, proposer un terme d'interaction \mathcal{L}_{int} correspondant à une particule de charge q dans ce champ. Montrer que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi, \quad (3.59)$$

et en déduire le Lagrangien total $\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{int}}$.

3. À partir du Lagrangien total, calculer l'impulsion généralisée $P_i = \partial \mathcal{L}_{\text{tot}} / \partial v^i$. Montrer qu'elle s'écrit

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} + q \mathbf{A}, \quad (3.60)$$

où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

4. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées à \mathcal{L}_{tot} et montrer qu'elles conduisent à l'équation de Lorentz en 3 dimensions,

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.61)$$

avec $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$.

5. Écrire le lagrangien en paramétrant par le temps propre τ et en déduire que,

$$\mathcal{L} = -mc \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + q g_{\mu\nu} A^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.62)$$

6. Montrer que,

$$m \ddot{x}_\mu = q F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (3.63)$$

Où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique.

7. Écrire explicitement les composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$ et montrer que $F_{0i} = E_i/c$ et $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$. Interpréter la signification physique de ces composantes.
8. Calculer les deux invariants du champ électromagnétique,

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad I_2 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (3.64)$$

et exprimer-les en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{B} . Quels sont les cas physiques correspondant à $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$?

9. Vérifier que sous une transformation de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, les équations du mouvement restent inchangées. Quel est la symétrie associée?

3.8.2 Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane

On considère une particule de masse m et de charge q soumise à un champ électromagnétique décrit par le tenseur $F^{\mu\nu}$. Son mouvement est régi par l'équation :

$$m\ddot{x}^\mu = qF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu \quad (3.65)$$

où les points désignent les dérivées par rapport au temps propre τ de la particule. On se place dans un système d'unités naturelles où $c = 1$.

On modélise une onde électromagnétique plane par un potentiel quadrivecteur de la forme :

$$A^\mu(x) = a^\mu f(k_\nu x^\nu) \quad (3.66)$$

où f est une fonction de classe C^1 , k^μ est un quadrivecteur lumière, d'où $k^\mu k_\mu = 0$, et a^μ est un quadrivecteur constant représentant la polarisation.

1. Montrer que

$$F^{\mu\nu}(x) = (k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu) f'(k_\rho x^\rho) \quad (3.67)$$

2. (a) Calculer $\partial_\mu A^\mu$ dans le cas du potentiel $A^\mu(x) = a^\mu f(k_\rho x^\rho)$.

(b) En déduire que la condition de jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ implique :

$$a^\mu k_\mu = 0 \quad (3.68)$$

3. On considère maintenant le mouvement d'une particule dans cette onde électromagnétique.

(a) En utilisant l'expression du tenseur $F^{\mu\nu}$ trouvée en question 1, montrer que :

$$F^{\mu\nu}\dot{x}_\nu = [k^\mu(a_\rho\dot{x}^\rho) - a^\mu(k_\rho\dot{x}^\rho)] f'(k_\rho x^\rho) \quad (3.69)$$

(b) En déduire l'équation du mouvement sous la forme :

$$m\ddot{x}^\mu = q[k^\mu(a_\rho\dot{x}^\rho) - a^\mu(k_\rho\dot{x}^\rho)] f'(k_\rho x^\rho) \quad (3.70)$$

4. On cherche maintenant à intégrer cette équation.

(a) Montrer que le scalaire $k_\rho\dot{x}^\rho$ est constant au cours du mouvement.

(b) En déduire que $\phi = k_\rho x^\rho(\tau)$ est une fonction affine de τ , que l'on pourra utiliser comme nouveau paramètre.

(c) À l'aide des relations précédentes, intégrer l'équation du mouvement et déterminer l'expression complète de la trajectoire $\tau \mapsto x^\mu(\tau)$ ⁸

(d) On pose $f = \sin$. Donner la trajectoire complète.

3.8.3 Théorie des Champs

On définit l'action,

$$S = \int_{\Omega} -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu d^4x, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{1,3} \quad (3.71)$$

On peut ainsi définir aisément une **densité** de Lagrangien.

8. Cet exercice permet de déterminer analytiquement la trajectoire d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane. Vous pourrez ensuite la représenter en Python à partir des fonctions obtenues.

1. Pour une action dépendant d'un champ φ (scalaire, tensoriel...) :

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi, \partial_{\mu}\varphi, x^{\mu}) d^4x \quad (3.72)$$

Démontrer que les équations d'Euler-Lagrange restent vraies pour un champ φ .

Pour cela, on postulera le principe de moindre action, c'est à dire que pour une transformation infinitésimale $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon\eta$ ⁹, on a,

$$\frac{dS}{d\varepsilon}[\varphi + \varepsilon\eta, \partial_{\mu}(\varphi + \varepsilon\eta), x^{\mu}](0) = 0 \quad (3.73)$$

2. Démontrer les équations de Maxwell en tensorielle, où $j^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j})$ est la quadricharge (quadri-densité de courant) :

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu}, \quad \partial_{\lambda}F_{\mu\nu} + \partial_{\mu}F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu} = 0, \quad (3.74)$$

3.8.4 Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant

Considérons une particule de masse m et de charge q évoluant de manière relativiste dans un champ électromagnétique. Dans cet partie, on introduit progressivement les effets d'un champ magnétique constant $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ (secteur courbe d'un synchrotron) et d'une force moyenne de freinage due au rayonnement synchrotron.

A. Rayonnement synchrotron négligé

1. Calculer $F^{\mu\nu}$.
2. En déduire que le mouvement est dans le plan Oxy . Montrer que l'énergie est constante, si l'on néglige la perte dû au rayonnement.
3. Montrez que, en l'absence de perte d'énergie, pour $u^{\mu} = (\gamma c, 0, u_0 = \gamma v, 0)$ ¹⁰,

$$x(t) = R \cos\left(\frac{\omega}{\gamma}t\right), \quad y(t) = R \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}t\right) \quad (3.75)$$

Avec, (loi du synchrotron)¹¹ :

$$R = \frac{\gamma v}{\omega} = \frac{\gamma m v}{q B} \quad (3.76)$$

B. Étude du mouvement réel

1. Le rayonnement synchrotron entraîne une perte d'énergie moyenne. Rappeler la formule de la puissance rayonnée moyenne (Larmor relativiste) pour une accélération centripète $a = v^2/R$,

$$P = -\frac{d}{dt}E = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^4 a^2 \quad (3.77)$$

En utilisant $E = \gamma m c^2$, montrez qu'en développant on obtient l'équation différentielle,

$$\frac{d}{dt}\gamma = -C \times (\gamma^2 - 1) \quad (3.78)$$

On donnera l'expression du coefficient C en fonction de $q, B, m, c, \varepsilon_0$.

9. Où η est une fonction de classe $C^1(\Omega)$, et $\forall x \in \partial\Omega, \eta(x) = 0$, c'est à dire que la fonction est nulle aux bornes.

10. Il faudrait également démontrer que γ et v sont constant, et que $\tau(t) = \gamma t$.

11. Pour cela, il faudra passer dans le référentiel du laboratoire.

2. Résoudre l'équation différentielle sur γ ¹². On donne $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$.
3. En déduire la nouvelle trajectoire de la particule chargée. Étudier la limite quand $t \rightarrow \infty$.
4. Tracer la courbe paramétrique $x(t), y(t)$ en python. Quel problème cela génère ?

3.8.5 Physique des collisionneurs relativistes

Ici, on se placera avec l'unité de vitesse $c = 1$.

1. Définir le carré de l'invariant d'énergie-momentum total $s = (p_1 + p_2)^2$ pour la collision de deux particules de quatre-impulsions p_1 et p_2 . Exprimer l'énergie totale disponible dans le référentiel centre de masse (CMS) en fonction de s .
2. Pour une collision tête-à-tête de deux particules identiques de masse m et d'énergie E (chacune) dans le référentiel du laboratoire, montrer que l'énergie en CMS vaut $\sqrt{s} = 2E$ (supposant $E \gg m$).
3. Pour le cas d'une collision contre une cible fixe de masse m , dériver la formule

$$s = m^2 + m^2 + 2mE_{\text{lab}}, \quad (3.79)$$

et déduire l'énergie au seuil de production de deux particules de masse m (collision élastique extrême).

4. Calculer l'énergie requise dans une expérience à cible fixe pour produire un nouveau produit de masse M au seuil, et comparer à l'énergie requise dans un collisionneur symétrique ($E_{\text{CM}} = M + M$). Pourquoi les collisionneurs à faisceaux opposés sont-ils plus efficaces pour atteindre de hautes énergies ?

12. Il est en effet bien plus simple de résoudre l'équation sur γ que sur v , car ici v dépend du temps.

3.9 Hydrodynamique relativiste et collisions de noyaux lourds (RR, FS) ★★★★★

(Correction)

3.9.1 Hydrodynamique classique

1. Écrire l'équation de conservation de la masse (continuité) pour un fluide classique, soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.80)$$

Montrer que dans le cas d'un fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$), cela réduit à $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

2. Écrire l'équation d'Euler pour un fluide parfait (non visqueux) soumis à un champ de gravité \mathbf{g} :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (3.81)$$

Décrire brièvement la signification physique de chaque terme de cette équation.

3. Montrer comment l'ajout d'effets visqueux conduit à l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}, \quad (3.82)$$

où η est la viscosité dynamique (cisaillement) et ζ la viscosité volumique. Expliquer le rôle de ces termes.

4. Expliquer la différence entre la description lagrangienne (recherche des trajectoires des particules de fluide) et la description eulérienne (vue sur le champ de vitesse à un point fixe de l'espace). En particulier, montrer que la dérivée totale pour un fluide est $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ dans le formalisme eulérien.
5. Définir les lignes de courant (streamlines) dans un fluide, et montrer que ces courbes sont tangentes au vecteur champ de vitesses \mathbf{v} en chaque point. Interpréter physiquement ces lignes.
6. Démontrer le théorème de Bernoulli pour un fluide stationnaire, incompressible et sans viscosité. Montrer que le long d'une ligne de courant,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \Phi = \text{constante}, \quad (3.83)$$

où Φ est un potentiel de forces (par exemple $\Phi = gz$ en champ constant \mathbf{g}).

3.9.2 Introduction à l'hydrodynamique relativiste

L'hydrodynamique relativiste permet de décrire l'évolution de systèmes continus à haute densité d'énergie (comme le plasma de quarks-gluons) en incorporant les principes de la relativité restreinte. On s'intéresse ici à des fluides parfaits, sans viscosité ni conduction thermique, et à leur description contravariante.

1. **Tenseur énergie-impulsion.** Le contenu énergétique et dynamique d'un fluide parfait est encodé dans le tenseur énergie-impulsion :

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} - p g^{\mu\nu}, \quad (3.84)$$

où :

- ε est la densité d'énergie (dans le référentiel propre du fluide),
- p est la pression (même unité que ε , i.e. J/m^3),
- u^μ est le quadrivecteur vitesse du fluide,
- $\eta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ est la métrique de Minkowski.

- (a) Vérifier que $T^{\mu\nu}$ est symétrique.
- (b) Calculer $T^{\mu\nu}$ dans le référentiel propre du fluide ($u^\mu = (c, 0, 0, 0)$).
- (c) Interpréter les composantes physiques de T^{00} , T^{0i} , et T^{ij} .
- (d) Montrer que la trace $T^\mu_\mu = \varepsilon - 3p$.

2. **Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.** Dans tout système isolé, le tenseur énergie-impulsion est conservé localement :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.85)$$

Cette équation tensorielle (4 équations scalaires) exprime la conservation de l'énergie ($\nu = 0$) et des trois composantes du moment ($\nu = 1, 2, 3$). Elle constitue l'équation fondamentale de l'hydrodynamique relativiste.

- (a) Quelles sont les inconnues dynamiques du problème ?
- (b) Pourquoi faut-il compléter ce système par une équation d'état reliant ε , p et éventuellement T ?

3. **Thermodynamique relativiste.** Dans le référentiel propre du fluide, on définit localement :

$$T : \text{température}, s : \text{entropie volumique}, \mu : \text{potentiel chimique}, n : \text{densité de particules}. \quad (3.86)$$

La première loi de la thermodynamique, exprimée en densités locales (c'est à dire dans un élément de volume dV), prend la forme :

$$d\varepsilon = T ds + \mu dn. \quad (3.87)$$

- (a) En supposant $\mu = 0$, montrer que $dp = s dT$.
 - (b) En déduire l'identité $\varepsilon + p = Ts$, appelée relation d'Euler.
4. **Vitesse du son relativiste.** La vitesse du son c_s est définie par :

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_s. \quad (3.88)$$

- (a) Calculer c_s pour un fluide ultra-relativiste où $p = \varepsilon/3$.
- (b) Comparer à la vitesse de la lumière c et commenter.

3.9.3 Hydrodynamique relativiste

On considère un fluide parfait en relativité restreinte. Le nombre total de particules est donné par

$$N = \int_\Sigma J^\mu d\Sigma_\mu, \quad (3.89)$$

à travers une hypersurface spacelike Σ orientée vers le futur (par exemple $t = \text{cste}$). On suppose que N est conservé.

1. Montrer que la conservation du nombre de particules s'exprime localement par

$$\partial_\mu (nu^\mu) = 0, \quad (3.90)$$

où n est la densité de particules dans le référentiel comobile, et u^μ la quadrivitesse du fluide.

2. Montrer qu'en prenant $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$, on a $T^{00} = \varepsilon$ et $T^{ii} = p$. Interpréter.
3. En utilisant $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, déduire l'équation du mouvement (ou *relativistic Euler equation*) d'un fluide parfait sans source :

$$(\varepsilon + p)u^\mu \partial_\mu u^\nu + \left(g^{\mu\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) \partial_\mu p = 0. \quad (3.91)$$

3.9.4 Application aux collisions de noyaux lourds

1. Décrire le scénario d'une collision centrale de noyaux lourds à RHIC ou LHC : formation d'un plasma de quarks et gluons (QGP), thermalisation, expansion hydrodynamique, découplage (freeze-out)¹³.
2. Introduire les coordonnées de Bjorken : $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$, $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}$. En supposant un fluide boost-invariant, montrer que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ conduit à :

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\varepsilon + p}{\tau} = 0. \quad (3.92)$$

3. Pour $p = \varepsilon/3$, résoudre l'équation ci-dessus et en déduire :

$$\varepsilon(\tau) \propto \tau^{-4/3}, \quad T(\tau) \propto \tau^{-1/3}. \quad (3.93)$$

4. Lors de la transition $\text{QGP} \rightarrow \text{hadrons}$, l'équation d'état peut s'écrire :

$$p = \frac{\varepsilon - 4B}{3}. \quad (3.94)$$

Montrer que $p = 0$ à la transition implique $\varepsilon = 4B$ et en déduire la température critique T_c .

5. En modélisant un noyau par une sphère de rayon R , définir la section efficace géométrique $\sigma \simeq \pi(2R)^2$. Relier cette quantité à la distinction entre collisions centrales et périphériques.
6. Montrer que l'énergie volumique initiale ε_0 est plus grande pour une collision centrale. En supposant $\varepsilon = aT^4$, estimer la température initiale T_0 atteinte à RHIC ($\varepsilon_0 \sim 10 \text{ GeV/fm}^3$).
7. Définir le rapport viscosité sur entropie η/s . Pourquoi des valeurs proches de $1/4\pi$ indiquent-elles un fluide presque parfait ? Quel est l'effet d'une faible viscosité sur le flux elliptique v_2 ?
8. Expliquer les notions de freeze-out chimique (réactions inélastiques gelées) et cinétique (réactions élastiques gelées). Pourquoi l'hydrodynamique cesse-t-elle d'être valide à ce stade ?
9. Comment l'hydrodynamique relativiste permet-elle de relier les observables mesurées (spectre en impulsion transverse, anisotropies, etc.) à l'état initial du QGP ?

13. Le terme « fluide relativiste » désigne tout fluide dont les constituants ont des énergies cinétiques comparables à leur masse : $k_B T \gtrsim mc^2$. Il peut s'agir d'un plasma (chargé), mais aussi d'un gaz de photons ou neutrinos. Le cadre de l'hydrodynamique relativiste est donc plus général que la physique des plasmas.

3.10 Atome d'hydrogène et équation radiale (MQ) ★★★

(Correction)

Dans ce problème, on étudie l'atome d'hydrogène (électron de masse m_e dans le potentiel coulombien $V(r) = -e^2/r$ d'un proton fixe) en mécanique quantique non-relativiste. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right] \psi(r, \theta, \phi) - \frac{e^2}{r} \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi), \quad (3.95)$$

où \mathbf{L}^2 est l'opérateur du carré du moment cinétique orbital.

3.10.1 Séparation des variables et équation radiale

1. Montrer que la fonction d'onde peut se séparer sous la forme $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, où $Y_{\ell m}$ est une harmonique sphérique propre de \mathbf{L}^2 et \mathbf{L}_z , avec :

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}, \quad \mathbf{L}_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}. \quad (3.96)$$

En déduire que l'équation de Schrödinger radiale vérifiée par $R(r)$ est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right] - \frac{e^2}{r} R = ER. \quad (3.97)$$

2. En posant $u(r) = rR(r)$, montrer que l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u(r) = Eu(r). \quad (3.98)$$

On définit le paramètre κ par :

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m_e |E|}{\hbar^2}}. \quad (3.99)$$

Montrer que si l'on introduit la variable adimensionnelle $\rho = \kappa r$, l'équation prend la forme :

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{\rho_0}{\rho} + 1 \right] u(\rho), \quad (3.100)$$

avec $\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2 \kappa}$.

3. Proposer l'ansatz :

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho/2} v(\rho), \quad (3.101)$$

et montrer que $v(\rho)$ vérifie l'équation différentielle¹⁴ :

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + (2\ell + 2 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + (\rho_0 - 2\ell - 2)v = 0. \quad (3.102)$$

4. En développant $v(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k$, montrer que la série diverge en général à l'infini, sauf si elle s'arrête à un ordre fini. En déduire que la condition de terminaison de la série est :

$$\rho_0 = 2n, \quad \text{où } n = \hat{k} + \ell + 1 \in \mathbb{N}^*. \quad (3.103)$$

14. On reconnaît une équation d'hypergéométrie confluyente.

5. En déduire l'expression des niveaux d'énergie liés de l'atome d'hydrogène :

$$\kappa_n = \frac{m_e e^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{2n} \Rightarrow E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa_n^2}{2m_e} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (3.104)$$

6. Quel est le degré de dégénérescence de chaque niveau E_n ? Montrer qu'il vaut n^2 en tenant compte des possibilités pour ℓ (allant de 0 à $n-1$) et m (allant de $-\ell$ à $+\ell$). Interpréter pourquoi, dans ce modèle non-relativiste, l'énergie dépend uniquement de n et non de ℓ .

3.10.2 État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales

7. Pour le niveau fondamental ($n = 1, \ell = 0$), montrer que la fonction d'onde normale du radial s'écrit

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}. \quad (3.105)$$

En déduire l'expression complète de $\psi_{1,0,0}(r, \theta, \phi)$ et vérifier sa normalisation $\int |\psi_{1,0,0}|^2 d^3x = 1$ (on utilise que $Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$).

8. Calculer la densité de probabilité radiale $P(r) = 4\pi |R_{1,0}(r)|^2 r^2$ et tracer qualitativement son profil en fonction de r . Interpréter la signification physique de cette densité (lieu le plus probable où se trouve l'électron).
9. Démontrer que l'espérance de la distance $\langle r \rangle$ entre l'électron et le noyau, ainsi que la variance $(\Delta r)^2$, sont données par

$$\langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0, \quad (\Delta r)^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \frac{3}{2} a_0^2 - \left(\frac{3}{2} a_0 \right)^2. \quad (3.106)$$

(Indication : utiliser l'intégrale $\int_0^\infty r^n e^{-2r/a_0} dr = n!(a_0/2)^{n+1}$ et vérifier les résultats.)

10. (Optionnel) On peut également introduire la représentation impulsionnelle. Calculez la transformée de Fourier $\tilde{\psi}_{1,0,0}(\mathbf{p})$ de l'état fondamental et interprétez la distribution en impulsion (carré du module) associée. Quelle est la valeur moyenne de la quantité de mouvement $\langle \mathbf{p} \rangle$ et de son carré $\langle p^2 \rangle$?
11. *Interpréter* : Discutez brièvement pourquoi la dépendance en $1/n^2$ des niveaux E_n explique la structure fine de raies spectrales de l'hydrogène et la notion de nombre quantique principal.

3.11 Vers un formalisme relativiste (MQ, RR) ★★★★★

(Correction)

On utilise la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ et les unités $c = \hbar = 1$.

1. On considère un champ scalaire réel $\phi(x)$ de masse m . On pose la densité de Lagrangien relativiste

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.107)$$

Montrer que \mathcal{L} est invariante sous les transformations de Lorentz.

2. Appliquer les équations d'Euler-Lagrange au champ scalaire et en déduire l'équation de Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi = 0$.
3. Commenter l'équation de Klein-Gordon en rappelant pourquoi une équation du second ordre pose des problèmes d'interprétation probabiliste pour un champ relativiste.
4. Motivé par cette difficulté, on cherche une équation d'onde relativiste du premier ordre en les dérivées, symétrique en temps et en espace, pour un objet $\psi(x)$ à plusieurs composantes (un spineur). Énoncer la forme générale d'une telle équation linéaire en ∂_μ (on peut l'écrire sous la forme $(iA^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ avec des matrices A^μ).
5. On propose le Lagrangien de Dirac pour un champ de spineurs à 4 composantes $\psi_\alpha(x)$ et son conjugué de Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (3.108)$$

- (a) Montrer que \mathcal{L}_D est hermitien (à un dérivé total près).
 - (b) Vérifier que \mathcal{L}_D est invariant sous les transformations de Lorentz (transformations spinoriales de ψ).
6. En appliquant les équations d'Euler-Lagrange pour les champs à composantes (variation par rapport à $\bar{\psi}$), établir l'équation de Dirac :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (3.109)$$

En utilisant la définition de $\bar{\psi}$, écrire l'équation adjointe satisfaite par $\bar{\psi}$.

7. (a) En multipliant à gauche l'équation de Dirac par $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$, montrer que ψ vérifie l'équation de Klein-Gordon. Expliquer pourquoi il est nécessaire que les matrices γ^μ satisfassent des relations d'anticommutation.
- (b) En déduire explicitement les relations d'anticommutation des matrices de Dirac :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (3.110)$$

8. (a) Donner explicitement les matrices γ^μ dans la représentation de Dirac (par exemple $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$).
 - (b) Vérifier à partir de cette représentation les relations de Clifford obtenues ci-dessus pour $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.
9. On cherche des solutions de l'équation de Dirac de la forme onde plane

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (3.111)$$

avec $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, $p \cdot x = p_\mu x^\mu = -Et + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$.

- (a) Montrer que pour $u(p)$ on obtient l'équation algébrique

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0. \quad (3.112)$$

- (b) En déduire les valeurs de E autorisées et interpréter les solutions correspondantes en termes d'états d'énergie positive ou négative.
 (c) Combien de solutions linéairement indépendantes (spineurs u et v) existe-t-il au total pour un moment donné ? Relier ce résultat aux degrés de liberté de spin de la particule et de son antiparticule.

10. On définit le courant de Dirac

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.113)$$

- (a) En utilisant les équations de Dirac (et son adjoint), montrer que $\partial_\mu j^\mu = 0$ (courant conservé).
 (b) Vérifier que la densité $j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi$ est positive définie. Interpréter j^0 comme densité de probabilité et comparer avec le cas du champ de Klein-Gordon.

11. On souhaite quantifier le champ de Dirac.

- (a) Énoncer les conditions de quantification canonique du champ de Dirac ψ et ψ^\dagger (ou ψ et $\bar{\psi}$). Justifier pourquoi on doit utiliser des anticommutateurs $\{, \}$ plutôt que des commutateurs.
 (b) Indiquer comment la quantification mène à l'introduction d'opérateurs de création et d'annihilation de particules et d'antiparticules (de Dirac). Expliquer comment les états d'énergie négative sont interprétés comme des états d'antiparticules (principe de la mer de Dirac).

12. Montrer que le Lagrangien de Dirac \mathcal{L}_D est invariant sous la transformation de phase globale $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$. En déduire, par le théorème de Noether, la conservation du courant j^μ .
 13. Introduire le couplage minimal du champ de Dirac à un potentiel électromagnétique A_μ : on remplace ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ dans \mathcal{L}_D . Montrer que cette prescription rend le Lagrangien invariant sous la jauge locale $\psi \rightarrow e^{ie\Lambda(x)} \psi$, $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda$. Expliquer brièvement l'implication physique de cette invariance (introduction de l'interaction électromagnétique et conservation de la charge électrique).
 14. Résumer les implications physiques de l'équation de Dirac obtenue : existence d'une particule libre de spin 1/2 (et de son antiparticule), calcul du moment magnétique $\mu = g \frac{q}{2m} \mathbf{S}$, μ vecteur, avec $g = 2$, etc. Conclure sur la façon dont cette construction respecte la covariance relativiste et sur le rôle de l'algèbre de Clifford dans la description des fermions relativistes.

3.12 Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$ (MQ)



(Correction)

On considère une particule quantique soumise à un potentiel attractif de la forme

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \quad (3.114)$$

appelé potentiel de Pöschl–Teller, où $\alpha > 0$. Ce potentiel admet un nombre fini d'états liés, et permet une résolution exacte de l'équation de Schrödinger.

L'Hamiltonien du système s'écrit,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha \mathbf{X})} \quad (3.115)$$

1. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une fonction d'onde $\psi(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \psi(x) = E \psi(x). \quad (3.116)$$

2. Montrer que la substitution $u = \tanh(\alpha x)$ entraîne

$$\psi'(x) = \alpha(1-u^2) \frac{d\phi}{du}, \quad \psi''(x) = \alpha^2 \left((1-u^2) \frac{d^2\phi}{du^2} - 2u \frac{d\phi}{du} \right), \quad (3.117)$$

avec $\phi(u) = \psi(x(u))$.

3. En déduire que l'équation en $u \in]-1, 1[$ s'écrit

$$(1-u^2) \frac{d^2\phi}{du^2} - 2u \frac{d\phi}{du} + \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-u^2} \right] \phi = 0, \quad (3.118)$$

et exprimer λ, μ en fonction de V_0, α, m, \hbar, E .

4. Identifier λ, μ . On cherche une solution de la forme $\phi(u) = (1-u^2)^{\frac{\mu}{2}} P(u) = Q(u)P(u)$.

Indication : Exprimer $Q'(u)$ en fonction de $Q(u)$, cela simplifiera les calculs.

Démontrer que $P :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifie l'équation différentielle suivante,

$$(1-u^2)P'' - 2(\mu+1)uP' + [\lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1)]P = 0 \quad (3.119)$$

5. En examinant le comportement de la solution aux bornes $u \rightarrow \pm 1$, on souhaite montrer que $P(u)$ doit être un polynôme pour que $\phi \in L^2([-1, 1])$. On le démontrera par l'absurde. On suppose que P n'est pas un polynôme.

- (a) Démontrer que la condition de normalisation s'écrit,

$$\int_{-1}^1 \frac{|\phi(u)|^2}{1-u^2} < \infty \quad (3.120)$$

- (b) P est analytique entre $] -1, 1[$. Poser ainsi $P(u) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p u^p$. Obtenir une relation de récurrence entre a_{p+2} et a_p et démontrer que,

$$a_{p+2} \underset{\infty}{\sim} a_p \quad (3.121)$$

(c) Conclure en utilisant la critère de Riemann pour les intégrales ¹⁵.

6. Il existe ainsi $n = \deg P \in \mathbb{N}$. On pose ainsi,

$$P(u) = \sum_{p=0}^n a_p u^p \quad (3.122)$$

Utiliser la relation de récurrence entre a_{p+2} et a_p , et montrer que $\mu = \lambda - n$ ¹⁶.

7. En déduire la quantification E_n sous la forme

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} (\lambda - n)^2, \quad n = 0, 1, \dots, \lfloor \lambda \rfloor, \quad (3.123)$$

où $\lambda(\lambda + 1) = \frac{2mV_0}{\hbar^2 \alpha^2}$.

8. Montrer que le nombre d'états liés est fini : $N = \lfloor \lambda \rfloor + 1$.

9. Expliquer physiquement pourquoi le nombre d'états liés est fini, malgré la forme "sans fond" du potentiel. Discuter le lien avec la décroissance asymptotique du potentiel.

15. Pour être rigoureux mathématiquement, il faudrait également utiliser le théorème d'équivalence des séries divergentes.

16. On ne regarde que les états liés, donc $\mu > 0$.

3.13 Puissance de Larmor et instabilité électrodynamique de l'atome classique[†] (EM) ★★

¹⁷ (Correction)

Une charge confinée (donc accélérée) émet un rayonnement électromagnétique. Il s'agit maintenant d'examiner plus précisément quelques conséquences des lois de l'Électromagnétisme classique combinées avec celles de la dynamique (d'où : *Électrodynamique*) et notamment de montrer que l'atome classique est fondamentalement instable : l'électron localisé au sein de l'atome émet un rayonnement et, de ce fait, perd graduellement son énergie.

La description ci-dessous repose sur le fait que l'effet de rayonnement reste un phénomène mineur, bien qu'il conduise finalement à des conclusions spectaculaires. Le point de départ sera donc une description dynamique ordinaire, à laquelle on rajoutera les effets perturbatifs dus au rayonnement de la source (l'électron confiné) sur le mouvement de cette source.

3.13.1 Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad} .

La puissance de Larmor, est la puissance perdue par une charge accélérée. Nous allons en déduire une force de radiation, \mathbf{F}_{rad} , qui mènera à des conséquences spectaculaires.

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} \quad (3.124)$$

1. Écrire le travail $dE_{\text{at}} = dW$, qui est égale à la variation d'énergie de l'atome pendant un temps dt de la force de radiation \mathbf{F}_{rad} .
2. Écrire la variation d'énergie de l'atome pendant un temps dt dû à la puissance rayonnée de l'électron.
3. En intégrant par partie et en supposant que le mouvement est périodique, montrer qu'on a alors ¹⁸,

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2\vartheta^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (3.125)$$

4. Appliquez le PFD, avec la force \mathbf{F}_{rad} ¹⁹ calculée précédemment et une force de rappel $\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$. En cherchant une solution de la forme $\mathbf{r}(t) = \text{Re}\{\mathbf{r}_0 e^{i\omega t}\}$, en cherchant

$$\omega = \omega_0(1 + \alpha(\omega_0\tau) + o(\omega_0\tau)), \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.126)$$

Montrer que la solution est un oscillateur amorti.

AN : On donne $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3} \simeq 6,4 \times 10^{-24}$ s, $\omega_0 = 3 \times 10^{15}$ rad.s⁻¹. Commentez.

3.13.2 Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad} .

La force de freinage \mathbf{F}_{rad} écrite précédemment est conceptuellement pathologique, comme le montre l'analyse qui suit. En reprenant les notations de la section 1.5, Tome I, l'équation d'Abraham-Lorentz pour une particule de charge e et de masse m soumise à une force \mathbf{F} est (avec $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$) :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\tau \dddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}, \quad (3.127)$$

17. [†] Inspiré de Claude Aslangul, *Mécanique Quantique 1*, Chapitre 1.

18. Où $\vartheta^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

19. Remarquez l'apparition d'une force dépendant de la dérivée de l'accélération. Nous allons étudier dans la partie suivante les problèmes que cette force cause.

où le temps $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3} \simeq 6,4 \times 10^{-24}$ s correspond à une période. Une première bizarrerie de cette équation est l'apparition d'une dérivée troisième de la position de la particule (définie par le rayon-vecteur \mathbf{r}), censée représenter l'effet du freinage par rayonnement.

De surcroît, la perturbation du mouvement provoquée par cet effet est fondamentalement *singulière*, au sens où elle modifie l'ordre de l'équation différentielle du mouvement, lequel passe de 2 à 3 dès que la charge est non nulle. En fait, c'est bien parce que le petit paramètre τ est en facteur de la plus haute dérivée que la perturbation est dite *singulière*, par définition²⁰.

Ces avertissements étant donnés, il s'agit maintenant d'examiner les conséquences de l'équation (3.127) telle qu'elle est, précisément pour bien mettre en évidence les très graves difficultés de fond qu'elle soulève.

1. En utilisant la méthode connue pour intégrer une équation différentielle telle que (3.127), écrire l'expression générale de l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}(t)$, supposant connue l'accélération à un certain instant t_0 , $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$.
2. En examinant le cas particulier $\mathbf{F} = 0$, montrer que cette solution est aberrante physiquement.
3. Revenant à la solution générale obtenue en 1 dans le cas $\mathbf{F} \neq 0$, montrer que l'on peut formellement éliminer les solutions divergentes par un choix convenable de t_0 . Commenter ce choix — qui, sur le plan technique, exprime une condition aux limites plutôt qu'une condition initiale.
4. En déduire l'expression régularisée de la solution obtenue en 1. Revenant un cran en arrière et en analysant le noyau intégral figurant dans cette expression, vérifier que l'équation du mouvement redonne bien, dans la limite de charge nulle, l'équation ordinaire de la dynamique.
5. Afin d'exhiber clairement la violation annoncée d'un grand principe physique, effectuer un changement de variable d'intégration très simple pour obtenir :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} e^{-s} \times \mathbf{F}(t + \tau s) ds. \quad (3.128)$$

Commenter cette dernière équation et montrer qu'un principe physique y est violé.

6. Afin de mettre en évidence cette violation de façon encore plus spectaculaire, traiter le cas d'une particule de vitesse nulle en $t = -\infty$ et soumise à une force échelon :

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \mathbf{F}_0 & \text{si } t > 0. \end{cases} \quad (3.129)$$

Résumer ces résultats en traçant la variation en fonction du temps de l'accélération et de la vitesse. Noter que la particule se met en mouvement... **avant l'application de la force** !

20. Le même phénomène se produit pour l'équation aux valeurs propres de Schrödinger, où c'est cette fois la constante de Planck qui est en facteur de la plus haute dérivée. Il existe un traitement perturbatif spécifique pour ce genre de question, appelé méthode BKW (ou WKB) dans le contexte quantique.

3.14 Géodésiques dans un milieu optique dispersif (OO, MA, EM, TH) ★★★★★

(Correction)

Notre but dans cet exercice est de comprendre comment se propage la lumière dans les milieux à partir du principe variationnel, en prenant en compte la dispersion (dépendance de l'indice de réfraction en la longueur d'onde λ). Cela nous permettra ensuite d'expliquer toute sorte de phénomènes optiques courant.

3.14.1 Principe de Fermat et métrique optique

1. Démontrer le principe de Fermat à partir du principe de moindre action. Ce principe peut s'interpréter comme une géodésique pour une métrique effective donnée par :

$$ds^2 = n(\mathbf{r}, \lambda)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.130)$$

soit une métrique conforme à l'eulidienne : $g_{ij}(\mathbf{r}, \lambda) = n(\mathbf{r}, \lambda)^2 \delta_{ij}$ en notation d'Einstein.

2. Justifier pourquoi cette métrique est adaptée à la propagation de la lumière en milieu non homogène et dispersif.
3. Montrer que les trajectoires optiques sont les géodésiques de cette métrique.

3.14.2 Calcul d'un indice $n(\mathbf{r}, \lambda)$

Dans un milieu quelconque, l'indice de réfraction dépend microscopiquement de la densité via la susceptibilité électrique. On souhaite ici justifier, à partir d'un modèle électromagnétique réaliste²¹, que l'indice peut s'écrire sous la forme, avec $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$n(\mathbf{r}, \zeta) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2} \frac{N(\mathbf{r})e^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0} \left(1 + \zeta^2\right) + o(\zeta^2). \quad (3.131)$$

1. Rappeler que dans un milieu isotrope linéaire, avec champ magnétique négligeable, l'indice de réfraction s'écrit $n^2 = \varepsilon_r = 1 + \chi$.
2. À partir du modèle de Lorentz pour un électron lié soumis à un champ électrique, n'ayant qu'une seule résonance ω_0 , exprimer la susceptibilité $\chi(\mathbf{r}, \omega)$ en fonction de la densité locale $N(\mathbf{r})$. En particulier, démontrer que, pour γ négligeable,

$$n^2(\mathbf{r}, \zeta) = 1 + \frac{N(\mathbf{r})e^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0} \frac{1}{1 - \zeta^2}. \quad (3.132)$$

3. On suppose $\omega \ll \omega_0$. En déduire le développement limité de l'équation (3.131).

Ce modèle permettra ensuite d'introduire une métrique optique pour étudier les géodésiques de la lumière dans la goutte.

²¹ La validité du développement dépend du milieu considéré. Dans le cas d'un gaz ou d'un liquide, on peut généralement se limiter à une seule résonance principale située dans l'ultraviolet. Cela permet une approximation très précise : l'erreur sur l'indice est typiquement inférieure à 0,01 % dans l'air, et de l'ordre de 0,1 % dans l'eau, dans le domaine du visible.

3.14.3 Calcul de $N(\mathbf{r})$ pour un gaz et un liquide

On va chercher à calculer $N(\mathbf{r})$ pour l'air, et l'eau. Nous allons traiter les cas indépendamment. On rappelle que,

$$N(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathcal{N}_A \quad (3.133)$$

1. On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique. Il subit le champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. On suppose qu'on est à l'équilibre hydrostatique, et que $\delta Q = 0$, c-à-d que l'atmosphère est adiabatique.

(a) Démontrer en utilisant le premier principe que,

$$\frac{d}{dz} T = -\frac{g}{C_p}, \quad (3.134)$$

En déduire $T(z)$.

(b) Déterminer une équation différentielle sur p et démontrer que,

$$p(z) = p_0 \left(\frac{T(z)}{T_0} \right)^{\frac{gM}{RT_0}}, \quad \Gamma = \frac{g}{C_p}, \quad (3.135)$$

(c) En déduire $N(\mathbf{r}) = N(z)$ dans ce cas.

2. Dans le cas de liquide, on peut supposer dans la plupart des cas que $\rho(\mathbf{r}) = \text{cste}$. En déduire $N(\mathbf{r})$.

3.14.4 Géodésiques optiques dans un milieu sphérique

On considère un milieu isotrope dont l'indice de réfraction n dépend uniquement de la distance radiale r et de la longueur d'onde λ , via la fonction $n(r, \lambda)$. Ce cadre modélise, par exemple, des profils sphériquement symétriques de densité électronique $N(r)$, pertinents pour des atmosphères planétaires idéalisées.

Dans ce contexte, la propagation lumineuse peut être décrite par une métrique optique, qui définit le produit scalaire infinitésimal entre deux vecteurs $dx^i = (dx^1, dx^2, dx^3)$ selon :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.136)$$

Ce produit scalaire s'écrit formellement $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ où g_{ij} est la métrique sphérique optique.

Pour étudier les géodésiques, on paramètre la trajectoire par un paramètre affine s et on considère les fonctions $r(s)$, $\theta(s)$, $\varphi(s)$.

Le lagrangien associé, en utilisant le principe de moindre action, à cette métrique s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = n^2(r, \lambda) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad (3.137)$$

où $\dot{} = \frac{d}{ds}$.

Par simplicité, on peut fixer le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui simplifie le lagrangien en :

$$\mathcal{L} = n^2(r, \lambda) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad (3.138)$$

avec $\dot{\theta} = 0$.

En raison de la symétrie azimutale, on peut aussi utiliser φ comme paramètre indépendant, ce qui permet d'écrire la trajectoire sous la forme $r(\varphi)$ et simplifie la résolution.

1. **Dérivée de l'indice au carré** : Exprimer explicitement $\partial_r n^2(r, \lambda)$ en fonction de $N(r)$ et de sa dérivée $N'(r) = \frac{\partial N}{\partial r}$, sachant que $n(r, \lambda)$ dépend via $N(r)$.
2. **Symboles de Christoffel** : Calculer les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k pour cette métrique sphérique en fonction de $\partial_r n^2$, et donner leur forme explicite pour les coordonnées r et θ .
3. **Équations géodésiques** : En utilisant les symboles de Christoffel, écrire explicitement les équations différentielles pour $r(s)$ et $\theta(s)$ à partir de l'équation géodésique²² :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (3.139)$$

4. **Formalisme lagrangien** : Écrire le lagrangien optique associé,

$$\mathcal{L} = n^2(r, \lambda) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad (3.140)$$

avec $\dot{} = \frac{d}{ds}$, et obtenir les équations d'Euler-Lagrange pour $r(s)$ et $\theta(s)$.

5. **Principe variationnel** : Vérifier que les équations obtenues par le formalisme lagrangien coïncident bien avec celles issues des symboles de Christoffel.
6. **Symétrie et conservation** : Montrer que le système est invariant par rotation autour de l'axe (symétrie en φ), et en déduire la conservation d'un moment angulaire effectif.
7. **Paramétrage par l'angle φ** : Proposer un changement de paramètre pour décrire la trajectoire en fonction de φ (ou θ dans le plan équatorial), et réécrire les équations différentielles sous cette forme.
8. **Loi de Snell locale** : En utilisant la conservation angulaire, déduire une relation analogue à la loi de Snell, qui dépend explicitement de λ via $n(r, \lambda)$.
9. **Méthode numérique** : Proposer une méthode pour calculer la trajectoire complète du rayon lumineux pour une longueur d'onde fixée, par exemple en résolvant numériquement les équations obtenues en φ .

3.14.5 1^{ère} application : l'arc-en-ciel comme manifestation géométrique de la dispersion

On modélise une goutte d'eau comme une sphère homogène de rayon R , d'indice $n(\omega)$ calculé dans la section 3.14.2, plongée dans l'air, d'indice $\simeq 1$, (voir fig 3.4).

1. **Indice de réfraction de l'eau**. Rappeler l'expression de $n(\mathbf{r}, \omega) = n(\omega)$ pour un liquide.
2. **Modélisation géométrique d'un arc-en-ciel primaire**.
 - (a) On considère un rayon incident venant du Soleil, entrant dans la goutte avec un angle d'incidence α , réfracté selon la loi de Snell-Descartes, réfléchi une fois à l'intérieur, puis réfracté à nouveau à la sortie.

Justifier que le rayon reste rectiligne à l'intérieur de la goutte (indice constant), et que les seules déflexions viennent des surfaces sphériques.
 - (b) $\Theta(\omega, \alpha)$ est l'angle de déviation totale. Ainsi, démontrer que,

$$\Theta(\omega, \alpha) = 2\alpha - 4 \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n(\omega)}\right) + \pi \quad (3.141)$$

22. Un lecteur avisé remarquera que l'équation (3.139) est l'équation des géodésiques en relativité générale. Le cadre est semblable : un terme de courbure géométrique est imposé dû au milieu optique.

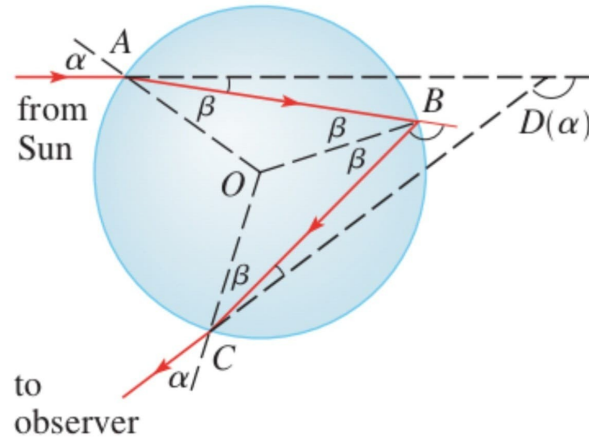


FIGURE 3.4 – Schéma géométrique des angles d'incidence, de réfraction et de déviation d'un rayon lumineux à travers une goutte sphérique. Ce schéma permet d'introduire l'angle total de déviation $\Theta - \pi = D$.

- (c) Montrer que $\Theta(\omega, \alpha)$ possède un minimum pour un certain angle $\alpha_c(\omega)$. Démontrer ainsi que,

$$\alpha_c(\omega) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{4 - n^2(\omega)}{3}}\right) \quad (3.142)$$

En déduire que les directions de sortie des rayons se concentrent autour d'un angle particulier $\Theta_{\min}(\omega)$, ce qui donne lieu à un maximum d'intensité lumineuse observée dans cette direction, (voir fig 3.5).

- (d) **A.N.** Pour $n \simeq 1.33$, calculer l'angle D_{\min} .
 (e) Étudier la fonction $\Theta_{\min}(\omega)$, et expliquer le phénomène des arcs en ciels.

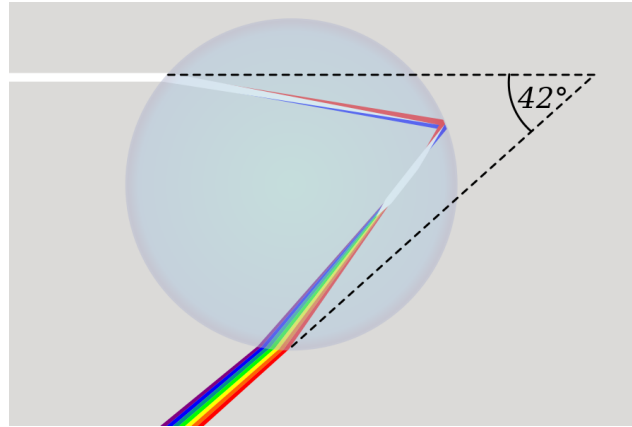


FIGURE 3.5 – Schéma de la formation de l'arc en ciel et de l'angle $\Theta_{\min}(\omega)$.

3. Lien avec la métrique optique et modélisation continue.

- (a) On suppose que la densité de particules polarisables dans la goutte varie radialement selon $N(r) = N_0 (1 - \mu r^2)$, avec $\mu > 0$ et $r \in [0, R]$.

En utilisant l'équation (3.131), pour déduire l'expression de l'indice de réfraction n . Vérifier que $n(\mathbf{r}, \omega)$ décroît du centre vers le bord de la goutte.

- (b) En se plaçant dans le plan équatorial de la goutte, écrire la métrique optique associée :

$$ds^2 = n^2(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2) \quad (3.143)$$

et rappeler que les trajectoires lumineuses sont les géodésiques pour cette métrique.

- (c) En utilisant l'invariance par rotation du système, écrire l'équation géodésique pour une trajectoire $r(\theta)$ (ou son équation intégrale via conservation du moment angulaire optique). Discuter qualitativement la forme des trajectoires lumineuses dans ce milieu à indice décroissant.
- (d) En comparant les trajectoires des différentes fréquences (via la dépendance en ω de α), expliquer qualitativement la séparation des couleurs et la formation d'un arc coloré.

3.14.6 2^{ème} application : couleurs des bulles de savon (interférences en lame mince)[†]

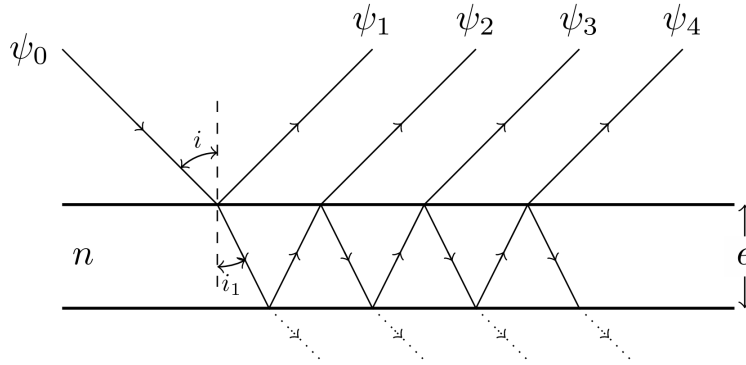


FIGURE 3.6 – Schéma de la lame de savon.

²³Nous étudions ici les irisations colorées observées sur une bulle de savon, expliquées par des interférences entre ondes réfléchies au sein d'une couche liquide très fine modélisée comme une lame mince.

Une bulle est représentée par une couche liquide d'indice $n \simeq \frac{4}{3}$ et d'épaisseur constante e , enfermée entre deux interfaces air/liquide/air, (voir fig 3.6)²⁴. L'indice de l'air est ici pris égal à 1. La lumière incidente est monochromatique de longueur d'onde λ et arrive presque normalement²⁵.

1. Réflexions multiples et interférences

- (a) Expliquer pourquoi la lumière réfléchiée par la bulle peut se décomposer en une somme infinie d'ondes réfléchies et transmises successivement aux deux interfaces.
- (b) Montrer que le déphasage entre deux ondes consécutives réfléchies est donné par :

$$\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda}. \quad (3.144)$$

23. [†] Exercice inspiré du TD de HAP502P, de Benoît Rufflé, Université de Montpellier.

24. Dans le schéma, on donne i mais on peut considérer $i = 0$.

25. Ce problème illustre comment des interférences en lame mince, modulées par des variations microscopiques d'épaisseur et d'indice optique, peuvent générer des effets visuels spectaculaires, similaires à ceux observés dans les arcs-en-ciel.

2. Coefficients de Fresnel et amplitude réfléchie

On note $r = \frac{1-n}{1+n}$ et $t = \frac{2}{1+n}$ les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface air-savon (incidence normale).

- (a) Calculer numériquement r et t pour $n = \frac{4}{3}$.
- (b) Écrire l'expression de l'amplitude totale réfléchie ψ_r comme la somme de la série géométrique des ondes multiples, en explicitant clairement la contribution de chaque réflexion et transmission. Montrer que cette somme s'écrit :

$$\psi_r = \psi_0 \left[r + \frac{t^2 r e^{i\varphi}}{1 - r^2 e^{i2\varphi}} \right]. \quad (3.145)$$

3. Intensité réfléchie et conditions d'interférences

- (a) En déduire l'expression de l'intensité réfléchie $I_r \propto |\psi_r|^2$.
- (b) Montrer que cette intensité présente des maxima et minima en fonction de φ , et déterminer les conditions sur λ pour lesquelles la réflexion est minimale (interférences destructives) et maximale (interférences constructives).

4. Application numérique : épaisseur $e = 0.3 \mu m$

- (a) Déterminer les valeurs de λ dans l'intervalle $[0.4, 0.8] \mu m$ pour lesquelles la réflexion est minimale.
- (b) Quelle est la teinte dominante perçue par l'œil humain dans ce cas ?

5. Cas limites

- (a) Étudier qualitativement ce qui se passe lorsque $e = 0.03 \mu m$.
- (b) Étudier qualitativement ce qui se passe lorsque $e = 30 \mu m$.
- (c) Interpréter les conséquences optiques de ces deux situations.

6. Extension : indice dépendant de la position, de la fréquence, et lumière blanche

On considère que l'indice optique dans la bulle dépend à la fois de la position radiale $R \in [0, e]$, où e désigne l'épaisseur locale moyenne du film (épaisseur du film de savon, pas le rayon de la bulle), et de la fréquence ω via la variable réduite $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0}$, avec ω_0 une fréquence caractéristique.

On suppose que la densité locale d'oscillateurs suit une variation radiale²⁶ donnée par :

$$N(R) = N_0 (1 - \lambda R^2), \quad (3.146)$$

avec $\lambda > 0$ un paramètre caractérisant la variation spatiale.

- (a) En rappelant la forme développée de l'indice pour $\zeta \rightarrow 0$ (éq 3.131) radiale de $N(R)$, expliquer comment la variation radiale $N(R)$ influence localement l'indice optique.
- (b) En tenant compte de la variation de l'indice selon R , écrire l'expression intégrale du déphasage total $\varphi(\omega)$ à travers le film, en intégrant la contribution locale du déphasage sur toute l'épaisseur e , sous la forme

$$\varphi(\omega) = \frac{2\omega}{c} \int_0^e n \left(R, \frac{\omega}{\omega_0} \right) dR, \quad (3.147)$$

ce qui exprime clairement la dépendance en fréquence ω .

26. Attention, ici R désigne la coordonnée locale dans l'épaisseur du film (c'est-à-dire la distance perpendiculaire à la surface de la bulle), et non le rayon de la bulle elle-même. La densité locale d'oscillateurs $N(R)$ varie donc à travers l'épaisseur du film de savon, ce qui influence l'indice optique selon cette direction.

- (c) En déduire l'expression de l'amplitude réfléchie $\psi_r(\omega)$ en fonction du déphasage $\varphi(\omega)$:

$$\psi_r(\omega) = \psi_0 r \left(1 + e^{i\varphi(\omega)} \right), \quad (3.148)$$

en tenant compte des coefficients de réflexion et transmission à chaque interface.

- (d) En déduire l'intensité réfléchie spectrale $I_r(\omega) \propto |\psi_r(\omega)|^2$, et montrer qu'elle s'écrit :

$$I_r(\omega) \propto 4\psi_0^2 r^2 \cos^2 \left(\frac{\varphi(\omega)}{2} \right). \quad (3.149)$$

- (e) Étudier comment la variation spatiale de l'indice $n(R, \omega)$ modifie la structure des interférences, en particulier la distribution angulaire et spectrale des couleurs réfléchies.
- (f) Expliquer pourquoi l'éclairage par une lumière blanche (spectre large en ω) peut engendrer des motifs colorés complexes (arc-en-ciel) sur la surface de la bulle.
- (g) Pour le cas spécifique $N(R) = N_0(1 - \lambda R^2)$, calculer explicitement la contribution intégrale au déphasage $\varphi(\omega)$. Discuter qualitativement l'effet de la valeur de λ sur les couleurs observées.
- (h) Supposons que l'épaisseur locale $e(R)$ varie elle aussi en fonction de la position.
- Exprimer l'effet combiné de $n(R, \omega)$ et $e(R)$ sur le déphasage $\varphi(\omega)$, sous la forme

$$\varphi(\omega) = \frac{2\omega}{c} \int_0^{e(R)} n \left(R, \frac{\omega}{\omega_0} \right) dR, \quad (3.150)$$

en précisant l'ordre d'intégration selon la géométrie.

- Discuter comment ces variations locales d'indice et d'épaisseur modulent les franges d'interférences, conduisant à la formation de motifs complexes sur la bulle.
 - Comment ces variations microscopiques expliquent-elles la richesse des couleurs et formes observées dans les bulles de savon réelles?
- (i) *Bonus* : discuter qualitativement l'influence de la diffusion et absorption dans la bulle sur la visibilité et la netteté des interférences.

3.14.7 3^{ème} application : les mirages[†]

²⁷ Le principe de Fermat stipule que le temps mis par la lumière pour aller d'un point à un autre est

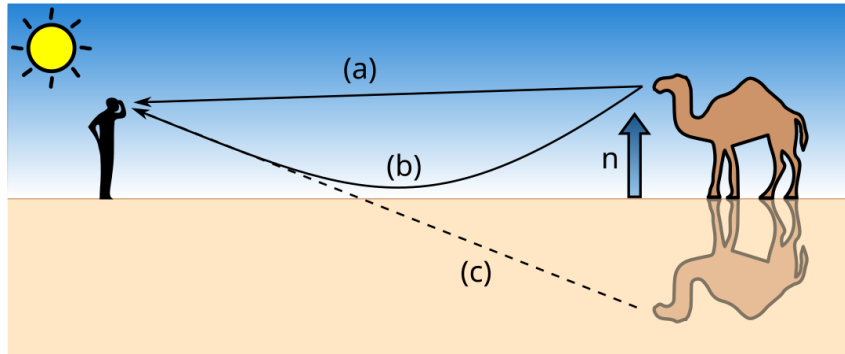


FIGURE 3.7 – Schéma d'un mirage.

27. [†] Cette partie est tiré du TD de HAP503P de Jérôme Dornac, Université de Montpellier.

minimal. On suppose que l'indice de réfraction de l'air au niveau du sol ne dépend que de l'altitude, $n(z)$. On considère un rayon lumineux partant de la hauteur h et faisant un angle de départ θ vers le bas. Les points du plan xOz sont repérés par leurs coordonnées cartésiennes (x, z) , (voir fig 3.7).

1. Montrer que le temps mis par la lumière pour aller du point $(0, h)$ à un point (x_f, z_f) par un chemin $z(x)$ peut s'écrire

$$T = \frac{1}{c} \int_0^{x_f} n(z(x)) \sqrt{1 + (z'(x))^2} dx \quad (3.151)$$

où $z'(x)$ est la dérivée de z par rapport à x .

2. Le temps T devant être minimal, déduire de l'identité de Beltrami que l'équation du trajet lumineux obéit à l'équation

$$n(z(x))^2 = A(1 + (z'(x))^2) \quad (3.152)$$

où A est une constante.

3. On suppose que le sol est chaud et l'atmosphère plus froide. Dans ce cas, l'indice de réfraction augmente avec z . On prend comme modèle

$$n(z)^2 = n_0^2 + \alpha z \quad (3.153)$$

Montrer que

$$A = \frac{n(h)^2}{1 + \tan^2 \theta} \quad (3.154)$$

4. Montrer que le trajet lumineux

$$z(x) = h + x \tan \theta + \frac{\alpha}{4A} x^2 \quad (3.155)$$

est solution du problème (il suffit de remplacer).

5. On suppose qu'un observateur a un œil placé au point (L, H) . Montrer qu'il existe deux angles initiaux θ_1 et θ_2 qui permettent aux rayons lumineux partant de $(0, h)$ d'être observés en général.
6. Expliquer l'effet de mirage.

3.14.8 4^{ème} application : étude du phénomène du coucher de Soleil via $N(z)$ et $n(z, \omega)$

On rappelle l'expression de l'indice de réfraction en fonction de la hauteur z et de la fréquence réduite $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$n(z, \zeta) = 1 + \frac{1}{2} \frac{N(z)e^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0} (1 + \zeta^2) + o(\zeta^2). \quad (3.156)$$

1. Montrer que la variation de $N(z)$ implique une variation de $n(z, \zeta)$ selon z . Exprimez $\frac{\partial n}{\partial z}$ en fonction de $\frac{dN}{dz}$.
2. Écrivez le lagrangien \mathcal{L} décrivant la trajectoire d'un rayon lumineux dans ce milieu isotrope où n dépend de z et ω , en rappelant la forme standard de \mathcal{L} pour un milieu avec indice variable.
3. En supposant une trajectoire dans le plan vertical (x, z) , écrivez les équations d'Euler-Lagrange pour $x(s)$ et $z(s)$, où s est un paramètre le long de la trajectoire.

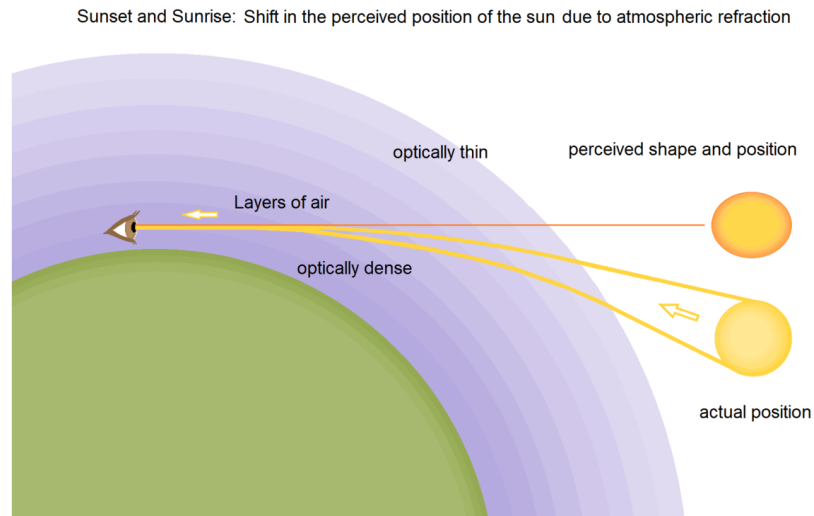


FIGURE 3.8 – Schéma représentatif d'un coucher de soleil.

4. En considérant que la dépendance en ω induit une variation de n , discutez comment cela modifie la trajectoire du rayon lumineux selon sa fréquence.
5. En vous appuyant sur ces résultats, expliquez le phénomène du coucher de Soleil (rougeur du Soleil).

3.15 Condensation de Bose-Einstein[†] (PS) ★★★★★

(Correction)

²⁸ On considère un gaz de particules bosoniques identiques de spin nul dans une enceinte de volume V et au contact d'un thermostat à la température T . Les particules n'interagissent pas entre elles.

1. On décrit le gaz dans l'ensemble grand-canonique. On souhaite exprimer le nombre moyen de particules en fonction de la température T et du potentiel chimique μ sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à expliciter.
- (a) Écrire l'expression du nombre moyen $\langle n_\varepsilon \rangle$ de particules dans un état d'énergie ε selon la statistique de Bose-Einstein, en fonction de μ , T et k_B .
- (b) En considérant un gaz dans une boîte cubique de volume V avec des conditions aux limites périodiques, exprimer la densité d'états $g(\varepsilon)$ dans l'approximation d'un gaz libre non relativiste de particules de masse m .
- (c) En déduire que le nombre total moyen de particules s'écrit sous la forme :

$$\langle N \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon \quad (3.157)$$

où $\beta = 1/(k_B T)$, puis explicitiez cette expression en une intégrale dépendant de T , μ et m , que l'on ne cherchera pas à résoudre.

2. On suppose maintenant que le système est fermé et contient N particules. Le potentiel chimique est alors une fonction de la température et de la densité $\rho = N/V$ de particules. En utilisant le résultat précédent et l'équivalence entre les ensembles canonique et grand-canonique, montrez que $\mu(T)$ est donné par

$$\rho = \left(\frac{2mk_B T}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^{x/\varphi(T)} - 1} dx, \quad (3.158)$$

avec $\varphi(T) = e^{\mu(T)/(k_B T)}$.

3. À partir de l'équation (3.158), justifiez que $\mu(T)$ augmente quand la température diminue.
4. Rappelez pourquoi le potentiel chimique est forcément négatif. Concluez que l'équation (3.158) ne peut être vraie que pour $T \geq T_{BE}$, où vous explicitez T_{BE} . On donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx \simeq 2,612 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3.159)$$

5. Pour $T \leq T_{BE}$, $\mu(T) = 0$ et l'équation (3.158) n'est pas vérifiée. Identifiez où se trouve le problème dans le raisonnement des questions précédentes.
6. Pour résoudre ce problème, on isole la population de l'état fondamental, que l'on note N_0 . Justifiez que

$$N = N_0 + \left(\frac{2m}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} V \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon. \quad (3.160)$$

Calculez alors N_0 en fonction de N , T , T_{BE} , et tracez N_0/N en fonction de T/T_{BE} . Commentez.

28. [†] Exercice tiré du TD de HAP602P de Benjamin Guiselin, Université de Montpellier.

7. Justifiez que pour $T \leq T_{\text{BE}}$, le grand potentiel J s'écrit

$$\frac{J}{k_B T} = -\ln(1 + N_0) + \left(\frac{2m}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} V \int_0^{+\infty} \varepsilon^{1/2} \ln(1 - e^{-\beta \varepsilon}) d\varepsilon. \quad (3.161)$$

Que devient cette expression dans la limite thermodynamique? Calculez alors la pression du gaz de bosons pour $T \leq T_{\text{BE}}$ et $N \gg 1$, et commentez ses dépendances. On donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \simeq 1,341 \times \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \quad (3.162)$$

3.16 Chaîne de désintégration (FS) ★★★★★

(Correction)

On considère une chaîne de désintégration radioactive formée de n isotopes notés (N_k) , se désintégrant successivement les uns en les autres ($N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \dots \rightarrow N_n$), le dernier étant supposé stable. On note $N_k(t)$ le nombre de noyaux du type k à l'instant $t \geq 0$. Chaque noyau N_k est instable pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et possède une constante de décroissance radioactive $\lambda_k > 0$. Le dernier isotope N_n est stable, ce qui revient à poser $\lambda_n = 0$.

3.16.1 Modélisation physique de la chaîne de désintégration

1. Justifier que les fonctions $N_k(t)$ vérifient le système différentiel :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_k}{dt} = -\lambda_k N_k + \lambda_{k-1} N_{k-1} \quad \text{pour } k \in \llbracket 2, n \rrbracket. \quad (3.163)$$

2. Résoudre le cas $n = 2$ avec les conditions initiales $N_1(0) = N_0, N_2(0) = 0$. Tracer qualitativement les courbes $N_1(t)$ et $N_2(t)$.
3. Montrer que la solution vérifie pour tout $t \geq 0$:

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0. \quad (3.164)$$

Interpréter physiquement : on retrouve ici une conservation de la matière dans le système.

4. Discuter du moment où la quantité $N_2(t)$ est maximale, et donner son expression si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3.16.2 Étude mathématique du système différentiel

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.165)$$

On considère le système vectoriel :

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = A\mathbf{N}, \quad \mathbf{N}(0) = \mathbf{N}_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.166)$$

1. Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{R} si les λ_k (pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$) sont deux à deux distincts. Donner les valeurs propres.
2. Montrer que le système admet une solution unique globale sur \mathbb{R}_+ pour toute condition initiale \mathbf{N}_0 .
3. On pose $E(t) = \|\mathbf{N}(t)\|^2$. Montrer que E est dérivable. On souhaite ensuite démontrer que E est décroissante.
 - (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x | Ax \rangle = \langle x | Sx \rangle, \quad S = \frac{A + A^T}{2} \quad (3.167)$$

(b) Montrer que,

$$\langle x | Sx \rangle = -\frac{1}{2} \sum_k \lambda_k (x_k - x_{k+1})^2 - \frac{\lambda_1}{2} x_1 \quad (3.168)$$

(c) Discuter le signe de $E'(t)$. En déduire la stabilité du système.

4. On suppose que $\lambda_k \geq \alpha > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On définit une norme qui vérifie,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|Mx\| \leq C \times \xi \|x\|, \quad (3.169)$$

où ξ vérifie $\xi > \mu_p \in \text{Sp}(M), \forall p$. Démontrer alors que :

$$\|\mathbf{N}(t) - \mathbf{N}_\infty\| \leq C e^{-\alpha t} \|\mathbf{N}_0\|, \quad \text{où } \mathbf{N}_\infty = (0, \dots, 0, N_\infty). \quad (3.170)$$

5. Vérifier que le système conserve la quantité totale de matière :

$$\sum_{k=1}^n N_k(t) = \sum_{k=1}^n N_k(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.171)$$

3.16.3 Modèle non linéaire avec dépendance saturante des constantes de décroissance

On suppose désormais que les constantes de décroissance λ_k dépendent de la population $N_k(t)$ selon la loi saturante suivante, physiquement motivée par un effet d'auto-inhibition ou de saturation nucléaire :

$$\lambda_k(N_k) = \frac{\lambda_k^0}{1 + a_k N_k}, \quad \lambda_k^0 > 0, \quad a_k > 0, \quad (3.172)$$

où λ_k^0 et a_k sont des constantes réelles positives fixées pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On pose toujours $\lambda_n = 0$.

Le système devient non linéaire :

$$\frac{dN_k}{dt} = -\frac{\lambda_k^0}{1 + a_k N_k} N_k + \frac{\lambda_{k-1}^0}{1 + a_{k-1} N_{k-1}} N_{k-1}, \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (3.173)$$

avec la convention que $\lambda_n^0 = 0$.

1. Montrer que le système satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et admet une unique solution locale sur \mathbb{R}_+ pour toute condition initiale $\mathbf{N}_0 \in \mathbb{R}_+^n$.
2. Montrer que cette solution est globalement définie et reste à valeurs positives pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire :

$$N_k(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (3.174)$$

3. Déterminer les points fixes $\mathbf{N}^* = (N_1^*, \dots, N_n^*)$ du système, solutions du système non linéaire :

$$0 = -\frac{\lambda_1^0}{1 + a_1 N_1^*} N_1^*, \quad 0 = -\frac{\lambda_k^0}{1 + a_k N_k^*} N_k^* + \frac{\lambda_{k-1}^0}{1 + a_{k-1} N_{k-1}^*} N_{k-1}^*, \quad k \in \llbracket 2, n \rrbracket. \quad (3.175)$$

4. Montrer que le seul point fixe physiquement pertinent est $\mathbf{N}^* = (0, \dots, 0, N_\infty)$, où $N_\infty = \sum_{k=1}^n N_k(0)$.
5. Calculer la matrice Jacobienne $J(\mathbf{N})$ du système au point \mathbf{N} , puis $J(\mathbf{0})$.
6. Étudier la stabilité locale de $\mathbf{0}$ en analysant les valeurs propres de $J(\mathbf{0})$.
7. Discuter qualitativement de l'effet des coefficients a_k sur la dynamique du système par rapport au modèle linéaire classique.

Chapitre 4

Correction des exercices

Comme vous le remarquerez, les exercices ne sont pas encore **tous** corrigés. Les exercices non corrigés sont accompagné du symbole \triangle . Les dernières corrections seront données petit à petit. Si vous voulez proposer une correction d'exercice, merci de me l'envoyer en format Latex au mail suivant : ryanartero2005@gmail.com.

Par ailleurs, vous pouvez revenir à l'exercice que vous étiez en train de faire en cliquant sur le titre de l'exercice en question, que ce soit en haut de page ou en début de l'exercice.

4.1 Problème à deux corps

4.1.1 Centre de masse

On désigne $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ les rayons vecteurs de l'électron et du noyaux par rapport à un repère quelconque, et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ les vitesses correspondantes.

1. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1\mathbf{v}_1^2 + m_2\mathbf{v}_2^2) - \frac{\vartheta^2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$.
- 2.

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \implies \mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \implies \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (4.2)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.3)$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 - \frac{\vartheta^2}{r} = \mathcal{L}_G(\mathbf{V}) + \mathcal{L}_r(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (4.4)$$

3. Le potentiel est central pour le centre de masse. Cela implique que \mathbf{J} est une constante du mouvement.

Dans la suite, on examine exclusivement le mouvement interne par \mathcal{L}_r en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan perpendiculaire à \mathbf{J} .

4.1.2 Intégration des équations du mouvement

1. L'expression de l'énergie cinétique en coordonnées polaires de \mathbb{R}^2 est :

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad (4.5)$$

d'où le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}, k = \vartheta^2. \quad (4.6)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0. \quad (4.8)$$

Les moments conjugués en découlent :

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta}. \quad (4.9)$$

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}. \quad (4.10)$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}, \quad (4.11)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0. \quad (4.12)$$

p_θ est une constante du mouvement (car θ est une variable cyclique); en conséquence, la quantité $p_\theta = \mu r^2\dot{\theta}$ est constante : c'est le moment cinétique J , fixé une fois pour toutes par les conditions initiales.

En effet, $\mathbf{J} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu r \mathbf{u}_r \times (\dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} = p_\theta$.

L'intégrale première de l'énergie donne :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}. \quad (4.13)$$

En dérivant en temps $p_r = \mu\dot{r}$, et en y substituant :

$$\dot{p}_r = \mu\ddot{r} = \frac{J^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}, \quad (4.14)$$

on retrouve l'équation du mouvement radial :

$$\mu\ddot{r} = \frac{J^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}. \quad (4.15)$$

Le premier terme au second membre est la force centrifuge (car $\mu r\dot{\theta}^2 = \mu v^2/r$), le second terme est la force attractive de Coulomb.

2. Pour éliminer le temps, on dérive comme d'habitude la fonction composée $r(\theta(t))$:

On note $r'(\theta) = \frac{dr}{d\theta}$ et $r''(\theta) = \frac{d^2r}{d\theta^2}$. On utilise $p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} = J$, d'où :

$$\dot{\theta} = \frac{J}{\mu r^2}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{J}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (4.16)$$

Ainsi :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = r' \frac{J}{\mu r^2}, \quad \ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{J}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left(r' \frac{J}{\mu r^2} \right). \quad (4.17)$$

En posant $u = \frac{1}{r}$, on a :

$$\dot{r} = -\frac{J}{\mu} u', \quad \ddot{r} = -\frac{J^2}{\mu^2} (u'' + u), \quad (4.18)$$

et le remplacement dans (7.25) donne :

$$-\frac{J^2}{\mu^2} (u'' + u) = \frac{J^2}{\mu} u^3 - \frac{k}{\mu} u^2. \quad (4.19)$$

Multipliée par $-\frac{\mu^2}{J^2}$, cette équation devient :

$$u'' + u = \frac{\mu k}{J^2}. \quad (4.20)$$

3. L'équation différentielle en $u(\theta)$:

$$u'' + u = \frac{\mu k}{J^2} \quad (4.21)$$

admet pour solution générale :

$$u(\theta) = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu k}{J^2}, \quad (4.22)$$

d'où :

$$r(\theta) = \frac{1}{A \cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu k}{J^2}}. \quad (4.23)$$

Il est toujours loisible de choisir l'axe polaire astucieusement, par exemple de sorte que $r(\theta)$ soit extrémale en $\theta = 0$ (ou $\theta = \pi$), ce qui donne $\varphi = 0$:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{\mu k}{J^2} (1 + \varepsilon \cos \theta)}, \quad (4.24)$$

où l'on a posé $\varepsilon = \frac{AJ^2}{\mu k}$: l'excentricité.

La constante A (ou ε) est déterminée par les conditions initiales, ou via l'énergie :

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}. \quad (4.25)$$

À l'aide de $r(\theta)$ et de $J = \mu r^2 \dot{\theta}$, on peut écrire E comme fonction de ε :

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{\mu k^2}. \quad (4.26)$$

4. L'expression (7.26) définit une famille de courbes appelées **coniques** (intersections d'un cône avec un plan). Trois sous-familles sont distinguées selon la valeur de ε :
- Si $\varepsilon < 1$, la trajectoire est une **ellipse**, fermée, correspondant à une énergie $E < 0$: mouvement lié et périodique (cas particulier $\varepsilon = 0$: un cercle).
 - Si $\varepsilon = 1$, la trajectoire est une **parabole** : cas limite $E = 0$ séparant les mouvements liés et non liés.
 - Si $\varepsilon > 1$, le dénominateur dans (7.26) peut s'annuler pour un angle $\theta_\infty = \arccos(-\frac{1}{\varepsilon})$: la trajectoire est une **hyperbole**, ouverte, avec asymptotes ; $E > 0$ correspond à une particule venant de l'infini avec une vitesse initiale non nulle.

Dans tous les cas, l'origine (le centre de force) est l'un des deux foyers de la conique.

4.1.3 Quantification de Bohr

Dans cette partie, on ne considère que les états liés $E < 0$.

1. La condition de quantification sur l'angle θ est immédiate puisque $p_\theta = J$ est une constante du mouvement :

$$J_\theta = \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = 2\pi J, \quad \text{d'où} \quad J = n_\theta \hbar \quad \text{avec } n_\theta \in \mathbb{N}^*. \quad (4.27)$$

n_θ ne peut être nul, puisque ceci donnerait une trajectoire rectiligne traversant périodiquement le noyau. En définitive :

$$J = n_\theta \hbar, \quad n_\theta \in \mathbb{N}^*. \quad (4.28)$$

2. On a :

$$\int p_r dr = \int \mu \dot{r} dr = \mu \int r'(\theta) \dot{\theta} dr = \mu \int r'(\theta) \frac{J}{\mu r^2} dr = \int \frac{J r'(\theta)}{r^2} dr = \int \frac{J}{r^2} \frac{dr}{d\theta} d\theta. \quad (4.29)$$

La condition de quantification s'écrit, compte tenu de l'équation (7.26) :

$$\int_0^{2\pi} \frac{J \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta = n_r \hbar. \quad (4.30)$$

L'intégrale vaut :

$$2\pi J \left(\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta \right) = -2\pi J \left(\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) d\theta \right). \quad (4.31)$$

Une intégration par parties transforme cette expression en :

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} - 1 \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - (1 + \varepsilon \cos \theta)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) d\theta. \quad (4.32)$$

La condition de quantification devient alors :

$$2\pi J \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) = n_r \hbar. \quad (4.33)$$

Comme $2\pi J = n_\theta \hbar$, cela donne aussi :

$$n_\theta \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) = n_r, \quad (4.34)$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{n}{n_\theta}, \quad \text{où } n = n_r + n_\theta. \quad (4.35)$$

3. Selon l'équation (7.27) :

$$1 - \varepsilon^2 = -\frac{2EJ^2}{\mu v^4}, \quad \text{d'où} \quad E = -\frac{\mu v^4}{2J^2}(1 - \varepsilon^2). \quad (4.36)$$

Comme $J = n_\theta \hbar$ et $1 - \varepsilon^2 = \left(\frac{n_\theta}{n}\right)^2$, on obtient finalement :

$$E_n = -\frac{\mu v^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (4.37)$$

4.2 Section efficace de Rutherford

4.2.1 Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome

On se place dans un repère polaire (r, φ) dans le plan du mouvement.

1. **Moment cinétique** : Le moment cinétique dans le repère polaire est :

$$J = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (4.38)$$

À l'infini passé, la particule a une vitesse v_0 et un paramètre d'impact b . Le moment cinétique est alors :

$$J = -mbv_0. \quad (4.39)$$

Le signe négatif vient du fait que φ décroît au cours du temps.

2. **Équation du mouvement** : La force centrale de répulsion est donnée par :

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{où } C = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}. \quad (4.40)$$

On décompose $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ en deux composantes. En projetant sur la direction perpendiculaire à l'axe polaire, on trouve :

$$m\dot{v}_\perp = \frac{C}{r^2} \sin \varphi. \quad (4.41)$$

3. **Angle de déviation θ** : En multipliant l'équation par dt puis en changeant de variable, on utilise :

$$r^2 \dot{\varphi} = \frac{J}{m} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{J} d\varphi. \quad (4.42)$$

On intègre entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$:

$$v_0 \sin \theta = \int \dot{v}_\perp dt = \frac{C}{J} (\cos \theta + 1). \quad (4.43)$$

4. **Lien avec l'énergie cinétique** : L'énergie initiale est $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, donc :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{C}{2E_0 b}. \quad (4.44)$$

4.2.2 Section efficace de Rutherford

1. **Expression de la section efficace différentielle** : La définition générale est $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$.

2. **Utilisation de $\tan(\theta/2)$** : Avec :

$$b = \frac{C}{2E_0} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{C}{4E_0} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{C}{4E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (4.45)$$

3. **Limite du modèle** : Pour $\theta \rightarrow 0$, on a $\sin(\theta/2) \rightarrow 0$ donc $d\sigma/d\Omega \rightarrow \infty$. L'intégrale sur $\theta \in [0, \pi]$ diverge : la section efficace totale est infinie. Cela reflète la portée infinie de l'interaction coulombienne.

4. **Interprétation expérimentale** : Ce modèle explique les résultats expérimentaux de Rutherford : des particules α peuvent être fortement déviées. Cela implique l'existence d'un noyau atomique très concentré, car une telle déviation nécessite un champ très intense dans une région très localisée¹.

1. En introduisant la distance minimale d'approche a_{\min} pour une collision frontale ($b = 0$), on a :

$$a_{\min} = \frac{C}{E_0}. \quad (4.46)$$

4.3 Effet Cherenkov

1. L'énergie d'un photon est donnée par la relation habituelle :

$$E_\gamma = h\nu \quad (4.48)$$

Dans un milieu d'indice de réfraction n , la vitesse de phase de la lumière est réduite à c/n , et le vecteur d'onde associé est :

$$k = \frac{2\pi n\nu}{c} \quad (4.49)$$

L'impulsion du photon dans ce milieu est donc donnée par :

$$p_\gamma = \hbar k = \frac{hn\nu}{c} \quad (4.50)$$

On obtient ainsi la relation cherchée :

$$\boxed{p_\gamma = \frac{hn\nu}{c}} \quad (4.51)$$

En combinant avec l'expression de l'énergie $E_\gamma = h\nu$, on déduit :

$$\boxed{p_\gamma = \frac{n}{c} E_\gamma} \quad (4.52)$$

2. Les composantes du moment sont :

$$p = p' \cos \varphi + p_z \cos \theta, \quad 0 = -p' \sin \varphi + p_z \sin \theta. \quad (4.53)$$

3. On a :

$$p_z^2 = p^2 - 2pp_z \cos \varphi + p_z^2. \quad (4.54)$$

4. La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p_z^2 c^2 + m^2 c^4} + h\nu, \quad (4.55)$$

ou encore :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} mc^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_f^2}} mc^2 + h\nu. \quad (4.56)$$

5. Par élévation au carré, on obtient :

$$p_z^2 = p^2 - \frac{2h\nu E}{c^2} + \frac{(h\nu)^2}{c^2}, \quad \text{où } E \text{ désigne l'énergie initiale de l'électron.} \quad (4.57)$$

6. En rapprochant les deux expressions de p_z^2 , on peut écrire :

$$p^2 - 2pp_z \cos \varphi + p_z^2 = p^2 - \frac{2h\nu E}{c^2} + \frac{(h\nu)^2}{c^2}, \quad (4.58)$$

d'où, après calcul :

$$\cos \varphi = \frac{h\nu}{pc} \left(1 - \frac{E}{pc} \right) + \frac{h\nu}{2pc}, \quad (4.59)$$

avec $E = \gamma mc^2$, $p = \gamma mv$, $p_z = \frac{nh\nu}{c}$, de sorte que :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2} \right). \quad (4.60)$$

On peut alors réécrire la section efficace différentielle sous la forme :

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a_{\min}^2}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}}. \quad (4.47)$$

7. Finalement :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left[1 + (n^2 - 1) \frac{1}{2\gamma^2} \right]. \quad (4.61)$$

Comme $E = \gamma mc^2$, ceci s'écrit aussi :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left[1 + \frac{n^2 - 1}{2} (1 - \beta^2) \right]. \quad (4.62)$$

8. Il faut :

$$\frac{1}{n\beta} \left[1 + (n^2 - 1) \frac{1}{2\gamma^2} \right] \leq 1. \quad (4.63)$$

Comme le crochet est visiblement supérieur à 1, il est nécessaire (mais pas suffisant) que :

$$\beta > \frac{1}{n}. \quad (4.64)$$

9. Les photons sont émis entre $\nu = 0$ et une fréquence ν_{\max} pour laquelle $\cos \theta = 1$, soit :

$$0 \leq \nu \leq \frac{E}{h} \left(1 - \frac{1}{n\beta} \right), \quad \text{avec } E = \nu_{\max} h. \quad (4.65)$$

10. Les photons les plus énergétiques sont émis dans la direction $\theta = 0$.

11. Tous les photons sont émis à l'intérieur d'un cône de demi-angle φ correspondant à l'angle θ pour un photon de fréquence nulle, soit :

$$\varphi = \arccos \left(\frac{1}{n\beta} \right) = \arccos \left(\frac{1}{n} \right) \simeq 20^\circ. \quad (4.66)$$

12. Pour que l'effet se produise, il faut $\nu > \frac{1}{n}$, soit $\beta > \frac{1}{n}$, et donc :

$$E > \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} mc^2. \quad (4.67)$$

Pour un électron, il faut donc $E > 0,77 \text{ MeV}$, pour un proton $E > 1,4 \text{ GeV}$.

4.4 Machine à champ magnétique pulsé

4.4.1 Champ magnétique de la bobine

(a) Pour une spire circulaire de rayon R , la loi de Biot-Savart donne le champ sur l'axe z :

$$B_z(z, t) = \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.68)$$

Ceci est obtenu par intégration sur la spire, en exploitant la symétrie circulaire.

(b) Pour $z \gg R$, on peut approximer $(z^2 + R^2)^{3/2} \simeq z^3$. Ainsi,

$$B_z(z, t) \sim \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2z^3}, \quad (4.69)$$

ce qui est l'expression du champ d'un dipôle magnétique de moment $m = I(t) R^2$.

4.4.2 Champ électrique induit dans le tissu biologique

La loi locale de Faraday en coordonnées cylindriques s'exprime sous la forme (en supposant que le champ électrique induit est purement azimutal) :

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (4.70)$$

Dérivons B_z par rapport au temps :

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\mu_0 R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \dot{I}(t). \quad (4.71)$$

L'équation locale devient donc :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.72)$$

Intégration pour $r < R$: Intégrons de 0 à r , en imposant $E_\theta(0, t) = 0$ (pour éviter une singularité) :

$$\int_0^r \frac{\partial(r' E_\theta(r', t))}{\partial r'} \frac{dr'}{r'} = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^r dr'. \quad (4.73)$$

La solution obtenue est :

$$r E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \frac{r^2}{2}, \quad (4.74)$$

ce qui conduit à :

$$E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}} r \quad \text{pour } r \leq R. \quad (4.75)$$

Intégration pour $r > R$: Pour $r > R$, le flux magnétique restant confiné dans la zone de la bobine, il est plus adapté d'utiliser la loi intégrale de Faraday. Considérons un contour circulaire de rayon $r > R$. La loi intégrale de Faraday donne :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r E_\theta = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.76)$$

où le flux Φ est celui à travers la zone de la bobine, c'est-à-dire :

$$\Phi = \pi R^2 B_z(z, t) = \pi R^2 \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.77)$$

La dérivée temporelle de Φ est alors :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \frac{\mu_0 R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \dot{I}(t). \quad (4.78)$$

Ainsi,

$$2\pi r E_\theta = -\pi \frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (4.79)$$

et donc pour $r > R$:

$$E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{4r(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.80)$$

Récapitulatif :

$$E_\theta(r, t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}} r, & r \leq R, \\ -\frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{4r(z^2 + R^2)^{3/2}}, & r \geq R. \end{cases} \quad (4.81)$$

Vérification de la continuité : À $r = R$, la solution intérieure donne

$$E_\theta(R, t) = -\frac{\mu_0 R^3 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (4.82)$$

et la solution extérieure donne exactement le même résultat. La continuité est donc assurée.

4.4.3 Effet sur les neurones moteurs

La tension induite sur un disque de rayon a est donnée par :

$$V = \int_0^a E(r, t) dr. \quad (4.83)$$

En utilisant l'expression de $E_\theta(r, t)$ pour $r \leq R$ (supposons $a \leq R$ pour simplifier), on a :

$$V = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^a r dr = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \frac{a^2}{2}. \quad (4.84)$$

Ainsi,

$$V = -\frac{\mu_0 R^2 a^2 \dot{I}(t)}{8(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.85)$$

Pour activer le neurone, il faut que $|V| \geq V_{\text{seuil}}$. La condition d'activation est donc :

$$\frac{\mu_0 R^2 a^2 |\dot{I}(t)|}{8(z^2 + R^2)^{3/2}} \geq V_{\text{seuil}}. \quad (4.86)$$

En utilisant des valeurs numériques réalistes ($R = 5$ cm, $a = 2$ cm, $I_0 = 100$ A, $\tau = 1$ ms, $\omega = 10^4$ rad/s, etc.), on peut vérifier si cette inégalité est satisfaite.

4.4.4 Effet du courant oscillant

Si l'on suppose que

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}, \quad (4.87)$$

alors $\dot{I}(t) = i\omega I_0 e^{i\omega t}$ et le champ électrique induit devient oscillant :

$$E_\theta(r, t) = E_\theta(r) e^{i\omega t}. \quad (4.88)$$

Ce comportement reflète la présence d'ondes électromagnétiques dans le système, avec des phases et des amplitudes modulées par la fréquence ω .

4.4.5 Effet du champ magnétique pulsé sur les muscles

Lorsque la machine de stimulation magnétique délivre des impulsions rapides, la variation temporelle du champ magnétique induit un champ électrique dans les tissus environnants. Dans les muscles, ce champ électrique peut provoquer la dépolarisation des membranes cellulaires en activant les canaux ioniques, ce qui génère un potentiel d'action. Cette excitation conduit à une contraction musculaire involontaire, exploitée en kinésithérapie pour améliorer la rééducation musculaire, augmenter la circulation sanguine et réduire la douleur.

4.5 Métrique d'une sphère

1. En utilisant que $d(\cos u) = -\sin u du$ et $d(\sin u) = \cos u du$, on obtient,

$$\frac{dx^2}{R^2} = [-\sin \theta \sin \varphi d\varphi + \cos \theta \cos \varphi d\theta]^2 \quad (4.89)$$

$$= (\sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 - 2 \sin \theta \sin \varphi d\varphi \cos \theta \cos \varphi d\theta + (\cos \theta \cos \varphi d\theta)^2 \quad (4.90)$$

$$\frac{dy^2}{R^2} = [\sin \theta \cos \varphi d\varphi + \cos \theta \sin \varphi d\theta]^2 \quad (4.91)$$

$$= (\sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 + 2 \sin \theta \sin \varphi d\varphi \cos \theta \cos \varphi d\theta + (\cos \theta \sin \varphi d\theta)^2 \quad (4.92)$$

$$\frac{dz^2}{R^2} = \sin^2 \theta d\theta^2 \quad (4.93)$$

$$(4.94)$$

Ainsi, en ajoutant ces termes, et en utilisant que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on obtient,

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.95)$$

2. Grâce à l'eq 4.95, on a en factorisant par $d\theta^2$ dans la racine, on a,

$$ds = R\sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} \quad (4.96)$$

$$= R\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2} d\theta, \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta} \quad (4.97)$$

$$= R\mathcal{L}d\varphi \quad (4.98)$$

On remarque que $\partial_\varphi \mathcal{L} = 0$, donc φ est une variable cyclique. Ainsi,

$$\partial_{\varphi'} \mathcal{L} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.99)$$

Où λ est une constante.

- 3.

$$\partial_{\varphi'} \mathcal{L} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.100)$$

$$\implies \frac{\varphi' \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} = \lambda \quad (4.101)$$

$$\implies \varphi'^2 (\sin^4 \theta - \lambda^2 \sin^2 \theta) = \lambda^2 \quad (4.102)$$

$$\implies d\varphi = \lambda \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta}}} \quad (4.103)$$

Ainsi, en intégrant,

$$\varphi - \varphi_0 = \lambda \int_{\alpha_0}^{\theta} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \alpha}}} \quad (4.104)$$

$$=_{u=\cot \alpha} -\lambda \int_{\cot \alpha_0}^{\cot \theta} \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2(1 + u^2)}} \quad (4.105)$$

$$=_{t=\frac{u}{\beta}} -\frac{\lambda}{\beta} \int_{\frac{\cot \alpha_0}{\beta}}^{\frac{\cot \theta}{\beta}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \beta^2 = 1 - \lambda^2 \quad (4.106)$$

$$= \arccos\left(\frac{\cot \theta}{\beta}\right) \quad (4.107)$$

On a ainsi,

$$\beta \cos(\varphi - \varphi_0) = \cot \theta \quad (4.108)$$

$$\beta \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) = \cos \theta \quad (4.109)$$

$$(4.110)$$

En utilisant quelques formules trigonométriques, on obtient

$$R \times (\beta \cos \varphi_0 \cos \varphi \sin \theta + \beta \cos \varphi_0 \sin \varphi \sin \theta = \cos \theta) \quad (4.111)$$

$$\implies ax + by - z = 0 \quad (4.112)$$

On a ici substitué, grâce aux coordonnées sphériques, avec $a = \beta \cos \varphi_0 = b$.

4.6 Rayonnement du Corps Noir

4.6.1 Nombre de modes excités par unité de fréquences

1. C'est l'équation de D'Alembert dans le vide,

$$\square \mathbf{E} = 0 \quad (4.113)$$

2. La cavité force une solution stationnaire, d'où

$$\mathbf{E} = \cos \omega t \sum_{\mu=1}^3 E^{\mu} \sin(k_{\mu} x^{\mu}) \mathbf{e}_{\mu} \quad (4.114)$$

On a pour chaque μ , $\mathbf{E}(x^{\mu} = L) = \mathbf{0}$, les conditions aux limites. Donc,

$$\sin(k_{\mu} L) = 0 \quad (4.115)$$

$$k_{\mu} L = n_{\mu} \pi \quad (4.116)$$

$$k_{\mu} = \frac{n_{\mu} \pi}{L} \quad (4.117)$$

3. On sait que la norme de \mathbf{k} doit être égale à la somme sur chaque composante,

$$\|\mathbf{k}\|^2 = \sum_{\mu} \left(\frac{n_{\mu} \pi}{L} \right)^2 \quad (4.118)$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{\mu} n_{\mu}^2 \quad (4.119)$$

$$r^2 = \left(\frac{2L}{\lambda} \right)^2 = \sum_{\mu} n_{\mu}^2 \quad (4.120)$$

4. On a, le volume de modes de fréquences,

$$V(\|\mathbf{k}\|) = \frac{4}{3} \pi \|\mathbf{k}\|^3 \quad (4.121)$$

Le nombre de modes est le volume de mode divisé par un volume élémentaire de mode, avec quelques facteurs. Ainsi, comme $k_{\mu} = \frac{\pi}{L} n_{\mu}$ et en prenant en compte que $n_{\mu} \in \mathbb{N}^*$, (facteur $\times \frac{1}{8}$), et la polarisation (facteur $\times 2$), on obtient,

$$\Rightarrow N = \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{V(\|\mathbf{k}\|)}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} = 2 \times \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (4.122)$$

$$(4.123)$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{\frac{4}{3} \pi \|\mathbf{k}\|^3}{\pi^3} L^3 \quad (4.124)$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \quad (4.125)$$

$$= \pi \frac{8L^3}{3\lambda^3} \quad (4.126)$$

$$= \frac{8\pi\nu^3}{3c^3} L^3 \quad (4.127)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \mathcal{V} \quad (4.128)$$

4.6.2 Catastrophe Ultraviolette

1. Le système est en contact avec un thermostat de température T , et le système est fermé.
2. En 1D,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \quad (4.129)$$

- 3.

$$p(W = \varepsilon) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \varepsilon) \quad (4.130)$$

On a également en 1D,

$$Z = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\beta \mathcal{H}} dq dp \quad (4.131)$$

D'où,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \quad (4.132)$$

Et,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta \frac{m\omega^2 q^2}{2}} dq = \sqrt{\frac{2\pi}{m\omega^2 \beta}} \quad (4.133)$$

D'où,

$$Z = \frac{1}{h} \frac{2\pi}{\omega \beta} = \frac{1}{h} \frac{T}{\beta} \quad (4.134)$$

4. On utilise [la formule de la moyenne de l'énergie](#),

$$\langle W \rangle = -\partial_\beta \ln Z = \partial_\beta \ln \beta = \frac{1}{\beta} = k_B T \quad (4.135)$$

5. Il est alors évident de dire que grâce à l'eq 4.139 et la question précédente,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T \quad (4.136)$$

D'où $u \propto \nu^2$, ce qui implique, $\int_{\mathbb{R}^+} u d\nu \propto \int_{\mathbb{R}^+} \nu^2 d\nu$, qui diverge.

4.6.3 Loi de Planck

1. Les niveaux d'énergies sont discrets, donc on somme :

$$Z = \sum_n e^{-\beta W_n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta W_1}} \quad (4.137)$$

Ainsi, l'énergie moyenne devient par le même calcul,

$$-\partial_\beta \ln Z = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.138)$$

En utilisant, $W_1 = h\nu$.

2. Il est alors évident que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.139)$$

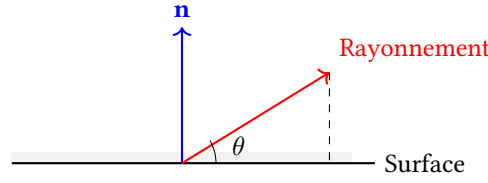


FIGURE 4.1 – Le rayonnement est émis avec un angle θ par rapport à la normale : seul $\cos \theta$ contribue au flux à travers la surface. En effet, il sort dans toutes les directions, on va devoir intégrer sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et seule la contribution de $\cos \theta$ (la projection), contribue.

4.6.4 Flux énergétique émis par un corps noir

1. Flux énergétique monochromatique dans une direction donnée.

L'intensité spectrale directionnelle $I_\nu(\theta, \varphi)$ est définie comme l'énergie transportée par unité de surface, de temps, de fréquence et de stéradian, dans la direction (θ, φ) .

Le flux énergétique monochromatique émis dans la direction (θ, φ) par rapport à la normale à la surface est :

$$d\Phi_\nu = I_\nu(\theta, \varphi) \cos \theta d\Omega, \quad (4.140)$$

où $d\Omega$ est l'élément de solide d'angle autour de cette direction, et $\cos \theta$ vient de la projection du flux sur la normale à la surface (cf. fig 4.1).

2. Flux énergétique total émis à la fréquence ν .

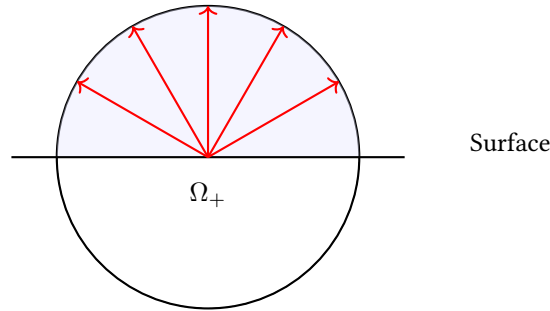


FIGURE 4.2 – Le rayonnement sort dans toutes les directions de l'hémisphère Ω_+ : on intègre seulement pour $\theta \in [0, \pi/2]$.

Le flux énergétique total $I(\nu)$ émis à la fréquence ν par unité de surface est obtenu en intégrant le flux élémentaire sur tout l'hémisphère sortant (i.e. directions telles que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, c.f. fig 4.2) :

$$I(\nu) = \int_{\Omega_+} I_\nu(\theta, \varphi) \cos \theta d\Omega. \quad (4.141)$$

3. Cas d'un rayonnement isotrope

Si le rayonnement est isotrope, on a $I_\nu(\theta, \varphi) = I_\nu = \text{constante}$ (indépendant de la direction). On peut donc sortir I_ν de l'intégrale :

$$I(\nu) = I_\nu \int_{\Omega_+} \cos \theta d\Omega. \quad (4.142)$$

Or :

$$\int_{\Omega_+} \cos \theta \, d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (4.143)$$

On calcule :

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \quad (4.144)$$

D'où :

$$I(\nu) = I_\nu \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi I_\nu. \quad (4.145)$$

4. Intensité totale émise (toutes fréquences confondues)

On cherche à démontrer que la densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$ s'exprime en fonction de l'intensité directionnelle $I_\nu(\mathbf{n})$ par :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) \, d\Omega. \quad (4.146)$$

- $u(\nu) \, d\nu$ représente l'énergie électromagnétique contenue dans une unité de volume, pour des ondes dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$.
- $I_\nu(\mathbf{n})$ est l'intensité spectrale dans la direction \mathbf{n} , c'est-à-dire l'énergie transportée par unité de temps, par unité de surface perpendiculaire, par unité de fréquence, par unité d'angle solide.

Considérons une surface élémentaire ds et un faisceau de rayonnement incident selon une direction \mathbf{n} faisant un angle θ avec la normale à ds .

Le volume V balayé par les rayons dans la direction \mathbf{n} pendant un petit intervalle de temps dt est donné par :

$$dV = c \, dt \cdot ds \cdot \cos \theta. \quad (4.147)$$

L'énergie transportée à travers la surface ds par ces rayons pendant ce temps est :

$$dE = I_\nu(\mathbf{n}) \cdot \cos \theta \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega. \quad (4.148)$$

On en déduit que l'énergie par unité de volume associée à la direction \mathbf{n} est :

$$\frac{dE}{dV} = \frac{I_\nu(\mathbf{n}) \cdot \cos \theta \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega}{c \, dt \cdot ds \cdot \cos \theta} = \frac{I_\nu(\mathbf{n})}{c} d\Omega. \quad (4.149)$$

Pour obtenir la densité d'énergie totale, on somme sur toutes les directions de propagation sur la sphère unité :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) \, d\Omega. \quad (4.150)$$

Si le rayonnement est isotrope, alors $I_\nu(\mathbf{n}) = I_\nu$ est indépendant de la direction. L'intégrale devient :

$$u(\nu) = \frac{I_\nu}{c} \int_{S^2} d\Omega = \frac{I_\nu}{c} \cdot 4\pi. \quad (4.151)$$

D'où,

$$\boxed{u(\nu) = \frac{4\pi}{c} I_\nu} \quad (4.152)$$

5. Lien entre l'intensité totale et $u(\nu)$

On reprend l'expression précédente :

$$I = \int_0^\infty \pi I_\nu d\nu, \quad (4.153)$$

et on injecte $I_\nu = \frac{c}{4\pi} u(\nu)$:

$$I = \int_0^\infty \pi \cdot \frac{c}{4\pi} u(\nu) d\nu = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu. \quad (4.154)$$

4.6.5 Loi de Stefan

1. On a démontré précédemment que,

$$I(T) = \frac{c}{4} \int_{\mathbb{R}^+} u(\nu, T) d\nu \quad (4.155)$$

On remplace par ce qui a été obtenu l'eq 4.139,

$$I = \frac{c}{4} \frac{8\pi}{c^3} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \quad (4.156)$$

$$= \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (4.157)$$

Avec, on le rappelle, $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

2. En faisant un développement limité, on arrive facilement à éliminer la division par zéro. En effet, en 0,

$$e^x - 1 \underset{0}{=} x + o(x) \implies \frac{x^3}{e^x - 1} \underset{0}{=} x^2 + o(x^2) \quad (4.158)$$

Ce qui converge bien en 0. En ∞ , l'exponentielle permet la convergence de l'intégrale.

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_{\mathbb{R}^+} dx x^3 e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (4.159)$$

$$\stackrel{\text{DSE}}{=} \int_{\mathbb{R}^+} dx x^3 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-nx} \quad (4.160)$$

$$\stackrel{=}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} \int_{\mathbb{R}^+} du u^3 e^{-u} \quad (4.161)$$

$$= \zeta(4) \Gamma(4) \quad (4.162)$$

$$= 6\zeta(4) \quad (4.163)$$

3. Grâce à la théorie de Fourier, on peut démontrer que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. On a alors,

$$I(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} T^4, \quad (4.164)$$

4.6.6 Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique

On considère le Soleil comme un corps noir à température $T = 5775$ K. La puissance totale rayonnée par le Soleil est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$P = I \cdot S = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2, \quad (4.165)$$

où

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-4}, \quad R = 6,96 \times 10^8 \text{ m} \quad (4.166)$$

est le rayon du Soleil.

Calculons P :

$$P = 5,67 \times 10^{-8} \times (5775)^4 \times 4\pi(6,96 \times 10^8)^2. \quad (4.167)$$

On évalue :

$$(5775)^4 \simeq 1,11 \times 10^{15}, \quad (4.168)$$

$$4\pi(6,96 \times 10^8)^2 = 4\pi \times 4,84 \times 10^{17} \simeq 6,08 \times 10^{18}. \quad (4.169)$$

Ainsi,

$$P \simeq 5,67 \times 10^{-8} \times 1,11 \times 10^{15} \times 6,08 \times 10^{18} \simeq 3,83 \times 10^{26} \text{ W}. \quad (4.170)$$

D'après la relation d'équivalence masse-énergie d'Einstein,

$$E = mc^2, \quad (4.171)$$

la perte de masse \dot{m} par unité de temps liée à cette puissance rayonnée est

$$\dot{m} = \frac{P}{c^2}, \quad (4.172)$$

avec $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Donc,

$$\dot{m} = \frac{3,83 \times 10^{26}}{(3,00 \times 10^8)^2} = \frac{3,83 \times 10^{26}}{9 \times 10^{16}} \simeq 4,26 \times 10^9 \text{ kg/s}. \quad (4.173)$$

Sachant que l'âge du Soleil est d'environ $t = 4,6 \times 10^9$ ans, soit

$$t = 4,6 \times 10^9 \times 3,15 \times 10^7 \simeq 1,45 \times 10^{17} \text{ s}, \quad (4.174)$$

la masse totale perdue est

$$\Delta m = \dot{m} \times t = 4,26 \times 10^9 \times 1,45 \times 10^{17} \simeq 6,18 \times 10^{26} \text{ kg}. \quad (4.175)$$

En nombre de masses terrestres, avec $m_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$,

$$\frac{\Delta m}{m_T} = \frac{6,18 \times 10^{26}}{6 \times 10^{24}} \simeq 103. \quad (4.176)$$

Ainsi, le Soleil perd environ $4,3 \times 10^9 \text{ kg/s}$ par rayonnement. Depuis sa formation, il a perdu environ 100 fois la masse de la Terre.

4.7 Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule

4.7.1 Formule de Hadamard

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , et soit Ω_ε une déformation lisse de Ω telle que, pour $x \in \partial\Omega$,

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x) n(x), \quad (4.177)$$

prolongée en tout Ω . On souhaite démontrer :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x), \quad (4.178)$$

où dS est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

1. **Étude de la fonction** $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) *Différentiabilité de \det .*

Rappelons que pour $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}. \quad (4.179)$$

C'est donc un polynôme en les n^2 variables m_{ij} . Toute fonction polynomiale $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^∞ . En particulier, \det est différentiable en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notamment au voisinage de l'identité I .

(b) *Développement de $\det(I + \varepsilon M)$.*

On veut montrer :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(I + \varepsilon M) = 1 + \varepsilon \text{Tr}(M) + o(\varepsilon), \quad (4.180)$$

ce qui entraîne $\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det(I + \varepsilon M) = \text{Tr}(M)$.

Il suffit d'écrire M en matrice triangulaire supérieure, le déterminant devient alors le produit des valeurs propres !

Ainsi,

$$\det(I + \varepsilon M) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \text{Tr} M + o(\varepsilon) \quad (4.181)$$

Ce qui permet de conclure.

(c) On se ramène au cas précédent en factorisant par X .

$$\det(X + H) = \det X \det(I + X^{-1}H) \quad (4.182)$$

$$= \det X \left(1 + \text{tr}(X^{-1}H) + o(\|H\|) \right) \quad (4.183)$$

$$= \det X + \text{tr}({}^t\text{Com}(X)H) + o(\|H\|) \quad (4.184)$$

Ainsi on a alors,

$$d(\det(H))(X) = \text{Tr}({}^t\text{Com}(X)H) \quad (4.185)$$

2. **Changement de variables et calcul du jacobien.**

On effectue le changement de variable

$$x = x(u) = u + \varepsilon f(u) n(u), \quad u \in \Omega. \quad (4.186)$$

Pour calculer $\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$ au premier ordre en ε , on note

$$x_i(u) = u_i + \varepsilon f(u) n_i(u), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.187)$$

Alors

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} + \varepsilon \left(\partial_j f(u) \right) n_i(u) + \varepsilon f(u) \partial_j n_i(u). \quad (4.188)$$

Posons la matrice $A(u) = (\partial_j f n_i + f \partial_j n_i)_{i,j}$. On a donc $\frac{\partial x}{\partial u} = I + \varepsilon A(u)$. Par le développement précédent,

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \det(I + \varepsilon A(u)) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr}(A(u)) + o(\varepsilon). \quad (4.189)$$

En remarquant que $\operatorname{Tr}(A(u)) = \nabla \cdot (f n)$, on obtient

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 1 + \varepsilon \nabla \cdot (f n)(u) + o(\varepsilon). \quad (4.190)$$

3. Développement de $F(x + \varepsilon v(x))$.

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$, $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pour fixer x , définissons $\varphi(\varepsilon) = F(x + \varepsilon v(x))$. Par la règle de dérivation en chaîne en dimension 1,

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} F(x + \varepsilon v(x)) = v(x) \cdot \nabla F(x + \varepsilon v(x)). \quad (4.191)$$

En particulier, pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + o(\varepsilon) = F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F(x) + o(\varepsilon). \quad (4.192)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F(x + \varepsilon v(x)) = F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F(x) + o(\varepsilon). \quad (4.193)$$

4. Obtention de la formule de Hadamard.

On fait le changement $x(u)$ dans $\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x$. Alors

$$\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\Omega} F(x(u)) \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) d^3u. \quad (4.194)$$

D'après les deux points précédents,

$$F(x(u)) = F(u) + \varepsilon f(u) n(u) \cdot \nabla F(u) + o(\varepsilon), \quad \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 1 + \varepsilon \nabla \cdot (f n)(u) + o(\varepsilon). \quad (4.195)$$

En multipliant et en ne retenant que le terme en ε , on trouve

$$F(x(u)) \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = F(u) + \varepsilon \left(F(u) \nabla \cdot (f n)(u) + f(u) n(u) \cdot \nabla F(u) \right) + o(\varepsilon). \quad (4.196)$$

Ainsi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\Omega} F(u) d^3u + \varepsilon \int_{\Omega} \left(F \nabla \cdot (f n) + f n \cdot \nabla F \right) d^3u + o(\varepsilon). \quad (4.197)$$

Or

$$F \nabla \cdot (f n) + f n \cdot \nabla F = \nabla \cdot (F f n), \quad (4.198)$$

donc par le théorème de la divergence,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (F f n) d^3u = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x). \quad (4.199)$$

Finalement,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x), \quad (4.200)$$

ce qui établit la formule de Hadamard (4.178).

4.7.2 Lien avec le potentiel gravitationnel

1. Signe de $E[\Omega]$ et définition de $\mathcal{I}[\Omega]$.

On a

$$E[\Omega] = -\frac{G}{2} \rho^2 \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'. \quad (4.201)$$

Comme $G > 0$ et $\rho > 0$, il suit immédiatement $E[\Omega] < 0$. Minimiser $E[\Omega]$ revient donc à maximiser

$$\mathcal{I}[\Omega] := \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'. \quad (4.202)$$

2. Calcul du potentiel au centre d'une boule.

Supposons $\Omega = B(0, R)$ de volume fixe $\frac{4}{3}\pi R^3 = V$. La densité est ρ . Pour $x = 0$,

$$U(0) = -G \rho \int_{\Omega} \frac{1}{|x'|} d^3x' = -G \rho \int_0^R \int_{S^2} \frac{1}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr. \quad (4.203)$$

En coordonnées sphériques,

$$\int_{S^2} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi, \quad \text{et} \quad \int_0^R \frac{r^2}{r} dr = \int_0^R r dr = \frac{R^2}{2}. \quad (4.204)$$

Donc

$$U(0) = -G \rho \cdot 4\pi \cdot \frac{R^2}{2} = -2\pi G \rho R^2. \quad (4.205)$$

D'où l'expression explicite du potentiel au centre.

4.7.3 La sphère ?

1. Variation première de \mathcal{F} .

On écrit $\mathcal{F}[\Omega_\varepsilon]$ et on applique la formule de Hadamard avec $F(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$. Alors

$$\delta \mathcal{F} = \frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \iint_{\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x - y|} dx dy. \quad (4.206)$$

Ainsi, on a en utilisant la formule de Hadamard pour Ω^2 ,

$$\delta \mathcal{F} = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x). \quad (4.207)$$

2. Introduction du multiplicateur de Lagrange λ .

On veut minimiser \mathcal{F} sous la contrainte $V[\Omega] = V$. On définit la fonctionnelle de Lagrange

$$\mathcal{L}[\Omega] := \mathcal{F}[\Omega] - \lambda V[\Omega], \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.208)$$

Sa variation première s'écrit

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{F} - \lambda \delta V = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x) - \lambda \int_{\partial\Omega} f(x) dS(x). \quad (4.209)$$

Par linéarité,

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial\Omega} \left(2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda \right) f(x) dS(x). \quad (4.210)$$

3. Condition stationnaire pour la boule.

Pour que $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toute perturbation f , il faut et il suffit que

$$2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda = 0, \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega. \quad (4.211)$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$ est constante sur $\partial\Omega$.

Or si $\Omega = B(0, R)$ est une boule, alors, par symétrie sphérique, pour tout $x \in \partial B(0, R)$ (i.e. $|x| = R$), l'intégrale $\int_{B(0, R)} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$ ne dépend que de $|x| = R$.

Ainsi elle est *constante* sur ∂B . On en déduit que la boule satisfait la condition stationnaire $\delta\mathcal{L} = 0$ pour tout f .

4. (Bonus) Variation seconde et minimum local.

Pour montrer que la boule est un *minimum local* de \mathcal{F} sous contrainte V , il faut vérifier que la variation seconde $\delta^2\mathcal{L}[f]$ est strictement positive pour toute perturbation $f \neq 0$ satisfaisant $\int_{\partial\Omega} f dS = 0$.

Sans détails complets ici, on peut écrire la variation seconde sous la forme d'une forme bilinéaire :

$$\delta^2\mathcal{F}[f] = \int_{(\partial\Omega)^2} K(x, x') f(x) f(x') dS(x) dS(x') + \int_{\partial\Omega} f(x)^2 \kappa(x) dS(x), \quad (4.212)$$

avec un noyau $K(x, x') = \frac{1}{|x - x'|}$ et $\kappa(x)$ la courbure moyenne en x .

Pour la boule, grâce au développement en harmoniques sphériques, on montre que cette forme est strictement positive sur $\{f \mid \int_{\partial\Omega} f dS = 0\}$. Cela prouve que la boule est un minimum local.

5. Conclusion physique.

La boule minimise l'énergie gravitationnelle interne pour un volume fixé. En physique, cela explique que, dans l'approximation d'un corps massif autogravitant au repos, la configuration stationnaire de moindre énergie est sphérique. C'est la raison pour laquelle les grands objets de l'Univers (étoiles, planètes en l'absence de force de marée ou de rotation rapide) tendent vers une forme sphérique.

4.8 Mouvement relativiste d'une particule chargée

4.8.1 Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

1. Particule libre et action relativiste.

Le principe de moindre action impose que l'action soit scalaire de Lorentz. Le scalaire le plus simple est l'intervalle d'espace-temps ds , défini par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.213)$$

L'action d'une particule libre de masse m est donc :

$$S = -mc \int ds = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt. \quad (4.214)$$

Le Lagrangien associé est :

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (4.215)$$

2. Interaction avec un champ électromagnétique.

On introduit le quadripotential $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$. On cherche un terme d'interaction de la forme scalaire $L_{\text{int}} = qA_\mu \dot{x}^\mu$. En coordonnées usuelles :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi. \quad (4.216)$$

Le Lagrangien total est donc :

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi. \quad (4.217)$$

3. Impulsion généralisée.

L'impulsion généralisée est définie par :

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} = \gamma m\mathbf{v} + q\mathbf{A}. \quad (4.218)$$

4. Equations d'Euler-Lagrange.

On applique les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (4.219)$$

Le membre de gauche donne :

$$\frac{d}{dt} (\gamma m\mathbf{v}) + q \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (4.220)$$

Le membre de droite s'écrit :

$$q\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - q\nabla\phi. \quad (4.221)$$

Or on a :

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (4.222)$$

D'autre part :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \partial_t \mathbf{A} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}. \quad (4.223)$$

Ainsi, en réinjectant ces expressions, les termes $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ se compensent, et on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = q [-\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]. \quad (4.224)$$

On reconnaît alors le champ électrique et magnétique définis par :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4.225)$$

d'où l'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.226)$$

5. Formulation covariante.

On paramètre par le temps propre τ :

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} + qA_\mu\dot{x}^\mu. \quad (4.227)$$

On reconnaît un couplage minimal : la première partie est l'action libre, la deuxième l'interaction avec le champ.

6. Equation du mouvement.

On applique les **équations d'Euler-Lagrange** en coordonnées covariantes. Le Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est :

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu} + qA_\mu\dot{x}^\mu, \quad (4.228)$$

où $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, τ étant le temps propre de la particule. On utilise que :

$$\sqrt{-\dot{x}^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = c, \quad (4.229)$$

puisque \dot{x}^μ est un quadrivecteur unité : $\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu = -c^2$ (métrique $(-, +, +, +)$). Ainsi, la dérivée du Lagrangien donne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + qA_\mu = mc \frac{\dot{x}_\mu}{c} + qA_\mu. \quad (4.230)$$

On applique alors :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}. \quad (4.231)$$

Le membre de gauche devient :

$$\frac{d}{d\tau} \left(mc \frac{\dot{x}_\mu}{c} + qA_\mu \right) = mc \frac{\ddot{x}_\mu}{c} + q \frac{dA_\mu}{d\tau} \quad (4.232)$$

$$= m\ddot{x}_\mu + q\dot{x}^\nu \partial_\nu A_\mu. \quad (4.233)$$

Le membre de droite vaut :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = q\partial_\mu A_\nu \dot{x}^\nu. \quad (4.234)$$

On obtient donc l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}_\mu + q\dot{x}^\nu \partial_\nu A_\mu = q\dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu, \quad (4.235)$$

$$m\ddot{x}_\mu = q\dot{x}^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (4.236)$$

$$m\ddot{x}_\mu = qF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu, \quad (4.237)$$

où l'on a défini le **tenseur électromagnétique** antisymétrique :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.238)$$

7. Composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$.

Le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$) et contient toutes les informations sur les champs électriques \mathbf{E} et magnétiques \mathbf{B} .

On travaille en coordonnées cartésiennes, avec $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ et $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$.

– Pour les composantes temporelles-spatiales ($\mu = 0, \nu = i$) :

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \quad (4.239)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\phi}{c} \right) \quad (4.240)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (4.241)$$

$$= -\frac{1}{c} E_i, \quad (4.242)$$

où l'on a utilisé la définition du champ électrique :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}. \quad (4.243)$$

– Pour les composantes purement spatiales ($\mu = i, \nu = j$) :

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\varepsilon_{ijk} B_k, \quad (4.244)$$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita, et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Conclusion : le tenseur $F_{\mu\nu}$ contient :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.245)$$

Cette forme montre clairement le lien entre les composantes de $F_{\mu\nu}$ et les champs électromagnétiques mesurés dans le référentiel inertiel.

8. Invariants relativistes.

On calcule :

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2}),$$

$$I_2 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{8}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Les cas $I_1 = 0, I_2 = 0$ correspondent à :

- $\mathbf{E}^2 = c^2 \mathbf{B}^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$: champ de type onde électromagnétique plane.
- $I_1 > 0$: champ magnétique dominant ; $I_1 < 0$: champ électrique dominant.

9. Transformation de jauge.

Sous la transformation $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, on a :

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}, \quad (4.246)$$

car les dérivées croisées se compensent. L'équation du mouvement reste inchangée. Cette invariance est une **symétrie locale** (de jauge) de l'action : elle est associée à la conservation de la charge via le théorème de Noether.

4.8.2 Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane – Correction

On considère une particule de masse m et de charge q soumise à un champ électromagnétique. Son mouvement est décrit par l'équation :

$$m\ddot{x}^\mu = qF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu, \quad (4.247)$$

où les points désignent des dérivées par rapport au temps propre τ , et où l'on travaille en unités naturelles : $c = 1$.

Le potentiel est donné sous la forme :

$$A^\mu(x) = a^\mu f(k_\nu x^\nu), \quad (4.248)$$

où a^μ est constant, $f \in C^1$, et k^μ est un quadrivecteur lumière tel que $k^\mu k_\mu = 0$.

1. Calcul du tenseur électromagnétique.

Par définition :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.249)$$

On a :

$$\partial^\mu A^\nu = a^\nu f'(k_\rho x^\rho) \partial^\mu (k_\sigma x^\sigma) = a^\nu f'(k \cdot x) k^\mu. \quad (4.250)$$

De même :

$$\partial^\nu A^\mu = a^\mu f'(k \cdot x) k^\nu. \quad (4.251)$$

D'où :

$$F^{\mu\nu} = (k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu) f'(k_\rho x^\rho). \quad (4.252)$$

2. Condition de jauge.

(a) On calcule :

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (a^\mu f(k_\rho x^\rho)) = a^\mu f'(k \cdot x) k_\mu. \quad (4.253)$$

(b) Donc la condition de jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ implique :

$$a^\mu k_\mu = 0. \quad (4.254)$$

Autrement dit, le quadrivecteur de polarisation est orthogonal au vecteur d'onde. Cette condition exprime la transversalité de l'onde électromagnétique.

3. Équation du mouvement.

(a) On utilise l'expression du tenseur $F^{\mu\nu}$ obtenue en 1 :

$$F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu = (k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu) f'(k \cdot x) \dot{x}_\nu \quad (4.255)$$

$$= k^\mu a^\nu \dot{x}_\nu f' - a^\mu k^\nu \dot{x}_\nu f' \quad (4.256)$$

$$= [k^\mu (a_\rho \dot{x}^\rho) - a^\mu (k_\rho \dot{x}^\rho)] f'(k \cdot x). \quad (4.257)$$

(b) Ainsi, l'équation du mouvement devient :

$$m \ddot{x}^\mu = q [k^\mu (a_\rho \dot{x}^\rho) - a^\mu (k_\rho \dot{x}^\rho)] f'(k \cdot x). \quad (4.258)$$

4. Intégration de l'équation du mouvement.

(a) Posons $\phi(\tau) = k_\rho x^\rho(\tau)$, alors :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = k_\rho \dot{x}^\rho. \quad (4.259)$$

On dérive à nouveau :

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = k_\rho \ddot{x}^\rho. \quad (4.260)$$

On utilise l'équation du mouvement pour obtenir :

$$m k_\rho \ddot{x}^\rho = q [k_\rho k^\rho (a \cdot \dot{x}) - k_\rho a^\rho (k \cdot \dot{x})] f'(k \cdot x). \quad (4.261)$$

Mais $k^\rho k_\rho = 0$ et $k_\rho a^\rho = 0$ (condition de jauge), donc :

$$k_\rho \ddot{x}^\rho = 0. \quad (4.262)$$

Ainsi, $\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = 0$, ce qui implique :

$$k_\rho \dot{x}^\rho = \text{constante}. \quad (4.263)$$

(b) Posons $k_\rho \dot{x}^\rho = \omega = \text{constante}$. Alors $\phi(\tau) = k \cdot x(\tau)$ est affine en τ :

$$\phi(\tau) = \omega\tau + \phi_0. \quad (4.264)$$

(c) On rappelle l'équation du mouvement sous la forme :

$$m \ddot{x}^\mu = q [k^\mu (a_\rho \dot{x}^\rho) - a^\mu (k_\rho \dot{x}^\rho)] f'(\phi), \quad \text{avec } \phi(\tau) = k_\rho x^\rho(\tau). \quad (4.265)$$

Posons la notation $u^\mu = \dot{x}^\mu$. On a alors :

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = q [k^\mu (a_\rho u^\rho) - a^\mu (k_\rho u^\rho)] f'(\phi). \quad (4.266)$$

Comme montré précédemment, $\omega := k_\rho u^\rho = \text{constante}$, et $\phi(\tau) = \omega\tau + \phi_0$.

On change de variable du paramètre propre τ vers ϕ , en notant :

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d}{d\phi} = \omega \frac{d}{d\phi}. \quad (4.267)$$

L'équation devient :

$$m\omega \frac{du^\mu}{d\phi} = q [k^\mu (a_\rho u^\rho) - a^\mu \omega] f'(\phi). \quad (4.268)$$

Posons $\alpha(\phi) := a_\rho u^\rho(\phi)$. En projetant sur a_μ , on trouve :

$$m\omega \frac{d\alpha}{d\phi} = q [(a \cdot k)\alpha - a^2 \omega] f'(\phi). \quad (4.269)$$

La condition de jauge impose $a \cdot k = 0$, donc :

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -\frac{qa^2}{m\omega} f'(\phi). \quad (4.270)$$

On intègre :

$$\alpha(\phi) = a_\rho u^\rho(\phi) = \alpha_0 - \frac{qa^2}{m\omega} f(\phi), \quad (4.271)$$

avec la constante d'intégration $\alpha_0 = a_\rho u^\rho(\phi_0)$.

L'équation sur u^μ s'écrit :

$$\frac{du^\mu}{d\phi} = \frac{q}{m\omega} [k^\mu \alpha(\phi) - a^\mu \omega] f'(\phi). \quad (4.272)$$

On intègre terme à terme :

$$u^\mu(\phi) = u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} \int_{\phi_0}^{\phi} [k^\mu \alpha(\varphi) - a^\mu \omega] f'(\varphi) d\varphi \quad (4.273)$$

$$= u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} \left[k^\mu \int_{\phi_0}^{\phi} \alpha(\varphi) f'(\varphi) d\varphi - a^\mu \omega \int_{\phi_0}^{\phi} f'(\varphi) d\varphi \right]. \quad (4.274)$$

Substituons $\alpha(\varphi)$:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \alpha(\varphi) f'(\varphi) d\varphi = \int_{\phi_0}^{\phi} \left[\alpha_0 - \frac{qa^2}{m\omega} f(\varphi) \right] f'(\varphi) d\varphi. \quad (4.275)$$

Calculons les intégrales :

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \alpha_0 f'(\varphi) d\varphi = \alpha_0 [f(\phi) - f(\phi_0)], \quad (4.276)$$

et

$$\int_{\phi_0}^{\phi} f(\varphi) f'(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} [f(\phi)^2 - f(\phi_0)^2]. \quad (4.277)$$

Ainsi,

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \alpha(\varphi) f'(\varphi) d\varphi = \alpha_0 [f(\phi) - f(\phi_0)] - \frac{qa^2}{2m\omega} [f(\phi)^2 - f(\phi_0)^2]. \quad (4.278)$$

De plus,

$$\int_{\phi_0}^{\phi} f'(\varphi) d\varphi = f(\phi) - f(\phi_0). \quad (4.279)$$

D'où,

$$u^\mu(\phi) = u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} k^\mu \left[\alpha_0 (f(\phi) - f(\phi_0)) - \frac{qa^2}{2m\omega} (f(\phi)^2 - f(\phi_0)^2) \right] \quad (4.280)$$

$$- \frac{q}{m} a^\mu (f(\phi) - f(\phi_0)). \quad (4.281)$$

Enfin, on intègre une seconde fois pour obtenir la trajectoire :

$$x^\mu(\phi) = x^\mu(\phi_0) + \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{u^\mu(\varphi)}{\omega} d\varphi. \quad (4.282)$$

Le calcul se fait en intégrant terme à terme chaque fonction de $f(\varphi)$ ou $f(\varphi)^2$.

Résumé : La trajectoire complète est donnée explicitement par

$$\boxed{\begin{aligned} u^\mu(\phi) &= u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} k^\mu \left[\alpha_0 (f(\phi) - f(\phi_0)) - \frac{qa^2}{2m\omega} (f(\phi)^2 - f(\phi_0)^2) \right] \\ &\quad - \frac{q}{m} a^\mu (f(\phi) - f(\phi_0)), \\ x^\mu(\phi) &= x^\mu(\phi_0) + \frac{1}{\omega} \int_{\phi_0}^{\phi} u^\mu(\varphi) d\varphi. \end{aligned}} \quad (4.283)$$

Cette solution exprime la trajectoire d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane d'amplitude et forme arbitraire f . La constante $\omega = k_\rho \dot{x}^\rho$ est fixée par les conditions initiales.

(d) On pose

$$f(\phi) = \sin(\phi), \quad (4.284)$$

avec $\phi = k_\mu x^\mu$.

Les intégrales impliquent alors les primitives de \sin et \sin^2 , qui sont explicites :

$$\int f(\phi) d\phi = -\cos(\phi) + C, \quad \int f(\phi)^2 d\phi = \int \sin^2(\phi) d\phi = \frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4} + C. \quad (4.285)$$

Donc, la vitesse quadrivectorielle s'écrit :

$$\begin{aligned} u^\mu(\phi) &= u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} k^\mu \left[\alpha_0 (\sin \phi - \sin \phi_0) - \frac{qa^2}{2m\omega} \left(\frac{\phi - \phi_0}{2} - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{4} \right) \right] \\ &\quad - \frac{q}{m} a^\mu (\sin \phi - \sin \phi_0). \end{aligned} \quad (4.286)$$

On intègre ensuite $u^\mu(\phi)$ pour obtenir la trajectoire complète $x^\mu(\tau)$ comme expliqué précédemment.

Les composantes de la trajectoire s'écrivent alors :

$$ct(\tau) = ct(\tau_0) + \frac{u^0(\tau_0)}{\omega}(\phi - \phi_0) + \frac{q}{m\omega^2}k^0 \left[\alpha_0(-\cos \phi + \cos \phi_0) - \frac{qa^2}{4m\omega} \left(\phi - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{2} \right) \right] - \frac{q}{m\omega}a^0(-\cos \phi + \cos \phi_0), \quad (4.287)$$

$$x(\tau) = x(\tau_0) + \frac{u^1(\tau_0)}{\omega}(\phi - \phi_0) + \frac{q}{m\omega^2}k^1 \left[\alpha_0(-\cos \phi + \cos \phi_0) - \frac{qa^2}{4m\omega} \left(\phi - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{2} \right) \right] - \frac{q}{m\omega}a^1(-\cos \phi + \cos \phi_0), \quad (4.288)$$

$$y(\tau) = y(\tau_0) + \frac{u^2(\tau_0)}{\omega}(\phi - \phi_0) + \frac{q}{m\omega^2}k^2 \left[\alpha_0(-\cos \phi + \cos \phi_0) - \frac{qa^2}{4m\omega} \left(\phi - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{2} \right) \right] - \frac{q}{m\omega}a^2(-\cos \phi + \cos \phi_0), \quad (4.289)$$

$$z(\tau) = z(\tau_0) + \frac{u^3(\tau_0)}{\omega}(\phi - \phi_0) + \frac{q}{m\omega^2}k^3 \left[\alpha_0(-\cos \phi + \cos \phi_0) - \frac{qa^2}{4m\omega} \left(\phi - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{2} \right) \right] - \frac{q}{m\omega}a^3(-\cos \phi + \cos \phi_0). \quad (4.290)$$

avec

$$\phi = \omega\tau + \phi_0, \quad \alpha_0 = a_\rho u^\rho(\tau_0), \quad a^2 = a_\mu a^\mu, \quad (4.291)$$

et $\omega = k_\mu u^\mu$ est constant. Cette expression donne la trajectoire complète analytiquement intégrée d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane monochromatique sinusoïdale.

4.8.3 Théorie des Champs

1. Pour une action dépendant d'un champ φ (scalaire, tensoriel...):

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) d^4x \quad (4.292)$$

On considère une variation $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon\eta$ avec $\eta \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, alors :

$$\delta S = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} [\varphi + \varepsilon\eta] \right|_{\varepsilon=0} \quad (4.293)$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \eta \right) d^4x \quad (4.294)$$

On intègre par partie le terme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \eta$.

$u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \implies du = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)},$ et $dv = \partial_\mu \eta \implies v = \eta$. Cela nous donne,

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \right) \eta d^4x \quad (4.295)$$

On rappelle le fait que η est nulle sur $\partial\Omega$, et on obtient l'équation d'Euler-Lagrange pour les champs :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0} \quad (4.296)$$

2. On considère l'action électromagnétique :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu \quad (4.297)$$

On fait varier $A^\mu \rightarrow A^\mu + \varepsilon \eta^\mu$:

$$\delta S = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2\mu_0} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - j_\mu \eta^\mu \right) d^4x \quad (4.298)$$

Or,

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \eta_\nu - \partial_\nu \eta_\mu \quad (4.299)$$

Donc :

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \partial_\mu \eta_\nu - j_\mu \eta^\mu \right) d^4x \quad (4.300)$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu \right) \eta_\nu d^4x \quad (4.301)$$

Donc, par annulation pour tout η_ν :

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} \quad (4.302)$$

Les équations homogènes s'obtiennent en remarquant que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ implique par construction :

$$\boxed{\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0} \quad (4.303)$$

4.8.4 Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant

1. $F^{\mu\nu}$: dans le référentiel où $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, on a :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.304)$$

2. L'équation du mouvement $du^\mu/d\tau = (q/m)F^{\mu\nu}u_\nu$ implique $u^3 = \text{constante} = 0$, donc mouvement plan. L'énergie $E = \gamma mc^2$ est constante car $F^{0\nu} = 0$.
3. $du^\mu/d\tau = (q/m)F^{\mu\nu}u_\nu$ donne :

$$du^1/d\tau = (q/m)F^{12}u^2 = -(qB/m)u^2 \quad (4.305)$$

$$du^2/d\tau = (q/m)F^{21}u^1 = (qB/m)u^1 \quad (4.306)$$

Cela décrit un mouvement circulaire uniforme d'où :

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad x(t) = R \cos\left(\frac{\omega}{\gamma}t\right), \quad y(t) = R \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}t\right) \quad (4.307)$$

On a également que γ est constante, ce qui permet d'écrire, $\tau = t/\gamma$. Avec :

$$R = \frac{\gamma m v}{qB} \quad (4.308)$$

4. On part de :

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^4 a^2, \quad E = \gamma mc^2, \quad a = \frac{v^2}{R} \quad (4.309)$$

Donc :

$$d\gamma/dt = -\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^5 m} \gamma^3 a^2 = -C(\gamma^2 - 1) \quad (4.310)$$

avec :

$$C = \frac{q^4 B^2}{6\pi\varepsilon_0 c^5 m^3} \quad (4.311)$$

5. Résolution de :

$$\frac{d\gamma}{\gamma^2 - 1} = -C dt \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right| = -Ct + C_0 \quad (4.312)$$

On obtient donc :

$$\boxed{\gamma(t) = \coth(Ct + C_0)} \quad (4.313)$$

6. On utilise $\omega = \frac{qB}{m}$ et $v(t) = c\sqrt{1 - 1/\gamma(t)^2}$, donc :

$$R(t) = \frac{\gamma(t)mv(t)}{qB}, \quad \theta(t) = \int_0^t \frac{\omega}{\gamma(s)} ds \quad (4.314)$$

$$x(t) = R(t) \cos \theta(t) \quad (4.315)$$

$$y(t) = R(t) \sin \theta(t) \quad (4.316)$$

7. La courbe spirale vers l'origine car $R(t) \rightarrow 0$ et $\omega/\gamma(t) \rightarrow 0$, mais l'oscillation reste présente. Problème : accumulation d'erreurs numériques et nécessité d'un pas de temps adaptatif pour intégrer correctement les oscillations rapides au début.

4.8.5 Physique des collisionneurs relativistes

On utilise les unités naturelles avec $c = 1$.

1. Le carré de l'invariant d'énergie-moment total est défini par :

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \quad (4.317)$$

Dans le référentiel du centre de masse (CMS), l'énergie totale disponible est donnée par :

$$E_{\text{tot}}^{(\text{CMS})} = \sqrt{s} \quad (4.318)$$

2. Pour une collision frontale de deux particules identiques de masse m et d'énergie E chacune (dans le référentiel du laboratoire), les quadrimpulsions sont :

$$p_1 = (E, \mathbf{p}) \quad (4.319)$$

$$p_2 = (E, -\mathbf{p}) \quad (4.320)$$

On a alors :

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2m^2 + 2(E^2 - \mathbf{p}^2) = 4E^2 \quad (4.321)$$

car $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ et $E \gg m$. Donc :

$$\boxed{\sqrt{s} = 2E} \quad (4.322)$$

3. Pour une collision avec une cible fixe, on a :

$$p_1 = (E_{\text{lab}}, \mathbf{p}) \quad (4.323)$$

$$p_2 = (m, 0) \quad (4.324)$$

Alors :

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m^2 + m^2 + 2mE_{\text{lab}} = 2m^2 + 2mE_{\text{lab}} \quad (4.325)$$

Soit :

$$\boxed{s = 2m^2 + 2mE_{\text{lab}}} \quad (4.326)$$

Au seuil de création de deux nouvelles particules de masse m , dans le CMS on a : $\sqrt{s} = 2m$ donc :

$$2m = \sqrt{2m^2 + 2mE_{\text{lab}}} \Rightarrow E_{\text{lab}} = 2m \quad (4.327)$$

4. Pour produire une particule de masse M au seuil dans une expérience à cible fixe, on utilise :

$$s = M^2 = m^2 + m^2 + 2mE_{\text{lab}} \Rightarrow E_{\text{lab}} = \frac{M^2 - 2m^2}{2m} \quad (4.328)$$

En revanche, dans un collisionneur symétrique, on a simplement :

$$E_{\text{CM}} = \sqrt{s} = 2E = 2M \Rightarrow E = M \quad (4.329)$$

Donc, pour une même énergie dans le CMS, l'énergie requise dans le laboratoire est beaucoup plus grande que dans un collisionneur symétrique. C'est pourquoi les collisionneurs à faisceaux opposés sont plus efficaces pour produire des particules lourdes à haute énergie.

4.9 Hydrodynamique relativiste \triangle

4.10 Atome d'hydrogène et équation radiale

4.10.1 Séparation des variables et équation radiale

1. Séparation des variables

Le Hamiltonien de l'atome d'hydrogène, dans la base sphérique, s'écrit :

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{e^2}{r}. \quad (4.330)$$

En coordonnées sphériques, le Laplacien est

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2}, \quad (4.331)$$

où \mathbf{L}^2 est le carré du moment angulaire orbital.

On cherche une solution de la forme

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (4.332)$$

où $Y_{\ell m}$ sont les harmoniques sphériques propres simultanées de \mathbf{L}^2 et \mathbf{L}_z , vérifiant

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}, \quad \mathbf{L}_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}. \quad (4.333)$$

En injectant dans l'équation de Schrödinger stationnaire $\mathbf{H}\psi = E\psi$, on obtient l'équation radiale suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right] - \frac{e^2}{r} R = ER. \quad (4.334)$$

En développant la dérivée radiale,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr}, \quad (4.335)$$

ce qui donne l'équation annoncée :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right) - \frac{e^2}{r} R = ER. \quad (4.336)$$

2. Changement de fonction : $u(r) = rR(r)$

En posant $u(r) = rR(r)$, on calcule :

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}, \quad (4.337)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r^3}. \quad (4.338)$$

En remplaçant dans l'équation radiale, les termes en u/r^3 s'annulent et on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u = Eu. \quad (4.339)$$

3. Changement de variable adimensionnelle

On définit

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m_e|E|}{\hbar^2}}, \quad \rho = \kappa r. \quad (4.340)$$

L'équation devient

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\kappa^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} + \left[\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u = Eu. \quad (4.341)$$

Comme $E = -|E|$, on divise toute l'équation par $-\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_e}$:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{2m_e e^2}{\hbar^2 \kappa} \frac{1}{\rho} + 1 \right] u. \quad (4.342)$$

On pose alors

$$\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2 \kappa}. \quad (4.343)$$

Ce qui donne l'équation annoncée :

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{\rho_0}{\rho} + 1 \right] u. \quad (4.344)$$

4. Ansatz sur la forme de $u(\rho)$

On pose

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho/2} v(\rho). \quad (4.345)$$

En calculant la dérivée seconde de $u(\rho)$ et en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient que $v(\rho)$ satisfait :

$$\rho \frac{d^2v}{d\rho^2} + (2\ell + 2 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + (\rho_0 - 2\ell - 2)v = 0. \quad (4.346)$$

Cette équation est celle de la fonction hypergéométrique confluyente.

5. Série en puissance et condition de terminaison

On développe

$$v(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k. \quad (4.347)$$

L'équation donne une relation de récurrence entre les coefficients c_k . En général, cette série diverge pour $\rho \rightarrow \infty$ sauf si la série est polynomiale, c'est-à-dire si elle s'arrête à un certain ordre fini \hat{k} . La condition de terminaison est

$$\rho_0 = 2n, \quad (4.348)$$

où

$$n = \hat{k} + \ell + 1 \in \mathbb{N}^*. \quad (4.349)$$

6. Expression des niveaux d'énergie liés

En réinjectant la définition de ρ_0 ,

$$\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2 \kappa} = 2n \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{m_e e^2}{2\hbar^2 n}. \quad (4.350)$$

Or

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_e} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (4.351)$$

Ce sont les niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène.

7. Degré de dégénérescence

Pour un niveau n , les valeurs possibles de ℓ sont

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.352)$$

et pour chaque ℓ , les valeurs de m vont de

$$m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell, \quad (4.353)$$

soit $(2\ell+1)$ valeurs.

Le degré de dégénérescence est donc

$$g_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = 2 \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2. \quad (4.354)$$

Interprétation : Dans ce modèle non-relativiste sans prise en compte des interactions spin-orbite ni effets relativistes, l'énergie dépend uniquement du nombre quantique principal n . Ceci reflète la symétrie plus large du problème (invariance de rotation et symétrie de type Runge-Lenz), qui entraîne cette dégénérescence élevée.

4.10.2 État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales

7. Pour $n = 1$, $\ell = 0$, $n_r = 0$:

$$u(r) = A r e^{-r/a_0}, \quad \Rightarrow R(r) = \frac{u(r)}{r} = A e^{-r/a_0}. \quad (4.355)$$

La normalisation impose :

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = |A|^2 \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr = 1. \quad (4.356)$$

L'intégrale donne $2!(a_0/2)^3 = a_0^3/4 \Rightarrow |A|^2 = 4/a_0^3$. Donc :

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}. \quad (4.357)$$

L'harmonique sphérique est $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$, donc :

$$\psi_{1,0,0}(r, \theta, \phi) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}. \quad (4.358)$$

La normalisation est bien vérifiée :

$$\int |\psi|^2 d^3x = \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 d\Omega = 1. \quad (4.359)$$

8. La densité de probabilité radiale est :

$$P(r) = 4\pi |R(r)|^2 r^2 = 4\pi \left(\frac{2}{a_0^{3/2}} \right)^2 e^{-2r/a_0} r^2 = \frac{16\pi}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}. \quad (4.360)$$

Elle s'annule en $r = 0$ et pour $r \rightarrow \infty$; le maximum se trouve pour $r = a_0$. *Interprétation* : la probabilité maximale de trouver l'électron est au rayon de Bohr.

9. On utilise :

$$\int_0^\infty r^n e^{-2r/a_0} dr = n! \left(\frac{a_0}{2} \right)^{n+1}. \quad (4.361)$$

Pour $\langle r \rangle$:

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r |R(r)|^2 r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0} dr = \frac{4}{a_0^3} \cdot 3! \left(\frac{a_0}{2} \right)^4 = \frac{3}{2} a_0. \quad (4.362)$$

Pour $\langle r^2 \rangle$:

$$\int_0^\infty r^4 e^{-2r/a_0} dr = 4! (a_0/2)^5 = 24 (a_0/2)^5 \Rightarrow \langle r^2 \rangle = 3a_0^2. \quad (4.363)$$

Donc :

$$(\Delta r)^2 = 3a_0^2 - (3a_0/2)^2 = 3a_0^2 - \frac{9}{4}a_0^2 = \frac{3}{4}a_0^2. \quad (4.364)$$

10. La transformée de Fourier de l'état fondamental donne une distribution isotrope centrée sur $p = 0$. L'espérance à $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$ (fonction paire), et :

$$\langle p^2 \rangle = \int \tilde{\psi}^*(\mathbf{p}) p^2 \tilde{\psi}(\mathbf{p}) d^3p. \quad (4.365)$$

Elle peut se relier à l'énergie cinétique moyenne :

$$\langle T \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = -E_1 = \frac{1}{2} E_0. \Rightarrow \langle p^2 \rangle = m_e E_0. \quad (4.366)$$

11. La dépendance en $1/n^2$ explique la structure des raies décrites par la formule de Rydberg :

$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{R}_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (4.367)$$

Le nombre quantique principal n classe les niveaux d'énergie. En MQ non relativiste, ℓ n'influe pas sur E_n , contrairement au cas relativiste (effet Lamb, spin-orbite).

4.11 Vers un formalisme relativiste \triangle

4.12 Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$

1. L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\psi(x) = E\psi(x). \quad (4.368)$$

2. On pose $u = \tanh(\alpha x)$, alors $\frac{du}{dx} = \alpha(1 - u^2)$.

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{d\phi}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \alpha(1 - u^2) \frac{d\phi}{du}, \\ \psi''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\alpha(1 - u^2) \frac{d\phi}{du} \right) \\ &= \alpha \left(-2u\alpha(1 - u^2) \frac{d\phi}{du} + (1 - u^2)\alpha(1 - u^2) \frac{d^2\phi}{du^2} \right) \\ &= \alpha^2 \left((1 - u^2)^2 \frac{d^2\phi}{du^2} - 2u(1 - u^2) \frac{d\phi}{du} \right). \end{aligned}$$

3. L'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \left((1 - u^2)^2 \phi'' - 2u(1 - u^2)\phi' \right) - \frac{V_0}{1 - u^2}\phi = E\phi. \quad (4.369)$$

On divise par $(1 - u^2)$ puis on pose :

$$\lambda(\lambda + 1) = \frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha^2}, \quad \mu^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}, \quad (4.370)$$

ce qui donne :

$$(1 - u^2)\phi'' - 2u\phi' + \left[\lambda(\lambda + 1) - \frac{\mu^2}{1 - u^2} \right] \phi = 0. \quad (4.371)$$

4. On cherche une solution de la forme

$$\phi(u) = (1 - u^2)^{\mu/2} P(u), \quad (4.372)$$

où $P(u)$ est une fonction régulière sur $] -1, 1[$, que l'on notera simplement $Q(u) := (1 - u^2)^{\mu/2}$ pour alléger les notations.

On calcule alors les dérivées de ϕ en utilisant la règle du produit :

$$\phi'(u) = Q'(u)P(u) + Q(u)P'(u), \quad (4.373)$$

$$\phi''(u) = Q''(u)P(u) + 2Q'(u)P'(u) + Q(u)P''(u). \quad (4.374)$$

On remplace ces expressions dans l'équation différentielle de la question précédente :

$$(1 - u^2)\phi''(u) - 2u\phi'(u) + \left[\lambda(\lambda + 1) - \frac{\mu^2}{1 - u^2} \right] \phi(u) = 0. \quad (4.375)$$

On commence par calculer explicitement $Q'(u)$ et $Q''(u)$. On note que :

$$Q(u) = (1 - u^2)^{\mu/2}, \quad \Rightarrow \quad Q'(u) = -\mu u(1 - u^2)^{\frac{\mu}{2}-1}, \quad (4.376)$$

$$Q''(u) = -\mu(1-u^2)^{\frac{\mu}{2}-1} + \mu(\mu-2)u^2(1-u^2)^{\frac{\mu}{2}-2}. \quad (4.377)$$

On regroupe tous les termes dans l'équation complète :

$$(1-u^2)[Q''(u)P(u) + 2Q'(u)P'(u) + Q(u)P''(u)] - 2u[Q'(u)P(u) + Q(u)P'(u)] + \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-u^2}\right]Q(u)P(u) = 0.$$

Tous les termes comportent un facteur commun $Q(u)$, que l'on peut factoriser, car $Q(u) \neq 0$ sur $] -1, 1[$. On obtient alors une équation différentielle pour $P(u)$ uniquement :

$$(1-u^2)P''(u) - 2(\mu+1)uP'(u) + [\lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1)]P(u) = 0. \quad (4.378)$$

C'est une équation différentielle du type associé aux polynômes de Jacobi (ou de Legendre généralisés), dont les solutions sont polynomiales pour certaines quantifications (cf. question suivante).

5. (a) On a :

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 |\phi(u)|^2 \frac{du}{1-u^2} = \int_{-1}^1 |P(u)|^2 (1-u^2)^{\mu-1} du < \infty. \quad (4.379)$$

C'est la condition de normalisation.

(b) On pose $P(u) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p u^p$. Substitution dans l'EDH donne :

$$a_{p+2} = \frac{p(p+2\mu+1) - C}{(p+2)(p+1)} a_p \sim \frac{p^2}{p^2} a_p \quad (4.380)$$

avec $C = \lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1)$. Donc $a_{p+2} \sim a_p$ lorsque $p \rightarrow \infty$.

(c) Ainsi,

$$\exists c \in \mathbb{R}^*, \quad P(u) \underset{u \rightarrow 1, p \rightarrow \infty}{\sim} \sum c u^p = \frac{c}{1-u} \quad (4.381)$$

D'où :

$$|\phi(u)|^2 \sim \frac{1}{(1-u)^{2-\mu}}. \quad (4.382)$$

Intégrable seulement si $\mu > 1$. Or pour les états liés $\mu > 0$, donc il y a divergence si $\mu \leq 1$. Conclusion : pour que l'intégrale converge, la série doit s'arrêter $\implies P$ est un polynôme.

6. Comme démontré précédemment, $P(u)$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, et la condition d'arrêt de la série impose

$$a_{n+2} = 0. \quad (4.383)$$

On utilise la relation de récurrence obtenue :

$$a_{p+2} = \frac{p(p+2\mu+1) - \lambda(\lambda+1) + \mu(\mu+1)}{(p+2)(p+1)} a_p, \quad (4.384)$$

et on l'applique à $p = n$, ce qui donne :

$$n(n+2\mu+1) = \lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1). \quad (4.385)$$

On développe les deux membres :

$$\text{Gauche : } n(n+2\mu+1) = n^2 + 2n\mu + n,$$

$$\text{Droite : } \lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1) = \lambda^2 + \lambda - \mu^2 - \mu.$$

On rassemble tous les termes dans un même membre :

$$\mu^2 + (2n+1)\mu + (n^2 + n - \lambda^2 - \lambda) = 0. \quad (4.386)$$

On obtient donc une équation du second degré en μ :

$$\mu^2 + (2n+1)\mu + A = 0, \quad \text{où } A = n(n+1) - \lambda(\lambda+1). \quad (4.387)$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (2n+1)^2 - 4A = (2n+1)^2 - 4(n(n+1) - \lambda(\lambda+1)). \quad (4.388)$$

Développons :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4n^2 + 4n + 1 - 4n(n+1) + 4\lambda(\lambda+1) \\ &= (4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n) + 4\lambda(\lambda+1) \\ &= 1 + 4\lambda(\lambda+1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Delta = (2\lambda+1)^2. \quad (4.389)$$

Donc le discriminant est un carré parfait, et l'équation admet deux racines réelles. Ces deux racines sont données par :

$$\mu_{\pm} = \frac{-(2n+1) \pm (2\lambda+1)}{2}. \quad (4.390)$$

On calcule ces deux valeurs :

$$\mu_1 = \frac{-(2n+1) + (2\lambda+1)}{2} = \lambda - n, \quad \mu_2 = \frac{-(2n+1) - (2\lambda+1)}{2} = -(\lambda + n + 1). \quad (4.391)$$

La seule solution physiquement admissible est la première, car on a $\mu > 0$ pour un état lié (car $E < 0$ implique $\mu^2 > 0$).

Ainsi, la condition d'arrêt de la série impose que :

$$\mu = \lambda - n, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}, \quad n < \lambda. \quad (4.392)$$

7. Grâce à l'éq (4.370), on en déduit que :

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} (\lambda - n)^2, \quad n = 0, 1, \dots, [\lambda]. \quad (4.393)$$

8. Le nombre d'états liés est $N = [\lambda] + 1$, nombre fini.

9. Physiquement, le potentiel $V(x) = -V_0/\cosh^2(\alpha x)$ décroît exponentiellement à l'infini ($V(x) \sim -4V_0 e^{-2\alpha|x|}$), trop rapidement pour admettre une infinité d'états liés. Il s'agit d'un puits de potentiel d'épaisseur finie : la particule ne peut être confinée qu'à un nombre fini de niveaux.

4.13 Instabilité électrodynamique de l'atome classique

4.13.1 Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad} .

1.

$$dE_{\text{at}} = dW = \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt \implies \Delta E_{\text{at}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt \quad (4.394)$$

2. Attention, cette variation d'énergie est l'opposé de l'énergie rayonnée pendant le même intervalle :

$$dE_{\text{at}} = -P dt = -\frac{2e^2 a^2}{3c^3} dt = -\frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} dt \quad (4.395)$$

On obtient :

$$\Delta E_{\text{at}} = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2 dt \quad (4.396)$$

3. Par ailleurs, En intégrant par parties et en supposant une quasi-périodicité :

$$\Delta E_{\text{at}} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt \quad (4.397)$$

Par comparaison avec 4.394, une force candidate est la **force de freinage de radiation d'Abraham-Lorentz** :

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (4.398)$$

4. Considérons maintenant le **modèle de Thomson**, dans lequel l'électron est lié à l'origine par une force de rappel harmonique. L'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}} \quad (4.399)$$

On cherche une solution de la forme $r(t) = \text{Re} [r(0)e^{i\omega t}]$. Le développement perturbatif :

$$\omega = \omega_0 [1 + a(\omega_0 \tau) + \mathcal{O}((\omega_0 \tau)^2)] \quad (4.400)$$

donne $a = \frac{1}{2}$, soit finalement :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0)e^{-\omega_0^2 \tau t} \cos(\omega_0 t) \quad (4.401)$$

Le mouvement est donc un oscillateur amorti. Le temps caractéristique d'amortissement, ou durée de vie typique de l'atome dans ce modèle, est :

$$T_{\text{nat}} = \frac{1}{\omega_0^2 \tau} \sim 10^{-8} \text{ s} \quad (4.402)$$

L'atome classique est ainsi fondamentalement instable : l'électron spirale vers le noyau, très lentement à l'échelle atomique (pseudo-période), mais très rapidement à l'échelle macroscopique.

4.13.2 Problèmes conceptuels générés par la force de freinage F_{rad} .

1. L'équation à résoudre est :

$$\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t) \quad (4.403)$$

dont la solution générale est :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = v(t_0) e^{(t-t_0)/\tau} - \frac{1}{m\tau} \int_{t_0}^t e^{(t-t')/\tau} \mathbf{F}(t') dt' \quad (4.404)$$

2. Un phénomène inacceptable, que l'on appelle parfois *préaccélération d'une particule chargée*, apparaît : si $F = 0$, l'expression précédente montre clairement que l'accélération diverge exponentiellement aux grands temps.
3. On peut formellement éliminer les solutions divergentes en prenant $t_0 = +\infty$. Il s'agit d'une condition aux limites qui élimine de fait la « condition initiale ».
4. En prenant $t_0 = +\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= -\frac{1}{m\tau} \int_t^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} \mathbf{F}(t') dt' \\ &= -\frac{1}{m} \int_t^{+\infty} K(t-t') \mathbf{F}(t') dt' \end{aligned} \quad (4.405)$$

avec $K(t-t') = \frac{1}{\tau} e^{(t-t')/\tau}$.

Il s'agit ici de la *forme régularisée*, et ce d'autant plus que la limite de charge nulle reproduit bien l'Électrodynamique de la Force de Lorentz (EFD).

En effet, dans la limite $e \rightarrow 0$, on a $\tau \rightarrow 0$ et le noyau $K(t-t')$ tend vers une fonction de Dirac $\delta(t-t')$, ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t) \quad (4.406)$$

5. Il est déjà visible que l'accélération à l'instant t dépend des valeurs futures de la force. Cette équation viole donc le **principe de causalité**. Un changement de variable met cela en évidence. Posons $s = \frac{t'-t}{\tau}$, on obtient :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{1}{m} \int_0^{+\infty} e^{-s} \mathbf{F}(t + \tau s) ds \quad (4.407)$$

6. Avec une force échelon :

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathbf{F}_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (4.408)$$

on obtient :

$$t < 0 : \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{1}{m\tau} \int_0^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} \cdot 0 dt' = -\frac{\mathbf{F}_0}{m} e^{t/\tau} \quad (4.409)$$

$$t > 0 : \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{F_0}{m\tau} \int_t^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} dt' = -\frac{\mathbf{F}_0}{m} \quad (4.410)$$

4.14 Géodésiques dans un milieu optique \triangle

4.15 Condensat de Bose-Einstein

1. (a) Pour un système bosonique en équilibre thermique dans l'ensemble grand-canonique, le nombre moyen de particules dans un état d'énergie ε est donné par la moyenne statistique associée à la distribution de Bose-Einstein.

La fonction de partition pour cet état est :

$$Z_\varepsilon = \sum_{n_\varepsilon=0}^{\infty} e^{-\beta n_\varepsilon(\varepsilon-\mu)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}, \quad (4.411)$$

avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et μ le potentiel chimique (doit vérifier $\mu < \varepsilon$ pour convergence).

Le nombre moyen de particules dans cet état s'écrit :

$$\langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{Z_\varepsilon} \sum_{n_\varepsilon=0}^{\infty} n_\varepsilon e^{-\beta n_\varepsilon(\varepsilon-\mu)}. \quad (4.412)$$

En dérivant Z_ε par rapport à $\beta(\varepsilon - \mu)$, on trouve :

$$\langle n_\varepsilon \rangle = -\frac{1}{Z_\varepsilon} \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial [\beta(\varepsilon - \mu)]} = -\frac{\partial \ln Z_\varepsilon}{\partial [\beta(\varepsilon - \mu)]} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}. \quad (4.413)$$

- (b) Considérons un gaz de particules libres dans un volume V avec conditions aux limites périodiques. L'énergie cinétique non relativiste s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (4.414)$$

où $k = |\mathbf{k}|$ est la norme du vecteur d'onde.

Le nombre d'états dans l'espace des vecteurs d'onde à l'intérieur d'une boule de rayon k est donné par :

$$\mathcal{N}(k) = \frac{V}{(2\pi)^3} \times \frac{4\pi k^3}{3}. \quad (4.415)$$

En dérivant par rapport à k , la densité d'états en k est :

$$\frac{d\mathcal{N}}{dk} = \frac{V}{2\pi^2} k^2. \quad (4.416)$$

Par changement de variable avec $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, on obtient :

$$k = \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}, \quad dk = \frac{m}{\hbar^2 k} d\varepsilon. \quad (4.417)$$

Donc la densité d'états par unité d'énergie est :

$$g(\varepsilon) = \frac{d\mathcal{N}}{d\varepsilon} = \frac{d\mathcal{N}}{dk} \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \times \frac{m}{\hbar^2 k} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{m}{\hbar^2} k = \frac{V}{2\pi^2} \frac{m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}. \quad (4.418)$$

En simplifiant, on trouve :

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}. \quad (4.419)$$

(c) Le nombre moyen total de particules s'écrit donc en intégrant sur toutes les énergies :

$$\langle N \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon. \quad (4.420)$$

2. Dans un système fermé avec N particules et densité $\rho = N/V$, on a l'équivalence canonique / grand-canonique, donc on identifie $\langle N \rangle = N$. En posant le changement de variable $x = \beta\varepsilon$ et $\varphi(T) = e^{\mu(T)/(k_B T)}$, on obtient :

$$\rho = \frac{N}{V} = \left(\frac{2mk_B T}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^{x/\varphi(T)} - 1} dx = \left(\frac{2mk_B T}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^{x/\varphi(T)} - 1} dx, \quad (4.421)$$

ce qui correspond bien à (3.158).

3. Comme $\varphi(T) = e^{\mu(T)/(k_B T)}$ et $\mu(T) < 0$, on a $0 < \varphi(T) < 1$. La fonction

$$f(\varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^{x/\varphi} - 1} dx \quad (4.422)$$

est croissante en φ sur $(0, 1)$. Lorsque T diminue, la température T diminue aussi le facteur devant l'intégrale. Pour que l'égalité reste vraie, $\varphi(T)$ doit augmenter, donc $\mu(T)$ augmente.

4. Le potentiel chimique μ doit être strictement inférieur à la plus basse énergie d'un état, ici prise comme zéro (état fondamental). Cela implique $\mu < 0$. À la limite, μ tend vers 0 par en dessous. En posant $\mu = 0$, on obtient la température critique T_{BE} :

$$\rho = \left(\frac{2mk_B T_{BE}}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx. \quad (4.423)$$

En utilisant l'approximation (3.159), on a donc :

$$T_{BE} = \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B} \left(\frac{\rho}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad (4.424)$$

où $\zeta(3/2) \simeq 2.612$ est la fonction zêta de Riemann.

5. Pour $T \leq T_{BE}$, en posant $\mu = 0$, l'équation (3.158) ne peut plus être satisfaite, car l'intégrale ne peut pas augmenter plus. Le problème vient du fait que l'on n'a pas pris en compte la population de l'état fondamental, qui peut contenir une fraction macroscopique des particules (condensat).

6. En isolant la population du niveau fondamental N_0 , on a :

$$N = N_0 + \int_0^{+\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon = N_0 + \left(\frac{2m}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} V \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon, \quad (4.425)$$

avec $\mu = 0$. La fraction condensée est donc

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_{BE}} \right)^{3/2}. \quad (4.426)$$

La fraction condensée apparaît uniquement pour $T < T_{BE}$, et croît quand la température diminue.

7. Pour $T \leq T_{BE}$, le grand potentiel J s'écrit

$$\frac{J}{k_B T} = -\ln(1 + N_0) + \left(\frac{2m}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} V \int_0^{+\infty} \varepsilon^{1/2} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (4.427)$$

Dans la limite thermodynamique, N_0 est très grand, donc $\ln(1 + N_0) \simeq \ln N_0$, ce terme devient négligeable à l'échelle intensive. On calcule alors la pression $P = -\frac{J}{V}$:

$$P = \frac{k_B T}{\lambda_{\text{th}}^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx, \quad (4.428)$$

où $\lambda_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ est la longueur thermique de de Broglie. D'après (3.162), on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \simeq 1.341 \times \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad (4.429)$$

montrant que la pression est indépendante de N_0 , dépend uniquement de T et décroît avec la température.

4.16 Chaîne de désintégration

Considérons une chaîne de désintégration formée de n isotopes (N_k) , avec $N_k(t)$ le nombre de noyaux de type k à l'instant t .

4.16.1 Modélisation physique

1. Le taux de variation de N_1 provient uniquement de sa désintégration, donc :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1. \quad (4.430)$$

Pour $k \geq 2$, la variation de N_k est la somme des gains par désintégration du noyau précédent et des pertes par désintégration propre à N_k :

$$\frac{dN_k}{dt} = -\lambda_k N_k + \lambda_{k-1} N_{k-1}. \quad (4.431)$$

2. Pour $n = 2$, le système est :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1, \quad (4.432)$$

avec conditions initiales $N_1(0) = N_0$, $N_2(0) = 0$.

On résout la première équation :

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}. \quad (4.433)$$

On remplace dans la seconde et on résout par variation des constantes :

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}. \quad (4.434)$$

La solution est :

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \quad (4.435)$$

(en supposant $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Qualitativement, $N_1(t)$ décroît exponentiellement, $N_2(t)$ augmente initialement puis décroît lorsque N_1 s'épuise.

3. Sommons les deux équations :

$$\frac{d}{dt}(N_1 + N_2) = -\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 = -\lambda_2 N_2, \quad (4.436)$$

cependant, comme N_2 ne se désintègre plus (si stable $\lambda_2 = 0$), la somme est constante. Ici, si $\lambda_2 = 0$ (dernier noyau stable), on a conservation :

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0. \quad (4.437)$$

4. Pour maximiser $N_2(t)$, on dérive :

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 \implies -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = 0. \quad (4.438)$$

On trouve :

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right), \quad (4.439)$$

ce qui est positif si $\lambda_2 > \lambda_1$.

4.16.2 Étude mathématique

1. La matrice A est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux $-\lambda_k$ distincts. Ainsi, A est diagonalisable sur \mathbb{R} avec valeurs propres $\{-\lambda_1, \dots, -\lambda_{n-1}, 0\}$ puisque $\lambda_n = 0$.
2. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système d'EDO linéaire à coefficients constants admet une solution unique globale sur \mathbb{R}_+ pour toute condition initiale.
3. Soit $E(t) = \|\mathbf{N}(t)\|^2 = \sum_{k=1}^n N_k(t)^2$. Comme $\mathbf{N}(t)$ est dérivable (solution d'un système différentiel linéaire), $E(t)$ est aussi dérivable.

(a) On a :

$$\langle x | Ax \rangle = x^\top Ax = (x^\top A)^\top = \frac{1}{2} x^\top (A + A^\top) x = x^\top S x = \langle x | Sx \rangle,$$

où $S = \frac{A+A^\top}{2}$ est la partie symétrique de A . Cela est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) La matrice S est tridiagonale symétrique, avec :

$$S_{kk} = -\lambda_k, \quad S_{k,k+1} = S_{k+1,k} = \frac{\lambda_k}{2}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, n-1.$$

Alors, pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a :

$$\begin{aligned} x^\top S x &= \sum_{k=1}^n S_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} S_{k,k+1} x_k x_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (-\lambda_k) x_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k x_{k+1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x_k - x_{k+1})^2 - \frac{\lambda_1}{2} x_1^2. \end{aligned}$$

Comme les $\lambda_k \geq 0$, ce produit scalaire est toujours ≤ 0 .

(c) En appliquant ceci à $\mathbf{N}(t)$, on obtient :

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \|\mathbf{N}(t)\|^2 = 2 \langle \mathbf{N}(t) | \dot{\mathbf{N}}(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{N}(t) | A \mathbf{N}(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{N}(t) | S \mathbf{N}(t) \rangle \leq 0.$$

Donc $E(t)$ est décroissante, ce qui signifie que le système est stable.

4. Le système dynamique est donné par :

$$\dot{\mathbf{N}}(t) = A \mathbf{N}(t),$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de désintégration en chaîne avec $\lambda_k \geq \alpha > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et $\lambda_n = 0$.

La matrice A est donc diagonalisable ou triangulisable réelle, et possède une valeur propre nulle (associée à l'état stationnaire \mathbf{N}_∞) et toutes les autres ont une partie réelle strictement négative inférieure à $-\alpha$.

On considère une norme matricielle (équivalente à la norme usuelle), adaptée au spectre de A , telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|e^{At} x\| \leq C e^{\mu t} \|x\|, \quad \text{avec } \mu = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(A), \lambda \neq 0\}.$$

Par hypothèse, $\mu \leq -\alpha < 0$.

On projette la solution $\mathbf{N}(t)$ sur le sous-espace orthogonal au noyau de A , c'est-à-dire :

$$\mathbf{N}(t) - \mathbf{N}_\infty = e^{At}(\mathbf{N}_0 - \mathbf{N}_\infty),$$

car $\mathbf{N}_\infty \in \ker A$, donc $A\mathbf{N}_\infty = 0$.

On en déduit :

$$\|\mathbf{N}(t) - \mathbf{N}_\infty\| \leq Ce^{-\alpha t} \|\mathbf{N}_0 - \mathbf{N}_\infty\| \leq Ce^{-\alpha t} \|\mathbf{N}_0\|.$$

Ce qui conclut la preuve.

5. En sommant toutes les équations, on trouve :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n N_k(t) = 0, \quad (4.440)$$

donc la quantité totale de matière est conservée :

$$\sum_{k=1}^n N_k(t) = \sum_{k=1}^n N_k(0). \quad (4.441)$$

4.16.3 Modèle non linéaire

1. Le système non linéaire satisfait les hypothèses locales du théorème de Cauchy-Lipschitz (coefficient $\lambda_k(N_k)$ lipschitzien en N_k pour $N_k \geq 0$), donc il existe une solution locale unique sur \mathbb{R}_+ .
2. Positivité : Pour des conditions initiales positives, les équations impliquent que $N_k(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, car les termes de perte et gain sont toujours positifs ou nuls.
3. Les points fixes \mathbf{N}^* sont solutions de :

$$0 = -\frac{\lambda_1^0}{1 + a_1 N_1^*} N_1^*, \quad (4.442)$$

et pour $k \geq 2$,

$$0 = -\frac{\lambda_k^0}{1 + a_k N_k^*} N_k^* + \frac{\lambda_{k-1}^0}{1 + a_{k-1} N_{k-1}^*} N_{k-1}^*. \quad (4.443)$$

On obtient la seule solution physiquement acceptable :

$$\mathbf{N}^* = (0, \dots, 0, N_\infty), \quad (4.444)$$

avec $N_\infty = \sum_k N_k(0)$.

4. La matrice jacobienne $J(\mathbf{N})$ s'écrit par dérivation des termes, en particulier :

$$J_{kk}(\mathbf{N}) = -\frac{\lambda_k^0(1 + a_k N_k) - \lambda_k^0 a_k N_k}{(1 + a_k N_k)^2} = -\frac{\lambda_k^0}{(1 + a_k N_k)^2}. \quad (4.445)$$

Au point nul $\mathbf{0}$, on a :

$$J(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\lambda_1^0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1^0 & -\lambda_2^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n-1}^0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.446)$$

5. La stabilité locale de $\mathbf{0}$ dépend des valeurs propres de $J(\mathbf{0})$, similaires au modèle linéaire. La saturation ralentit la désintégration effective à haute population.
6. L'effet des coefficients a_k est d'introduire une rétroaction négative qui limite la décroissance à haute population, modifiant la dynamique par rapport au modèle linéaire classique.