

Exercices de Physique Fondamentale

(niveau L3-M1)

Ryan Artero
Adresse eMail : ryanartero2005@gmail.com

Version du 12 juin 2025

Table des matières

Résumé	6
1 Introduction	8
2 Informations	10
2.1 Notations	10
2.2 Constantes fondamentales	11
2.3 Formulaire	11
2.3.1 Équations de Maxwell	11
2.3.2 Relativité restreinte	11
2.3.3 Mécanique quantique	12
2.3.4 Physique statistique	12
2.3.5 Mécanique analytique	12
2.3.6 Physique subatomique	12
2.3.7 Opérateurs en coordonnées curvilignes	13
2.3.8 Identités trigonométriques	13
2.4 Légende des notations thématiques	14
2.5 Parcours suggéré en fonction du niveau	14
3 Exercices	16
3.1 Problème à deux corps et quantification de l'atome de Bohr	16
3.1.1 Centre de masse	17
3.1.2 Intégration des équations du mouvement	17
3.1.3 Quantification de Bohr	17
3.2 Section efficace de Rutherford	18
3.2.1 Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome	18
3.2.2 Section efficace de Rutherford	18
3.3 Effet Cherenkov	19
3.4 Machine à champ magnétique pulsé	20
3.5 Métrique sur une sphère	21
3.6 Rayonnement du Corps Noir	22
3.6.1 Nombre de modes excités par unité de fréquences	22
3.6.2 Catastrophe Ultraviolette	22

3.6.3	Loi de Planck	22
3.6.4	Flux énergétique émis par un corps noir	23
3.6.5	Loi de Stefan	23
3.6.6	Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique	24
3.7	Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule	25
3.7.1	Formule de Hadamard	25
3.7.2	Lien avec le potentiel gravitationnel	26
3.7.3	La sphère ?	26
3.8	Mouvement relativiste d'une particule chargée Δ	27
3.8.1	Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	27
3.8.2	Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane	27
3.8.3	Théorie des Champs	28
3.8.4	Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant	29
3.8.5	Physique des collisionneurs relativistes	29
3.9	Hydrodynamique relativiste et collisions de noyaux lourds Δ	31
3.9.1	Hydrodynamique classique	31
3.9.2	Introduction à l'hydrodynamique relativiste	31
3.9.3	Hydrodynamique relativiste	32
3.9.4	Application aux collisions de noyaux lourds	32
3.10	Atome d'hydrogène et équation radiale	34
3.10.1	Séparation des variables et équation radiale	34
3.10.2	État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales	35
3.11	Vers un formalisme relativiste Δ	36
3.12	Potentiel de Pöschl-Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$ Δ	38
3.13	Instabilité électrodynamique de l'atome classique	39
3.13.1	Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad}	39
3.13.2	Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad}	39
4	Correction des exercices	42
4.1	Problème à deux corps	42
4.1.1	Centre de masse	42
4.1.2	Intégration des équations du mouvement	42
4.1.3	Quantification de Bohr	44
4.2	Section efficace de Rutherford	46
4.2.1	Déviations d'une particule chargée par un noyau d'atome	46
4.2.2	Section efficace de Rutherford	46
4.3	Effet Cherenkov	47
4.4	Machine à champ magnétique pulsé	49
4.4.1	Champ magnétique de la bobine	49
4.4.2	Champ électrique induit dans le tissu biologique	49
4.4.3	Effet sur les neurones moteurs	50

4.4.4	Effet du courant oscillant	50
4.4.5	Effet du champ magnétique pulsé sur les muscles	51
4.5	Métrie d'une sphère	52
4.6	Rayonnement du Corps Noir	54
4.6.1	Nombre de modes excités par unité de fréquences	54
4.6.2	Catastrophe Ultraviolette	54
4.6.3	Loi de Planck	55
4.6.4	Flux énergétique émis par un corps noir	55
4.6.5	Loi de Stefan	57
4.6.6	Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique	58
4.7	Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule	60
4.7.1	Formule de Hadamard	60
4.7.2	Lien avec le potentiel gravitationnel	62
4.7.3	La sphère ?	62
4.8	Mouvement relativiste d'une particule chargée Δ	64
4.9	Hydrodynamique relativiste et collisions de noyaux lourds Δ	65
4.10	Atome d'hydrogène et équation radiale	66
4.10.1	Séparation des variables et équation radiale	66
4.10.2	État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales	68
4.11	Vers un formalisme relativiste Δ	70
4.12	Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$ Δ	71
4.13	Instabilité électrodynamique de l'atome classique	72
4.13.1	Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad}	72
4.13.2	Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad}	72

Résumé

Ce document rassemble une sélection d'exercices originaux de physique fondamentale, construits dans une perspective transversale et progressive, allant de la Licence 3 au Master 1. Chaque exercice est accompagné d'un corrigé détaillé (lorsqu'il est disponible), et se place dans un contexte historique, théorique ou applicatif rigoureux. Les thématiques abordées incluent la relativité restreinte, la mécanique quantique, la physique statistique, l'électrodynamique, ainsi que des incursions en physique mathématique. Une classification par niveau est proposée pour guider le lecteur dans sa progression.

Chapitre 1

Introduction

Ce document est une compilation d'exercices de Physique Fondamentale que j'ai conçus avec passion, dans l'esprit d'un cours de fin de Licence 3 / Master 1, et plus. L'objectif est double : proposer des problèmes rigoureux, inspirants, faisant appel à la beauté formelle et conceptuelle de la physique, et offrir une base solide pour les étudiants souhaitant approfondir les grandes théories classiques et modernes. Je souhaite partager ma passion pour la physique qui sort du cadre imposé en cours, utilisant des notions transverses aux différents domaines de la physique.

Chaque exercice mobilise des notions précises (indiquées entre parenthèses, comme **(RR)** pour Relativité Restreinte, **(MQ)** pour Mécanique Quantique, etc.), et est accompagné, progressivement, d'une correction détaillée, qui est accessible en cliquant sur la parenthèse "(Correction)". Les exercices sont notés avec des étoiles (c.f. 2.1), vous êtes libre de faire l'exercice qui vous intrigue le plus.

Étant en première année de Master 1 de Physique Fondamentale à la Sorbonne, (campus Pierre et Marie Curie), je souhaite que cette fiche soit vivante : les corrections seront complétées régulièrement. Enfin, dans la partie correction, en cliquant sur les titres d'exercice (que ce soit en entête ou au début de la correction), vous pouvez retourner sur l'exercice en question.

J'espère qu'en lisant et en travaillant ces exercices, vous y trouverez autant de plaisir que j'en ai eu à les écrire.

Chapitre 2

Informations

2.1 Notations

1. Les quantités vectorielles sont notées en gras, sauf l'opérateur ∇ , qui ne sera jamais noté en gras. Les quantités 4-vectorielles (en relativité) seront noté avec une lettre grecque soit en exposant si contravariant, et en indice si covariant.
Exemple : \mathbf{v} pour la vitesse, ∇p pour le gradient de pression (qui est vectoriel!) et x^μ pour la position dans l'espace temps en contravariant. A contrario, en Mécanique Quantique, on notera les vecteurs avec des ket et les opérateurs en gras. **Exemple :** $|\psi\rangle$ pour un vecteur ψ et \mathbf{H} pour l'Hamiltonien.
2. La notation d désigne l'opérateur différentiel.
3. L'écriture ∂_u signifie implicitement $\frac{\partial}{\partial u}$ si u est une variable, et $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ en relativité.
4. $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ en coordonnées cartésiennes, est un opérateur qui définit proprement le gradient, divergence et rotationnel. En effet, ∇f désigne le gradient de f , $\nabla \cdot \mathbf{F}$ désigne la divergence de \mathbf{F} , et $\nabla \times \mathbf{F}$ désigne le rotationnel de \mathbf{F} . L'opérateur $\partial_\mu \partial^\mu = \square$ désigne l'Alembertien, invariant sous transformations de Lorentz.
5. La notation \dot{x} désigne une dérivée par rapport au temps t c'est à dire $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Dans un exercice de relativité, la notation privilégiée sera $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, τ le temps propre et $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.
6. La notation f' désigne la dérivée par rapport à la variable x soit, $f' = \frac{df}{dx}$.
7. La notation $[A]$ désigne l'unité de la grandeur A .
8. La notation $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}$ désigne respectivement les ensembles des nombres réels, complexes et naturels.
9. La métrique de la relativité restreinte utilisée sera $g_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$. Par ailleurs, on rappelle que $a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu$.
10. Les étoiles évaluent le niveau de difficulté des exercices. Cela va de 1 : ★ à 5 étoiles : ★★★★★. Les critères d'évaluation de difficulté sont liés à la longueur de l'exercice, sa difficulté technique et mathématique et du niveau nécessaire (L3, M1, M2) pour être à l'aise avec les notions utilisées.
11. La croix † signifie que l'exercice est soit tiré, soit inspiré d'un exercice déjà existant. Une note de bas de page est également présente dans ce cas.
12. La notation \triangle indique que la correction de l'exercice est en cours de rédaction.

2.2 Constantes fondamentales

Constante	Valeur exacte	Unités
Constante de Planck	$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$	J s
Constante de Dirac	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571817 \times 10^{-34}$	J s
Vitesse de la lumière	$c = 299792458$	m s ⁻¹
Charge élémentaire	$e = 1.602176634 \times 10^{-19}$	C
Masse de l'électron	$m_e = 9.1093837015 \times 10^{-31}$	kg
Masse du proton	$m_p = 1.67262192369 \times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	$m_n = 1.675 \times 10^{-27}$	kg
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$	F m ⁻¹
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$	N A ⁻²
Constante gravitationnelle	$G = 6.67430 \times 10^{-11}$	m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$	J K ⁻¹
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6.02214076 \times 10^{23}$	mol ⁻¹
Constante des gaz parfaits	$R = 8.314462618$	J mol ⁻¹ K ⁻¹
Température de référence (0°C)	$T_0 = 273.15$	K

TABLE 2.1 – Constantes fondamentales de la physique avec leurs valeurs exactes.

2.3 Formulaire

2.3.1 Équations de Maxwell

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{(Loi de Gauss)} \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Absence de monopôles magnétiques)} \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Loi de Faraday)} \\
 \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && \text{(Loi d'Ampère-Maxwell)} \\
 \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{B} \text{ et } -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \varphi = \mathbf{E} && \text{(Lien potentiel vecteur et champ EM)} \\
 P &= \frac{q^2 a^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} && \text{(Puissance de Larmor)}
 \end{aligned}$$

2.3.2 Relativité restreinte

$$\begin{aligned}
 E &= \gamma m c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} && \text{(Énergie relativiste)} \\
 \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} && \text{(Facteur de Lorentz)} \\
 x' &= \gamma(x - vt) && \text{(Transformation de Lorentz)} \\
 t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) && \text{(Transformation du temps)} \\
 \beta &= \frac{v}{c} \\
 \mathbf{p} &= \gamma m \mathbf{v} && \text{(Vecteur impulsion relativiste)} \\
 \mathbf{p} &= \hbar \mathbf{k} && \text{(Vecteur impulsion du photon)}
 \end{aligned}$$

2.3.3 Mécanique quantique

$\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$	(Opérateur quantité de mouvement)
$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \psi\rangle = \mathbf{H} \psi\rangle$	(Équation de Schrödinger)
$[\mathbf{X}_i, \mathbf{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}$	(Transformations Canoniques)
$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger)$ et $\mathbf{P} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a})$	(Opérateur Annihilation et création)
$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{1} = \mathbf{Id}$	(Commutateur)
$\mathbf{H} = \hbar\omega\left(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\right)$	(Hamiltonien oscillateur harmonique)
$\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ et $\mathbf{N} n\rangle = n n\rangle, n \in \mathbb{N}$	(Opérateur N)
$\mathbf{L}_i = \varepsilon_{ijk}\mathbf{X}_j\mathbf{P}_k$	(Moment cinétique en notation Einstein)
$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i \times \varepsilon_{ijk}\mathbf{J}_k$	(Algèbre du moment cinétique)

2.3.4 Physique statistique

En ensemble canonique,

$\beta = \frac{1}{k_B T}$	(Énergie de température)
$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$	(Fonction de partition)
$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z} = -\partial_\beta \ln Z$	(Énergie moyenne)

2.3.5 Mécanique analytique

$\mathcal{L} = T - V$	(Lagrangien)
$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$	(Équations de Lagrange)

2.3.6 Physique subatomique

$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$	(Angle solide infinitésimal)
---	------------------------------

Où $\Omega \in [0, 4\pi]$ car, par définition $\Omega = \frac{S}{R^2}$ où $S = 4\pi R^2$ surface d'une sphère de rayon R .

2.3.7 Opérateurs en coordonnées curvilignes

Coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

2.3.8 Identités trigonométriques

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1, \quad 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

Formules d'addition

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b),$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b).$$

Formules de duplication

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta),$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta).$$

Ces formules sont très utiles pour les changements de variables en intégration.

Expression de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Ce changement de variable est souvent utilisé pour simplifier les intégrales trigonométriques. On a également :

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

2.4 Légende des notations thématiques

- **(RR)** : Relativité Restreinte
- **(MQ)** : Mécanique Quantique
- **(EM)** : Électromagnétisme
- **(MA)** : Mécanique Analytique
- **(PS)** : Physique Statistique
- **(FS)** : Physique Subatomique

2.5 Parcours suggéré en fonction du niveau

Pour aider les lecteurs à naviguer dans cette collection dense d'exercices, voici quelques suggestions de parcours selon votre niveau et vos objectifs. Bien entendu, chaque étudiant reste libre d'explorer les problèmes qui l'inspirent.

Niveau	Exercices recommandés
Début Licence 3	3.1 – Problème à deux corps 3.2 – Section efficace de Rutherford 3.4 – Machine à champ magnétique pulsé 3.13 - Instabilité électrodynamique de l'atome classique
Fin de Licence 3 / Début Master 1	3.3 – Effet Cherenkov 3.5 – Métrique sur une sphère 3.6 – Rayonnement du corps noir 3.10 – Atome d'hydrogène et équation radiale 3.12 – Potentiel de Pöschl-Teller
Master 1 avancé	3.7 – Minimisation du potentiel gravitationnel 3.8 – Particule chargée relativiste 3.9 – Hydrodynamique relativiste 3.11 – Vers un formalisme relativiste

Chapitre 3

Exercices

Ce recueil d'exercices a été conçu avec l'ambition de dépasser la simple pratique mécanique des méthodes. Chaque énoncé vise à faire émerger une certaine forme d'élégance mathématique ou de profondeur physique – un regard attentif y découvrira, derrière les équations et les techniques, une cohérence subtile, parfois même une beauté formelle. Certains exercices sont exigeants, tant par leur longueur que par leur structure : ils s'inspirent parfois de sujets de concours ou de situations physiques réalistes, et peuvent nécessiter plusieurs heures de réflexion. Leur objectif n'est pas seulement de renforcer les compétences techniques, mais de faire ressentir, à travers la résolution progressive, l'unité profonde entre la rigueur mathématique et la réalité physique qu'elle décrit. Ce chapitre est évolutif : de nouveaux problèmes y seront ajoutés régulièrement, dans le même esprit d'élégance, de clarté, et de profondeur.

3.1 Problème à deux corps et quantification de l'atome de Bohr[†] (MA)



¹ (Correction)

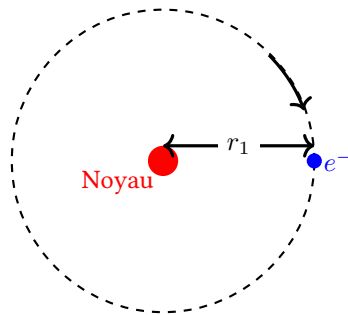


FIGURE 3.1 – Schéma de l'atome de Bohr.

Considérons un système de deux particules de masses m_1 et m_2 interagissant via un potentiel central $V(r) = -\frac{C}{r} = -\frac{\vartheta^2}{r}$, où r est la distance entre les deux particules et C est une constante réelle. Ici on utilise le potentiel coulombien, mais on pourrait très bien utiliser un potentiel gravitationnel. On essaiera ici d'étudier en détail les états liés de l'atome d'hydrogène d'après l'ancienne théorie des quanta et d'obtenir en particulier l'énergie associée à une trajectoire donnée de l'électron de masse m_1 autour du noyau de masse m_2 .

1. [†] Inspiré de Claude Aslangul, *Mécanique Quantique 1*, Chapitre 7.

2. On notera $\vartheta^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

3.1.1 Centre de masse

On désigne $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ les rayons vecteurs de l'électron et du noyaux par rapport à un repère quelconque, et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ les vitesses correspondantes.

1. Écrire le lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
2. On introduit \mathbf{R} le rayon vecteur du centre de masse et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Montrer que le Lagrangien peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathcal{L}_G(\mathbf{V}) + \mathcal{L}_r(\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

3. Expliquer pourquoi le moment cinétique total du centre de masse G, \mathbf{J} , est une constante du mouvement. En tirer une conclusion sur la trajectoire.

Dans la suite, on examine exclusivement le mouvement interne par \mathcal{L}_r en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan perpendiculaire à \mathbf{J} .

3.1.2 Intégration des équations du mouvement

1. Écrire l'hamiltonien \mathcal{H} du mouvement interne et écrire les équation d'Hamilton. Retrouver la conservation du mouvement cinétique et interpréter l'équation où ne figurent que $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$.
2. Déterminer la relation entre r, θ , c'est à dire, de trouver la trajectoire. Pour cela, éliminer le temps des équations obtenus précédemment en posant $u = \frac{1}{r}$, et montrer que,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = K, \quad K = \frac{\mu v^2}{J^2}$$

3. En déduire finalement que la trajectoire est une conique, dont l'équation peut toujours être mise sous la forme,

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

Donner l'expression de p paramètre de la conique et de ε , l'excentricité. Vérifier que la valeur de ε par rapport à 1 conditionne la nature de l'état correspondant (lié ou non lié).

3.1.3 Quantification de Bohr

Dans cette partie, ne considérant que les états liés ($E < 0$), on applique les règles de Bohr afin de faire le tri parmi toutes les trajectoires classiquement envisageables. Ces règles portent sur les variables d'actions J_θ, J_r et s'écrivent,

$$J_\theta := \oint p_\theta d\theta = n_\theta h$$

$$J_r := \oint p_r dr = n_r h$$

$$n_\theta, n_r \in \mathbb{Z}$$

1. Trouver les valeurs possibles du moment cinétique J en conséquence de la quantification de J_θ . Préciser les valeurs possible de l'entier n_θ correspondant.
2. Quantifier J_r et en déduire la relation entre ε et les entiers n_r, n_θ ³. On donne,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

3. En déduire que l'énergie E est quantifiée, avec $n \in \mathbb{N}^*$ dépendant de n_θ, n_r et que,

$$E_n = -\frac{\mu v^4}{2n^2 \hbar^2}$$

3. A première vu, on pourrait dire que $J_r = 0$, il faudra forcer une intégration par partie.

3.2 Section efficace de Rutherford[†] (FS) ★★

⁴ (Correction)

On se place dans le même cas que l'exercice précédent avec deux particules, dont une est immobile, interagissant avec un potentiel de la forme $V(r) = \frac{C}{r}$. En effet, ici $C = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}$, $Q = Ze$, $q = 2e$. On va utiliser quelques résultats de l'exercice précédent. Il est donc préférable de l'avoir fait en amont.

3.2.1 Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome

On se place dans le repère polaire (r, φ) perpendiculairement au moment cinétique, puisque le mouvement est plan. La particule α arrive avec une vitesse initiale \mathbf{v}_0 . On se place dans le cas $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \pi$.

1. Déterminer la composante non nulle de \mathbf{J} en fonction de r, φ . Déterminer cette même composante en fonction de b, v_0 , b paramètre d'impact.
2. Écrire l'équation du mouvement. Décomposer $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ en un vecteur parallèlement à l'axe polaire et un autre perpendiculaire à l'axe polaire. En déduire que,

$$m\dot{v}_\perp = \frac{C}{r^2} \sin \varphi$$

3. On veut faire apparaître l'angle de déviation θ . En intégrant l'équation, en déduire que,

$$v_0 \sin \theta = \frac{C}{mbv_0} (\cos \theta + 1)$$

4. En utilisant quelques formules trigonométriques, en déduire que,

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{C}{2E_0 b}$$

Où $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$.

3.2.2 Section efficace de Rutherford

1. Rappeler la formule de la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.
2. En déduire que,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{C^2}{16E_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

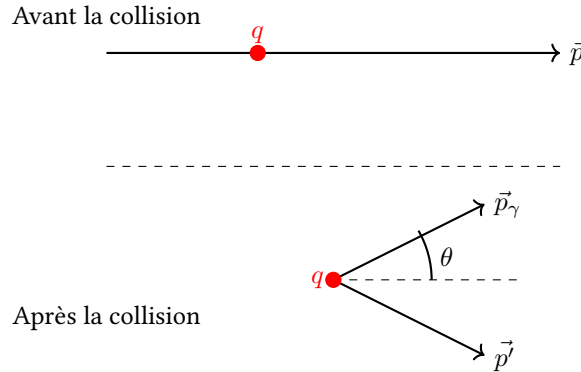
3. En déduire ce modèle n'est pas valable pour les petits angles de déviation.
4. Expliquer pourquoi cette expérience démontre l'existence des noyaux d'atome.

⁴ [†] Inspiré de Claude Aslangul, *Mécanique Quantique 1*, Chapitre 3.

3.3 Effet Cherenkov[†] (RR, FS) ★★★

⁵ (Correction)

L'effet Cherenkov se produit lorsqu'une particule chargée traverse un milieu diélectrique à une vitesse v supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu c/n , où n est l'indice de réfraction du milieu.



L'impulsion de la particule chargée est \mathbf{p} avant la collision, et \mathbf{p}_γ l'impulsion du photon après collision, et \mathbf{p}' l'impulsion de la particule chargée après la collision. L'angle θ est l'angle formé entre \mathbf{p} et \mathbf{p}_γ . On rappelle que $\lambda = \frac{c}{n\nu}$.

1. Exprimer p_γ en fonction de h, ν, c, n . En déduire la relation entre p_γ, E_γ dans un milieu d'indice n .
2. Pour l'événement élémentaire, écrire la conservation de l'impulsion.
3. En utilisant la question précédente, donner l'expression de \mathbf{p}'^2 en fonction des modules des impulsions p, p_γ et de l'angle θ .
4. Écrire la conservation de l'énergie.
5. En déduire que,

$$p'^2 = p^2 - 2\frac{E}{c^2}h\nu + \frac{p_\gamma^2}{n^2}$$

Où E désigne l'énergie initiale de l'électron.

6. Obtenir $\cos \theta$ en fonction de $p, p_\gamma, E, h, n, c, \nu$.
7. Montrer ainsi que,

$$\cos \theta = \frac{c}{nv} \left[1 + \frac{h\nu}{2E} (n^2 - 1) \right]$$

8. A quelle condition l'effet Cherenkov se produit-il ?
9. Dans quel intervalle de fréquence les photons sont-ils émis ?
10. Dans quelle direction les photons les plus énergétiques sont-ils émis ?
11. Tous les photons sont émis dans un cône ; quel est le demi-angle au sommet de ce cône ϕ ? Calculer ϕ approximativement pour $n = \frac{4}{3}$ et $v = \frac{4}{5}c$.
12. Comparer l'énergie cinétique minimale de la particule pour que l'effet se produise suivant qu'il s'agit d'un électron ou un proton, $n = \frac{4}{3}$.

⁵ [†] Inspiré de Claude Aslangul, *Mécanique Quantique 1*, Chapitre 5.

3.4 Machine à champ magnétique pulsé (EM) ★★

(Correction)

La machine de stimulation magnétique est une technologie non invasive utilisée en kinésithérapie et en rééducation. Son principe repose sur la génération de champs magnétiques pulsés à l'aide d'une bobine circulaire. Concrètement, la machine envoie des impulsions de courant à travers la bobine, ce qui crée un champ magnétique variable dans le temps. Selon la loi de Faraday, cette variation induit automatiquement un champ électrique dans les tissus environnants.

Ce champ électrique induit agit directement sur les membranes cellulaires des muscles en activant les canaux ioniques. En conséquence, un potentiel d'action se déclenche, entraînant une contraction musculaire. Ce mécanisme permet non seulement de stimuler des muscles affaiblis ou atrophiés, mais aussi d'améliorer la circulation sanguine et de réduire la douleur. De plus, l'absence de contact direct avec la peau rend le traitement confortable et sécuritaire pour le patient.

La machine de stimulation magnétique est notamment utilisée pour :

Favoriser la rééducation musculaire après une blessure ou une chirurgie. Soulager des douleurs chroniques associées à des troubles musculosquelettiques. Améliorer le tonus musculaire et prévenir l'atrophie. Stimuler la circulation sanguine et lymphatique pour accélérer la récupération. En résumé, grâce à une approche basée sur des principes physiques fondamentaux d'induction électromagnétique, cette technologie permet de traiter efficacement diverses affections musculaires et nerveuses, offrant une solution complémentaire aux thérapies conventionnelles en rééducation.

On considère une bobine circulaire de rayon R parcourue par un courant variable

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t),$$

où I_0 est l'amplitude du courant, τ le temps caractéristique d'amortissement, et ω la fréquence d'oscillation. L'axe de la bobine est supposé coïncider avec l'axe z . La bobine est considérée comme mince et peut être modélisée par une spire unique.

1. Champ magnétique de la bobine

- En supposant que la bobine se comporte comme un dipôle magnétique, exprimer le champ magnétique \mathbf{B} sur l'axe central (à une distance z du centre) en fonction de $I(t)$, R , z et des constantes fondamentales.
- Montrer que pour $z \gg R$, le champ s'approche à celui d'un dipôle et donner son expression asymptotique.

2. Champ électrique induit dans le tissu biologique

On considère un tissu conducteur modélisé par un disque mince de rayon a , placé sous la bobine.

- À partir de la loi locale de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

exprimer le champ électrique induit \mathbf{E} en fonction de $\frac{dB}{dt}$.

- En supposant une symétrie cylindrique (champ purement azimutal), déduire l'expression du champ électrique induit $E_\theta(r, t)$ dans le plan du disque, en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$.

3. Effet sur les neurones moteurs

Un neurone moteur est supposé être activé lorsque la tension induite dépasse un seuil V_{seuil} .

- Exprimer V en fonction des paramètres du problème.
- Déterminer une condition sur I_0 , τ , ω , et les paramètres géométriques pour assurer l'activation du neurone.
- En utilisant des valeurs numériques réalistes ($R = 5 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ cm}$, $I_0 = 100 \text{ A}$, $\tau = 1 \text{ ms}$, $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$, et $V_{\text{seuil}} = 10 \text{ mV}$), vérifier si l'activation du neurone est possible.

4. Effet du champ magnétique pulsé sur les muscles

Expliquez pourquoi un champ magnétique pulsé, en induisant un champ électrique dans les tissus, peut provoquer une contraction musculaire. Décrivez brièvement le mécanisme physiologique (activation des canaux ioniques, génération d'un potentiel d'action, contraction musculaire).

3.5 Métrique sur une sphère (MA) ★★★

(Correction)

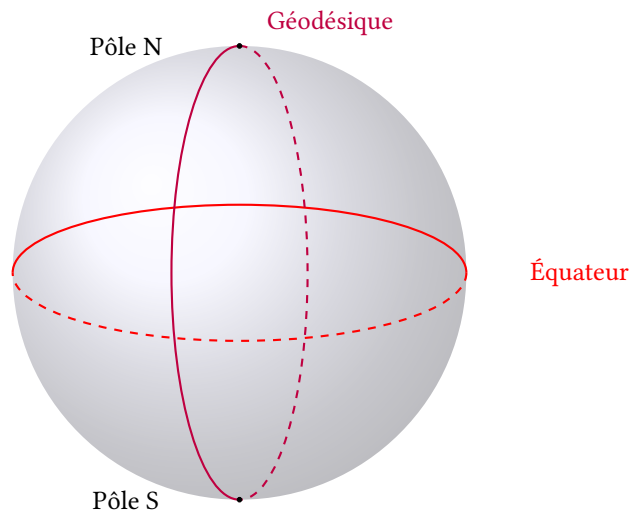


FIGURE 3.2 – Schéma d'une sphère et de ses géodésiques.

Notre but va être de déterminer la métrique de la sphère et ses géodésiques. Cela nous permettra de comprendre quelles sont les meilleures trajectoires à suivre pour un avion. On rappelle qu'en coordonnées sphériques, pour un rayon constant R ,

$$x = R \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = R \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = R \cos \theta$$

1. Calculer l'élément de longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ en fonction de R , θ et φ .
2. Grâce à l'action $S = \int ds = \int \mathcal{L} d\lambda$, λ un paramètre bien choisi et au principe variationnel, déterminer les équations des géodésiques.
3. Résoudre les équations en utilisant des symétries. On pourra utiliser que,

$$\int \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \alpha}}} \text{ poser } u = \cot \alpha$$

$$\int -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + C$$

Démontrer que les géodésiques sont de la forme suivante,

$$(x, y, z) \in S^2, ax + by + cz = 0$$

C'est à dire que les géodésiques sont des intersections entre des plans passant par l'origine et la sphère, ou dit encore autrement des arcs de cercles.

3.6 Rayonnement du Corps Noir (PS) ★★★★★

(Correction)

On cherche à avoir la densité spectrale d'énergie, c'est à dire la fonction,

$$u(\nu, T) = \frac{d^2 W}{d\nu d\mathcal{V}} = \frac{dN}{d\nu} \frac{\langle W \rangle}{\mathcal{V}}, \quad (2.6.1)$$

Avec W l'énergie, et $\langle W \rangle$ l'énergie moyenne. On va également se placer dans un cadre historique, sans utiliser la mécanique quantique qui a été découverte, en partie grâce aux résultats que l'on va démontrer.

3.6.1 Nombre de modes excités par unité de fréquences

1. Soit un corps noir, représenté par une cavité cubique de côté L et de volume \mathcal{V} . Écrire l'équation de propagation du champ \mathbf{E} dans la cavité.
2. Calculer la solution de l'équation. Expliquer pourquoi le champ \mathbf{E} dépend de trois modes $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2$$

4. Par un comptage de cubes joints, de volume unitaire, empilés le long des axes n_x, n_y, n_z , on peut énumérer le nombre total N de modes excités. Chaque cube peut être repéré de la manière suivante : $\mathbf{r} = n_\mu \mathbf{e}^\mu$. Lorsque les cubes sont très nombreux, c'est à dire que L est très grand devant λ , il suffit de calculer le volume de d'une boule de rayon r . Or, la condition que les entiers soient strictement positif impose le fait de ne prendre que $1/8$ du volume total de la boule. Un facteur 2 est également à considérer dû aux deux plans de polarisations possibles pour le champ \mathbf{E} . Avec ces informations, en déduire que,

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \mathcal{V}$$

3.6.2 Catastrophe Ultraviolette

1. Expliquer pourquoi un ensemble associé à ce problème, *de calcul de u* est l'ensemble canonique.
2. Calculer l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique.
3. Donner la probabilité d'être dans l'état d'énergie W . En déduire la fonction de partition Z d'un gaz d'oscillateurs harmoniques.
4. Ainsi, démontrer que,

$$\langle W \rangle = k_B T$$

5. En déduire que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T$$

Et expliquer le titre de cette sous partie.

3.6.3 Loi de Planck

L'idée révolutionnaire est d'estimer que l'énergie des photons est quantifiée. Ainsi, on passe de l'idée de distribution d'énergie continue à discrète. Son idée vint du fait que l'énergie moyenne d'un oscillateur ne dépendait pas de la fréquence ν . Il suspecta alors une simple relation de proportionnalité entre W et ν :

$$W_n = nh\nu$$

Vint alors l'idée de quanta, que l'énergie n'est pas une donnée continue mais qu'elle se distribue comme paquet indivisible, nommé **quanta**⁶.

⁶. Albert Einstein utilisa lors de l'année 1905, *annus mirabilis*, l'idée de Planck pour expliquer l'effet photoélectrique, qui lui vaudra le prix Nobel en 1921.

1. Recalculer la fonction de partition Z .
2. En déduire que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

$$\text{Avec } \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

Et la catastrophe ultra violette fut résolu, ce résultat s'accordait parfaitement à l'expérience. Cette fonction devint ainsi intégrable, ce qui donnera ensuite la Loi de Stefan.

3.6.4 Flux énergétique émis par un corps noir

On considère une cavité en équilibre thermique, remplie d'un gaz de photons à température T . Le rayonnement est **isotrope** et caractérisé par une densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$, telle que :

$$u(\nu) d\nu = \text{énergie électromagnétique par unité de volume, entre les fréquences } \nu \text{ et } \nu + d\nu.$$

Soit I l'intensité totale (flux d'énergie par unité de surface perpendiculaire, toutes directions confondues) émise par le corps noir.

1. Rappeler l'expression du flux énergétique monochromatique émis dans une direction d'angle θ par rapport à la normale à une surface, en fonction de l'intensité spectrale directionnelle I_ν et du solide d'angle $d\Omega$.
2. Montrer que le flux énergétique total émis à la fréquence ν par unité de surface est donné par :

$$I(\nu) = \int_{\Omega_+} I_\nu \cos \theta d\Omega,$$

où Ω_+ désigne l'hémisphère sortant ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

3. En supposant que le rayonnement est isotrope, c'est-à-dire que I_ν est indépendant de la direction, montrer que :

$$I(\nu) = \pi I_\nu.$$

4. En intégrant sur toutes les fréquences, en déduire que l'intensité totale émise est :

$$I = \int_0^\infty \pi I_\nu d\nu.$$

5. Montrer que la densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$ est donnée par :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) d\Omega.$$

En supposant que le rayonnement est isotrope, en déduire :

$$u(\nu) = \frac{4\pi}{c} I_\nu.$$

6. En déduire que :

$$I = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu.$$

3.6.5 Loi de Stefan

La loi de Stefan affirme, que pour un corps noir,

$$I(T) = \sigma \times T^4$$

Avec σ la constante de Stefan. Nous allons le démontrer.

1. En utilisant les parties précédentes, montrer que,

$$I = \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

2. Vérifier la convergence de l'intégrale, et exprimer l'intégrale comme une série.
 3. Démontrer enfin que,

$$I(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} T^4$$

On reconnaîtra la loi de Stefan⁷,

$$I = \sigma T^4$$

3.6.6 Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique

En supposant que le Soleil est un corps noir, déterminer \dot{m} la perte de masse par unité de temps. A combien de kg.s cette perte de masse s'élève-t-elle ? Sachant que notre Soleil à 4.6×10^9 ans, combien de masses terrestres environ notre Soleil a-t-il déjà perdu ?

AN : $R = 6.96 \times 10^8$ m, $T = 5775$ K, $m = 1.98 \times 10^{30}$ kg, $m_T = 6 \times 10^{24}$ kg.

7. On a donc $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$ et franchement, on ne l'aurait pas deviné.

3.7 Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule (MA)



(Correction)

Cet exercice fait appel à des notions de calcul différentiel.

On s'intéresse au problème variationnel suivant : trouver parmi les domaines bornés et ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de volume fixé, celui qui minimise l'**interaction gravitationnelle interne** définie par la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}[\Omega] = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'$$

On note que cette expression est proportionnelle au potentiel d'auto-interaction gravitationnelle d'un corps de densité uniforme. En effet, pour $x \in \mathbb{R}^3$,

$$U(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho}{|x - x'|} d^3x$$

L'énergie potentielle gravitationnelle totale du système est alors :

$$E[\Omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho U(x) d^3x = -\frac{G}{2} \rho^2 \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'.$$

- On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un ouvert borné de classe \mathcal{C}^2 , avec frontière $\partial\Omega$.
- Le volume de Ω est défini par :

$$V := \int_{\Omega} d^3x$$

- On considère une déformation infinitésimale normale de la frontière de Ω , paramétrée par $\varepsilon \in \mathbb{R}$, selon :

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x)n(x), \quad \text{pour } x \in \partial\Omega$$

où $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ est une fonction lisse et $n(x)$ est le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$.

- Le domaine déformé est noté Ω_ε , et désigne l'ouvert borné obtenu par cette déformation :

$$\Omega_\varepsilon := \{x + \varepsilon f(x)n(x) \mid x \in \Omega\} + o(\varepsilon)$$

(La déformation est supposée prolongée en l'intérieur de Ω pour définir rigoureusement Ω_ε .)

3.7.1 Formule de Hadamard

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et soit Ω_ε une déformation lisse de Ω telle que pour $x \in \partial\Omega$,

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x)n(x)$$

et on suppose que cette déformation est prolongée lisse sur tout Ω .

On souhaite démontrer que :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x)$$

Avec dS élément de surface associé à $\partial\Omega$.

1. Nous allons faire une étude de la fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Justifier que $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto \det M$ est différentiable.

(b) Démontrer que,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(I + \varepsilon M) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} M + o(\varepsilon)$$

En déduire que $\frac{d}{d\varepsilon} \det(I + \varepsilon M) \underset{0}{=} \text{Tr } M$.

(c) Soit $X \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que,

$$d(\det(H))(X) = \text{Tr}({}^t\text{Com}(X)H)$$

- Poser le changement de variable $x(u) = u + \varepsilon f(u)n(u)$, et calculer le jacobien $\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$ au premier ordre en ε , c-à-d à l'ordre $o(\varepsilon)$.
- Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$, $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon \in U$ un voisinage de 0. En posant une fonction bien choisie, démontrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, F(x + \varepsilon v(x)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F + o(\varepsilon)$$

- En déduire le résultat voulu grâce au théorème de la Divergence.

3.7.2 Lien avec le potentiel gravitationnel

- Montrer que $E[\Omega] < 0$, et que minimiser l'énergie revient à maximiser la quantité suivante :

$$\mathcal{I}[\Omega] := \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'.$$

- On suppose que $\Omega = B(0, R)$ est une boule centrée à l'origine, de rayon R tel que $\text{Vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi R^3 = V$. Montrer que le potentiel gravitationnel au centre est donné par :

$$U(0) = -G\rho \int_{\Omega} \frac{1}{|x'|} d^3x'.$$

Calculer explicitement cette intégrale.

3.7.3 La sphère ?

- Démontrer que,

$$\delta \mathcal{F} = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x)$$

On pourra utiliser ou démontrer (*pour les plus courageux*) que,

$$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \int_{\partial(\Omega^2)} \varphi(x) d\mu(x) = 2 \int_{\Omega \times \partial\Omega} \varphi(x) d\mu(x)$$

- On cherche à minimiser \mathcal{F} à volume constant et fixé V . Pour cela on cherche à minimiser $\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{F} - \lambda V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. En déduire que la variation première de la fonctionnelle \mathcal{F} s'écrit :

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial\Omega} \left(2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda \right) f(x) dS(x)$$

- En utilisant la symétrie sphérique, montrer que si Ω est une boule de rayon R , alors pour tout $x \in \partial\Omega$, la quantité :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$$

est constante. En déduire que la boule satisfait la **condition stationnaire** : $\delta \mathcal{L} = 0$ pour tout f .

- (Bonus) Montrer que la boule est bien un *minimum* local pour \mathcal{F} sous contrainte de volume constant en étudiant la variation seconde.
- Conclure et expliquer pourquoi les grands objets de l'Univers sont sphériques.

3.8 Mouvement relativiste d'une particule chargée (RR, MA, EM, FS)



(Correction)

3.8.1 Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

1. Montrer qu'en utilisant le principe de moindre action et l'invariance de Lorentz, l'action d'une particule libre de masse m peut s'écrire $S = -mc \int ds$ où $ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2$. En déduire que le Lagrangien du système est

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}},$$

où $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$.

2. En introduisant le quadripotential électromagnétique $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$, proposer un terme d'interaction L_{int} correspondant à une particule de charge q dans ce champ. Montrer que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi,$$

et en déduire le Lagrangien total $\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{int}}$.

3. À partir du Lagrangien total, calculer l'impulsion généralisée $P_i = \partial \mathcal{L}_{\text{tot}} / \partial v^i$. Montrer qu'elle s'écrit

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} + q \mathbf{A},$$

où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

4. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées à L_{tot} et montrer qu'elles conduisent à l'équation de Lorentz en 3 dimensions,

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

avec $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

5. Écrire le lagrangien en paramétrant par le temps propre τ et en déduire que,

$$\mathcal{L} = -mc \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + q g_{\mu\nu} A^\mu \dot{x}^\nu$$

6. Montrer que,

$$m \ddot{x}_\mu = q F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$$

Où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique.

7. Écrire explicitement les composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$ et montrer que $F_{0i} = E_i/c$ et $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$. Interpréter la signification physique de ces composantes.
8. Calculer les deux invariants du champ électromagnétique,

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad I_2 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma},$$

et exprimer-les en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{B} . Quels sont les cas physiques correspondant à $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$?

9. Vérifier que sous une transformation de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, les équations du mouvements restent inchangées. Quel est la symétrie associée?

3.8.2 Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane

On considère une particule de masse m et de charge q soumise à un champ électromagnétique décrit par le tenseur $F^{\mu\nu}$. Son mouvement est régi par l'équation :

$$m \ddot{x}^\mu = q F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu$$

où les points désignent les dérivées par rapport au temps propre τ de la particule. On se place dans un système d'unités naturelles où $c = 1$.

On modélise une onde électromagnétique plane par un potentiel quadrivecteur de la forme :

$$A^\mu(x) = a^\mu f(k_\nu x^\nu)$$

où f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , k^μ est un quadrivecteur lumière, d'où $k^\mu k_\mu = 0$, et a^μ est un quadrivecteur constant représentant la polarisation.

1. Montrer que

$$F^{\mu\nu}(x) = (k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu) f'(k_\rho x^\rho)$$

2. (a) Calculer $\partial_\mu A^\mu$ dans le cas du potentiel $A^\mu(x) = a^\mu f(k_\rho x^\rho)$.
 (b) En déduire que la condition de jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ implique :

$$a^\mu k_\mu = 0$$

3. On considère maintenant le mouvement d'une particule dans cette onde électromagnétique.

- (a) En utilisant l'expression du tenseur $F^{\mu\nu}$ trouvée en question 1, montrer que :

$$F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu = [k^\mu (a_\rho \dot{x}^\rho) - a^\mu (k_\rho \dot{x}^\rho)] f'(k_\rho x^\rho)$$

- (b) En déduire l'équation du mouvement sous la forme :

$$m \ddot{x}^\mu = q [k^\mu (a_\rho \dot{x}^\rho) - a^\mu (k_\rho \dot{x}^\rho)] f'(k_\rho x^\rho)$$

4. On cherche maintenant à intégrer cette équation.

- (a) Montrer que le scalaire $k_\rho \dot{x}^\rho$ est constant au cours du mouvement.
- (b) En déduire que $\phi = k_\rho x^\rho(\tau)$ est une fonction affine de τ , que l'on pourra utiliser comme nouveau paramètre.
- (c) À l'aide des relations précédentes, intégrer l'équation du mouvement et déterminer l'expression complète de la trajectoire $\tau \mapsto x^\mu(\tau)$ ⁸

3.8.3 Théorie des Champs

On définit l'action,

$$S = \int_{\Omega} -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A^\mu j_\mu d^4x, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{1,3}$$

On peut ainsi définir aisément une **densité** de Lagrangien.

1. Pour une action dépendant d'un champ φ (scalaire, tensoriel...) :

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) d^4x$$

Démontrer que les équations d'Euler-Lagrange restent vraies pour un champ φ .

Pour cela, on postulera le principe de moindre action, c'est à dire que pour une transformation infinitésimale $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon \eta$ ⁹, on a,

$$\frac{dS}{d\varepsilon}[\varphi + \varepsilon \eta, \partial_\mu(\varphi + \varepsilon \eta), x^\mu](0) = 0$$

2. Démontrer les équations de Maxwell en tensorielle,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0,$$

où $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ est la quadricharge (quadri-densité de courant).

8. Cet exercice permet de déterminer analytiquement la trajectoire d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane. Vous pourrez ensuite la représenter en Python à partir des fonctions obtenues.

9. Où η est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, et $\forall x \in \partial\Omega, \eta(x) = 0$, c'est à dire que la fonction est nulle aux bornes.

3.8.4 Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant

Considérons une particule de masse m et de charge q évoluant de manière relativiste dans un champ électromagnétique. Dans cet exercice, on introduit progressivement les effets d'un champ magnétique constant $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ (secteur courbe d'un synchrotron) et d'une force moyenne de freinage due au rayonnement synchrotron.

A. Rayonnement synchrotron négligé

1. Calculer $F^{\mu\nu}$.
2. En déduire que le mouvement est dans le plan Oxy . Montrer que l'énergie est constante, si l'on néglige la perte dû au rayonnement.
3. Montrez que, en l'absence de perte d'énergie, pour $u^\mu = (\gamma c, 0, u_0 = \gamma v, 0)^{10}$,

$$x(t) = R \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} t\right), \quad y(t) = R \sin\left(\frac{\omega}{\gamma} t\right)$$

Avec, (loi du synchrotron)¹¹ :

$$R = \frac{\gamma v}{\omega} = \frac{\gamma m v}{q B}$$

B. Étude du mouvement réel

1. Le rayonnement synchrotron entraîne une perte d'énergie moyenne. Rappeler la formule de la puissance rayonnée moyenne (Larmor relativiste) pour une accélération centripète $a = v^2/R$,

$$P = -\frac{d}{dt} E = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 a^2$$

En utilisant $E = \gamma m c^2$, montrez qu'en développant on obtient l'équation différentielle,

$$\frac{d}{dt} \gamma = -C \gamma^2 \times v$$

On donnera l'expression du coefficient C en fonction de q, B, m, c, ϵ_0 .

2. Résoudre l'équation différentielle sur v ¹².
3. En déduire la nouvelle trajectoire de la particule chargée. Étudier la limite quand $t \rightarrow \infty$.
4. Tracer la courbe paramétrique $x(t), y(t)$ en python. Quel problème cela génère ?

3.8.5 Physique des collisionneurs relativistes

Ici, on se placera avec l'unité de vitesse $c = 1$.

1. Définir le carré de l'invariant d'énergie-momentum total $s = (p_1 + p_2)^2$ pour la collision de deux particules de quatre-impulsions p_1 et p_2 . Exprimer l'énergie totale disponible dans le référentiel centre de masse (CMS) en fonction de s .
2. Pour une collision tête-à-tête de deux particules identiques de masse m et d'énergie E (chacune) dans le référentiel du laboratoire, montrer que l'énergie en CMS vaut $\sqrt{s} = 2E$ (supposant $E \gg m$).
3. Pour le cas d'une collision contre une cible fixe de masse m , dériver la formule

$$s = m^2 + m^2 + 2mE_{\text{lab}},$$

et déduire l'énergie au seuil de production de deux particules de masse m (collision élastique extrême).

4. Calculer l'énergie requise dans une expérience à cible fixe pour produire un nouveau produit de masse M au seuil, et comparer à l'énergie requise dans un collisionneur symétrique ($E_{\text{CM}} = M + M$). Pourquoi les collisionneurs à faisceaux opposés sont-ils plus efficaces pour atteindre de hautes énergies ?

10. Il faudrait également démontrer que γ et v sont constant, et que $\tau(t) = \gamma t$.

11. Pour cela, il faudra passer dans le référentiel du laboratoire.

12. Il est en effet bien plus simple de résoudre l'équation sur v que sur γ , car ici v dépend du temps.

3.9 Hydrodynamique relativiste et collisions de noyaux lourds (RR,FS)



(Correction)

3.9.1 Hydrodynamique classique

1. Écrire l'équation de conservation de la masse (continuité) pour un fluide classique, soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Montrer que dans le cas d'un fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$), cela réduit à $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

2. Écrire l'équation d'Euler pour un fluide parfait (non visqueux) soumis à un champ de gravité \mathbf{g} :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}.$$

Décrire brièvement la signification physique de chaque terme de cette équation.

3. Montrer comment l'ajout d'effets visqueux conduit à l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g},$$

où η est la viscosité dynamique (cisaillement) et ζ la viscosité volumique. Expliquer le rôle de ces termes.

4. Expliquer la différence entre la description lagrangienne (recherche des trajectoires des particules de fluide) et la description eulérienne (vue sur le champ de vitesse à un point fixe de l'espace). En particulier, montrer que la dérivée totale pour un fluide est $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ dans le formalisme eulérien.
5. Définir les lignes de courant (streamlines) dans un fluide, et montrer que ces courbes sont tangentes au vecteur champ de vitesses \mathbf{v} en chaque point. Interpréter physiquement ces lignes.
6. Démontrer le théorème de Bernoulli pour un fluide stationnaire, incompressible et sans viscosité. Montrer que le long d'une ligne de courant,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \Phi = \text{constante},$$

où Φ est un potentiel de forces (par exemple $\Phi = gz$ en champ constant \mathbf{g}).

3.9.2 Introduction à l'hydrodynamique relativiste

L'hydrodynamique relativiste permet de décrire l'évolution de systèmes continus à haute densité d'énergie (comme le plasma de quarks-gluons) en incorporant les principes de la relativité restreinte. On s'intéresse ici à des fluides parfaits, sans viscosité ni conduction thermique, et à leur description contravariante.

1. **Tenseur énergie-impulsion.** Le contenu énergétique et dynamique d'un fluide parfait est encodé dans le tenseur énergie-impulsion :

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} - p g^{\mu\nu},$$

où :

- ε est la densité d'énergie (dans le référentiel propre du fluide),
- p est la pression (même unité que ε , i.e. J/m³),
- u^μ est le quadrivecteur vitesse du fluide,
- $\eta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ est la métrique de Minkowski.

- (a) Vérifier que $T^{\mu\nu}$ est symétrique.
- (b) Calculer $T^{\mu\nu}$ dans le référentiel propre du fluide ($u^\mu = (c, 0, 0, 0)$).
- (c) Interpréter les composantes physiques de T^{00} , T^{0i} , et T^{ij} .

- (d) Montrer que la trace $T^\mu_\mu = \varepsilon - 3p$.
2. **Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.** Dans tout système isolé, le tenseur énergie-impulsion est conservé localement :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Cette équation tensorielle (4 équations scalaires) exprime la conservation de l'énergie ($\nu = 0$) et des trois composantes du moment ($\nu = 1, 2, 3$). Elle constitue l'équation fondamentale de l'hydrodynamique relativiste.

- (a) Quelles sont les inconnues dynamiques du problème ?
- (b) Pourquoi faut-il compléter ce système par une équation d'état reliant ε , p et éventuellement T ?
3. **Thermodynamique relativiste.** Dans le référentiel propre du fluide, on définit localement :

T : température, s : entropie volumique, μ : potentiel chimique, n : densité de particules.

La première loi de la thermodynamique, exprimée en densités locales (c'est à dire dans un élément de volume dV), prend la forme :

$$d\varepsilon = T ds + \mu dn.$$

- (a) En supposant $\mu = 0$, montrer que $dp = s dT$.
- (b) En déduire l'identité $\varepsilon + p = Ts$, appelée relation d'Euler.
4. **Vitesse du son relativiste.** La vitesse du son c_s est définie par :

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_s.$$

- (a) Calculer c_s pour un fluide ultra-relativiste où $p = \varepsilon/3$.
- (b) Comparer à la vitesse de la lumière c et commenter.

3.9.3 Hydrodynamique relativiste

On considère un fluide parfait en relativité restreinte. Le nombre total de particules est donné par

$$N = \int_\Sigma J^\mu d\Sigma_\mu,$$

à travers une hypersurface spacelike Σ orientée vers le futur (par exemple $t = \text{cste}$). On suppose que N est conservé.

1. Montrer que la conservation du nombre de particules s'exprime localement par

$$\partial_\mu (nu^\mu) = 0,$$

où n est la densité de particules dans le référentiel comobile, et u^μ la quadrivitesse du fluide.

2. Montrer qu'en prenant $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$, on a $T^{00} = \varepsilon$ et $T^{ii} = p$. Interpréter.
3. En utilisant $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, déduire l'équation du mouvement (ou *relativistic Euler equation*) d'un fluide parfait sans source :

$$(\varepsilon + p)u^\mu \partial_\mu u^\nu + \left(g^{\mu\nu} + \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) \partial_\mu p = 0.$$

3.9.4 Application aux collisions de noyaux lourds

1. Décrire le scénario d'une collision centrale de noyaux lourds à RHIC ou LHC : formation d'un plasma de quarks et gluons (QGP), thermalisation, expansion hydrodynamique, découplage (freeze-out)¹³.

13. Le terme « fluide relativiste » désigne tout fluide dont les constituants ont des énergies cinétiques comparables à leur masse : $k_B T \gtrsim mc^2$. Il peut s'agir d'un plasma (chargé), mais aussi d'un gaz de photons ou neutrinos. Le cadre de l'hydrodynamique relativiste est donc plus

2. Introduire les coordonnées de Bjorken : $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$, $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}$. En supposant un fluide boost-invariant, montrer que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ conduit à :

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\varepsilon + p}{\tau} = 0.$$

3. Pour $p = \varepsilon/3$, résoudre l'équation ci-dessus et en déduire :

$$\varepsilon(\tau) \propto \tau^{-4/3}, \quad T(\tau) \propto \tau^{-1/3}.$$

4. Lors de la transition QGP \rightarrow hadrons, l'équation d'état peut s'écrire :

$$p = \frac{\varepsilon - 4B}{3}.$$

Montrer que $p = 0$ à la transition implique $\varepsilon = 4B$ et en déduire la température critique T_c .

5. En modélisant un noyau par une sphère de rayon R , définir la section efficace géométrique $\sigma \approx \pi(2R)^2$. Relier cette quantité à la distinction entre collisions centrales et périphériques.
6. Montrer que l'énergie volumique initiale ε_0 est plus grande pour une collision centrale. En supposant $\varepsilon = aT^4$, estimer la température initiale T_0 atteinte à RHIC ($\varepsilon_0 \sim 10 \text{ GeV/fm}^3$).
7. Définir le rapport viscosité sur entropie η/s . Pourquoi des valeurs proches de $1/4\pi$ indiquent-elles un fluide presque parfait ? Quel est l'effet d'une faible viscosité sur le flux elliptique v_2 ?
8. Expliquer les notions de freeze-out chimique (réactions inélastiques gelées) et cinétique (réactions élastiques gelées). Pourquoi l'hydrodynamique cesse-t-elle d'être valide à ce stade ?
9. Comment l'hydrodynamique relativiste permet-elle de relier les observables mesurées (spectre en impulsion transverse, anisotropies, etc.) à l'état initial du QGP ?

3.10 Atome d'hydrogène et équation radiale (MQ) ★★★

(Correction)

Dans ce problème, on étudie l'atome d'hydrogène (électron de masse m_e dans le potentiel coulombien $V(r) = -e^2/r$ d'un proton fixe) en mécanique quantique non-relativiste. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right] \psi(r, \theta, \phi) - \frac{e^2}{r} \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi),$$

où \mathbf{L}^2 est l'opérateur du carré du moment cinétique orbital.

3.10.1 Séparation des variables et équation radiale

1. Montrer que la fonction d'onde peut se séparer sous la forme $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, où $Y_{\ell m}$ est une harmonique sphérique propre de \mathbf{L}^2 et \mathbf{L}_z , avec :

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}, \quad \mathbf{L}_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}.$$

En déduire que l'équation de Schrödinger radiale vérifiée par $R(r)$ est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right] - \frac{e^2}{r} R = ER.$$

2. En posant $u(r) = rR(r)$, montrer que l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u(r) = Eu(r).$$

On définit le paramètre κ par :

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m_e |E|}{\hbar^2}}.$$

Montrer que si l'on introduit la variable adimensionnelle $\rho = \kappa r$, l'équation prend la forme :

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{\rho_0}{\rho} + 1 \right] u(\rho),$$

avec $\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2 \kappa}$.

3. Proposer l'ansatz :

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho/2} v(\rho),$$

et montrer que $v(\rho)$ vérifie l'équation différentielle¹⁴ :

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + (2\ell + 2 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + (\rho_0 - 2\ell - 2)v = 0.$$

4. En développant $v(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k$, montrer que la série diverge en général à l'infini, sauf si elle s'arrête à un ordre fini. En déduire que la condition de terminaison de la série est :

$$\rho_0 = 2n, \quad \text{où } n = \hat{k} + \ell + 1 \in \mathbb{N}^*.$$

5. En déduire l'expression des niveaux d'énergie liés de l'atome d'hydrogène :

$$\kappa_n = \frac{m_e e^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{2n} \Rightarrow E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa_n^2}{2m_e} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

14. On reconnaît une équation d'hypergéométrie confluyente.

6. Quel est le degré de dégénérescence de chaque niveau E_n ? Montrer qu'il vaut n^2 en tenant compte des possibilités pour ℓ (allant de 0 à $n - 1$) et m (allant de $-\ell$ à $+\ell$). Interpréter pourquoi, dans ce modèle non-relativiste, l'énergie dépend uniquement de n et non de ℓ .

3.10.2 État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales

7. Pour le niveau fondamental ($n = 1, \ell = 0$), montrer que la fonction d'onde normale du radial s'écrit

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}.$$

En déduire l'expression complète de $\psi_{1,0,0}(r, \theta, \phi)$ et vérifier sa normalisation $\int |\psi_{1,0,0}|^2 d^3x = 1$ (on utilise que $Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$).

8. Calculer la densité de probabilité radiale $P(r) = 4\pi |R_{1,0}(r)|^2 r^2$ et tracer qualitativement son profil en fonction de r . Interpréter la signification physique de cette densité (lieu le plus probable où se trouve l'électron).
9. Démontrer que l'espérance de la distance $\langle r \rangle$ entre l'électron et le noyau, ainsi que la variance $(\Delta r)^2$, sont données par

$$\langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0, \quad (\Delta r)^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \frac{3}{2} a_0^2 - \left(\frac{3}{2} a_0\right)^2.$$

(Indication : utiliser l'intégrale $\int_0^\infty r^n e^{-2r/a_0} dr = n!(a_0/2)^{n+1}$ et vérifier les résultats.)

10. (Optionnel) On peut également introduire la représentation impulsionnelle. Calculez la transformée de Fourier $\tilde{\psi}_{1,0,0}(\mathbf{p})$ de l'état fondamental et interprétez la distribution en impulsion (carré du module) associée. Quelle est la valeur moyenne de la quantité de mouvement $\langle \mathbf{p} \rangle$ et de son carré $\langle p^2 \rangle$?
11. *Interpréter* : Discutez brièvement pourquoi la dépendance en $1/n^2$ des niveaux E_n explique la structure fine de raies spectrales de l'hydrogène et la notion de nombre quantique principal.

3.11 Vers un formalisme relativiste (MQ, RR) ★★★★★

(Correction)

On utilise la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ et les unités $c = \hbar = 1$.

1. On considère un champ scalaire réel $\phi(x)$ de masse m . On pose la densité de Lagrangien relativiste

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

Montrer que \mathcal{L} est invariante sous les transformations de Lorentz.

2. Appliquer les équations d'Euler-Lagrange au champ scalaire et en déduire l'équation de Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi = 0$.
3. Commenter l'équation de Klein-Gordon en rappelant pourquoi une équation du second ordre pose des problèmes d'interprétation probabiliste pour un champ relativiste.
4. Motivé par cette difficulté, on cherche une équation d'onde relativiste du premier ordre en les dérivées, symétrique en temps et en espace, pour un objet $\psi(x)$ à plusieurs composantes (un spineur). Énoncer la forme générale d'une telle équation linéaire en ∂_μ (on peut l'écrire sous la forme $(iA^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ avec des matrices A^μ).
5. On propose le Lagrangien de Dirac pour un champ de spineurs à 4 composantes $\psi_\alpha(x)$ et son conjugué de Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi.$$

- (a) Montrer que \mathcal{L}_D est hermitien (à un dérivé total près).
- (b) Vérifier que \mathcal{L}_D est invariant sous les transformations de Lorentz (transformations spinorales de ψ).
6. En appliquant les équations d'Euler-Lagrange pour les champs à composantes (variation par rapport à $\bar{\psi}$), établir l'équation de Dirac :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

En utilisant la définition de $\bar{\psi}$, écrire l'équation adjointe satisfaite par $\bar{\psi}$.

7. (a) En multipliant à gauche l'équation de Dirac par $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$, montrer que ψ vérifie l'équation de Klein-Gordon. Expliquer pourquoi il est nécessaire que les matrices γ^μ satisfassent des relations d'anticommutation.
- (b) En déduire explicitement les relations d'anticommutation des matrices de Dirac :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

8. (a) Donner explicitement les matrices γ^μ dans la représentation de Dirac (par exemple $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$,

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Vérifier à partir de cette représentation les relations de Clifford obtenues ci-dessus pour $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.
9. On cherche des solutions de l'équation de Dirac de la forme onde plane

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x},$$

avec $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, $p \cdot x = p_\mu x^\mu = -Et + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$.

- (a) Montrer que pour $u(p)$ on obtient l'équation algébrique

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0.$$

- (b) En déduire les valeurs de E autorisées et interpréter les solutions correspondantes en termes d'états d'énergie positive ou négative.
- (c) Combien de solutions linéairement indépendantes (spineurs u et v) existe-t-il au total pour un moment donné ? Relier ce résultat aux degrés de liberté de spin de la particule et de son antiparticule.
10. On définit le courant de Dirac

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

- (a) En utilisant les équations de Dirac (et son adjoint), montrer que $\partial_\mu j^\mu = 0$ (courant conservé).
 - (b) Vérifier que la densité $j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$ est positive définie. Interpréter j^0 comme densité de probabilité et comparer avec le cas du champ de Klein–Gordon.
11. On souhaite quantifier le champ de Dirac.
- (a) Énoncer les conditions de quantification canonique du champ de Dirac ψ et ψ^\dagger (ou ψ et $\bar{\psi}$). Justifier pourquoi on doit utiliser des anticommutateurs $\{, \}$ plutôt que des commutateurs.
 - (b) Indiquer comment la quantification mène à l'introduction d'opérateurs de création et d'annihilation de particules et d'antiparticules (de Dirac). Expliquer comment les états d'énergie négative sont interprétés comme des états d'antiparticules (principe de la mer de Dirac).
12. Montrer que le Lagrangien de Dirac \mathcal{L}_D est invariant sous la transformation de phase globale $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$. En déduire, par le théorème de Noether, la conservation du courant j^μ .
13. Introduire le couplage minimal du champ de Dirac à un potentiel électromagnétique A_μ : on remplace ∂_μ par $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ dans \mathcal{L}_D . Montrer que cette prescription rend le Lagrangien invariant sous la jauge locale $\psi \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi$, $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\Lambda$. Expliquer brièvement l'implication physique de cette invariance (introduction de l'interaction électromagnétique et conservation de la charge électrique).
14. Résumer les implications physiques de l'équation de Dirac obtenue : existence d'une particule libre de spin $1/2$ (et de son antiparticule), calcul du moment magnétique $\mu = g\frac{q}{2m}\mathbf{S}$, μ vecteur, avec $g = 2$, etc. Conclure sur la façon dont cette construction respecte la covariance relativiste et sur le rôle de l'algèbre de Clifford dans la description des fermions relativistes.

3.12 Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$ (MQ) ★★★

(Correction)

On étudie un système quantique subissant uniquement le potentiel $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$.

L'Hamiltonien du système s'écrit,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha \mathbf{X})}$$

1. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une fonction d'onde $\psi(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\psi(x) = E\psi(x).$$

2. Montrer que la substitution $u = \tanh(\alpha x)$ entraîne

$$\psi'(x) = \alpha(1-u^2)\frac{d\phi}{du}, \quad \psi''(x) = \alpha^2\left((1-u^2)\frac{d^2\phi}{du^2} - 2u\frac{d\phi}{du}\right),$$

avec $\phi(u) = \psi(x(u))$.

3. En déduire que l'équation en $u \in (-1, 1)$ s'écrit

$$(1-u^2)\frac{d^2\phi}{du^2} - 2u\frac{d\phi}{du} + \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-u^2}\right]\phi = 0,$$

et exprimer λ, μ en fonction de V_0, α, m, \hbar, E .

4. Identifier λ, μ . Chercher une solution de la forme $\phi(u) = (1-u^2)^{\frac{\mu}{2}}P(u)$. Montrer que P doit être un polynôme.
5. En déduire la quantification E_n sous la forme

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}(\lambda-n)^2, \quad n = 0, 1, \dots, \lfloor \lambda \rfloor,$$

où $\lambda(\lambda+1) = \frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha^2}$.

6. Montrer que le nombre d'états liés est fini : $N = \lfloor \lambda \rfloor + 1$.
7. Interpréter physiquement pourquoi seuls ces N niveaux peuvent exister.

3.13 Puissance de Larmor et instabilité électrodynamique de l'atome classique[†] (EM) ★★

¹⁵ (Correction)

Une charge confinée (donc accélérée) émet un rayonnement électromagnétique. Il s'agit maintenant d'examiner plus précisément quelques conséquences des lois de l'électromagnétisme classique combinées avec celles de la dynamique (d'où : *Électrodynamique*) et notamment de montrer que l'atome classique est fondamentalement instable : l'électron localisé au sein de l'atome émet un rayonnement et, de ce fait, perd graduellement son énergie.

La description ci-dessous repose sur le fait que l'effet de rayonnement reste un phénomène minoritaire, bien qu'il conduise finalement à des conclusions spectaculaires. Le point de départ sera donc une description dynamique ordinaire, à laquelle on rajoutera les effets perturbatifs dus au rayonnement de la source (l'électron confiné) sur le mouvement de cette source.

3.13.1 Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad} .

La puissance de Larmor, est la puissance perdue par une charge accélérée. Nous allons en déduire une force de radiation, \mathbf{F}_{rad} , qui mènera à des conséquences spectaculaires.

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} \quad (3.13.1)$$

1. Écrire le travail $dE_{\text{at}} = dW$, qui est égale à la variation d'énergie de l'atome pendant un temps dt de la force de radiation \mathbf{F}_{rad} .
2. Écrire la variation d'énergie de l'atome pendant un temps dt dû à la puissance rayonnée de l'électron.
3. En intégrant par partie et en supposant que le mouvement est périodique, montrer qu'on a alors¹⁶,

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2\vartheta^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (3.13.2)$$

4. Appliquez le PFD, avec la force \mathbf{F}_{rad} ¹⁷ calculée précédemment et une force de rappel $\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$. En cherchant une solution de la forme $\mathbf{r}(t) = \text{Re}\{\mathbf{r}_0 e^{i\omega t}\}$, en cherchant

$$\omega = \omega_0(1 + \alpha(\omega_0\tau) + o(\omega_0\tau)), \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.13.3)$$

Montrer que la solution est un oscillateur amorti.

AN : On donne $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3} \simeq 6,4 \times 10^{-24}$ s, $\omega_0 = 3 \times 10^{15}$ rad.s⁻¹. Commentez.

3.13.2 Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad} .

La force de freinage \mathbf{F}_{rad} écrite précédemment est conceptuellement pathologique, comme le montre l'analyse qui suit. En reprenant les notations de la section 1.5, Tome I, l'équation d'Abraham-Lorentz pour une particule de charge e et de masse m soumise à une force \mathbf{F} est (avec $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$) :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\tau \dddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}, \quad (3.13.4)$$

où le temps $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3} \simeq 6,4 \times 10^{-24}$ s correspond à une période. Une première bizarrerie de cette équation est l'apparition d'une dérivée troisième de la position de la particule (définie par le rayon-vecteur \mathbf{r}), censée représenter l'effet du freinage par rayonnement.

De surcroît, la perturbation du mouvement provoquée par cet effet est fondamentalement *singulière*, au sens où elle modifie l'ordre de l'équation différentielle du mouvement, lequel passe de 2 à 3 dès que la charge est non nulle. En fait, c'est bien parce que le petit paramètre τ est en facteur de la plus haute dérivée que la perturbation

¹⁵. [†] Inspiré de Claude Aslangul, *Mécanique Quantique 1*, Chapitre 1.

¹⁶. Où $\vartheta^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

¹⁷. Remarquez l'apparition d'une force dépendant de la dérivée de l'accélération. Nous allons étudier dans la partie suivante les problèmes que cette force cause.

est dite *singulière*, par définition¹⁸.

Ces avertissements étant donnés, il s'agit maintenant d'examiner les conséquences de l'équation (3.13.4) telle qu'elle est, précisément pour bien mettre en évidence les très graves difficultés de fond qu'elle soulève.

1. En utilisant la méthode connue pour intégrer une équation différentielle telle que (3.13.4), écrire l'expression générale de l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}(t)$, supposant connue l'accélération à un certain instant t_0 , $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$.
2. En examinant le cas particulier $\mathbf{F} = 0$, montrer que cette solution est aberrante physiquement.
3. Revenant à la solution générale obtenue en 1 dans le cas $\mathbf{F} \neq 0$, montrer que l'on peut formellement éliminer les solutions divergentes par un choix convenable de t_0 . Commenter ce choix — qui, sur le plan technique, exprime une condition aux limites plutôt qu'une condition initiale.
4. En déduire l'expression régularisée de la solution obtenue en 1. Revenant un cran en arrière et en analysant le noyau intégral figurant dans cette expression, vérifier que l'équation du mouvement redonne bien, dans la limite de charge nulle, l'équation ordinaire de la dynamique.
5. Afin d'exhiber clairement la violation annoncée d'un grand principe physique, effectuer un changement de variable d'intégration très simple pour obtenir :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} e^{-s} \times \mathbf{F}(t + \tau s) ds. \quad (3.13.5)$$

Commenter cette dernière équation et montrer qu'un principe physique y est violé.

6. Afin de mettre en évidence cette violation de façon encore plus spectaculaire, traiter le cas d'une particule de vitesse nulle en $t = -\infty$ et soumise à une force échelon :

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \mathbf{F}_0 & \text{si } t > 0. \end{cases} \quad (3.13.6)$$

Résumer ces résultats en traçant la variation en fonction du temps de l'accélération et de la vitesse. Noter que la particule se met en mouvement... **avant l'application de la force !**

18. Le même phénomène se produit pour l'équation aux valeurs propres de Schrödinger, où c'est cette fois la constante de Planck qui est en facteur de la plus haute dérivée. Il existe un traitement perturbatif spécifique pour ce genre de question, appelé méthode BKW (ou WKB) dans le contexte quantique.

Chapitre 4

Correction des exercices

Comme vous le remarquerez, les exercices ne sont pas encore **tous** corrigés. Les exercices non corrigés sont accompagnés du symbole \triangle . Les dernières corrections seront données petit à petit. Si vous voulez proposer une correction d'exercice, merci de me l'envoyer en format Latex au mail suivant : ryanartero2005@gmail.com.

Par ailleurs, vous pouvez revenir à l'exercice que vous étiez en train de faire en cliquant sur le titre de l'exercice en question, que ce soit en haut de page ou en début de l'exercice.

4.1 Problème à deux corps

4.1.1 Centre de masse

On désigne $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ les rayons vecteurs de l'électron et du noyau par rapport à un repère quelconque, et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ les vitesses correspondantes.

1. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1\mathbf{v}_1^2 + m_2\mathbf{v}_2^2) - \frac{\vartheta^2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$.
- 2.

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \implies \mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \implies \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mu &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \\ \implies \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 - \frac{\vartheta^2}{r} = \mathcal{L}_G(\mathbf{V}) + \mathcal{L}_r(\mathbf{r}, \mathbf{v})\end{aligned}$$

3. Le potentiel est central pour le centre de masse. Cela implique que \mathbf{J} est une constante du mouvement.

Dans la suite, on examine exclusivement le mouvement interne par \mathcal{L}_r en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan perpendiculaire à \mathbf{J} .

4.1.2 Intégration des équations du mouvement

1. L'expression de l'énergie cinétique en coordonnées polaires de \mathbb{R}^2 est :

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2),$$

d'où le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}, k = \vartheta^2.$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Les moments conjugués en découlent :

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta}.$$

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}.$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2},$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

p_θ est une constante du mouvement (car θ est une variable cyclique); en conséquence, la quantité $p_\theta = \mu r^2\dot{\theta}$ est constante : c'est le moment cinétique J , fixé une fois pour toutes par les conditions initiales.

En effet, $\mathbf{J} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu r \mathbf{u}_r \times (\dot{r} \mathbf{u}_r + r\dot{\theta} \mathbf{u}_\theta) = \mu r^2\dot{\theta} = p_\theta$.

L'intégrale première de l'énergie donne :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}.$$

En dérivant en temps $p_r = \mu\dot{r}$, et en y substituant :

$$\dot{p}_r = \mu\ddot{r} = \frac{J^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2},$$

on retrouve l'équation du mouvement radial :

$$\mu\ddot{r} = \frac{J^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}. \quad (7.25)$$

Le premier terme au second membre est la force centrifuge (car $\mu r\dot{\theta}^2 = \mu v^2/r$), le second terme est la force attractive de Coulomb.

2. Pour éliminer le temps, on dérive comme d'habitude la fonction composée $r(\theta(t))$:

On note $r'(\theta) = \frac{dr}{d\theta}$ et $r''(\theta) = \frac{d^2r}{d\theta^2}$. On utilise $p_\theta = \mu r^2\dot{\theta} = J$, d'où :

$$\dot{\theta} = \frac{J}{\mu r^2}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{J}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta}.$$

Ainsi :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = r' \frac{J}{\mu r^2}, \quad \ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{J}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left(r' \frac{J}{\mu r^2} \right).$$

En posant $u = \frac{1}{r}$, on a :

$$\dot{r} = -\frac{J}{\mu} u', \quad \ddot{r} = -\frac{J^2}{\mu^2} (u'' + u),$$

et le remplacement dans (7.25) donne :

$$-\frac{J^2}{\mu^2}(u'' + u) = \frac{J^2}{\mu}u^3 - \frac{k}{\mu}u^2.$$

Multipliée par $-\frac{\mu^2}{J^2}$, cette équation devient :

$$u'' + u = \frac{\mu k}{J^2}.$$

3. L'équation différentielle en $u(\theta)$:

$$u'' + u = \frac{\mu k}{J^2}$$

admet pour solution générale :

$$u(\theta) = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu k}{J^2},$$

d'où :

$$r(\theta) = \frac{1}{A \cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu k}{J^2}}.$$

Il est toujours loisible de choisir l'axe polaire astucieusement, par exemple de sorte que $r(\theta)$ soit extrémale en $\theta = 0$ (ou $\theta = \pi$), ce qui donne $\varphi = 0$:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{\mu k}{J^2}(1 + \varepsilon \cos \theta)}, \quad (7.26)$$

où l'on a posé $\varepsilon = \frac{AJ^2}{\mu k}$: l'excentricité.

La constante A (ou ε) est déterminée par les conditions initiales, ou via l'énergie :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}.$$

À l'aide de $r(\theta)$ et de $J = \mu r^2 \dot{\theta}$, on peut écrire E comme fonction de ε :

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{\mu k^2}. \quad (7.27)$$

4. L'expression (7.26) définit une famille de courbes appelées **coniques** (intersections d'un cône avec un plan). Trois sous-familles sont distinguées selon la valeur de ε :

- Si $\varepsilon < 1$, la trajectoire est une **ellipse**, fermée, correspondant à une énergie $E < 0$: mouvement lié et périodique (cas particulier $\varepsilon = 0$: un cercle).
- Si $\varepsilon = 1$, la trajectoire est une **parabole** : cas limite $E = 0$ séparant les mouvements liés et non liés.
- Si $\varepsilon > 1$, le dénominateur dans (7.26) peut s'annuler pour un angle $\theta_\infty = \arccos(-\frac{1}{\varepsilon})$: la trajectoire est une **hyperbole**, ouverte, avec asymptotes ; $E > 0$ correspond à une particule venant de l'infini avec une vitesse initiale non nulle.

Dans tous les cas, l'origine (le centre de force) est l'un des deux foyers de la conique.

4.1.3 Quantification de Bohr

Dans cette partie, on ne considère que les états liés $E < 0$.

1. La condition de quantification sur l'angle θ est immédiate puisque $p_\theta = J$ est une constante du mouvement :

$$J_\theta = \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = 2\pi J, \quad \text{d'où} \quad J = n_\theta \hbar \quad \text{avec } n_\theta \in \mathbb{N}^*.$$

n_θ ne peut être nul, puisque ceci donnerait une trajectoire rectiligne traversant périodiquement le noyau.
En définitive :

$$J = n_\theta \hbar, \quad n_\theta \in \mathbb{N}^*.$$

2. On a :

$$\int p_r dr = \int \mu \dot{r} dr = \mu \int r'(\theta) \dot{\theta} dr = \mu \int r'(\theta) \frac{J}{\mu r^2} dr = \int \frac{J r'(\theta)}{r^2} dr = \int \frac{J}{r^2} \frac{dr}{d\theta} d\theta.$$

La condition de quantification s'écrit, compte tenu de l'équation (7.26) :

$$\int_0^{2\pi} \frac{J \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta = n_r \hbar.$$

L'intégrale vaut :

$$2\pi J \left(\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta \right) = -2\pi J \left(\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) d\theta \right).$$

Une intégration par parties transforme cette expression en :

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} - 1 \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - (1 + \varepsilon \cos \theta)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) d\theta.$$

La condition de quantification devient alors :

$$2\pi J \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) = n_r \hbar.$$

Comme $2\pi J = n_\theta \hbar$, cela donne aussi :

$$n_\theta \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) = n_r,$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{n}{n_\theta}, \quad \text{où } n = n_r + n_\theta. \quad (7.28)$$

3. Selon l'équation (7.27) :

$$1 - \varepsilon^2 = -\frac{2EJ^2}{\mu \vartheta^4}, \quad \text{d'où } E = -\frac{\mu \vartheta^4}{2J^2} (1 - \varepsilon^2).$$

Comme $J = n_\theta \hbar$ et $1 - \varepsilon^2 = \left(\frac{n_\theta}{n} \right)^2$, on obtient finalement :

$$E_n = -\frac{\mu \vartheta^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (7.29)$$

4.2 Section efficace de Rutherford

4.2.1 Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome

On se place dans un repère polaire (r, φ) dans le plan du mouvement.

1. **Moment cinétique** : Le moment cinétique dans le repère polaire est :

$$J = mr^2 \dot{\varphi}.$$

À l'infini passé, la particule a une vitesse v_0 et un paramètre d'impact b . Le moment cinétique est alors :

$$J = -mbv_0.$$

Le signe négatif vient du fait que φ décroît au cours du temps.

2. **Équation du mouvement** : La force centrale de répulsion est donnée par :

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{où } C = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}.$$

On décompose $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ en deux composantes. En projetant sur la direction perpendiculaire à l'axe polaire, on trouve :

$$m\dot{v}_\perp = \frac{C}{r^2} \sin \varphi.$$

3. **Angle de déviation θ** : En multipliant l'équation par dt puis en changeant de variable, on utilise :

$$r^2 \dot{\varphi} = \frac{J}{m} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{J} d\varphi.$$

On intègre entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$:

$$v_0 \sin \theta = \int \dot{v}_\perp dt = \frac{C}{J} (\cos \theta + 1).$$

4. **Lien avec l'énergie cinétique** : L'énergie initiale est $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, donc :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{C}{2E_0 b}.$$

4.2.2 Section efficace de Rutherford

1. **Expression de la section efficace différentielle** : La définition générale est $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$.
2. **Utilisation de $\tan(\theta/2)$** : Avec :

$$b = \frac{C}{2E_0} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{C}{4E_0} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{C}{4E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

3. **Limite du modèle** : Pour $\theta \rightarrow 0$, on a $\sin(\theta/2) \rightarrow 0$ donc $d\sigma/d\Omega \rightarrow \infty$. L'intégrale sur $\theta \in [0, \pi]$ diverge : la section efficace totale est infinie. Cela reflète la portée infinie de l'interaction coulombienne.
4. **Interprétation expérimentale** : Ce modèle explique les résultats expérimentaux de Rutherford : des particules α peuvent être fortement déviées. Cela implique l'existence d'un noyau atomique très concentré, car une telle déviation nécessite un champ très intense dans une région très localisée¹.

1. En introduisant la distance minimale d'approche a_{\min} pour une collision frontale ($b = 0$), on a :

$$a_{\min} = \frac{C}{E_0}.$$

On peut alors réécrire la section efficace différentielle sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a_{\min}^2}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

4.3 Effet Cherenkov

1.

$$p = \frac{E}{c} = \frac{nh\nu}{c}, \quad p_z = \frac{c}{c}(nh\nu) = \frac{nh\nu}{c}, \quad n = \frac{p_z c}{h\nu}.$$

2. Les composantes du moment sont :

$$p = p' \cos \varphi + p_z \cos \theta, \quad 0 = -p' \sin \varphi + p_z \sin \theta.$$

3. On a :

$$p_z^2 = p^2 - 2pp_z \cos \varphi + p_z^2.$$

4. La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p_z^2 c^2 + m^2 c^4} + h\nu,$$

ou encore :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} mc^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_f^2}} mc^2 + h\nu.$$

5. Par élévation au carré, on obtient :

$$p_z^2 = p^2 - \frac{2h\nu E}{c^2} + \frac{(h\nu)^2}{c^2}, \quad \text{où } E \text{ désigne l'énergie initiale de l'électron.}$$

6. En rapprochant les deux expressions de p_z^2 , on peut écrire :

$$p^2 - 2pp_z \cos \varphi + p_z^2 = p^2 - \frac{2h\nu E}{c^2} + \frac{(h\nu)^2}{c^2},$$

d'où, après calcul :

$$\cos \varphi = \frac{h\nu}{pc} \left(1 - \frac{E}{pc} \right) + \frac{h\nu}{2pc},$$

avec $E = \gamma mc^2$, $p = \gamma mv$, $p_z = \frac{nh\nu}{c}$, de sorte que :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2} \right).$$

7. Finalement :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left[1 + (n^2 - 1) \frac{1}{2\gamma^2} \right].$$

Comme $E = \gamma mc^2$, ceci s'écrit aussi :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left[1 + \frac{n^2 - 1}{2} (1 - \beta^2) \right].$$

8. Il faut :

$$\frac{1}{n\beta} \left[1 + (n^2 - 1) \frac{1}{2\gamma^2} \right] \leq 1.$$

Comme le crochet est visiblement supérieur à 1, il est nécessaire (mais pas suffisant) que :

$$\beta > \frac{1}{n}.$$

9. Les photons sont émis entre $\nu = 0$ et une fréquence ν_{\max} pour laquelle $\cos \theta = 1$, soit :

$$0 \leq \nu \leq \frac{E}{h} \left(1 - \frac{1}{n\beta} \right), \quad \text{avec } E = \nu_{\max} h.$$

10. Les photons les plus énergétiques sont émis dans la direction $\theta = 0$.

11. Tous les photons sont émis à l'intérieur d'un cône de demi-angle φ correspondant à l'angle θ pour un photon de fréquence nulle, soit :

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{n\beta}\right) = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) \simeq 20^\circ.$$

12. Pour que l'effet se produise, il faut $\nu > \frac{1}{n}$, soit $\beta > \frac{1}{n}$, et donc :

$$E > \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} mc^2.$$

Pour un électron, il faut donc $E > 0,77$ MeV, pour un proton $E > 1,4$ GeV.

4.4 Machine à champ magnétique pulsé

4.4.1 Champ magnétique de la bobine

(a) Pour une spire circulaire de rayon R , la loi de Biot-Savart donne le champ sur l'axe z :

$$B_z(z, t) = \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Ceci est obtenu par intégration sur la spire, en exploitant la symétrie circulaire.

(b) Pour $z \gg R$, on peut approximer $(z^2 + R^2)^{3/2} \simeq z^3$. Ainsi,

$$B_z(z, t) \sim \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2z^3},$$

ce qui est l'expression du champ d'un dipôle magnétique de moment $m = I(t) R^2$.

4.4.2 Champ électrique induit dans le tissu biologique

La loi locale de Faraday en coordonnées cylindriques s'exprime sous la forme (en supposant que le champ électrique induit est purement azimutal) :

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Dérivons B_z par rapport au temps :

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\mu_0 R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \dot{I}(t).$$

L'équation locale devient donc :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Intégration pour $r < R$: Intégrons de 0 à r , en imposant $E_\theta(0, t) = 0$ (pour éviter une singularité) :

$$\int_0^r \frac{\partial(r' E_\theta(r', t))}{\partial r'} \frac{dr'}{r'} = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^r dr'.$$

La solution obtenue est :

$$r E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \frac{r^2}{2},$$

ce qui conduit à :

$$E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}} r \quad \text{pour } r \leq R.$$

Intégration pour $r > R$: Pour $r > R$, le flux magnétique restant confiné dans la zone de la bobine, il est plus adapté d'utiliser la loi intégrale de Faraday. Considérons un contour circulaire de rayon $r > R$. La loi intégrale de Faraday donne :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r E_\theta = -\frac{d\Phi}{dt},$$

où le flux Φ est celui à travers la zone de la bobine, c'est-à-dire :

$$\Phi = \pi R^2 B_z(z, t) = \pi R^2 \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

La dérivée temporelle de Φ est alors :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \frac{\mu_0 R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \dot{I}(t).$$

Ainsi,

$$2\pi r E_\theta = -\pi \frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{2(z^2 + R^2)^{3/2}},$$

et donc pour $r > R$:

$$E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{4r (z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Récapitulatif :

$$E_\theta(r, t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}} r, & r \leq R, \\ -\frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{4r (z^2 + R^2)^{3/2}}, & r \geq R. \end{cases}$$

Vérification de la continuité : À $r = R$, la solution intérieure donne

$$E_\theta(R, t) = -\frac{\mu_0 R^3 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}},$$

et la solution extérieure donne exactement le même résultat. La continuité est donc assurée.

4.4.3 Effet sur les neurones moteurs

La tension induite sur un disque de rayon a est donnée par :

$$V = \int_0^a E(r, t) dr.$$

En utilisant l'expression de $E_\theta(r, t)$ pour $r \leq R$ (supposons $a \leq R$ pour simplifier), on a :

$$V = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^a r dr = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Ainsi,

$$V = -\frac{\mu_0 R^2 a^2 \dot{I}(t)}{8(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Pour activer le neurone, il faut que $|V| \geq V_{\text{seuil}}$. La condition d'activation est donc :

$$\frac{\mu_0 R^2 a^2 |\dot{I}(t)|}{8(z^2 + R^2)^{3/2}} \geq V_{\text{seuil}}.$$

En utilisant des valeurs numériques réalistes ($R = 5$ cm, $a = 2$ cm, $I_0 = 100$ A, $\tau = 1$ ms, $\omega = 10^4$ rad/s, etc.), on peut vérifier si cette inégalité est satisfaite.

4.4.4 Effet du courant oscillant

Si l'on suppose que

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t},$$

alors $\dot{I}(t) = i\omega I_0 e^{i\omega t}$ et le champ électrique induit devient oscillant :

$$E_\theta(r, t) = E_\theta(r) e^{i\omega t}.$$

Ce comportement reflète la présence d'ondes électromagnétiques dans le système, avec des phases et des amplitudes modulées par la fréquence ω .

4.4.5 Effet du champ magnétique pulsé sur les muscles

Lorsque la machine de stimulation magnétique délivre des impulsions rapides, la variation temporelle du champ magnétique induit un champ électrique dans les tissus environnants. Dans les muscles, ce champ électrique peut provoquer la dépolarisation des membranes cellulaires en activant les canaux ioniques, ce qui génère un potentiel d'action. Cette excitation conduit à une contraction musculaire involontaire, exploitée en kinésithérapie pour améliorer la rééducation musculaire, augmenter la circulation sanguine et réduire la douleur.

4.5 Métrique d'une sphère

1. En utilisant que $d(\cos u) = -\sin u du$ et $d(\sin u) = \cos u du$, on obtient,

$$\begin{aligned}\frac{dx^2}{R^2} &= [-\sin \theta \sin \varphi d\varphi + \cos \theta \cos \varphi d\theta]^2 \\ &= (\sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 - 2 \sin \theta \sin \varphi d\varphi \cos \theta \cos \varphi d\theta + (\cos \theta \cos \varphi d\theta)^2 \\ \frac{dy^2}{R^2} &= [\sin \theta \cos \varphi d\varphi + \cos \theta \sin \varphi d\theta]^2 \\ &= (\sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 + 2 \sin \theta \sin \varphi d\varphi \cos \theta \cos \varphi d\theta + (\cos \theta \sin \varphi d\theta)^2 \\ \frac{dz^2}{R^2} &= \sin^2 \theta d\theta^2\end{aligned}$$

Ainsi, en ajoutant ces termes, et en utilisant que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on obtient,

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.5.1)$$

2. Grâce à l'éq 3.5.1, on a en factorisant par $d\theta^2$ dans la racine, on a,

$$\begin{aligned}ds &= R\sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} \\ &= R\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2} d\theta, \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta} \\ &= R\mathcal{L}d\varphi\end{aligned}$$

On remarque que $\partial_{\varphi'} \mathcal{L} = 0$, donc φ est une variable cyclique. Ainsi,

$$\partial_{\varphi'} \mathcal{L} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Où λ est une constante.

- 3.

$$\begin{aligned}\partial_{\varphi'} \mathcal{L} &= \lambda \in \mathbb{R} \\ \implies \frac{\varphi' \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} &= \lambda \\ \implies \varphi'^2 (\sin^4 \theta - \lambda^2 \sin^2 \theta) &= \lambda^2 \\ \implies d\varphi &= \lambda \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta}}}\end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant,

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 &= \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \alpha}}} \\ &=_{u=\cot \alpha} -\lambda \int_{\cot \varphi_0}^{\cot \varphi} \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2(1 + u^2)}} \\ &=_{t=\frac{u}{\beta}} -\frac{\lambda}{\beta} \int_{\frac{\cot \varphi_0}{\beta}}^{\frac{\cot \varphi}{\beta}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \beta^2 = 1 - \lambda^2 \\ &= \arccos\left(\frac{\cot \theta}{\beta}\right)\end{aligned}$$

On a ainsi,

$$\begin{aligned}\beta \cos(\varphi - \varphi_0) &= \cot \theta \\ \beta \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) &= \cos \theta\end{aligned}$$

En utilisant quelques formules trigonométriques, on obtient

$$\begin{aligned}R \times (\beta \cos \varphi_0 \cos \varphi \sin \theta + \beta \cos \varphi_0 \sin \varphi \sin \theta &= \cos \theta) \\ \implies ax + by - z &= 0\end{aligned}$$

On a ici substitué, grâce aux coordonnées sphériques, avec $a = \beta \cos \varphi_0 = b$.

4.6 Rayonnement du Corps Noir

4.6.1 Nombre de modes excités par unité de fréquences

1. C'est l'équation de D'Alembert dans le vide,

$$\square \mathbf{E} = 0$$

2. La cavité force une solution stationnaire, d'où

$$\mathbf{E} = \cos \omega t \sum_{\mu=1}^3 E^\mu \sin(k_\mu x^\mu) \mathbf{e}_\mu$$

On a pour chaque μ , $\mathbf{E}(x^\mu = L) = \mathbf{0}$, les conditions aux limites. Donc,

$$\begin{aligned} \sin(k_\mu L) &= 0 \\ k_\mu L &= n_\mu \pi \\ k_\mu &= \frac{n_\mu \pi}{L} \end{aligned}$$

3. On sait que la norme de \mathbf{k} doit être égale à la somme sur chaque composante,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{k}\|^2 &= \sum_{\mu} \left(\frac{n_\mu \pi}{L} \right)^2 \\ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 &= \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{\mu} n_\mu^2 \\ r^2 &= \left(\frac{2L}{\lambda} \right)^2 = \sum_{\mu} n_\mu^2 \end{aligned}$$

4. On a, le volume de modes de fréquences,

$$V(\|\mathbf{k}\|) = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2L}{\lambda} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi \|\mathbf{k}\|^3$$

Le nombre de modes est le volume de mode divisé par un volume élémentaire de mode, avec quelques facteurs. Ainsi, comme $k_\mu = \frac{\pi}{L} n_\mu$ et en prenant en compte que $n_\mu \in \mathbb{N}^*$, (facteur $\times \frac{1}{8}$), et la polarisation (facteur $\times 2$), on obtient,

$$\begin{aligned} \Rightarrow N &= \frac{V(\|\mathbf{k}\|)}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} \\ &= \frac{1}{8} \times 2 \frac{\frac{4}{3} \pi \|\mathbf{k}\|^3}{\pi^3} L^3 \\ &= \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{4}{3} \pi \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3}{\pi^3} \\ &= \pi \frac{8L^3}{\lambda^3} \\ &= \frac{8\pi \nu^3}{3c^3} L^3 \\ \Rightarrow \frac{dN}{d\nu} &= \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \mathcal{V} \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

4.6.2 Catastrophe Ultraviolette

1. Le système est en contact avec un thermostat de température T , et le système est fermé.
2. En 1D,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$$

3.

$$p(W = \varepsilon) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \varepsilon)$$

On a également en 1D,

$$Z = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\beta \mathcal{H}} dq dp$$

D'où,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}$$

Et,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta \frac{m\omega^2 q^2}{2}} dq = \sqrt{\frac{2\pi}{m\omega^2 \beta}}$$

D'où,

$$Z = \frac{1}{h} \frac{2\pi}{\omega \beta} = \frac{1}{h} \frac{T}{\beta}$$

4. On utilise la formule de la moyenne de l'énergie,

$$\langle W \rangle = -\partial_{\beta} \ln Z = \partial_{\beta} \ln \beta = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

5. Il est alors évident de dire que grâce à l'eq 4.6.2 et la question précédente,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T$$

D'où $u \propto \nu^2$, ce qui implique, $\int_{\mathbb{R}^+} u d\nu \propto \int_{\mathbb{R}^+} \nu^2 d\nu$, qui diverge.

4.6.3 Loi de Planck

1. Les niveaux d'énergies sont discrets, donc on somme :

$$Z = \sum_n e^{-\beta W_n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta W_1}}$$

Ainsi, l'énergie moyenne devient par le même calcul,

$$-\partial_{\beta} \ln Z = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

En utilisant, $W_1 = h\nu$.

2. Il est alors évident que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.6.2)$$

4.6.4 Flux énergétique émis par un corps noir

1. Flux énergétique monochromatique dans une direction donnée.

L'intensité spectrale directionnelle $I_{\nu}(\theta, \varphi)$ est définie comme l'énergie transportée par unité de surface, de temps, de fréquence et de stéradian, dans la direction (θ, φ) .

Le flux énergétique monochromatique émis dans la direction (θ, φ) par rapport à la normale à la surface est :

$$d\Phi_{\nu} = I_{\nu}(\theta, \varphi) \cos \theta d\Omega,$$

où $d\Omega$ est l'élément de solide d'angle autour de cette direction, et $\cos \theta$ vient de la projection du flux sur la normale à la surface (cf. fig 4.1).

2. Flux énergétique total émis à la fréquence ν .

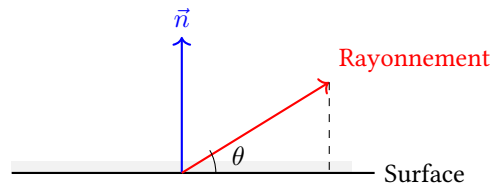


FIGURE 4.1 – Le rayonnement est émis avec un angle θ par rapport à la normale : seul $\cos \theta$ contribue au flux à travers la surface. En effet, il sort dans toutes les directions, on va devoir intégrer sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et seule la contribution de $\cos \theta$ (la projection), contribue.

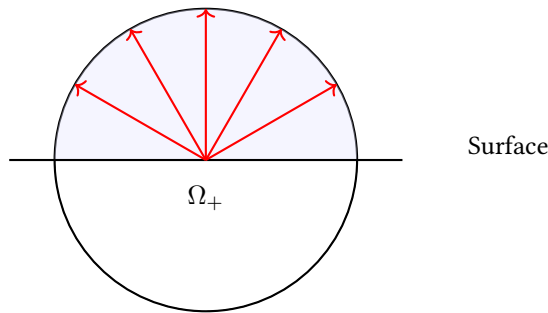


FIGURE 4.2 – Le rayonnement sort dans toutes les directions de l'hémisphère Ω_+ : on intègre seulement pour $\theta \in [0, \pi/2]$.

Le flux énergétique total $I(\nu)$ émis à la fréquence ν par unité de surface est obtenu en intégrant le flux élémentaire sur tout l'hémisphère sortant (i.e. directions telles que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, c.f. fig 4.2) :

$$I(\nu) = \int_{\Omega_+} I_\nu(\theta, \varphi) \cos \theta \, d\Omega.$$

3. Cas d'un rayonnement isotrope

Si le rayonnement est isotrope, on a $I_\nu(\theta, \varphi) = I_\nu = \text{constante}$ (indépendant de la direction). On peut donc sortir I_ν de l'intégrale :

$$I(\nu) = I_\nu \int_{\Omega_+} \cos \theta \, d\Omega.$$

Or :

$$\int_{\Omega_+} \cos \theta \, d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

On calcule :

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

D'où :

$$I(\nu) = I_\nu \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi I_\nu.$$

4. Intensité totale émise (toutes fréquences confondues)

On cherche à démontrer que la densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$ s'exprime en fonction de l'intensité directionnelle $I_\nu(\mathbf{n})$ par :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) \, d\Omega.$$

- $u(\nu) \, d\nu$ représente l'énergie électromagnétique contenue dans une unité de volume, pour des ondes dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$.
- $I_\nu(\mathbf{n})$ est l'intensité spectrale dans la direction \mathbf{n} , c'est-à-dire l'énergie transportée par unité de temps, par unité de surface perpendiculaire, par unité de fréquence, par unité d'angle solide.

Considérons une surface élémentaire ds et un faisceau de rayonnement incident selon une direction \mathbf{n}

faisant un angle θ avec la normale à ds .

Le volume V balayé par les rayons dans la direction \mathbf{n} pendant un petit intervalle de temps dt est donné par :

$$dV = c dt \cdot ds \cdot \cos \theta.$$

L'énergie transportée à travers la surface ds par ces rayons pendant ce temps est :

$$dE = I_\nu(\mathbf{n}) \cdot \cos \theta \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega.$$

On en déduit que l'énergie par unité de volume associée à la direction \mathbf{n} est :

$$\frac{dE}{dV} = \frac{I_\nu(\mathbf{n}) \cdot \cos \theta \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega}{c dt \cdot ds \cdot \cos \theta} = \frac{I_\nu(\mathbf{n})}{c} d\Omega.$$

Pour obtenir la densité d'énergie totale, on somme sur toutes les directions de propagation sur la sphère unité :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) d\Omega.$$

Si le rayonnement est isotrope, alors $I_\nu(\mathbf{n}) = I_\nu$ est indépendant de la direction. L'intégrale devient :

$$u(\nu) = \frac{I_\nu}{c} \int_{S^2} d\Omega = \frac{I_\nu}{c} \cdot 4\pi.$$

D'où,

$$u(\nu) = \frac{4\pi}{c} I_\nu$$

5. Lien entre l'intensité totale et $u(\nu)$

On reprend l'expression précédente :

$$I = \int_0^\infty \pi I_\nu d\nu,$$

et on injecte $I_\nu = \frac{c}{4\pi} u(\nu)$:

$$I = \int_0^\infty \pi \cdot \frac{c}{4\pi} u(\nu) d\nu = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu.$$

4.6.5 Loi de Stefan

1. On a démontré précédemment que,

$$I(T) = \frac{c}{4} \int_{\mathbb{R}^+} u(\nu, T) d\nu$$

On remplace par ce qui a été obtenu l'eq 4.6.2,

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{4} \frac{8\pi}{c^3} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \\ &= \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

Avec, on le rappelle, $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

2. En faisant un développement limité, on arrive facilement à éliminer la division par zéro. En effet, en 0,

$$e^x - 1 \underset{0}{=} x + o(x) \implies \frac{x^3}{e^x - 1} \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$$

Ce qui converge bien en 0. En ∞ , l'exponentielle permet la convergence de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= \int_{\mathbb{R}^+} dx x^3 e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} \\
 &\stackrel{\text{DSE}}{=} \int_{\mathbb{R}^+} dx x^3 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-nx} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} \int_{\mathbb{R}^+} du u^3 e^{-u} \\
 &= \zeta(4) \Gamma(4) \\
 &= 6\zeta(4)
 \end{aligned}$$

3. Grâce à la théorie de Fourier, on peut démontrer que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. On a alors,

$$I(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} T^4, \quad (4.6.3)$$

4.6.6 Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique

On considère le Soleil comme un corps noir à température $T = 5775$ K. La puissance totale rayonnée par le Soleil est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$P = I \cdot S = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2,$$

où

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-4}, \quad R = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$$

est le rayon du Soleil.

Calculons P :

$$P = 5,67 \times 10^{-8} \times (5775)^4 \times 4\pi(6,96 \times 10^8)^2.$$

On évalue :

$$\begin{aligned}
 (5775)^4 &\simeq 1,11 \times 10^{15}, \\
 4\pi(6,96 \times 10^8)^2 &= 4\pi \times 4,84 \times 10^{17} \simeq 6,08 \times 10^{18}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P \simeq 5,67 \times 10^{-8} \times 1,11 \times 10^{15} \times 6,08 \times 10^{18} \simeq 3,83 \times 10^{26} \text{ W}.$$

D'après la relation d'équivalence masse-énergie d'Einstein,

$$E = mc^2,$$

la perte de masse \dot{m} par unité de temps liée à cette puissance rayonnée est

$$\dot{m} = \frac{P}{c^2},$$

avec $c = 3,00 \times 10^8$ m/s.

Donc,

$$\dot{m} = \frac{3,83 \times 10^{26}}{(3,00 \times 10^8)^2} = \frac{3,83 \times 10^{26}}{9 \times 10^{16}} \simeq 4,26 \times 10^9 \text{ kg/s}.$$

Sachant que l'âge du Soleil est d'environ $t = 4,6 \times 10^9$ ans, soit

$$t = 4,6 \times 10^9 \times 3,15 \times 10^7 \simeq 1,45 \times 10^{17} \text{ s},$$

la masse totale perdue est

$$\Delta m = \dot{m} \times t = 4,26 \times 10^9 \times 1,45 \times 10^{17} \simeq 6,18 \times 10^{26} \text{ kg.}$$

En nombre de masses terrestres, avec $m_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$,

$$\frac{\Delta m}{m_T} = \frac{6,18 \times 10^{26}}{6 \times 10^{24}} \simeq 103.$$

Ainsi, le Soleil perd environ $4,3 \times 10^9 \text{ kg/s}$ par rayonnement. Depuis sa formation, il a perdu environ 100 fois la masse de la Terre.

4.7 Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule

4.7.1 Formule de Hadamard

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , et soit Ω_ε une déformation lisse de Ω telle que, pour $x \in \partial\Omega$,

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x) n(x),$$

prolongée en tout Ω . On souhaite démontrer :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x), \quad (4.7.1)$$

où dS est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

1. **Étude de la fonction** $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) *Différentiabilité de \det .*

Rappelons que pour $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}.$$

C'est donc un polynôme en les n^2 variables m_{ij} . Toute fonction polynomiale $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^∞ . En particulier, \det est différentiable en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notamment au voisinage de l'identité I .

(b) *Développement de $\det(I + \varepsilon M)$.*

On veut montrer :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(I + \varepsilon M) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 1 + \varepsilon \text{Tr}(M) + o(\varepsilon),$$

ce qui entraîne $\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det(I + \varepsilon M) = \text{Tr}(M)$.

Il suffit d'écrire M en matrice triangulaire supérieure, le déterminant devient alors le produit des valeurs propres !

Ainsi,

$$\det(I + \varepsilon M) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \text{Tr} M + o(\varepsilon)$$

Ce qui permet de conclure.

(c) On se ramène au cas précédent en factorisant par X .

$$\begin{aligned} \det(X + H) &= \det X \det(I + X^{-1}H) \\ &= \det X \left(1 + \text{tr}(X^{-1}H) + o(\|H\|) \right) \\ &= \det X + \text{tr}({}^t\text{Com}(X)H) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Ainsi on a alors,

$$d(\det(H))(X) = \text{Tr}({}^t\text{Com}(X)H)$$

2. **Changement de variables et calcul du jacobien.**

On effectue le changement de variable

$$x = x(u) = u + \varepsilon f(u) n(u), \quad u \in \Omega.$$

Pour calculer $\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$ au premier ordre en ε , on note

$$x_i(u) = u_i + \varepsilon f(u) n_i(u), \quad i = 1, \dots, n.$$

Alors

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} + \varepsilon \left(\partial_j f(u) \right) n_i(u) + \varepsilon f(u) \partial_j n_i(u).$$

Posons la matrice $A(u) = (\partial_j f n_i + f \partial_j n_i)_{i,j}$. On a donc $\frac{\partial x}{\partial u} = I + \varepsilon A(u)$. Par le développement précédent,

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \det(I + \varepsilon A(u)) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr}(A(u)) + o(\varepsilon).$$

En remarquant que $\operatorname{Tr}(A(u)) = \nabla \cdot (f n)$, on obtient

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 1 + \varepsilon \nabla \cdot (f n)(u) + o(\varepsilon).$$

3. Développement de $F(x + \varepsilon v(x))$.

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$, $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pour fixer x , définissons $\varphi(\varepsilon) = F(x + \varepsilon v(x))$. Par la règle de dérivation en chaîne en dimension 1,

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} F(x + \varepsilon v(x)) = v(x) \cdot \nabla F(x + \varepsilon v(x)).$$

En particulier, pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + o(\varepsilon) = F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F(x) + o(\varepsilon).$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F(x + \varepsilon v(x)) = F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F(x) + o(\varepsilon).$$

4. Obtention de la formule de Hadamard.

On fait le changement $x(u)$ dans $\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x$. Alors

$$\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\Omega} F(x(u)) \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) d^3u.$$

D'après les deux points précédents,

$$F(x(u)) = F(u) + \varepsilon f(u) n(u) \cdot \nabla F(u) + o(\varepsilon), \quad \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 1 + \varepsilon \nabla \cdot (f n)(u) + o(\varepsilon).$$

En multipliant et en ne retenant que le terme en ε , on trouve

$$F(x(u)) \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = F(u) + \varepsilon \left(F(u) \nabla \cdot (f n)(u) + f(u) n(u) \cdot \nabla F(u) \right) + o(\varepsilon).$$

Ainsi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\Omega} F(u) d^3u + \varepsilon \int_{\Omega} \left(F \nabla \cdot (f n) + f n \cdot \nabla F \right) d^3u + o(\varepsilon).$$

Or

$$F \nabla \cdot (f n) + f n \cdot \nabla F = \nabla \cdot (F f n),$$

donc par le théorème de la divergence,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (F f n) d^3u = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x).$$

Finalement,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x),$$

ce qui établit la formule de Hadamard (4.7.1).

4.7.2 Lien avec le potentiel gravitationnel

1. **Signe de $E[\Omega]$ et définition de $\mathcal{I}[\Omega]$.**

On a

$$E[\Omega] = -\frac{G}{2} \rho^2 \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'.$$

Comme $G > 0$ et $\rho > 0$, il suit immédiatement $E[\Omega] < 0$. Minimiser $E[\Omega]$ revient donc à *maximiser*

$$\mathcal{I}[\Omega] := \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'.$$

2. **Calcul du potentiel au centre d'une boule.**

Supposons $\Omega = B(0, R)$ de volume fixe $\frac{4}{3}\pi R^3 = V$. La densité est ρ . Pour $x = 0$,

$$U(0) = -G \rho \int_{\Omega} \frac{1}{|x'|} d^3x' = -G \rho \int_0^R \int_{S^2} \frac{1}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

En coordonnées sphériques,

$$\int_{S^2} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi, \quad \text{et} \quad \int_0^R \frac{r^2}{r} dr = \int_0^R r dr = \frac{R^2}{2}.$$

Donc

$$U(0) = -G \rho \cdot 4\pi \cdot \frac{R^2}{2} = -2\pi G \rho R^2.$$

D'où l'expression explicite du potentiel au centre.

4.7.3 La sphère ?

1. **Variation première de \mathcal{F} .**

On écrit $\mathcal{F}[\Omega_\varepsilon]$ et on applique la formule de Hadamard avec $F(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$. Alors

$$\delta \mathcal{F} = \frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \iint_{\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x - y|} dx dy.$$

Ainsi, on a en utilisant la formule de Hadamard pour Ω^2 ,

$$\delta \mathcal{F} = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x).$$

2. **Introduction du multiplicateur de Lagrange λ .**

On veut minimiser \mathcal{F} sous la contrainte $V[\Omega] = V$. On définit la fonctionnelle de Lagrange

$$\mathcal{L}[\Omega] := \mathcal{F}[\Omega] - \lambda V[\Omega], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sa variation première s'écrit

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{F} - \lambda \delta V = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x) - \lambda \int_{\partial\Omega} f(x) dS(x).$$

Par linéarité,

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial\Omega} \left(2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda \right) f(x) dS(x).$$

3. **Condition stationnaire pour la boule.**

Pour que $\delta \mathcal{L} = 0$ pour toute perturbation f , il faut et il suffit que

$$2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda = 0, \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega.$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$ est constante sur $\partial\Omega$.

Or si $\Omega = B(0, R)$ est une boule, alors, par symétrie sphérique, pour tout $x \in \partial B(0, R)$ (i.e. $|x| = R$), l'intégrale $\int_{B(0, R)} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$ ne dépend que de $|x| = R$.

Ainsi elle est *constante* sur ∂B . On en déduit que la boule satisfait la condition stationnaire $\delta\mathcal{L} = 0$ pour tout f .

4. **(Bonus) Variation seconde et minimum local.**

Pour montrer que la boule est un *minimum local* de \mathcal{F} sous contrainte V , il faut vérifier que la variation seconde $\delta^2\mathcal{L}[f]$ est strictement positive pour toute perturbation $f \neq 0$ satisfaisant $\int_{\partial\Omega} f dS = 0$.

Sans détails complets ici, on peut écrire la variation seconde sous la forme d'une forme bilinéaire :

$$\delta^2\mathcal{F}[f] = \int_{(\partial\Omega)^2} K(x, x') f(x) f(x') dS(x) dS(x') + \int_{\partial\Omega} f(x)^2 \kappa(x) dS(x),$$

avec un noyau $K(x, x') = \frac{1}{|x - x'|}$ et $\kappa(x)$ la courbure moyenne en x .

Pour la boule, grâce au développement en harmoniques sphériques, on montre que cette forme est strictement positive sur $\{f \mid \int_{\partial\Omega} f dS = 0\}$. Cela prouve que la boule est un minimum local.

5. **Conclusion physique.**

La boule minimise l'énergie gravitationnelle interne pour un volume fixé. En physique, cela explique que, dans l'approximation d'un corps massif autogravitant au repos, la configuration stationnaire de moindre énergie est sphérique. C'est la raison pour laquelle les grands objets de l'Univers (étoiles, planètes en l'absence de force de marée ou de rotation rapide) tendent vers une forme sphérique.

4.8 Mouvement relativiste d'une particule chargée \triangle

4.9 Hydrodynamique relativiste et collisions de noyaux lourds \triangle

4.10 Atome d'hydrogène et équation radiale

4.10.1 Séparation des variables et équation radiale

1. Séparation des variables

Le Hamiltonien de l'atome d'hydrogène, dans la base sphérique, s'écrit :

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}.$$

En coordonnées sphériques, le Laplacien est

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2},$$

où \mathbf{L}^2 est le carré du moment angulaire orbital.

On cherche une solution de la forme

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi),$$

où $Y_{\ell m}$ sont les harmoniques sphériques propres simultanées de \mathbf{L}^2 et \mathbf{L}_z , vérifiant

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}, \quad \mathbf{L}_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}.$$

En injectant dans l'équation de Schrödinger stationnaire $\mathbf{H}\psi = E\psi$, on obtient l'équation radiale suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right] - \frac{e^2}{r} R = ER.$$

En développant la dérivée radiale,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr},$$

ce qui donne l'équation annoncée :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right) - \frac{e^2}{r} R = ER.$$

2. Changement de fonction : $u(r) = rR(r)$

En posant $u(r) = rR(r)$, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}, \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r^3}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation radiale, les termes en u/r^3 s'annulent et on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u = Eu.$$

3. Changement de variable adimensionnelle

On définit

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m_e |E|}{\hbar^2}}, \quad \rho = \kappa r.$$

L'équation devient

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \kappa^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \left[\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u = Eu.$$

Comme $E = -|E|$, on divise toute l'équation par $-\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_e}$:

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{2m_e e^2}{\hbar^2 \kappa} \frac{1}{\rho} + 1 \right] u.$$

On pose alors

$$\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2 \kappa}.$$

Ce qui donne l'équation annoncée :

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{\rho_0}{\rho} + 1 \right] u.$$

4. Ansatz sur la forme de $u(\rho)$

On pose

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho/2} v(\rho).$$

En calculant la dérivée seconde de $u(\rho)$ et en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient que $v(\rho)$ satisfait :

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + (2\ell + 2 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + (\rho_0 - 2\ell - 2)v = 0.$$

Cette équation est celle de la fonction hypergéométrique confluyente.

5. Série en puissance et condition de terminaison

On développe

$$v(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k.$$

L'équation donne une relation de récurrence entre les coefficients c_k . En général, cette série diverge pour $\rho \rightarrow \infty$ sauf si la série est polynomiale, c'est-à-dire si elle s'arrête à un certain ordre fini \hat{k} . La condition de terminaison est

$$\rho_0 = 2n,$$

où

$$n = \hat{k} + \ell + 1 \in \mathbb{N}^*.$$

6. Expression des niveaux d'énergie liés

En réinjectant la définition de ρ_0 ,

$$\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2 \kappa} = 2n \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{m_e e^2}{2\hbar^2 n}.$$

Or

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_e} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Ce sont les niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène.

7. Degré de dégénérescence

Pour un niveau n , les valeurs possibles de ℓ sont

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

et pour chaque ℓ , les valeurs de m vont de

$$m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell,$$

soit $(2\ell+1)$ valeurs.

Le degré de dégénérescence est donc

$$g_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = 2 \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2.$$

Interprétation : Dans ce modèle non-relativiste sans prise en compte des interactions spin-orbite ni effets relativistes, l'énergie dépend uniquement du nombre quantique principal n . Ceci reflète la symétrie plus large du problème (invariance de rotation et symétrie de type Runge-Lenz), qui entraîne cette dégénérescence élevée.

4.10.2 État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales

7. Pour $n = 1$, $\ell = 0$, $n_r = 0$:

$$u(r) = A r e^{-r/a_0}, \quad \Rightarrow R(r) = \frac{u(r)}{r} = A e^{-r/a_0}.$$

La normalisation impose :

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = |A|^2 \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr = 1.$$

L'intégrale donne $2!(a_0/2)^3 = a_0^3/4 \Rightarrow |A|^2 = 4/a_0^3$. Donc :

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}.$$

L'harmonique sphérique est $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$, donc :

$$\psi_{1,0,0}(r, \theta, \phi) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^3} e^{-r/a_0}.$$

La normalisation est bien vérifiée :

$$\int |\psi|^2 d^3x = \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 d\Omega = 1.$$

8. La densité de probabilité radiale est :

$$P(r) = 4\pi |R(r)|^2 r^2 = 4\pi \left(\frac{2}{a_0^{3/2}} \right)^2 e^{-2r/a_0} r^2 = \frac{16\pi}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}.$$

Elle s'annule en $r = 0$ et pour $r \rightarrow \infty$; le maximum se trouve pour $r = a_0$. *Interprétation* : la probabilité maximale de trouver l'électron est au rayon de Bohr.

9. On utilise :

$$\int_0^\infty r^n e^{-2r/a_0} dr = n! \left(\frac{a_0}{2} \right)^{n+1}.$$

Pour $\langle r \rangle$:

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r |R(r)|^2 r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0} dr = \frac{4}{a_0^3} \cdot 3! \left(\frac{a_0}{2} \right)^4 = \frac{3}{2} a_0.$$

Pour $\langle r^2 \rangle$:

$$\int_0^\infty r^4 e^{-2r/a_0} dr = 4! (a_0/2)^5 = 24 (a_0/2)^5 \Rightarrow \langle r^2 \rangle = 3a_0^2.$$

Donc :

$$(\Delta r)^2 = 3a_0^2 - (3a_0/2)^2 = 3a_0^2 - \frac{9}{4}a_0^2 = \frac{3}{4}a_0^2.$$

10. La transformée de Fourier de l'état fondamental donne une distribution isotrope centrée sur $p = 0$. L'es-

perance à $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$ (fonction paire), et :

$$\langle p^2 \rangle = \int \tilde{\psi}^*(\mathbf{p}) p^2 \tilde{\psi}(\mathbf{p}) d^3p.$$

Elle peut se relier à l'énergie cinétique moyenne :

$$\langle T \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = -E_1 = \frac{1}{2}E_0. \Rightarrow \langle p^2 \rangle = m_e E_0.$$

11. La dépendance en $1/n^2$ explique la structure des raies décrites par la formule de Rydberg :

$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{R}_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Le nombre quantique principal n classe les niveaux d'énergie. En MQ non relativiste, ℓ n'influe pas sur E_n , contrairement au cas relativiste (effet Lamb, spin-orbite).

4.11 Vers un formalisme relativiste \triangle

4.12 Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \Delta$

4.13 Instabilité électrodynamique de l'atome classique

4.13.1 Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad} .

1.

$$dE_{\text{at}} = dW = \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt \implies \Delta E_{\text{at}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt \quad (4.13.1)$$

2. Attention, cette variation d'énergie est l'opposé de l'énergie rayonnée pendant le même intervalle :

$$dE_{\text{at}} = -P dt = -\frac{2e^2 a^2}{3c^3} dt = -\frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} dt \quad (4.13.2)$$

On obtient :

$$\Delta E_{\text{at}} = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2 dt \quad (4.13.3)$$

3. Par ailleurs, En intégrant par parties et en supposant une quasi-périodicité :

$$\Delta E_{\text{at}} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt \quad (4.13.4)$$

Par comparaison avec 4.13.1, une force candidate est la **force de freinage de radiation d'Abraham-Lorentz** :

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (4.13.5)$$

4. Considérons maintenant le **modèle de Thomson**, dans lequel l'électron est lié à l'origine par une force de rappel harmonique. L'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}} \quad (4.13.6)$$

On cherche une solution de la forme $\mathbf{r}(t) = \text{Re} [r(0)e^{i\omega t}]$. Le développement perturbatif :

$$\omega = \omega_0 [1 + a(\omega_0 \tau) + \mathcal{O}((\omega_0 \tau)^2)] \quad (4.13.7)$$

donne $a = \frac{1}{2}$, soit finalement :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0)e^{-\omega_0^2 \tau t} \cos(\omega_0 t) \quad (4.13.8)$$

Le mouvement est donc un oscillateur amorti. Le temps caractéristique d'amortissement, ou durée de vie typique de l'atome dans ce modèle, est :

$$T_{\text{nat}} = \frac{1}{\omega_0^2 \tau} \sim 10^{-8} \text{ s} \quad (4.13.9)$$

L'atome classique est ainsi fondamentalement instable : l'électron spirale vers le noyau, très lentement à l'échelle atomique (pseudo-période), mais très rapidement à l'échelle macroscopique.

4.13.2 Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad} .

1. L'équation à résoudre est :

$$\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t)$$

dont la solution générale est :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = v(t_0)e^{(t-t_0)/\tau} - \frac{1}{m\tau} \int_{t_0}^t e^{(t-t')/\tau} \mathbf{F}(t') dt' \quad (4.13.10)$$

2. Un phénomène inacceptable, que l'on appelle parfois *préaccélération d'une particule chargée*, apparaît : si $F = 0$, l'expression précédente montre clairement que l'accélération diverge exponentiellement aux grands temps.
3. On peut formellement éliminer les solutions divergentes en prenant $t_0 = +\infty$. Il s'agit d'une condition aux limites qui élimine de fait la « condition initiale ».
4. En prenant $t_0 = +\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= -\frac{1}{m\tau} \int_t^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} \mathbf{F}(t') dt' \\ &= -\frac{1}{m} \int_t^{+\infty} K(t-t') \mathbf{F}(t') dt' \end{aligned} \quad (4.13.11)$$

avec $K(t-t') = \frac{1}{\tau} e^{(t-t')/\tau}$.

Il s'agit ici de la *forme régularisée*, et ce d'autant plus que la limite de charge nulle reproduit bien l'Électrodynamique de la Force de Lorentz (EFD).

En effet, dans la limite $e \rightarrow 0$, on a $\tau \rightarrow 0$ et le noyau $K(t-t')$ tend vers une fonction de Dirac $\delta(t-t')$, ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t)$$

5. Il est déjà visible que l'accélération à l'instant t dépend des valeurs futures de la force. Cette équation viole donc le **principe de causalité**. Un changement de variable met cela en évidence. Posons $s = \frac{t'-t}{\tau}$, on obtient :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{1}{m} \int_0^{+\infty} e^{-s} \mathbf{F}(t+\tau s) ds \quad (4.13.12)$$

6. Avec une force échelon :

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathbf{F}_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} t < 0 : \quad \dot{\mathbf{v}}(t) &= -\frac{1}{m\tau} \int_0^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} \cdot 0 dt' = -\frac{\mathbf{F}_0}{m} e^{t/\tau} \\ t > 0 : \quad \dot{\mathbf{v}}(t) &= -\frac{\mathbf{F}_0}{m\tau} \int_t^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} dt' = -\frac{\mathbf{F}_0}{m} \end{aligned}$$