

Exercices de Physique Fondamentale

(niveau L3-M1)

Ryan Artero

Email : ryanartero2005@gmail.com

Version du 24 août 2025

Table des matières

Résumé	8
1 Introduction	10
2 Informations	12
2.1 Notations	12
2.2 Constantes fondamentales	13
2.3 Formulaire	14
2.3.1 Électromagnétisme	14
2.3.2 Relativité restreinte	14
2.3.3 Mécanique quantique	15
2.3.4 Physique statistique	15
2.3.5 Mécanique analytique	17
2.3.6 Physique subatomique	18
2.3.7 Optique ondulatoire	18
2.3.8 Thermodynamique	19
2.3.9 Relativité Générale	20
2.3.10 Opérateurs en coordonnées curvilignes	20
2.3.11 Identités trigonométriques	21
2.4 Légende des notations thématiques	22
2.5 Parcours suggéré en fonction du niveau	22
3 Exercices	24
3.1 Problème à deux corps et quantification de l'atome de Bohr	24
3.1.1 Centre de masse	25
3.1.2 Intégration des équations du mouvement	25
3.1.3 Quantification de Bohr	25
3.2 Section efficace de Rutherford	27

3.2.1	Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome	27
3.2.2	Section efficace de Rutherford	27
3.3	Effet Cherenkov	28
3.4	Machine à champ magnétique pulsé	29
3.5	Métrie sur une sphère	30
3.6	Rayonnement du Corps Noir	31
3.6.1	Nombre de modes excités par unité de fréquences	31
3.6.2	Catastrophe Ultraviolette	31
3.6.3	Loi de Planck	32
3.6.4	Flux énergétique émis par un corps noir	32
3.6.5	Loi de Stefan	33
3.6.6	Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique . .	33
3.7	Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule	34
3.7.1	Formule de Hadamard	34
3.7.2	Lien avec le potentiel gravitationnel	35
3.7.3	La sphère ?	35
3.8	Mouvement relativiste d'une particule chargée	37
3.8.1	Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	37
3.8.2	Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane	38
3.8.3	Théorie des Champs	38
3.8.4	Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant . .	39
3.8.5	Physique des collisionneurs relativistes	40
3.9	Hydrodynamique relativiste	41
3.9.1	Hydrodynamique classique	41
3.9.2	Introduction à l'hydrodynamique relativiste	41
3.9.3	Équation du mouvement relativiste	43
3.9.4	Application aux collisions de noyaux lourds	43
3.10	Atome d'hydrogène et équation radiale	44
3.10.1	Séparation des variables et équation radiale	44
3.10.2	État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales	45
3.11	Vers un formalisme relativiste \triangle	46
3.11.1	De Klein–Gordon à Dirac (factorisation algébrique, méthode historique) . .	46
3.11.2	Construction des matrices de Dirac, algèbre de Clifford et formalisme lagrangien	47

3.11.3	Ondes planes, projecteurs, identité de Gordon et positivité du densité	47
3.11.4	Couplage minimal et limite non-relativiste (procédure pas à pas)	48
3.11.5	Opérateurs angulaires et construction des spineurs sphériques $\Omega_{\kappa m}$ — notations vectorielles explicites	48
3.11.6	Hydrogène relativiste : séparation radiale et dérivation des niveaux sans théorie spécialisée des fonctions spéciales	51
3.12	Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$	53
3.13	Instabilité électrodynamique de l’atome classique	55
3.13.1	Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad}	55
3.13.2	Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad}	55
3.14	Géodésiques dans un milieu optique \triangle	57
3.14.1	Principe de Fermat et métrique optique	57
3.14.2	Calcul d’un indice $n(\mathbf{r}, \lambda)$	57
3.14.3	Calcul de $N(\mathbf{r})$ pour un gaz et un liquide	58
3.14.4	Géodésiques optiques dans un milieu sphérique	58
3.14.5	1 ^{ère} application : l’arc-en-ciel comme manifestation géométrique de la dispersion	60
3.14.6	2 ^{ème} application : couleurs des bulles de savon (interférences en lame mince) [1]	62
3.14.7	3 ^{ème} application : les mirages [2]	64
3.14.8	4 ^{ème} application : géodésiques optiques au coucher de Soleil — modèle linéaire	65
3.14.9	5 ^{ème} application : diffusion Rayleigh et couleur du ciel	66
3.15	Condensation de Bose-Einstein	67
3.16	Chaîne de désintégration	68
3.16.1	Modélisation physique de la chaîne de désintégration	68
3.16.2	Étude mathématique du système différentiel	68
3.17	Principe de moindre action et équations d’Einstein	70
3.17.1	De la géométrie classique à la géométrie lorentzienne	70
3.17.2	Dynamique des particules en espace-temps courbe	71
3.17.3	Courbure et action d’Einstein-Hilbert	72
3.17.4	Principe de moindre action et équations d’Einstein	72
3.18	Particule quantique proche d’un trou noir	74
3.18.1	Temps propre et potentiel gravitationnel relativiste	74
3.18.2	Expansion autour de l’horizon	74
3.18.3	Analyse quantique du potentiel linéaire	75
3.18.4	Étude asymptotique des zéros de A_i	75

3.18.5	Horizon, absorption et décohérence	82
3.18.6	Ouverture : rayonnement de Hawking et température thermique	82
4	Correction des exercices	86
4.1	Problème à deux corps	86
4.1.1	Centre de masse	86
4.1.2	Intégration des équations du mouvement	86
4.1.3	Quantification de Bohr	89
4.2	Section efficace de Rutherford	91
4.2.1	Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome	91
4.2.2	Section efficace de Rutherford	91
4.3	Effet Cherenkov	92
4.4	Machine à champ magnétique pulsé	94
4.5	Métrie d'une sphère	96
4.6	Rayonnement du Corps Noir	98
4.6.1	Nombre de modes excités par unité de fréquences	98
4.6.2	Catastrophe Ultraviolette	99
4.6.3	Loi de Planck	99
4.6.4	Flux énergétique émis par un corps noir	100
4.6.5	Loi de Stefan	102
4.6.6	Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique	102
4.7	Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule	104
4.7.1	Formule de Hadamard	104
4.7.2	Lien avec le potentiel gravitationnel	106
4.7.3	La sphère ?	106
4.8	Mouvement relativiste d'une particule chargée	108
4.8.1	Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	108
4.8.2	Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane – Correction	111
4.8.3	Théorie des Champs	115
4.8.4	Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant	116
4.8.5	Physique des collisionneurs relativistes	117
4.9	Hydrodynamique relativiste	119
4.9.1	Hydrodynamique classique	119
4.9.2	Introduction à l'hydrodynamique relativiste	121

4.9.3	Équation du mouvement relativiste	124
4.9.4	Application aux collisions de noyaux lourds	126
4.10	Atome d'hydrogène et équation radiale	129
4.10.1	Séparation des variables et équation radiale	129
4.10.2	État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales	131
4.11	Vers un formalisme relativiste \triangle	133
4.12	Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$	134
4.13	Instabilité électrodynamique de l'atome classique	137
4.13.1	Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad}	137
4.13.2	Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad}	138
4.14	Géodésiques dans un milieu optique \triangle	139
4.15	Condensat de Bose-Einstein	140
4.16	Chaîne de désintégration	143
4.16.1	Modélisation physique	143
4.16.2	Étude mathématique	144
4.17	Principe de moindre action et équations d'Einstein	147
4.17.1	De la géométrie classique à la géométrie lorentzienne	147
4.17.2	Variétés pseudo-riemanniennes et géodésiques	149
4.17.3	Courbure et action d'Einstein-Hilbert	151
4.17.4	Principe de moindre action et équations d'Einstein	152
4.18	Particule quantique proche d'un trou noir	154
4.18.1	Temps propre et potentiel gravitationnel relativiste	154
4.18.2	Expansion autour de l'horizon	155
4.18.3	Analyse quantique du potentiel linéaire	155
4.18.4	Étude asymptotique des zéros de A_i	157
4.18.5	Horizon, absorption et décohérence	167
4.18.6	Ouverture : rayonnement de Hawking et température thermique	167

Bibliographie

173

Résumé

Ce document rassemble une sélection d'exercices originaux de physique fondamentale, construits dans une perspective transversale et progressive, allant de la Licence 3 au Master 1. Chaque exercice est accompagné d'un corrigé détaillé (lorsqu'il est disponible), et se place dans un contexte historique, théorique ou applicatif rigoureux. Les thématiques abordées incluent la relativité restreinte, la mécanique quantique, la physique statistique, l'électrodynamique, ainsi que des incursions en physique mathématique. Une classification par niveau est proposée pour guider le lecteur dans sa progression.

Chapitre 1

Introduction

Ce document est une compilation d'exercices de Physique Fondamentale que j'ai conçus avec passion, dans l'esprit d'un cours de fin de Licence 3 / Master 1, et plus. L'objectif est double : proposer des problèmes rigoureux, inspirants, faisant appel à la beauté formelle et conceptuelle de la physique, et offrir une base solide pour les étudiants souhaitant approfondir les grandes théories classiques et modernes. Je souhaite partager ma passion pour la physique qui sort du cadre imposé en cours, utilisant des notions transverses aux différents domaines de la physique.

Chaque exercice mobilise des notions précises (indiquées entre parenthèses, comme **(RR)** pour Relativité Restreinte, **(MQ)** pour Mécanique Quantique, etc.), et est accompagné, progressivement, d'une correction détaillée, qui est accessible en cliquant sur la parenthèse "(Correction)". Les exercices sont notés avec des étoiles (c.f. 2.1), vous êtes libre de faire l'exercice qui vous intrigue le plus.

Étant en première année de Master 1 de Physique Fondamentale à la Sorbonne, (campus Pierre et Marie Curie), je souhaite que cette fiche soit vivante : les corrections seront complétées régulièrement. Enfin, dans la partie correction, en cliquant sur les titres d'exercice (que ce soit en entête ou au début de la correction), vous pouvez retourner sur l'exercice en question.

J'espère qu'en lisant et en travaillant ces exercices, vous y trouverez autant de plaisir que j'en ai eu à les écrire.

Chapitre 2

Informations

2.1 Notations

1. Les quantités vectorielles sont notées en gras, sauf l'opérateur ∇ , qui ne sera jamais noté en gras. Les quantités 4-vectorielles (en relativité) seront noté avec une lettre grecque soit en exposant si contravariant, et en indice si covariant.

Exemple : \mathbf{v} pour la vitesse, ∇p pour le gradient de pression (qui est vectoriel !) et x^μ pour la position dans l'espace temps en contravariant. A contrario, en Mécanique Quantique, on notera les vecteurs avec des ket et les opérateurs en gras. **Exemple :** $|\psi\rangle$ pour un vecteur ψ et \mathbf{H} pour l'Hamiltonien.

2. La notation d désigne l'opérateur différentiel.

3. L'écriture ∂_u signifie implicitement $\frac{\partial}{\partial u}$ si u est une variable, et $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ en relativité.

4. $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ en coordonnées cartésiennes, est un opérateur qui définit proprement le gradient, divergence et rotationnel. En effet, ∇f désigne le gradient de f , $\nabla \cdot \mathbf{F}$ désigne la divergence de \mathbf{F} , et $\nabla \times \mathbf{F}$ désigne le rotationnel de \mathbf{F} . L'opérateur $\partial_\mu \partial^\mu = \square$ désigne l'Alembertien, invariant sous transformations de Lorentz.

5. La notation \dot{x} désigne une dérivée par rapport au temps t c'est à dire $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Dans un exercice de relativité, la notation privilégiée sera $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, τ le temps propre et $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

6. La notation f' désigne la dérivée par rapport à la variable x soit, $f' = \frac{df}{dx}$

7. La notation $[A]$ désigne l'unité de la grandeur A .

8. La notation $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}$ désigne respectivement les ensembles des nombres réels, complexes et naturels.

9. La métrique de la relativité restreinte utilisée sera $g_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$. Par ailleurs, on rappelle que $a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu$.

10. Les étoiles évaluent le niveau de difficulté des exercices. Cela va de 1 : ★ à 5 étoiles : ★★★★★.

Les critères d'évaluation de difficulté sont liés à la longueur de l'exercice, sa difficulté technique et mathématique et du niveau nécessaire (L3, M1, M2) pour être à l'aise avec les notions utilisées.

11. La notation \triangle indique que la correction de l'exercice est en cours de rédaction.

2.2 Constantes fondamentales

Constante	Valeur exacte	Unités
Constante de Planck	$h = 6.62607015 \times 10^{-34}$	J s
Constante de Dirac	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571817 \times 10^{-34}$	J s
Vitesse de la lumière	$c = 299792458$	m s ⁻¹
Charge élémentaire	$e = 1.602176634 \times 10^{-19}$	C
Masse de l'électron	$m_e = 9.1093837015 \times 10^{-31}$	kg
Masse du proton	$m_p = 1.67262192369 \times 10^{-27}$	kg
Masse du neutron	$m_n = 1.675 \times 10^{-27}$	kg
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$	F m ⁻¹
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$	N A ⁻²
Constante gravitationnelle	$G = 6.67430 \times 10^{-11}$	m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$	J K ⁻¹
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6.02214076 \times 10^{23}$	mol ⁻¹
Constante des gaz parfaits	$R = 8.314462618$	J mol ⁻¹ K ⁻¹
Température de référence (0°C)	$T_0 = 273.15$	K
Masse du soleil	$M_\odot = 1.98892 \times 10^{30}$	kg

TABLE 2.1 – Constantes fondamentales de la physique avec leurs valeurs exactes.

2.3 Formulaire

2.3.1 Électromagnétisme

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Absence de monopôles magnétiques}) \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Loi d'Ampère-Maxwell}) \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \varphi = \mathbf{E} \quad (\text{Lien potentiel vecteur et champ EM}) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{Déplacement électrique}) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (\text{Polarisation}) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (\text{Champ magnétique auxiliaire}) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (\text{Aimantation}) \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e, \quad \mu_r = 1 + \chi_m \quad (\text{Relations aux susceptibilités}) \quad (2.10)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (\text{Vitesse dans le milieu}) \quad (2.11)$$

$$\square \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Équation d'onde dans le vide}) \quad (2.12)$$

$$\gamma = \sigma + i\omega\varepsilon \quad (\text{Conductivité complexe}) \quad (2.13)$$

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \quad (\text{Puissance de Larmor}) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{Vecteur de Poynting}) \quad (2.15)$$

2.3.2 Relativité restreinte

$$E = \gamma m c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (\text{Énergie relativiste}) \quad (2.16)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{Facteur de Lorentz}) \quad (2.17)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (\text{Transformation de Lorentz}) \quad (2.18)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (\text{Transformation du temps}) \quad (2.19)$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (\text{Vecteur impulsion relativiste}) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (\text{Vecteur impulsion du photon}) \quad (2.22)$$

2.3.3 Mécanique quantique

$\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$	(Opérateur impulsion)	(2.23)
$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \psi\rangle = \mathbf{H} \psi\rangle$	(Équation de Schrödinger)	(2.24)
$[\mathbf{X}_i, \mathbf{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}$	(Commutation canonique)	(2.25)
$\langle\psi \mathbf{A} \psi\rangle = \langle A \rangle$	(Valeur moyenne)	(2.26)
$(\Delta A)^2 = \langle\psi (\mathbf{A} - \langle A \rangle)^2 \psi\rangle$	(Variance d'un observable)	(2.27)
$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \langle\psi [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \psi\rangle $	(Inégalité de Heisenberg)	(2.28)
$\mathbf{U}(t) = e^{-i\mathbf{H}t/\hbar}$	(Évolution unitaire)	(2.29)
$\mathbf{H} E_n\rangle = E_n E_n\rangle$	(États propres stationnaires)	(2.30)
$\mathbb{P}(a_n) = \langle a_n \psi\rangle ^2$	(Probabilité de Born)	(2.31)
$\mathbf{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger), \quad \mathbf{P} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a})$	(Oscillateur harmonique)	(2.32)
$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{1}$	(Commutateur)	(2.33)
$\mathbf{H} = \hbar\omega\left(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\right)$	(Hamiltonien oscillateur)	(2.34)
$\mathbf{N} = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}, \quad \mathbf{N} n\rangle = n n\rangle$	(Nombre de quanta)	(2.35)
$\mathbf{L}_i = \varepsilon_{ijk}\mathbf{X}_j\mathbf{P}_k$	(Moment cinétique orbital)	(2.36)
$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\mathbf{J}_k$	(Algèbre de Lie de $SU(2)$)	(2.37)
$[\mathbf{H}, \mathbf{A}] = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \text{constante d'évolution}$	(Symétrie et conservation)	(2.38)

2.3.4 Physique statistique

Ensemble canonique (système en contact avec un thermostat, à nombre de particules fixés)

$\beta = \frac{1}{k_B T}$	(Énergie de température)	(2.39)
$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$	(Fonction de partition)	(2.40)
$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$	(Probabilité d'occupation du niveau n)	(2.41)
$\langle E \rangle = \sum_n E_n P_n = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$	(Énergie moyenne)	(2.42)
$\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$	(Fluctuation de l'énergie)	(2.43)
$S = -k_B \sum_n P_n \ln P_n$	(Entropie statistique de Shannon)	(2.44)
$F = -k_B T \ln Z$	(Énergie libre de Helmholtz)	(2.45)
$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$	(Lien avec la thermodynamique)	(2.46)

Ensemble grand-canonique (système en contact avec un réservoir de particules et de chaleur) :

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_n e^{-\beta(E_{n,N} - \mu N)} \quad (\text{Grande fonction de partition}) \quad (2.47)$$

$$\mathcal{Z} = \prod_i \xi_i \quad (\text{Factorisation sur les états}) \quad (2.48)$$

$$\xi_i = \sum_{n_i} e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i} \quad (\text{Partition pour l'état } i) \quad (2.49)$$

$$\mathcal{J} = -k_B T \ln \mathcal{Z} \quad (\text{Grand potentiel}) \quad (2.50)$$

$$\mathcal{J} = -k_B T \sum_i \ln \xi_i \quad (\text{Grand potentiel, version factorisée}) \quad (2.51)$$

$$P = - \left(\frac{\mathcal{J}}{V} \right) \quad (\text{Pression}) \quad (2.52)$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \quad (\text{Nombre moyen de particules}) \quad (2.53)$$

$$\langle E \rangle = - \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} + \mu \langle N \rangle \quad (\text{Énergie moyenne}) \quad (2.54)$$

$$S = - \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial T} \right)_{V, \mu} \quad (\text{Entropie}) \quad (2.55)$$

$$F = \langle E \rangle - TS = \mathcal{J} + \mu \langle N \rangle \quad (\text{Lien avec l'énergie libre}) \quad (2.56)$$

2.3.5 Mécanique analytique

$$\mathcal{L} = T - V \quad (\text{Lagrangien}) \quad (2.57)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\text{Équations de Lagrange}) \quad (2.58)$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF(q, t)}{dt} \quad (\text{Non-unicité du Lagrangien}) \quad (2.59)$$

$$\mathcal{S}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (\text{Action}) \quad (2.60)$$

$$\delta \mathcal{S} = 0 \quad (\text{Principe de moindre action}) \quad (2.61)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\text{Moment conjugué}) \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \Rightarrow p_\alpha = \text{Cte} \quad (\text{Variable cyclique}) \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha - \mathcal{L} = \text{Cte} \quad (\text{Identité de Beltrami}) \quad (2.64)$$

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - \mathcal{L} \quad (\text{Hamiltonien}) \quad (2.65)$$

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} \quad (\text{Équations de Hamilton}) \quad (2.66)$$

$$\{f, g\} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right) \quad (\text{Crochet de Poisson}) \quad (2.67)$$

$$\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{Évolution temporelle}) \quad (2.68)$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial F}{\partial P_\alpha}, \quad p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \quad (\text{Transformation canonique}) \quad (2.69)$$

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{Nouvel Hamiltonien}) \quad (2.70)$$

2.3.6 Physique subatomique

$$\begin{aligned} d\Omega &= \sin \theta \, d\theta \, d\varphi && \text{(Angle solide élémentaire)} && (2.71) \\ \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega && \text{(Section efficace totale)} && (2.72) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta, \varphi)|^2 && \text{(Section efficace différentielle)} && (2.73) \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2 \sin \theta} \left| \frac{db^2}{d\theta} \right| && \text{(Sect. efficace diff. classique)} && (2.74) \\ B &= [Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)] c^2 && \text{(Énergie de liaison du noyau)} && (2.75) \\ Q &= [m_{\text{initial}} - m_{\text{final}}] c^2 && \text{(Énergie libérée dans une réaction)} && (2.76) \\ N(t) &= N_0 e^{-\lambda t} && \text{(Loi de décroissance radioactive)} && (2.77) \\ \tau &= \frac{1}{\lambda}, \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} && \text{(Durée de vie moyenne, demi-vie)} && (2.78) \\ \frac{dN_i}{dt} &= -\lambda_i N_i + \lambda_{i-1} N_{i-1} && \text{(Désintégration en chaîne)} && (2.79) \end{aligned}$$

2.3.7 Optique ondulatoire

$$\begin{aligned} j^2 &= -1 && \text{(Nombre imaginaire)} && (2.80) \\ \psi(x) &= \psi_0 e^{jk\delta} && \text{(Onde plane monochromatique)} && (2.81) \\ d\psi &= \psi_0 e^{j\varphi(x)} dx && \text{(Élément de champ diffracté)} && (2.82) \\ \psi(M) &= \int \psi_0(x) e^{j\varphi(x)} dx && \text{(Champ diffracté - intégrale de Fresnel)} && (2.83) \\ \varphi(x) &= \frac{(x - x')^2}{2z} && \text{(Phase dans l'approximation de Fresnel)} && (2.84) \\ I(x) &= I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(x) \right) \right] && \text{(Interférences à deux ondes)} && (2.85) \\ I &= \left| \int_A^B d\psi \right|^2 && \text{(Principe de superposition - intensité)} && (2.86) \\ L_{AB} &= \int_A^B n(\mathbf{r}) ds && \text{(Chemin optique)} && (2.87) \\ \varphi &= k\delta = \frac{2\pi}{\lambda} L_{AB} && \text{(Déphasage associé)} && (2.88) \\ i &= \frac{\lambda D}{a} && \text{(Interfrange en approximation de Fraunhofer)} && (2.89) \end{aligned}$$

2.3.8 Thermodynamique

$$dU = TdS - pdV + \mu dN \quad (\text{Premier principe}) \quad (2.90)$$

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (\text{Second principe}) \quad (2.91)$$

$$F = U - TS \quad (\text{Énergie libre de Helmholtz}) \quad (2.92)$$

$$G = U + pV - TS = \mu N \quad (\text{Énergie libre de Gibbs}) \quad (2.93)$$

$$H = U + pV \quad (\text{Enthalpie}) \quad (2.94)$$

$$pV = Nk_B T = nRT \quad (\text{Gaz parfait}) \quad (2.95)$$

$$U = \frac{f}{2} Nk_B T \quad (\text{Énergie interne, } f \text{ degrés de liberté}) \quad (2.96)$$

$$= \frac{3}{2} Nk_B T \quad (\text{Gaz parfait monoatomique}) \quad (2.97)$$

$$= \frac{5}{2} Nk_B T \quad (\text{Gaz parfait diatomique à haute } T) \quad (2.98)$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{f}{2} Nk_B \quad (\text{Chaleur spécifique à volume constant}) \quad (2.99)$$

$$C_P = C_V + Nk_B = \frac{f+2}{2} Nk_B \quad (\text{Chaleur spécifique à pression constante}) \quad (2.100)$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{f+2}{f} \quad (\text{Coefficient adiabatique}) \quad (2.101)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,p} \quad (\text{Potentiel chimique}) \quad (2.102)$$

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (\text{Pression via énergie libre}) \quad (2.103)$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad (\text{Entropie via énergie libre}) \quad (2.104)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad (\text{Relation de Maxwell}) \quad (2.105)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \quad (\text{Relation de Maxwell}) \quad (2.106)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T \quad (\text{Définition de la température}) \quad (2.107)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -p \quad (\text{Définition de la pression}) \quad (2.108)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (\text{Équilibre hydrostatique}) \quad (2.109)$$

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \quad (\text{Atmosphère isotherme}) \quad (2.110)$$

2.3.9 Relativité Générale

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{Intervalle d'espace-temps}) \quad (2.111)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (\text{Symbole de Christoffel}) \quad (2.112)$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (\text{Tenseur de Riemann}) \quad (2.113)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho \quad (\text{Tenseur de Ricci}) \quad (2.114)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{Scalaire de Ricci}) \quad (2.115)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (\text{Tenseur d'Einstein}) \quad (2.116)$$

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x + S_{\text{mat}} \quad (\text{Action d'Einstein-Hilbert}) \quad (2.117)$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{Éq. d'Einstein}) \quad (2.118)$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{Tenseur énergie-impulsion}) \quad (2.119)$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{Éq. des géodésiques}) \quad (2.120)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{Conservation locale de l'énergie}) \quad (2.121)$$

$$\sqrt{-g} d^4x \quad (\text{Élément de volume invariant}) \quad (2.122)$$

$$\det(g_{\mu\nu}) = g \quad (\text{Déterminant de la métrique}) \quad (2.123)$$

$$(2.124)$$

2.3.10 Opérateurs en coordonnées curvilignes

Coordonnées cylindriques :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (2.125)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.126)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \quad (2.127)$$

$$+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (2.128)$$

$$+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.129)$$

Coordonnées sphériques :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (2.130)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (2.131)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \quad (2.132)$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta \quad (2.133)$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi \quad (2.134)$$

2.3.11 Identités trigonométriques

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1, \quad 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}. \quad (2.135)$$

Formules d'addition

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b), \quad (2.136)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b). \quad (2.137)$$

Formules de duplication

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta), \quad (2.138)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta). \quad (2.139)$$

Ces formules sont très utiles pour les changements de variables en intégration.

Expression de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}. \quad (2.140)$$

Changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Ce changement de variable est souvent utilisé pour simplifier les intégrales trigonométriques. On a également :

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt. \quad (2.141)$$

2.4 Légende des notations thématiques

- **(RR)** : Relativité Restreinte
- **(MQ)** : Mécanique Quantique
- **(EM)** : Électromagnétisme
- **(MA)** : Mécanique Analytique
- **(PS)** : Physique Statistique
- **(FS)** : Physique Subatomique
- **(OO)** : Optique Ondulatoire
- **(TH)** : Thermodynamique
- **(RG)** : Relativité Générale

2.5 Parcours suggéré en fonction du niveau

Pour aider les lecteurs à naviguer dans cette collection dense d'exercices, voici quelques suggestions de parcours selon votre niveau et vos objectifs. Bien entendu, chaque étudiant reste libre d'explorer les problèmes qui l'inspirent.

Niveau	Exercices recommandés
Début Licence 3	3.1 – Problème à deux corps 3.2 – Section efficace de Rutherford 3.4 – Machine à champ magnétique pulsé 3.13 - Instabilité électrodynamique de l'atome classique
Fin de Licence 3 / Début Master 1	3.3 – Effet Cherenkov 3.5 – Métrique sur une sphère 3.6 – Rayonnement du corps noir 3.10 – Atome d'hydrogène et équation radiale 3.12 – Potentiel de Pöschl-Teller 3.14 - Géodésiques dans un milieu optique 3.15 - Condensat de Bose-Einstein 3.16 - Chaîne de désintégration
Master 1 avancé	3.7 – Minimisation du potentiel gravitationnel 3.8 – Particule chargée relativiste 3.9 – Hydrodynamique relativiste 3.11 – Vers un formalisme relativiste 3.17 - Principe de moindre action et équations d'Einstein 3.18 - Une simple particule quantique proche d'un trou noir

Chapitre 3

Exercices

Ce recueil d'exercices a été conçu avec l'ambition de dépasser la simple pratique mécanique des méthodes. Chaque énoncé vise à faire émerger une certaine forme d'élégance mathématique ou de profondeur physique — un regard attentif y découvrira, derrière les équations et les techniques, une cohérence subtile, parfois même une beauté formelle. Certains exercices sont exigeants, tant par leur longueur que par leur structure : ils s'inspirent parfois de sujets de concours ou de situations physiques réalistes, et peuvent nécessiter plusieurs heures de réflexion. Leur objectif n'est pas seulement de renforcer les compétences techniques, mais de faire ressentir, à travers la résolution progressive, l'unité profonde entre la rigueur mathématique et la réalité physique qu'elle décrit. Ce chapitre est évolutif : de nouveaux problèmes y seront ajoutés régulièrement, dans le même esprit d'élégance, de clarté, et de profondeur.

3.1 Problème à deux corps et quantification de l'atome de Bohr [3] (MA) ★★★

(Correction)

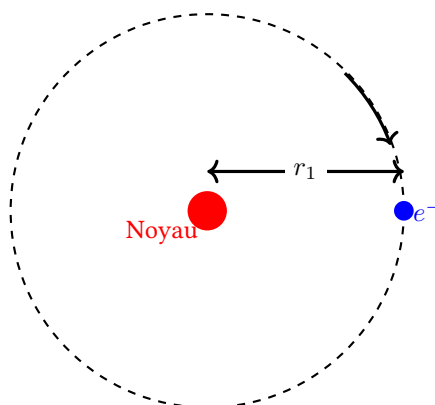


FIGURE 3.1 – Schéma de l'atome de Bohr.

Considérons un système de deux particules de masses m_1 et m_2 interagissant via un potentiel cen-

tral $V(r) = -\frac{C}{r} = -\frac{\vartheta^2}{r}$ ¹, où r est la distance entre les deux particules et C est une constante réelle. Ici on utilise le potentiel coulombien, mais on pourrait très bien utiliser un potentiel gravitationnel. On essaiera ici d'étudier en détail les états liés de l'atome d'hydrogène d'après l'ancienne théorie des quanta et d'obtenir en particulier l'énergie associée à une trajectoire donnée de l'électron de masse m_1 autour du noyau de masse m_2 .

3.1.1 Centre de masse

On désigne $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ les rayons vecteurs de l'électron et du noyaux par rapport à un repère quelconque, et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ les vitesses correspondantes.

1. Écrire le lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
2. On introduit \mathbf{R} le rayon vecteur du centre de masse et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Montrer que le Lagrangien peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathcal{L}_G(\mathbf{V}) + \mathcal{L}_r(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (3.1)$$

3. Expliquer pourquoi le moment cinétique total du centre de masse G, \mathbf{J} , est une constante du mouvement. En tirer une conclusion sur la trajectoire.

Dans la suite, on examine exclusivement le mouvement interne par \mathcal{L}_r en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan perpendiculaire à \mathbf{J} .

3.1.2 Intégration des équations du mouvement

1. Écrire l'hamiltonien \mathcal{H} du mouvement interne et écrire les équation d'Hamilton. Retrouver la conservation du mouvement cinétique et interpréter l'équation où ne figurent que $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$.
2. Déterminer la relation entre r, θ , c'est à dire, de trouver la trajectoire. Pour cela, éliminer le temps des équations obtenus précédemment en posant $u = \frac{1}{r}$, et montrer que,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = K, \quad K = \frac{\mu \vartheta^2}{J^2} \quad (3.2)$$

3. En déduire finalement que la trajectoire est une conique, dont l'équation peut toujours être mise sous la forme,

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (3.3)$$

Donner l'expression de p paramètre de la conique et de ε , l'excentricité. Vérifier que la valeur de ε par rapport à 1 conditionne la nature de l'état correspondant (lié ou non lié).

3.1.3 Quantification de Bohr

Dans cette partie, ne considérant que les états liés ($E < 0$), on applique les règles de Bohr afin de faire le tri parmi toutes les trajectoires classiquement envisageables. Ces règles portent sur les variables d'actions J_θ, J_r et s'écrivent,

$$J_\theta := \oint p_\theta d\theta = n_\theta h \quad (3.4)$$

$$J_r := \oint p_r dr = n_r h \quad (3.5)$$

$$n_\theta, n_r \in \mathbb{Z} \quad (3.6)$$

1. On notera $\vartheta^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

1. Trouver les valeurs possibles du moment cinétique J en conséquence de la quantification de J_θ . Préciser les valeurs possible de l'entier n_θ correspondant.
2. Quantifier J_r et en déduire la relation entre ε et les entiers n_r, n_θ ². On donne,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (3.7)$$

3. En déduire que l'énergie E est quantifiée, avec $n \in \mathbb{N}^*$ dépendant de n_θ, n_r et que,

$$E_n = -\frac{\mu \vartheta^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (3.8)$$

2. A première vue, on pourrait dire que $J_r = 0$, il faudra forcer une intégration par partie.

3.2 Section efficace de Rutherford [4] (FS) ★★

(Correction)

On se place dans le même cas que l'exercice précédent avec deux particules, dont une est immobile, interagissant avec un potentiel de la forme $V(r) = \frac{C}{r}$. En effet, ici $C = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}$, $Q = Ze$, $q = 2e$. On va utiliser quelques résultats de l'exercice précédent. Il est donc préférable de l'avoir fait en amont.

3.2.1 Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome

On se place dans le repère polaire (r, φ) perpendiculairement au moment cinétique, puisque le mouvement est plan. La particule α arrive avec une vitesse initiale \mathbf{v}_0 . On se place dans le cas $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \pi$.

1. Déterminer la composante non nulle de \mathbf{J} en fonction de r, φ . Déterminer cette même composante en fonction de b, v_0, b paramètre d'impact.
2. Écrire l'équation du mouvement. Décomposer $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ en un vecteur parallèlement à l'axe polaire et un autre perpendiculaire à l'axe polaire. En déduire que,

$$m\dot{v}_\perp = \frac{C}{r^2} \sin \varphi \quad (3.9)$$

3. On veut faire apparaître l'angle de déviation θ . En intégrant l'équation, en déduire que,

$$v_0 \sin \theta = \frac{C}{mbv_0} (\cos \theta + 1) \quad (3.10)$$

4. En utilisant quelques formules trigonométriques, en déduire que,

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{C}{2E_0 b} \quad (3.11)$$

Où $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$.

3.2.2 Section efficace de Rutherford

1. Rappeler la formule de la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.
2. En déduire que,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{C^2}{16E_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3.12)$$

3. En déduire ce modèle n'est pas valable pour les petits angles de déviation.
4. Expliquer pourquoi cette expérience démontre l'existence des noyaux d'atome.

3.3 Effet Cherenkov [5] (RR, FS) ★★★

(Correction)

L'effet Cherenkov se produit lorsqu'une particule chargée traverse un milieu diélectrique à une vitesse v supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu c/n , où n est l'indice de réfraction du milieu.

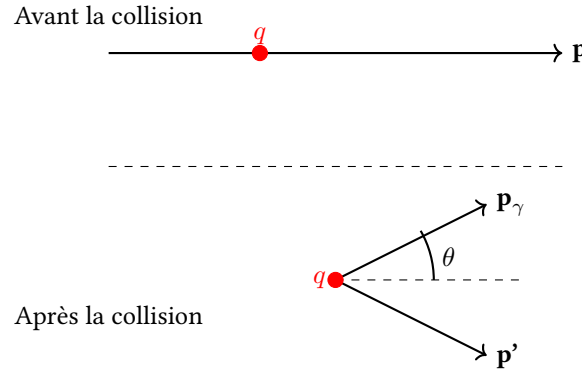


FIGURE 3.2 – Schéma de l'effet Cherenkov.

L'impulsion de la particule chargée est \mathbf{p} avant la collision, et \mathbf{p}_γ l'impulsion du photon après collision, et \mathbf{p}' l'impulsion de la particule chargée après la collision, (c.f fig 3.2). L'angle θ est l'angle formé entre \mathbf{p} et \mathbf{p}_γ . On rappelle que $\lambda = \frac{c}{n\nu}$.

1. Exprimer p_γ en fonction de h, ν, c, n . En déduire la relation entre p_γ, E_γ dans un milieu d'indice n .
2. Pour l'événement élémentaire, écrire la conservation de l'impulsion.
3. En utilisant la question précédente, donner l'expression de \mathbf{p}'^2 en fonction des modules des impulsions p, p_γ et de l'angle θ .
4. Écrire la conservation de l'énergie.
5. En déduire que,

$$p'^2 = p^2 - 2\frac{E}{c^2}h\nu + \frac{p_\gamma^2}{n^2} \quad (3.13)$$

Où E désigne l'énergie initiale de l'électron.

6. Obtenir $\cos \theta$ en fonction de $p, p_\gamma, E, h, n, c, \nu$.
7. Montrer ainsi que,

$$\cos \theta = \frac{c}{nv} \left[1 + \frac{h\nu}{2E} (n^2 - 1) \right] \quad (3.14)$$

8. A quelle condition l'effet Cherenkov se produit-il ?
9. Dans quel intervalle de fréquence les photons sont-ils émis ?
10. Dans quelle direction les photons les plus énergétiques sont-ils émis ?
11. Tous les photons sont émis dans un cône ; quel est le demi-angle au sommet de ce cône ϕ ? Calculer ϕ approximativement pour $n = \frac{4}{3}$ et $v = \frac{4}{5}c$.
12. Comparer l'énergie cinétique minimale de la particule pour que l'effet se produise suivant qu'il s'agit d'un électron ou un proton, $n = \frac{4}{3}$.

3.4 Machine à champ magnétique pulsé (EM) ★★

(Correction)

La machine de stimulation magnétique est une technologie non invasive utilisée en kinésithérapie et en rééducation. Son principe repose sur la génération de champs magnétiques pulsés à l'aide d'une bobine circulaire. Concrètement, la machine envoie des impulsions de courant à travers la bobine, ce qui crée un champ magnétique variable dans le temps. Selon la loi de Faraday, cette variation induit automatiquement un champ électrique dans les tissus environnants.

Ce champ électrique induit agit directement sur les membranes cellulaires des muscles en activant les canaux ioniques. En conséquence, un potentiel d'action se déclenche, entraînant une contraction musculaire. Ce mécanisme permet non seulement de stimuler des muscles affaiblis ou atrophiés, mais aussi d'améliorer la circulation sanguine et de réduire la douleur. De plus, l'absence de contact direct avec la peau rend le traitement confortable et sécuritaire pour le patient.

Pour modéliser cette machine, on considère une bobine circulaire de rayon R parcourue par un courant variable

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t), \quad (3.15)$$

où I_0 est l'amplitude du courant, τ le temps caractéristique d'amortissement, et ω la fréquence d'oscillation. L'axe de la bobine est supposé coïncider avec l'axe z . La bobine est considérée comme mince et peut être modélisée par une spire unique.

1. Champ magnétique de la bobine

- En supposant que la bobine se comporte comme un dipôle magnétique, exprimer le champ magnétique \mathbf{B} sur l'axe central (à une distance z du centre) en fonction de $I(t)$, R , z et des constantes fondamentales.
- Montrer que pour $z \gg R$, le champ s'approche à celui d'un dipôle et donner son expression asymptotique.

2. Champ électrique induit dans le tissu biologique. On considère un tissu conducteur modélisé par un disque mince de rayon a , placé sous la bobine.

- À partir de la loi locale de Faraday, exprimer le champ électrique induit \mathbf{E} en fonction de $\frac{dB}{dt}$.
- En supposant une symétrie cylindrique (champ purement azimutal), déduire l'expression du champ électrique induit $E_\theta(r, t)$ dans le plan du disque, en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$.

3. Effet sur les neurones moteurs Un neurone moteur est supposé être activé lorsque la tension induite dépasse un seuil V_{seuil} .

- Exprimer V en fonction des paramètres du problème.
- Déterminer une condition sur I_0 , τ , ω , et les paramètres géométriques pour assurer l'activation du neurone.

4. Effet du champ magnétique pulsé sur les muscles Expliquez pourquoi un champ magnétique pulsé, en induisant un champ électrique dans les tissus, peut provoquer une contraction musculaire. Décrivez brièvement le mécanisme physiologique (activation des canaux ioniques, génération d'un potentiel d'action, contraction musculaire).

3.5 Métrique sur une sphère (MA) ★★

(Correction)

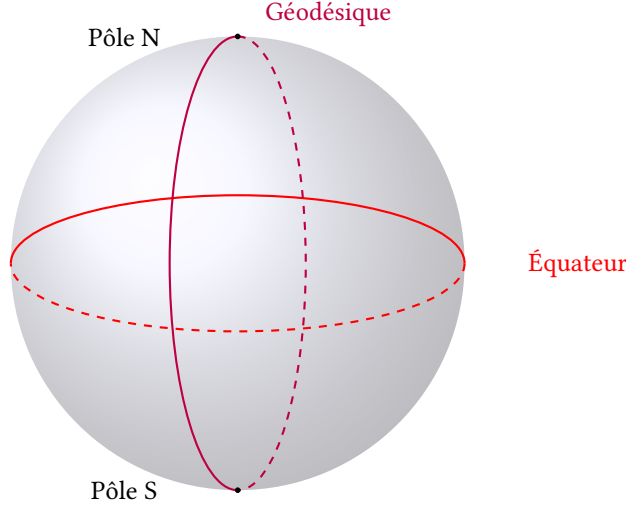


FIGURE 3.3 – Schéma d'une sphère et de ses géodésiques.

Notre but va être de déterminer la métrique de la sphère et ses géodésiques. Cela nous permettra de comprendre quelles sont les meilleures trajectoires à suivre pour un avion. On rappelle qu'en coordonnées sphériques, pour un rayon constant R ,

$$x = R \cos \varphi \sin \theta \quad (3.16)$$

$$y = R \sin \varphi \sin \theta \quad (3.17)$$

$$z = R \cos \theta \quad (3.18)$$

1. Calculer l'élément de longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ en fonction de R, θ et φ .
2. Grâce à l'action $S = \int ds = \int \mathcal{L} d\lambda$, λ un paramètre bien choisi et au principe variationnel, déterminer les équations des géodésiques.
3. Résoudre les équations en utilisant des symétries. On pourra utiliser que,

$$\int \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \alpha}}} \text{ poser } u = \cot \alpha \quad (3.19)$$

$$\int -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + C \quad (3.20)$$

Démontrer que les géodésiques sont de la forme suivante,

$$(x, y, z) \in S^2, ax + by + cz = 0 \quad (3.21)$$

C'est à dire que les géodésiques sont des intersections entre des plans passant par l'origine et la sphère, ou dit encore autrement des arcs de cercles.

3.6 Rayonnement du Corps Noir (PS) ★★★★★

(Correction)

On cherche à avoir la densité spectrale d'énergie, c'est à dire la fonction,

$$u(\nu, T) = \frac{d^2W}{d\nu dV} = \frac{dN}{d\nu} \frac{\langle W \rangle}{V}, \quad (3.22)$$

Avec W l'énergie, et $\langle W \rangle$ l'énergie moyenne. On va également se placer dans un cadre historique, sans utiliser la mécanique quantique qui a été découverte, en partie grâce aux résultats que l'on va démontrer.

3.6.1 Nombre de modes excités par unité de fréquences

1. Soit un corps noir, représenté par une cavité cubique de côté L et de volume V . Écrire l'équation de propagation du champ \mathbf{E} dans la cavité.
2. Calculer la solution de l'équation. Expliquer pourquoi le champ \mathbf{E} dépend de trois modes $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = r^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \quad (3.23)$$

4. Par un comptage de cubes joints, de volume unitaire, empilés le long des axes n_x, n_y, n_z , on peut énumérer le nombre total N de modes excités. Chaque cube peut être repéré de la manière suivante : $\mathbf{r} = n_\mu \mathbf{e}^\mu$. Lorsque les cubes sont très nombreux, c'est à dire que L est très grand devant λ , il suffit de calculer le volume de d'une boule de rayon r . Or, la condition que les entiers soient strictements positif impose le fait de ne prendre que 1/8 du volume total de la boule. Un facteur 2 est également à considérer dû aux deux plans de polarisations possibles pour le champ \mathbf{E} . Avec ces informations, en déduire que,

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V \quad (3.24)$$

3.6.2 Catastrophe Ultraviolette

1. Expliquer pourquoi un ensemble associé à ce problème, *de calcul de u* est l'ensemble canonique.
2. Calculer l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique.
3. Donner la probabilité d'être dans l'état d'énergie W . En déduire la fonction de partition Z d'un gaz d'oscillateurs harmonique.
4. Ainsi, démontrer que,

$$\langle W \rangle = k_B T \quad (3.25)$$

5. En déduire que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T \quad (3.26)$$

Et expliquer le titre de cette sous partie.

3.6.3 Loi de Planck

L'idée révolutionnaire est d'estimer que l'énergie des photons est quantifiée. Ainsi, on passe de l'idée de distribution d'énergie continue à discrète. Son idée vint du fait que l'énergie moyenne d'un oscillateur ne dépendait pas de la fréquence ν . Il suspecta alors une simple relation de proportionnalité entre W et ν :

$$W_n = nh\nu \quad (3.27)$$

Vint alors l'idée de quanta, que l'énergie n'est pas une donnée continue mais qu'elle se distribue comme paquet indivisible, nommé **quanta**³.

1. Recalculer la fonction de partition Z .
2. En déduire que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (3.28)$$

Avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Et la catastrophe ultra violette fut résolu, ce résultat s'accordait parfaitement à l'expérience. Cette fonction devint ainsi intégrable, ce qui donnera ensuite la Loi de Stefan.

3.6.4 Flux énergétique émis par un corps noir

On considère une cavité en équilibre thermique, remplie d'un gaz de photons à température T . Le rayonnement est **isotrope** et caractérisé par une densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$, telle que :

$$u(\nu) d\nu = \text{énergie électromagnétique par unité de volume, entre les fréquences } \nu \text{ et } \nu + d\nu. \quad (3.29)$$

Soit I l'intensité totale (flux d'énergie par unité de surface perpendiculaire, toutes directions confondues) émise par le corps noir.

1. Rappeler l'expression du flux énergétique monochromatique émis dans une direction d'angle θ par rapport à la normale à une surface, en fonction de l'intensité spectrale directionnelle I_ν et du solide d'angle $d\Omega$.
2. Montrer que le flux énergétique total émis à la fréquence ν par unité de surface est donné par :

$$I(\nu) = \int_{\Omega_+} I_\nu \cos \theta d\Omega, \quad (3.30)$$

où Ω_+ désigne l'hémisphère sortant ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

3. En supposant que le rayonnement est isotrope, c'est-à-dire que I_ν est indépendant de la direction, montrer que :

$$I(\nu) = \pi I_\nu. \quad (3.31)$$

4. En intégrant sur toutes les fréquences, en déduire que l'intensité totale émise est :

$$I = \int_0^\infty \pi I_\nu d\nu. \quad (3.32)$$

3. Albert Einstein utilisa lors de l'année 1905, *annus mirabilis*, l'idée de Plank pour expliquer l'effet photoélectrique, qui lui vaudra le prix Nobel en 1921.

5. Montrer que la densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$ est donnée par :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) d\Omega. \quad (3.33)$$

En supposant que le rayonnement est isotrope, en déduire :

$$u(\nu) = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \quad (3.34)$$

6. En déduire que :

$$I = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu. \quad (3.35)$$

3.6.5 Loi de Stefan

La loi de Stefan affirme, que pour un corps noir,

$$I(T) = \sigma \times T^4 \quad (3.36)$$

Avec σ la constante de Stefan. Nous allons le démontrer.

1. En utilisant les parties précédentes, montrer que,

$$I = \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (3.37)$$

2. Vérifier la convergence de l'intégrale, et exprimer l'intégrale comme une série.
3. Démontrer enfin que,

$$I(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} T^4 \quad (3.38)$$

On reconnaîtra la loi de Stefan⁴,

$$I = \sigma T^4 \quad (3.39)$$

3.6.6 Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique

En supposant que le Soleil est un corps noir, déterminer \dot{m} la perte de masse par unité de temps. A combien de kg.s cette perte de masse s'élève-t-elle ? Sachant que notre Soleil à 4.6×10^9 ans, combien de masses terrestres environ notre Soleil a-t-il déjà perdu ?

AN : $R = 6.96 \times 10^8$ m, $T = 5775$ K, $m = 1.98 \times 10^{30}$ kg, $m_T = 6 \times 10^{24}$ kg.

4. On a donc $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$ et franchement, on ne l'aurait pas deviné.

3.7 Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule (MA) ★★★★★

(Correction)

Cet exercice fait appel à des notions de calcul différentiel.

On s'intéresse au problème variationnel suivant : trouver parmi les domaines bornés et ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de volume fixé, celui qui minimise l'**interaction gravitationnelle interne** définie par la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}[\Omega] = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x' \quad (3.40)$$

On note que cette expression est proportionnelle au potentiel d'auto-interaction gravitationnelle d'un corps de densité uniforme. En effet, pour $x \in \mathbb{R}^3$,

$$U(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho}{|x - x'|} d^3x \quad (3.41)$$

L'énergie potentielle gravitationnelle totale du système est alors :

$$E[\Omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho U(x) d^3x = -\frac{G}{2} \rho^2 \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'. \quad (3.42)$$

- On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un ouvert borné de classe \mathcal{C}^2 , avec frontière $\partial\Omega$.
- Le volume de Ω est défini par :

$$V := \int_{\Omega} d^3x \quad (3.43)$$

- On considère une déformation infinitésimale normale de la frontière de Ω , paramétrée par $\varepsilon \in \mathbb{R}$, selon :

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x) n(x), \quad \text{pour } x \in \partial\Omega \quad (3.44)$$

où $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ est une fonction lisse et $n(x)$ est le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$.

- Le domaine déformé est noté Ω_ε , et désigne l'ouvert borné obtenu par cette déformation :

$$\Omega_\varepsilon := \{x + \varepsilon f(x) n(x) \mid x \in \Omega\} + o(\varepsilon) \quad (3.45)$$

(La déformation est supposée prolongée en l'intérieur de Ω pour définir rigoureusement Ω_ε .)

3.7.1 Formule de Hadamard

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et soit Ω_ε une déformation lisse de Ω telle que pour $x \in \partial\Omega$,

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x) n(x) \quad (3.46)$$

et on suppose que cette déformation est prolongée lisse sur tout Ω .

On souhaite démontrer que :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x) \quad (3.47)$$

Avec dS élément de surface associé à $\partial\Omega$.

1. Nous allons faire une étude de la fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Justifier que $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \det M$ est différentiable.

(b) Démontrer que,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(I + \varepsilon M) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} M + o(\varepsilon) \quad (3.48)$$

En déduire que $\frac{d}{d\varepsilon} \det(I + \varepsilon M) = \operatorname{Tr} M$.

(c) Soit $X \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R}), H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que,

$$d(\det(H))(X) = \operatorname{Tr}({}^t \operatorname{Com}(X)H) \quad (3.49)$$

2. Poser le changement de variable $x(u) = u + \varepsilon f(u)n(u)$, et calculer le jacobien $\det(\frac{\partial x}{\partial u})$ au premier ordre en ε , c-à-d à l'ordre $o(\varepsilon)$.

3. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^1, v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon \in U$ un voisinage de 0. En posant une fonction bien choisie, démontrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, F(x + \varepsilon v(x)) = F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F + o(\varepsilon) \quad (3.50)$$

4. En déduire le résultat voulu grâce au théorème de la Divergence.

3.7.2 Lien avec le potentiel gravitationnel

1. Montrer que $E[\Omega] < 0$, et que minimiser l'énergie revient à maximiser la quantité suivante :

$$\mathcal{I}[\Omega] := \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'. \quad (3.51)$$

2. On suppose que $\Omega = B(0, R)$ est une boule centrée à l'origine, de rayon R tel que $\operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi R^3 = V$. Montrer que le potentiel gravitationnel au centre est donné par :

$$U(0) = -G\rho \int_{\Omega} \frac{1}{|x'|} d^3x'. \quad (3.52)$$

Calculer explicitement cette intégrale.

3.7.3 La sphère?

1. Démontrer que,

$$\delta \mathcal{F} = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x) \quad (3.53)$$

On pourra utiliser ou démontrer (*pour les plus courageux*) que,

$$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\partial(\Omega^2)} \varphi(x) d\mu(x) = 2 \int_{\Omega \times \partial\Omega} \varphi(x) d\mu(x) \quad (3.54)$$

2. On cherche à minimiser \mathcal{F} à volume constant et fixé V . Pour cela on cherche à minimiser $\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{F} - \lambda V, \lambda \in \mathbb{R}$. En déduire que la variation première de la fonctionnelle \mathcal{F} s'écrit :

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial\Omega} \left(2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda \right) f(x) dS(x) \quad (3.55)$$

3. En utilisant la symétrie sphérique, montrer que si Ω est une boule de rayon R , alors pour tout $x \in \partial\Omega$, la quantité :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3 x' \quad (3.56)$$

est constante. En déduire que la boule satisfait la **condition stationnaire** : $\delta\mathcal{L} = 0$ pour tout f .

4. (*Bonus*) Montrer que la boule est bien un *minimum* local pour \mathcal{F} sous contrainte de volume constant en étudiant la variation seconde.
5. Conclure et expliquer pourquoi les grands objets de l'Univers sont sphériques.

3.8 Mouvement relativiste d'une particule chargée (RR, MA, EM, FS) ★★★★★

(Correction)

3.8.1 Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

1. Montrer qu'en utilisant le principe de moindre action et l'invariance de Lorentz, l'action d'une particule libre de masse m peut s'écrire $S = -mc \int ds$ où $ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2$. En déduire que le Lagrangien du système est

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}, \quad (3.57)$$

où $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$.

2. En introduisant le quadripotential électromagnétique $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$, proposer un terme d'interaction \mathcal{L}_{int} correspondant à une particule de charge q dans ce champ. Montrer que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi, \quad (3.58)$$

et en déduire le Lagrangien total $\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{int}}$.

3. À partir du Lagrangien total, calculer l'impulsion généralisée $P_i = \partial \mathcal{L}_{\text{tot}} / \partial v^i$. Montrer qu'elle s'écrit

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} + q \mathbf{A}, \quad (3.59)$$

où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

4. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées à \mathcal{L}_{tot} et montrer qu'elles conduisent à l'équation de Lorentz en 3 dimensions,

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.60)$$

avec $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$.

5. Écrire le lagrangien en paramétrant par le temps propre τ et en déduire que,

$$\mathcal{L} = -mc \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + q g_{\mu\nu} A^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.61)$$

6. Montrer que,

$$m \ddot{x}_\mu = q F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (3.62)$$

Où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique.

7. Écrire explicitement les composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$ et montrer que $F_{0i} = E_i/c$ et $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$. Interpréter la signification physique de ces composantes.
8. Calculer les deux invariants du champ électromagnétique,

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad I_2 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}, \quad (3.63)$$

et exprimer-les en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{B} . Quels sont les cas physiques correspondant à $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$?

9. Vérifier que sous une transformation de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, les équations du mouvement restent inchangées. Quel est la symétrie associée?

3.8.2 Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane

On considère une particule de masse m et de charge q soumise à un champ électromagnétique décrit par le tenseur $F^{\mu\nu}$. Son mouvement est régi par l'équation :

$$m\ddot{x}^\mu = qF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu \quad (3.64)$$

où les points désignent les dérivées par rapport au temps propre τ de la particule. On se place dans un système d'unités naturelles où $c = 1$.

On modélise une onde électromagnétique plane par un potentiel quadrivecteur de la forme :

$$A^\mu(x) = a^\mu f(k_\nu x^\nu) \quad (3.65)$$

où f est une fonction de classe C^1 , k^μ est un quadrivecteur lumière, d'où $k^\mu k_\mu = 0$, et a^μ est un quadrivecteur constant représentant la polarisation.

1. Montrer que

$$F^{\mu\nu}(x) = (k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu) f'(k_\rho x^\rho) \quad (3.66)$$

2. (a) Calculer $\partial_\mu A^\mu$ dans le cas du potentiel $A^\mu(x) = a^\mu f(k_\rho x^\rho)$.

- (b) En déduire que la condition de jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ implique :

$$a^\mu k_\mu = 0 \quad (3.67)$$

3. On considère maintenant le mouvement d'une particule dans cette onde électromagnétique.

- (a) En utilisant l'expression du tenseur $F^{\mu\nu}$ trouvée en question 1, montrer que :

$$F^{\mu\nu}\dot{x}_\nu = [k^\mu(a_\rho\dot{x}^\rho) - a^\mu(k_\rho\dot{x}^\rho)] f'(k_\rho x^\rho) \quad (3.68)$$

- (b) En déduire l'équation du mouvement sous la forme :

$$m\ddot{x}^\mu = q[k^\mu(a_\rho\dot{x}^\rho) - a^\mu(k_\rho\dot{x}^\rho)] f'(k_\rho x^\rho) \quad (3.69)$$

4. On cherche maintenant à intégrer cette équation.

- (a) Montrer que le scalaire $k_\rho\dot{x}^\rho$ est constant au cours du mouvement.
 (b) En déduire que $\phi = k_\rho x^\rho(\tau)$ est une fonction affine de τ , que l'on pourra utiliser comme nouveau paramètre.
 (c) À l'aide des relations précédentes, intégrer l'équation du mouvement et déterminer l'expression complète de la trajectoire $\tau \mapsto x^\mu(\tau)$ ⁵
 (d) On pose $f = \sin$. Donner la trajectoire complète.

3.8.3 Théorie des Champs

On définit l'action,

$$S = \int_{\Omega} -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu d^4x, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{1,3} \quad (3.70)$$

On peut ainsi définir aisément une **densité** de Lagrangien.

5. Cet exercice permet de déterminer analytiquement la trajectoire d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane. Vous pourrez ensuite la représenter en Python à partir des fonctions obtenues.

1. Pour une action dépendant d'un champ φ (scalaire, tensoriel...) :

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi, \partial_{\mu}\varphi, x^{\mu}) d^4x \quad (3.71)$$

Démontrer que les équations d'Euler-Lagrange restent vraies pour un champ φ .

Pour cela, on postulera le principe de moindre action, c'est à dire que pour une transformation infinitésimale $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon\eta$ ⁶, on a,

$$\frac{dS}{d\varepsilon}[\varphi + \varepsilon\eta, \partial_{\mu}(\varphi + \varepsilon\eta), x^{\mu}](0) = 0 \quad (3.72)$$

2. Démontrer les équations de Maxwell en tensorielle, où $j^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j})$ est la quadricharge (quadri-densité de courant) :

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu}, \quad \partial_{\lambda}F_{\mu\nu} + \partial_{\mu}F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu} = 0, \quad (3.73)$$

3.8.4 Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant

Considérons une particule de masse m et de charge q évoluant de manière relativiste dans un champ électromagnétique. Dans cet partie, on introduit progressivement les effets d'un champ magnétique constant $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ (secteur courbe d'un synchrotron) et d'une force moyenne de freinage due au rayonnement synchrotron.

A. Rayonnement synchrotron négligé

1. Calculer $F^{\mu\nu}$.
2. En déduire que le mouvement est dans le plan Oxy . Montrer que l'énergie est constante, si l'on néglige la perte dû au rayonnement.
3. Montrez que, en l'absence de perte d'énergie, pour $u^{\mu} = (\gamma c, 0, u_0 = \gamma v, 0)$ ⁷,

$$x(t) = R \cos\left(\frac{\omega}{\gamma}t\right), \quad y(t) = R \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}t\right) \quad (3.74)$$

Avec, (loi du synchrotron)⁸ :

$$R = \frac{\gamma v}{\omega} = \frac{\gamma m v}{q B} \quad (3.75)$$

B. Étude du mouvement réel

1. Le rayonnement synchrotron entraîne une perte d'énergie moyenne. Rappeler la formule de la puissance rayonnée moyenne (Larmor relativiste) pour une accélération centripète $a = v^2/R$,

$$P = -\frac{d}{dt}E = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \gamma^4 a^2 \quad (3.76)$$

En utilisant $E = \gamma m c^2$, montrez qu'en développant on obtient l'équation différentielle,

$$\frac{d}{dt}\gamma = -C \times (\gamma^2 - 1) \quad (3.77)$$

On donnera l'expression du coefficient C en fonction de $q, B, m, c, \varepsilon_0$.

6. Où η est une fonction de classe $C^1(\Omega)$, et $\forall x \in \partial\Omega, \eta(x) = 0$, c'est à dire que la fonction est nulle aux bornes.

7. Il faudrait également démontrer que γ et v sont constant, et que $\tau(t) = \gamma t$.

8. Pour cela, il faudra passer dans le référentiel du laboratoire.

2. Résoudre l'équation différentielle sur γ ⁹. On donne $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$.
3. En déduire la nouvelle trajectoire de la particule chargée. Étudier la limite quand $t \rightarrow \infty$.
4. Tracer la courbe paramétrique $x(t), y(t)$ en python. Quel problème cela génère ?

3.8.5 Physique des collisionneurs relativistes

Ici, on se placera avec l'unité de vitesse $c = 1$.

1. Définir le carré de l'invariant d'énergie-momentum total $s = (p_1 + p_2)^2$ pour la collision de deux particules de quatre-impulsions p_1 et p_2 . Exprimer l'énergie totale disponible dans le référentiel centre de masse (CMS) en fonction de s .
2. Pour une collision tête-à-tête de deux particules identiques de masse m et d'énergie E (chacune) dans le référentiel du laboratoire, montrer que l'énergie en CMS vaut $\sqrt{s} = 2E$ (supposant $E \gg m$).
3. Pour le cas d'une collision contre une cible fixe de masse m , dériver la formule

$$s = m^2 + m^2 + 2mE_{\text{lab}}, \quad (3.78)$$

et déduire l'énergie au seuil de production de deux particules de masse m (collision élastique extrême).

4. Calculer l'énergie requise dans une expérience à cible fixe pour produire un nouveau produit de masse M au seuil, et comparer à l'énergie requise dans un collisionneur symétrique ($E_{\text{CM}} = M + M$). Pourquoi les collisionneurs à faisceaux opposés sont-ils plus efficaces pour atteindre de hautes énergies ?

9. Il est en effet bien plus simple de résoudre l'équation sur γ que sur v , car ici v dépend du temps.

3.9 Hydrodynamique relativiste et collisions de noyaux lourds (RR, FS) ★★★★★

(Correction)

On se place en unité classique $c = 1$.

3.9.1 Hydrodynamique classique

1. Écrire l'équation de conservation de la masse (continuité) pour un fluide classique, soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.79)$$

Montrer que dans le cas d'un fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$), cela réduit à $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

2. Écrire l'équation d'Euler pour un fluide parfait (non visqueux) soumis à un champ de gravité \mathbf{g} :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (3.80)$$

Décrire brièvement la signification physique de chaque terme de cette équation.

3. Montrer comment l'ajout d'effets visqueux conduit à l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}, \quad (3.81)$$

où η est la viscosité dynamique (cisaillement) et ζ la viscosité volumique. Expliquer le rôle de ces termes.

4. Expliquer la différence entre la description lagrangienne (recherche des trajectoires des particules de fluide) et la description eulérienne (vue sur le champ de vitesse à un point fixe de l'espace). En particulier, montrer que la dérivée totale pour un fluide est $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ dans le formalisme eulérien.
5. Définir les lignes de courant (streamlines) dans un fluide, et montrer que ces courbes sont tangentes au vecteur champ de vitesses \mathbf{v} en chaque point. Interpréter physiquement ces lignes.
6. Démontrer le théorème de Bernoulli pour un fluide stationnaire, incompressible et sans viscosité. Montrer que le long d'une ligne de courant,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \Phi = \text{constante}, \quad (3.82)$$

où Φ est un potentiel de forces (par exemple $\Phi = gz$ en champ constant \mathbf{g}).

3.9.2 Introduction à l'hydrodynamique relativiste

L'hydrodynamique relativiste permet de décrire l'évolution de systèmes continus à haute densité d'énergie (comme le plasma de quarks-gluons) en incorporant les principes de la relativité restreinte. On s'intéresse ici à des fluides parfaits, sans viscosité ni conduction thermique, et à leur description contravariante.

1. **Tenseur énergie-impulsion.** Le contenu énergétique et dynamique d'un fluide parfait est encodé dans le tenseur énergie-impulsion :

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (3.83)$$

où :

- ε est la densité d'énergie (dans le référentiel propre du fluide),
- p est la pression (même unité que ε , i.e. J/m³),
- u^μ est le quadrivecteur vitesse du fluide,
- $\eta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ est la métrique de Minkowski.

- (a) Vérifier que $T^{\mu\nu}$ est symétrique.
- (b) Calculer $T^{\mu\nu}$ dans le référentiel propre du fluide ($u^\mu = (1, 0, 0, 0)$).
- (c) Interpréter les composantes physiques de T^{00} , T^{0i} , et T^{ij} .
- (d) Calculer la trace T^μ_μ .
- (e) Montrer que dans le cas d'un gaz ultra relativiste, $p = \frac{\varepsilon}{3}$.

On rappelle qu'en physique statistique,

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \int \frac{d^3\|\mathbf{p}\|}{(2\pi)^3} E(\mathbf{p}) \times f(\mathbf{p}) \quad (3.84)$$

$$p = \frac{1}{3V} \int \frac{d^3\|\mathbf{p}\|}{(2\pi)^3} \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{E(\mathbf{p})} \times f(\mathbf{p}) \quad (3.85)$$

2. **Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.** Dans tout système isolé, le tenseur énergie-impulsion est conservé localement :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.86)$$

Cette équation tensorielle (4 équations scalaires) exprime la conservation de l'énergie ($\nu = 0$) et des trois composantes du moment ($\nu = 1, 2, 3$). Elle constitue l'équation fondamentale de l'hydrodynamique relativiste.

- (a) Quelles sont les inconnues dynamiques du problème ?
- (b) Pourquoi faut-il compléter ce système par une équation d'état reliant ε , p et éventuellement T ?

3. **Thermodynamique relativiste.** Dans le référentiel propre du fluide, on définit localement :

T : température, s : entropie volumique, μ : potentiel chimique, n : densité de particules.

La première loi de la thermodynamique, exprimée en densités locales (c'est à dire dans un élément de volume dV), prend la forme :

$$d\varepsilon = T ds + \mu dn. \quad (3.87)$$

En s'appuyant sur la première loi classique,

$$dU = T dS + \mu dN - p dV \quad (3.88)$$

et en supposant que $\mu = 0$, démontrer l'identité $\varepsilon + p = Ts$, appelée relation d'Euler.

4. **Vitesse du son relativiste.** La vitesse du son c_s est définie par :

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_s. \quad (3.89)$$

- (a) Calculer c_s pour un fluide ultra-relativiste où $p = \varepsilon/3$.
- (b) Comparer à la vitesse de la lumière $c = 1$ et commenter.

3.9.3 Équation du mouvement relativiste

On considère un fluide parfait en relativité restreinte. Le nombre total de particules est donné par

$$N = \int_{\Sigma} j^{\mu} d\Sigma_{\mu}, \quad j^{\mu} = nu^{\mu} \quad (3.90)$$

à travers une hypersurface spacelike Σ orientée vers le futur (par exemple $t = \text{cste}$). On suppose que N est conservé.

1. Montrer que la conservation du nombre de particules s'exprime localement par

$$\partial_{\mu}(nu^{\mu}) = 0, \quad (3.91)$$

où n est la densité de particules dans le référentiel comobile, et u^{μ} la quadrivitesse du fluide.

2. En utilisant $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, déduire l'équation du mouvement (ou *relativistic Euler equation*) d'un fluide parfait sans source à densité de particule isotrope :

$$(\varepsilon + p)u^{\mu}\partial_{\mu}u^{\nu} + (u^{\mu}u^{\nu} + g^{\mu\nu})\partial_{\mu}p = 0. \quad (3.92)$$

3.9.4 Application aux collisions de noyaux lourds

On introduit les coordonnées de Bjorken : $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$, $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}$.

1. Calculer l'élément ds^2 , et en déduire $g_{\mu\nu}$.
2. En supposant un fluide boost-invariant en z , nous ne sommes plus dans un espace plat. L'équation de conservation s'écrit alors,

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = \partial_{\mu}T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu}T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}T^{\mu\lambda} = 0 \quad (3.93)$$

En sachant que,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \quad (3.94)$$

Montrer l'équation de conservation conduit à :

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\varepsilon + p}{\tau} = 0. \quad (3.95)$$

3. Pour $p = \varepsilon/3$, résoudre l'équation ci-dessus et en déduire :

$$\varepsilon(\tau) \propto \tau^{-4/3}, \quad T(\tau) \propto \tau^{-1/3}. \quad (3.96)$$

4. Lors de la transition QGP \rightarrow hadrons, l'équation d'état peut s'écrire :

$$p = \frac{\varepsilon - 4B}{3}. \quad (3.97)$$

Montrer que $p = 0$ à la transition implique $\varepsilon = 4B$ et en déduire la température critique T_c .

5. En modélisant un noyau par une sphère de rayon R , définir la section efficace géométrique $\sigma \simeq \pi(2R)^2$. Relier cette quantité à la distinction entre collisions centrales et périphériques.
6. Montrer que l'énergie volumique initiale ε_0 est plus grande pour une collision centrale. En supposant $\varepsilon = aT^4$, estimer la température initiale T_0 atteinte à RHIC ($\varepsilon_0 \sim 10 \text{ GeV/fm}^3$, $a = \sigma$ la constante de Stefan).

3.10 Atome d'hydrogène et équation radiale [6] (MQ) ★★

(Correction)

Dans ce problème, on étudie l'atome d'hydrogène (électron de masse m_e dans le potentiel coulombien $V(r) = -e^2/r$ d'un proton fixe) en mécanique quantique non-relativiste. On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right] \psi(r, \theta, \phi) - \frac{e^2}{r} \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi), \quad (3.98)$$

où \mathbf{L}^2 est l'opérateur du carré du moment cinétique orbital.

3.10.1 Séparation des variables et équation radiale

1. Montrer que la fonction d'onde peut se séparer sous la forme $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, où $Y_{\ell m}$ est une harmonique sphérique propre de \mathbf{L}^2 et \mathbf{L}_z , avec :

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}, \quad \mathbf{L}_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}. \quad (3.99)$$

En déduire que l'équation de Schrödinger radiale vérifiée par $R(r)$ est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right] - \frac{e^2}{r} R = ER. \quad (3.100)$$

2. En posant $u(r) = rR(r)$, montrer que l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u(r) = Eu(r). \quad (3.101)$$

On définit le paramètre κ par :

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m_e |E|}{\hbar^2}}. \quad (3.102)$$

Montrer que si l'on introduit la variable adimensionnelle $\rho = \kappa r$, l'équation prend la forme :

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{\rho_0}{\rho} + 1 \right] u(\rho), \quad (3.103)$$

avec $\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2 \kappa}$.

3. Proposer l'ansatz :

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho/2} v(\rho), \quad (3.104)$$

et montrer que $v(\rho)$ vérifie l'équation différentielle ¹⁰ :

$$\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + (2\ell + 2 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + (\rho_0 - 2\ell - 2)v = 0. \quad (3.105)$$

4. En développant $v(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k$, montrer que la série diverge en général à l'infini, sauf si elle s'arrête à un ordre fini. En déduire que la condition de terminaison de la série est :

$$\rho_0 = 2n, \quad \text{où } n = \hat{k} + \ell + 1 \in \mathbb{N}^*. \quad (3.106)$$

10. On reconnaît une équation d'hypergéométrie confluyente.

5. En déduire l'expression des niveaux d'énergie liés de l'atome d'hydrogène :

$$\kappa_n = \frac{m_e e^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{2n} \Rightarrow E_n = -\frac{\hbar^2 \kappa_n^2}{2m_e} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (3.107)$$

6. Quel est le degré de dégénérescence de chaque niveau E_n ? Montrer qu'il vaut n^2 en tenant compte des possibilités pour ℓ (allant de 0 à $n-1$) et m (allant de $-\ell$ à $+\ell$). Interpréter pourquoi, dans ce modèle non-relativiste, l'énergie dépend uniquement de n et non de ℓ .

3.10.2 État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales

1. Pour le niveau fondamental ($n = 1, \ell = 0$), montrer que la fonction d'onde normale du radial s'écrit

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}. \quad (3.108)$$

En déduire l'expression complète de $\psi_{1,0,0}(r, \theta, \phi)$ et vérifier sa normalisation $\int |\psi_{1,0,0}|^2 d^3x = 1$ (on utilise que $Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$).

2. Calculer la densité de probabilité radiale $P(r) = 4\pi |R_{1,0}(r)|^2 r^2$ et tracer qualitativement son profil en fonction de r . Interpréter la signification physique de cette densité (lieu le plus probable où se trouve l'électron).
3. Démontrer que l'espérance de la distance $\langle r \rangle$ entre l'électron et le noyau, ainsi que la variance $(\Delta r)^2$, sont données par

$$\langle r \rangle = \frac{3}{2} a_0, \quad (\Delta r)^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \frac{3}{2} a_0^2 - \left(\frac{3}{2} a_0 \right)^2. \quad (3.109)$$

(Indication : utiliser l'intégrale $\int_0^\infty r^n e^{-2r/a_0} dr = n!(a_0/2)^{n+1}$ et vérifier les résultats.)

4. (Optionnel) On peut également introduire la représentation impulsionnelle. Calculez la transformée de Fourier $\tilde{\psi}_{1,0,0}(\mathbf{p})$ de l'état fondamental et interprétez la distribution en impulsion (carré du module) associée. Quelle est la valeur moyenne de la quantité de mouvement $\langle \mathbf{p} \rangle$ et de son carré $\langle p^2 \rangle$?
5. *Interpréter* : Discutez brièvement pourquoi la dépendance en $1/n^2$ des niveaux E_n explique la structure fine de raies spectrales de l'hydrogène et la notion de nombre quantique principal.

3.11 Vers un formalisme relativiste (MQ, RR) ★★★★★

(Correction)

Conventions et notations. Unités naturelles $c = \hbar = 1$. Métrique $g_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$. Somme d'Einstein implicite sur indices répétés. $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\square = \partial_\mu \partial^\mu$, $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$. Adjoint hermitien \dagger . Adjoint de Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Les vecteurs spatiaux sont en gras. Constante de structure fine $\alpha = e^2/(4\pi)$. On suppose que l'étudiant connaît les harmoniques sphériques $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ et les opérateurs de moment orbital \mathbf{L} .

3.11.1 De Klein–Gordon à Dirac (factorisation algébrique, méthode historique)

1. Equation scalaire.

- (a) Partir de la relation relativiste $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Appliquer les prescriptions quantiques $E \mapsto i\partial_t$, $\mathbf{p} \mapsto -i\nabla$ et montrer que tout champ scalaire complexe $\phi(x)$ satisfait

$$(\square + m^2)\phi = 0.$$

- (b) Après votre dérivation, expliquez en 2–4 lignes pourquoi le fait que l'équation soit d'ordre deux en ∂_t rend délicate l'interprétation probabiliste simple (signe non garanti pour la densité temporelle de courant, nécessité d'interpréter ϕ comme un champ).

2. Idée de Dirac : factorisation.

- (a) Dirac cherche un opérateur linéaire D (à coefficients constants) tel que, pour un certain D' ,

$$D D' = \square + m^2.$$

Justifier qu'on peut chercher D de la forme

$$D = iA^\mu \partial_\mu + B,$$

avec A^μ, B indépendants de x . Argumentez pourquoi A^μ, B ne peuvent être des scalaires et doivent agir sur un espace de dimension supérieure (intuitivement : anticommutation nécessaire pour obtenir $\partial_\mu \partial^\mu$).

- (b) Imposer la composition $DD' = \square + m^2$ et, en regroupant les termes en dérivées secondes, premières et en termes sans dérivée, montrer que l'on obtient les contraintes algébriques

$$\{A^\mu, A^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}, \quad A^\mu B + B A^\mu = 0, \quad B^2 = m^2 \mathbb{I},$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne l'anticommutateur et \mathbb{I} l'identité sur l'espace sur lequel agissent A^μ, B .

3. Interprétation guidée.

- (a) Expliquez en quelques lignes le rôle de l'anticommutation dans la récupération de l'opérateur scalaire \square (c-à-d annulation des termes croisés).
- (b) Expliquez pourquoi l'apparition d'objets non commutatifs introduit naturellement des degrés de liberté supplémentaires (spin, et ensuite particule/antiparticule) – chercher à formuler physiquement ce que ces composantes représentent.

3.11.2 Construction des matrices de Dirac, algèbre de Clifford et formalisme lagrangien

1. Poser $B = m\beta$, $A^0 = \beta$, $A^i = \beta\alpha^i$ et définir $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha^i$. Montrer que l'équation linéaire

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

produit (via composition avec $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)$) l'opérateur $(\square + m^2)\mathbb{I}$ si et seulement si

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}.$$

2. Donner une brève définition (en vos mots) de l'algèbre de Clifford $\text{Cl}(1, 3)$ et calculer $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Indiquer une propriété utile de $\sigma^{\mu\nu}$ (générateurs infinitésimaux de transformations de Lorentz sur les spineurs).
3. **Dimension minimale.** Argumenter succinctement pourquoi la plus petite représentation fidèle de $\text{Cl}(1, 3)$ sur \mathbb{C} a dimension 4; en conséquence ψ est un spineur à quatre composantes. Si l'argument de représentation est inconnu, donnez un exemple concret (matrices 4×4) montrant que des matrices 2×2 ne peuvent satisfaire toutes les relations.
4. **Représentation de Dirac.** On donne

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Vérifier les relations d'anticommutation dans cette base.
 - (b) Écrire β , α^i en blocs 2×2 et expliquer la décomposition $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$; préciser quelles sont les "grandes" et "petites" composantes pour une particule au repos.
5. **Lagrangien de Dirac.** Considérer

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

- (a) Varier \mathcal{L}_D par rapport à $\bar{\psi}$ et ψ (traités comme variables indépendantes) et retrouver l'équation de Dirac et son adjointe.
- (b) Montrer l'invariance globale $\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi$ et, par Noether, calculer le courant conservé $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

3.11.3 Ondes planes, projecteurs, identité de Gordon et positivité du densité

1. Chercher des solutions $\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}$ et $\psi(x) = v(p)e^{+ip \cdot x}$. Montrer

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad (\not{p} + m)v(p) = 0.$$

2. Pour $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, résoudre explicitement et exhiber les deux états de spin pour $E = +m$ et les deux pour $E = -m$. Interpréter ces solutions en termes de particule/antiparticule.
3. Définir les projecteurs

$$\Lambda_\pm(p) = \frac{\pm\not{p} + m}{2m},$$

montrer $\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm$, $\Lambda_+\Lambda_- = 0$, et établir les résolutions de l'identité

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m, \quad \sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} - m,$$

pour la normalisation $u_s^\dagger u_{s'} = 2E\delta_{ss'}$.

4. Montrer l'identité de Gordon

$$\bar{u}'(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}'(p')((p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu)u(p),$$

et expliquez brièvement pourquoi le terme en $\sigma^{\mu\nu}$ est associé au moment magnétique (facteur $g = 2$ au niveau tree).

5. En représentation de Dirac, montrer que

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \|\varphi\|^2 + \|\chi\|^2 \geq 0,$$

et commentez pourquoi cela permet une interprétation probabiliste de ψ (contrairement au cas scalaire).

3.11.4 Couplage minimal et limite non-relativiste (procédure pas à pas)

1. Promouvoir la symétrie globale $U(1)$ en symétrie locale et introduire la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$. Écrire la Lagrangienne Dirac-Maxwell

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

montrer que le terme d'interaction s'écrit $-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ et identifier le courant $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

2. **Limite non-relativiste (procédure constructive).**

- (a) Écrire $\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}, t) \\ \chi(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$ et insérer dans l'équation de Dirac couplée à $A^\mu = (V, \mathbf{A})$. Écrire explicitement le système exact pour φ, χ .
- (b) Sous l'hypothèse non-relativiste ($E \simeq m + \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \ll m$) et $\|\chi\| \ll \|\varphi\|$, isoler χ à l'ordre $1/m$ (montrer l'itération) et réinjecter dans l'équation pour φ .
- (c) Développer jusqu'à l'ordre $1/m^2$ pour obtenir l'Hamiltonien effectif de Pauli

$$H_{\text{eff}} = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + qV - \frac{q}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + H_{\text{Darwin}} + H_{\text{SO}} + \mathcal{O}(1/m^3),$$

et montrer d'où proviennent explicitement (calcul pas à pas) les termes de Darwin et spin-orbite.

- (d) Interprétez physiquement chaque terme (moment magnétique $g = 2$, zitterbewegung \rightsquigarrow Darwin, correction cinétique relativiste).

3.11.5 Opérateurs angulaires et construction des spineurs sphériques $\Omega_{\kappa m}$ — notations vectorielles explicites

Conventions de notation (insistées). Nous noterons systématiquement les vecteurs d'opérateurs par une lettre en **gras** et une flèche : $\vec{\mathbf{L}}, \vec{\mathbf{S}}, \vec{\mathbf{J}}, \vec{\Sigma}$. La flèche rappelle que l'on manipule les trois composantes réelles agissant sur \mathbb{R}^3 . L'espace de Hilbert est

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^4,$$

c.-à-d. fonctions spatiales de \mathbf{r} à valeurs dans \mathbb{C}^4 (spineurs de Dirac). Les opérateurs se répartissent ainsi :

- $\vec{\mathbf{L}}$ agit sur la partie $L^2(\mathbb{R}^3)$ (dépendance angulaire);

- $\vec{\Sigma}$ agit sur la partie \mathbb{C}^4 (indice de composante spinorial);
- $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ est l'opérateur spin effectif.

1. Moment orbital \vec{L} .

- (a) Définition (opérateur différentiel sur la partie spatiale)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{p} = -i\nabla.$$

- (b) Relations fondamentales :

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathbf{L}_k, \quad [\vec{L}^2, \mathbf{L}_i] = 0.$$

(Ces relations sont les mêmes que celles utilisées pour les harmoniques sphériques $Y_{\ell m}$.)

2. Spin et opérateur $\vec{\Sigma}$.

- (a) Définition matricielle (opérateur agissant sur \mathbb{C}^4) :

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix},$$

où $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les matrices de Pauli 2×2 .

- (b) L'opérateur spin est

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \quad (\text{agit sur } \mathbb{C}^4).$$

- (c) Propriétés algébriques :

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = i \varepsilon_{ijk} \mathbf{S}_k, \quad \vec{S}^2 = \frac{3}{4} \mathbb{I}_4.$$

- (d) *Remarque d'espace* : $\vec{\Sigma}$ n'agit pas sur la variable \mathbf{r} (il ne dérive pas), il agit uniquement sur l'indice de composante spinorial. Ainsi \vec{S} et \vec{L} opèrent sur facteurs distincts de \mathcal{H} .

3. Moment total \vec{J} .

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

On a

$$\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S},$$

et pour un Hamiltonien central $H = H(r)$ (potentiel ne dépendant que de r), \vec{J}^2 commute avec H . Les valeurs propres de \vec{J}^2 sont $j(j+1)$ avec $j = \ell \pm \frac{1}{2}$.

4. Opérateur auxiliaire \hat{K} et son utilité.

$$\hat{K} \equiv \beta(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1).$$

- \hat{K} est hermitien et commute avec le Hamiltonien de Dirac dans un potentiel central (raison : \hat{K} se construit à partir d'opérateurs angulaires et de β , et les commutateurs avec $\alpha \cdot \vec{p}$ et $V(r)$ s'annulent – voir démonstration détaillée en correction).
- Les valeurs propres se notent $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$. κ est donc un bon nombre quantique pour classer les états.

5. Construction des spineurs sphériques $\Omega_{\kappa m}(\theta, \varphi)$.

- (a) Logique : comme pour la construction des $Y_{\ell m}$ (propres de \vec{L}^2 et L_z), on construit des fonctions angulaires propres de \vec{J}^2 , J_z par couplage $\ell \otimes s$ (ici $s = \frac{1}{2}$).

- (b) Formule constructive (couplage via coefficients de Clebsch–Gordan) :

$$\Omega_{\kappa m}(\theta, \varphi) = \sum_{m_\ell, m_s} \langle \ell m_\ell; \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \chi_{m_s},$$

où $\chi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres du spin 1/2 (agissant dans \mathbb{C}^2).

Dans la pratique, $\Omega_{\kappa m}$ est un spineur à deux composantes (on place ensuite ces deux composantes dans le bloc supérieur ou inférieur d'un spineur Dirac à 4 composantes, selon la convention).

- (c) Règle de correspondance
- $(\ell, j) \leftrightarrow \kappa$
- (convention standard) :

$$\begin{cases} \kappa = -(\ell + 1) & \text{si } j = \ell + \frac{1}{2}, \\ \kappa = +\ell & \text{si } j = \ell - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cette règle permet d'associer un κ unique à chaque couple (ℓ, j) .

- (d) Propriétés utiles :

$$(\text{orthonormalité}) \quad \int \Omega_{\kappa m}^\dagger(\theta, \varphi) \Omega_{\kappa' m'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{\kappa \kappa'} \delta_{m m'},$$

$$(\text{action radiaire}) \quad (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \Omega_{\kappa m}(\theta, \varphi) = -\Omega_{-\kappa m}(\theta, \varphi).$$

La seconde identité est fondamentale : elle explique pourquoi, dans la séparation radiale, la composante angulaire de la grande composante (associée à κ) est liée à la composante angulaire de la petite composante (associée à $-\kappa$).

6. Séparation radiale — pourquoi le facteur $1/r$.

$$\psi_{E, \kappa, m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F_{E\kappa}(r) \Omega_{\kappa m}(\theta, \varphi) \\ i G_{E\kappa}(r) \Omega_{-\kappa m}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

- Le facteur $1/r$ est choisi pour la même raison que dans le problème de Schrödinger : il simplifie l'opérateur radial (évite l'apparition de termes en $2/r$ venant de la dérivée radiale) et permet d'obtenir un système radial pour F, G sans termes de couplage supplémentaires compliquant la série de puissance.
- Le facteur i devant G est une convention qui rend les équations radiales réelles dans la plupart des représentations.

7. Exercices courts (à faire pour s'entraîner).

- Construire explicitement $\Omega_{\kappa m}$ pour $\kappa = 1$ (état $s_{1/2}$, $\ell = 0$) et vérifier l'orthonormalité.
- Écrire la combinaison pour $\kappa = -1$ ($p_{1/2}$, $\ell = 1$, $j = 1/2$) en utilisant les coefficients de Clebsch–Gordan simples et vérifier la propriété $(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \Omega_{\kappa m} = -\Omega_{-\kappa m}$.
- Vérifier que $\hat{K} \Omega_{\kappa m} = \kappa \Omega_{\kappa m}$ (montrer les étapes principales).

Remarque finale. Cette formulation explicite — opérateurs en \vec{r} gras avec flèche, matrices de spin $\vec{\Sigma}$ sur \mathbb{C}^4 , et séparation radiale avec facteur $1/r$ — rend la construction des spineurs sphériques $\Omega_{\kappa m}$ et leur rôle dans la séparation de l'équation de Dirac totalement naturels et traçables, exactement comme on le fait pour \vec{L} et les harmoniques sphériques $Y_{\ell m}$.

3.11.6 Hydrogène relativiste : séparation radiale et dérivation des niveaux sans théorie spécialisée des fonctions spéciales

Remarque d'approche (pour L3). Il est possible d'éviter un développement théorique approfondi des fonctions hypergéométriques en procédant par une méthode *par séries puissances* strictement analogue à celle utilisée pour l'hydrogène non-relativiste : on propose une factorisation des singularités (au zéro et à l'infini), on écrit une série de puissance pour la partie restante, on obtient une relation de récurrence pour les coefficients, et on impose la terminaison de la série pour garantir la normalisabilité. Cette méthode est constructive et adaptée à un cours de L3 : elle demande des manipulations algébriques mais pas la connaissance préalable des fonctions de Kummer/Whittaker. Les questions ci-dessous guident ce calcul élémentaire.

1. Equation stationnaire et séparation angulaire.

- (a) Écrire l'équation stationnaire dans le potentiel coulombien $V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}$:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m + V(r))\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}).$$

- (b) On utilise les spineurs sphériques $\Omega_{\kappa m}(\theta, \varphi)$.

$$\psi_{E,\kappa,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F_{E\kappa}(r) \Omega_{\kappa m}(\theta, \varphi) \\ i G_{E\kappa}(r) \Omega_{-\kappa m}(\theta, \varphi) \end{pmatrix},$$

et justifier la forme (facteur $1/r$, choix des indices $\kappa, \pm\kappa$).

2. **Système radial.** En projetant sur les composantes angulaires (étapes guidées), montrer que $F(r), G(r)$ satisfont

$$\begin{cases} \frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r}F = (m + E - V(r))G, \\ \frac{dG}{dr} - \frac{\kappa}{r}G = (m - E + V(r))F. \end{cases}$$

3. Découplage et équation du second ordre (algébrique).

- (a) Isoler G à partir de la première équation :

$$G = \frac{1}{m + E - V} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r}F \right),$$

puis différencier cette expression et remplacer dans la seconde équation pour obtenir une équation du second ordre pour F . Réalisez les simplifications algébriques pas à pas (soignez signes et facteurs).

- (b) Pour $V(r) = -Z\alpha/r$, réorganisez l'équation en mettant en évidence les singularités en $r = 0$ (termes en $1/r^2, 1/r$) et le terme constant à l'infini.

4. Changement de variables et factorisation. Pour états liés ($|E| < m$) définir

$$\lambda \equiv \sqrt{m^2 - E^2} (> 0), \quad \rho \equiv 2\lambda r.$$

Montrer que, après changement de variable, l'équation pour $F(\rho)$ admet la factorisation asymptotique

$$F(\rho) = \rho^\gamma e^{-\rho/2} f(\rho),$$

où $\gamma > 0$ est l'exposant gouvernant le comportement près de $\rho = 0$ et $e^{-\rho/2}$ assure la décroissance exponentielle à l'infini.

- (a) Déterminer γ en résolvant l'équation indiciale au voisinage $\rho \rightarrow 0$ et montrer

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}.$$

- (b) Noter et discuter la condition physique nécessaire $\kappa^2 > (Z\alpha)^2$ pour que γ soit réel (remarque sur la zone « super-critique » si $Z\alpha$ approche 1).

5. Méthode par séries (terminaison et quantification).

- (a) Écrire $f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$. En insérant dans l'équation obtenue pour f , déduire la relation de récurrence liant a_{n+1} et a_n . Écrire explicitement la forme générale de la récurrence (montrer les étapes).
- (b) Analyser le comportement de la série pour $\rho \rightarrow \infty$. Argumenter (en vous inspirant de l'exemple non-relativiste) que la série divergera exponentiellement sauf si elle *termine* (i.e. il existe n_r tel que $a_{n_r+1} = 0$ et $a_n = 0$ pour $n > n_r$). Cette condition de terminaison est la condition de quantification.
- (c) Montrer que la condition de terminaison se réécrit, après simplification algébrique, sous la forme simple

$$n_r + \gamma = \frac{Z\alpha E}{\lambda},$$

avec $n_r \in \mathbb{N}$ (nombre quantique radial).

6. Résolution algébrique pour les énergies.

- (a) Poser $N \equiv n_r + \gamma > 0$ et réécrire la relation précédente comme

$$\lambda = \frac{Z\alpha E}{N}.$$

Élever au carré et utiliser $\lambda^2 = m^2 - E^2$ pour obtenir une relation algébrique en E^2 . Montrer que l'on aboutit à

$$E^2 \left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{N^2} \right) = m^2.$$

- (b) En déduire l'expression fermée des niveaux liés

$$E_{n_r, \kappa} = m \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n_r + \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2})^2} \right]^{-1/2}.$$

7. Relier aux notations usuelles et structure fine.

- (a) On définit le nombre quantique principal $n \equiv n_r + |\kappa|$. Montrer que pour $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$ cette définition donne $n \in \mathbb{N}^*$ et justifie la numérotation habituelle des niveaux.
- (b) En réarrangeant on obtient la forme classique

$$E_{n,j} = m \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n - \delta_j)^2} \right]^{-1/2}, \quad \delta_j \equiv j + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}.$$

Présentez brièvement (2–4 lignes) comment la dégénérescence en ℓ de la théorie non-relativiste est partiellement levée (dépendance en j uniquement).

- (c) Développer $E_{n,j}$ pour $Z\alpha \ll 1$ jusqu'à l'ordre $(Z\alpha)^4$ et montrer que

$$E_{n,j} \simeq m - \frac{m(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{m(Z\alpha)^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \mathcal{O}((Z\alpha)^6).$$

- (d) (Exercice numérique) Pour $Z = 1$ et $n = 1, j = \frac{1}{2}$, estimer numériquement la correction fine en eV (valeur approchée). Indication : $mc^2 \simeq 511$ keV, $\alpha \simeq 1/137$.

3.12 Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$ (MQ)



(Correction)

On considère une particule quantique soumise à un potentiel attractif de la forme

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \quad (3.110)$$

appelé potentiel de Pöschl–Teller, où $\alpha > 0$. Ce potentiel admet un nombre fini d'états liés, et permet une résolution exacte de l'équation de Schrödinger.

L'Hamiltonien du système s'écrit,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha \mathbf{X})} \quad (3.111)$$

1. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une fonction d'onde $\psi(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\psi(x) = E\psi(x). \quad (3.112)$$

2. Montrer que la substitution $u = \tanh(\alpha x)$ entraîne

$$\psi'(x) = \alpha(1-u^2)\frac{d\phi}{du}, \quad \psi''(x) = \alpha^2\left((1-u^2)\frac{d^2\phi}{du^2} - 2u\frac{d\phi}{du}\right)(1-u^2), \quad (3.113)$$

avec $\phi(u) = \psi(x(u))$.

3. En déduire que l'équation en $u \in]-1, 1[$ s'écrit

$$(1-u^2)\frac{d^2\phi}{du^2} - 2u\frac{d\phi}{du} + \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-u^2}\right]\phi = 0, \quad (3.114)$$

et exprimer λ, μ en fonction de V_0, α, m, \hbar, E .

4. Identifier λ, μ . On cherche une solution de la forme $\phi(u) = (1-u^2)^{\frac{\lambda}{2}}P(u) = Q(u)P(u)$.

Indication : Exprimer $Q'(u)$ en fonction de $Q(u)$, cela simplifiera les calculs.

Démontrer que $P :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifie l'équation différentielle suivante,

$$(1-u^2)P'' - 2(\mu+1)uP' + [\lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1)]P = 0 \quad (3.115)$$

5. En examinant le comportement de la solution aux bornes $u \rightarrow \pm 1$, on souhaite montrer que $P(u)$ doit être un polynôme pour que $\phi \in L^2([-1, 1])$. On le démontrera par l'absurde. On suppose que P n'est pas un polynôme.

- (a) Démontrer que la condition de normalisation s'écrit,

$$\int_{-1}^1 \frac{|\phi(u)|^2}{1-u^2} < \infty \quad (3.116)$$

- (b) P est analytique entre $]-1, 1[$. Poser ainsi $P(u) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p u^p$. Obtenir une relation de récurrence entre a_{p+2} et a_p et démontrer que,

$$a_{p+2} \underset{\infty}{\sim} a_p \quad (3.117)$$

(c) Conclure en utilisant la critère de Riemann pour les intégrales ¹¹.

6. Il existe ainsi $n = \deg P \in \mathbb{N}$. On pose ainsi,

$$P(u) = \sum_{p=0}^n a_p u^p \quad (3.118)$$

Utiliser la relation de récurrence entre a_{p+2} et a_p , et montrer que $\mu = \lambda - n$ ¹².

7. En déduire la quantification E_n sous la forme

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} (\lambda - n)^2, \quad n = 0, 1, \dots, \lfloor \lambda \rfloor, \quad (3.119)$$

où $\lambda(\lambda + 1) = \frac{2mV_0}{\hbar^2 \alpha^2}$.

8. Montrer que le nombre d'états liés est fini : $N = \lfloor \lambda \rfloor + 1$.

9. Expliquer physiquement pourquoi le nombre d'états liés est fini, malgré la forme "sans fond" du potentiel. Discuter le lien avec la décroissance asymptotique du potentiel.

11. Pour être rigoureux mathématiquement, il faudrait également utiliser le théorème d'équivalence des séries divergentes.

12. On ne regarde que les états liés, donc $\mu > 0$.

3.13 Puissance de Larmor et instabilité électrodynamique de l'atome classique [5] (EM) ★★

(Correction)

Une charge confinée (donc accélérée) émet un rayonnement électromagnétique. Il s'agit maintenant d'examiner plus précisément quelques conséquences des lois de l'Électromagnétisme classique combinées avec celles de la dynamique (d'où : *Électrodynamique*) et notamment de montrer que l'atome classique est fondamentalement instable : l'électron localisé au sein de l'atome émet un rayonnement et, de ce fait, perd graduellement son énergie.

La description ci-dessous repose sur le fait que l'effet de rayonnement reste un phénomène mineur, bien qu'il conduise finalement à des conclusions spectaculaires. Le point de départ sera donc une description dynamique ordinaire, à laquelle on rajoutera les effets perturbatifs dus au rayonnement de la source (l'électron confiné) sur le mouvement de cette source.

3.13.1 Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad} .

La puissance de Larmor, est la puissance perdue par une charge accélérée. Nous allons en déduire une force de radiation, \mathbf{F}_{rad} , qui mènera à des conséquences spectaculaires.

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} \quad (3.120)$$

1. Écrire le travail $dE_{\text{at}} = dW$, qui est égale à la variation d'énergie de l'atome pendant un temps dt de la force de radiation \mathbf{F}_{rad} .
2. Écrire la variation d'énergie de l'atome pendant un temps dt dû à la puissance rayonnée de l'électron.
3. En intégrant par partie et en supposant que le mouvement est périodique, montrer qu'on a alors ¹³,

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2\vartheta^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (3.121)$$

4. Appliquez le PFD, avec la force \mathbf{F}_{rad} ¹⁴ calculée précédemment et une force de rappel $\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$. En cherchant une solution de la forme $\mathbf{r}(t) = \text{Re}\{\mathbf{r}_0 e^{i\omega t}\}$, en cherchant

$$\omega = \omega_0(1 + \alpha(\omega_0\tau) + o(\omega_0\tau)), \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.122)$$

Montrer que la solution est un oscillateur amorti.

AN : On donne $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3} \simeq 6,4 \times 10^{-24}$ s, $\omega_0 = 3 \times 10^{15}$ rad.s⁻¹. Commentez.

3.13.2 Problèmes conceptuels générés par la force de freinage \mathbf{F}_{rad} .

La force de freinage \mathbf{F}_{rad} écrite précédemment est conceptuellement pathologique, comme le montre l'analyse qui suit. En reprenant les notations de la section 1.5, Tome I, l'équation d'Abraham-Lorentz pour une particule de charge e et de masse m soumise à une force \mathbf{F} est (avec $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$) :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\tau \dddot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}, \quad (3.123)$$

13. Où $\vartheta^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

14. Remarquez l'apparition d'une force dépendant de la dérivée de l'accélération. Nous allons étudier dans la partie suivante les problèmes que cette force cause.

où le temps $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3} \simeq 6,4 \times 10^{-24}$ s correspond à une période. Une première bizarrerie de cette équation est l'apparition d'une dérivée troisième de la position de la particule (définie par le rayon-vecteur \mathbf{r}), censée représenter l'effet du freinage par rayonnement.

De surcroît, la perturbation du mouvement provoquée par cet effet est fondamentalement *singulière*, au sens où elle modifie l'ordre de l'équation différentielle du mouvement, lequel passe de 2 à 3 dès que la charge est non nulle. En fait, c'est bien parce que le petit paramètre τ est en facteur de la plus haute dérivée que la perturbation est dite *singulière*, par définition ¹⁵.

Ces avertissements étant donnés, il s'agit maintenant d'examiner les conséquences de l'équation (3.123) telle qu'elle est, précisément pour bien mettre en évidence les très graves difficultés de fond qu'elle soulève.

1. En utilisant la méthode connue pour intégrer une équation différentielle telle que (3.123), écrire l'expression générale de l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}(t)$, supposant connue l'accélération à un certain instant t_0 , $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$.
2. En examinant le cas particulier $\mathbf{F} = 0$, montrer que cette solution est aberrante physiquement.
3. Revenant à la solution générale obtenue en 1 dans le cas $\mathbf{F} \neq 0$, montrer que l'on peut formellement éliminer les solutions divergentes par un choix convenable de t_0 . Commenter ce choix — qui, sur le plan technique, exprime une condition aux limites plutôt qu'une condition initiale.
4. En déduire l'expression régularisée de la solution obtenue en 1. Revenant un cran en arrière et en analysant le noyau intégral figurant dans cette expression, vérifier que l'équation du mouvement redonne bien, dans la limite de charge nulle, l'équation ordinaire de la dynamique.
5. Afin d'exhiber clairement la violation annoncée d'un grand principe physique, effectuer un changement de variable d'intégration très simple pour obtenir :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} e^{-s} \times \mathbf{F}(t + \tau s) ds. \quad (3.124)$$

Commenter cette dernière équation et montrer qu'un principe physique y est violé.

6. Afin de mettre en évidence cette violation de façon encore plus spectaculaire, traiter le cas d'une particule de vitesse nulle en $t = -\infty$ et soumise à une force échelon :

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \mathbf{F}_0 & \text{si } t > 0. \end{cases} \quad (3.125)$$

Résumer ces résultats en traçant la variation en fonction du temps de l'accélération et de la vitesse. Noter que la particule se met en mouvement... **avant l'application de la force** !

15. Le même phénomène se produit pour l'équation aux valeurs propres de Schrödinger, où c'est cette fois la constante de Planck qui est en facteur de la plus haute dérivée. Il existe un traitement perturbatif spécifique pour ce genre de question, appelé méthode BKW (ou WKB) dans le contexte quantique.

3.14 Géodésiques dans un milieu optique dispersif (OO, MA, EM, TH) ★★★★★

(Correction)

Notre but dans cet exercice est de comprendre comment se propage la lumière dans les milieux à partir du principe variationnel, en prenant en compte la dispersion (dépendance de l'indice de réfraction en la longueur d'onde λ). Cela nous permettra ensuite d'expliquer toute sorte de phénomènes optiques courant.

3.14.1 Principe de Fermat et métrique optique

1. Démontrer le principe de Fermat à partir du principe de moindre action. Ce principe peut s'interpréter comme une géodésique pour une métrique effective donnée par :

$$ds^2 = n(\mathbf{r}, \lambda)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.126)$$

soit une métrique conforme à l'eulidienne : $g_{ij}(\mathbf{r}, \lambda) = n(\mathbf{r}, \lambda)^2 \delta_{ij}$ en notation d'Einstein.

2. Justifier pourquoi cette métrique est adaptée à la propagation de la lumière en milieu non homogène et dispersif.
3. Montrer que les trajectoires optiques sont les géodésiques de cette métrique.

3.14.2 Calcul d'un indice $n(\mathbf{r}, \lambda)$

Dans un milieu quelconque, l'indice de réfraction dépend microscopiquement de la densité via la susceptibilité électrique. On souhaite ici justifier, à partir d'un modèle électromagnétique réaliste¹⁶, que l'indice peut s'écrire sous la forme, avec $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$n(\mathbf{r}, \zeta) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2} \frac{N(\mathbf{r})e^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0} (1 + \zeta^2) + o(\zeta^2). \quad (3.127)$$

1. Rappeler que dans un milieu isotrope linéaire, avec champ magnétique négligeable, l'indice de réfraction s'écrit $n^2 = \varepsilon_r = 1 + \chi$.
2. À partir du modèle de Lorentz pour un électron lié soumis à un champ électrique, n'ayant qu'une seule résonance ω_0 , exprimer la susceptibilité $\chi(\mathbf{r}, \omega)$ en fonction de la densité locale $N(\mathbf{r})$. En particulier, démontrer que, pour γ négligeable,

$$n^2(\mathbf{r}, \zeta) = 1 + \frac{N(\mathbf{r})e^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0} \frac{1}{1 - \zeta^2}. \quad (3.128)$$

3. On suppose $\omega \ll \omega_0$. En déduire le développement limité de l'équation (3.127).

Ce modèle permettra ensuite d'introduire une métrique optique pour étudier les géodésiques de la lumière dans la goutte.

16. La validité du développement dépend du milieu considéré. Dans le cas d'un gaz ou d'un liquide, on peut généralement se limiter à une seule résonance principale située dans l'ultraviolet. Cela permet une approximation très précise : l'erreur sur l'indice est typiquement inférieure à 0,01 % dans l'air, et de l'ordre de 0,1 % dans l'eau, dans le domaine du visible.

3.14.3 Calcul de $N(\mathbf{r})$ pour un gaz et un liquide

On va chercher à calculer $N(\mathbf{r})$ pour l'air, et l'eau. Nous allons traiter les cas indépendamment. On rappelle que,

$$N(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{M} \mathcal{N}_A \quad (3.129)$$

1. On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique. Il subit le champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. On suppose qu'on est à l'équilibre hydrostatique, et que $\delta Q = 0$, c-à-d que l'atmosphère est adiabatique.

(a) Démontrer en utilisant le premier principe que,

$$\frac{d}{dz} T = -\frac{g}{C_p}, \quad (3.130)$$

En déduire $T(z)$.

(b) Déterminer une équation différentielle sur p et démontrer que,

$$p(z) = p_0 \left(\frac{T(z)}{T_0} \right)^{\frac{gM}{R\Gamma}}, \quad \Gamma = \frac{g}{C_p}, \quad (3.131)$$

(c) En déduire $N(\mathbf{r}) = N(z)$ dans ce cas.

2. Dans le cas de liquide, on peut supposer dans la plupart des cas que $\rho(\mathbf{r}) = \text{cste}$. En déduire $N(\mathbf{r})$.

3.14.4 Géodésiques optiques dans un milieu sphérique

On considère un milieu isotrope dont l'indice de réfraction n dépend uniquement de la position radiale $r = \|\mathbf{r}\|$ et de la fréquence réduite $\zeta = \omega/\omega_0$, via la fonction $n(r, \zeta)$. Ce cadre modélise, par exemple, des profils sphériquement symétriques de densité électronique $N(r)$, pertinents pour des atmosphères planétaires idéalisées.

Dans ce contexte, la propagation lumineuse est décrite par une métrique optique, définissant un produit scalaire infinitésimal entre deux vecteurs $dx^i = (dx^1, dx^2, dx^3)$:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.132)$$

où g_{ij} est la métrique sphérique optique. On paramètre la trajectoire lumineuse par un paramètre affine s , avec les fonctions $r(s), \theta(s), \varphi(s)$.

Le lagrangien associé s'écrit :

$$\mathcal{L} = n^2(r, \zeta) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad (3.133)$$

avec $\dot{} = \frac{d}{ds}$.

On restreint l'étude au plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui simplifie le lagrangien en :

$$\mathcal{L} = n^2(r, \zeta) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad (3.134)$$

avec $\dot{\theta} = 0$.

On utilise pour l'indice de réfraction la loi de dispersion électromagnétique [3.128](#).

1. Dépendance radiale de l'indice

- (a) Justifier que, pour une fréquence fixée ζ , la dépendance radiale de n^2 est entièrement gouvernée par le profil $N(r)$. Vérifier que l'indice est bien réel tant que $\zeta < 1$.
- (b) Calculer la dérivée radiale $\partial_r n^2(r, \zeta)$, et exprimer-la sous la forme :

$$\partial_r n^2(r, \zeta) = C(\zeta) \cdot N'(r), \quad (3.135)$$

avec $C(\zeta)$ une constante à expliciter.

- (c) Discuter le signe de $\partial_r n^2$ si $N(r)$ est une fonction décroissante (par exemple $N(r) = \frac{N_0}{1+\lambda r^2}$).

2. Symboles de Christoffel

On se place dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$. La métrique optique prend alors la forme diagonale :

$$g_{ij} = n^2(r, \zeta) \cdot \text{diag}(1, r^2). \quad (3.136)$$

On rappelle que la formule des symboles de Christoffel est :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}). \quad (3.137)$$

- (a) En déduire les expressions explicites de $\Gamma_{rr}^r, \Gamma_{\varphi\varphi}^r, \Gamma_{r\varphi}^\varphi$ en fonction de $n(r, \zeta), n'(r)$ et r .
On rappelle que $n'(r) = \frac{\partial n}{\partial r}$.
- (b) Montrer que :

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{\partial_r n^2}{2n^2}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -rn^2 + \frac{r^2 \partial_r n^2}{2}, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} + \frac{\partial_r n^2}{2n^2}. \quad (3.138)$$

3. Équations des géodésiques

On rappelle l'équation géodésique dans un espace à connexion de Levi-Civita :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (3.139)$$

- (a) Écrire explicitement les équations géodésiques dans le plan équatorial pour $r(s)$ et $\varphi(s)$, à partir des symboles de Christoffel obtenus précédemment.
- (b) Discuter qualitativement l'effet du gradient $\partial_r n^2$ sur la courbure de la trajectoire (lumière déviée vers les zones d'indice plus élevé ou plus faible?).

4. Formalisme lagrangien

On considère le lagrangien optique :

$$\mathcal{L} = n^2(r, \zeta) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (3.140)$$

- (a) Écrire les équations d'Euler-Lagrange pour les deux coordonnées généralisées r et φ .
- (b) Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange pour φ conduit à une loi de conservation (conservation du moment angulaire effectif).

5. Vérification de cohérence

Vérifier que les équations obtenues par le formalisme lagrangien coïncident avec celles issues de la géométrie (symboles de Christoffel).

6. Conservation et symétries

- (a) Montrer que la symétrie par rotation en φ implique la conservation du moment angulaire optique :

$$\ell = n^2(r, \zeta) \cdot r^2 \dot{\varphi} = \text{constante}. \quad (3.141)$$

- (b) En déduire une nouvelle expression du lagrangien, de la forme :

$$\mathcal{L} = n^2(r, \zeta) \left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{n^4(r, \zeta) r^2} \right). \quad (3.142)$$

7. Paramétrage par l'angle φ

- (a) Proposer un changement de paramètre pour décrire la trajectoire en fonction de φ , c'est-à-dire exprimer $r = r(\varphi)$ et montrer comment passer de $\dot{r} = \frac{dr}{ds}$ à $\frac{dr}{d\varphi}$.
 (b) En utilisant la conservation du moment angulaire effectif $\ell = n^2(r, \zeta) r^2 \dot{\varphi}$, montrer que

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{n^2(r, \zeta) r^2}{\ell} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{L}}{n^2(r, \zeta)} - \frac{\ell^2}{n^4(r, \zeta) r^2} \right). \quad (3.143)$$

- (c) Démontrer que le lagrangien \mathcal{L} est conservé le long de la trajectoire, c'est-à-dire que $\frac{d\mathcal{L}}{ds} = 0$.
 (d) Interpréter physiquement la conservation de \mathcal{L} dans le contexte de la propagation lumineuse dans un milieu à indice variable.
 (e) En déduire une équation différentielle explicite pour $r(\varphi)$ dans un milieu donné $n(r, \zeta)$, et discuter brièvement la résolution analytique ou numérique de cette équation.

8. Loi de Snell locale

En exploitant la conservation du moment angulaire effectif, montrer qu'il existe une relation analogue à la loi de Snell sous la forme :

$$n(r, \zeta) \cdot r \sin \alpha = \text{constante}, \quad (3.144)$$

où α est l'angle entre la tangente à la trajectoire et la direction radiale.

9. Méthode numérique

- (a) Proposer un schéma numérique pour intégrer l'équation différentielle en $r(\varphi)$, avec conditions initiales $r(0) = r_0$, $\frac{dr}{d\varphi}(0) = v_0$.
 (b) Discuter l'impact du choix de la fréquence réduite ζ sur la trajectoire (dispersion angulaire).

Passons maintenant aux applications de ce que nous avons utilisé ici, pour expliquer différents phénomènes quotidiens.

3.14.5 1^{ère} application : l'arc-en-ciel comme manifestation géométrique de la dispersion

On modélise une goutte d'eau comme une sphère homogène de rayon R , d'indice $n(\omega)$ calculé dans la section 3.14.2, plongée dans l'air, d'indice $\simeq 1$, (voir fig 3.4¹⁷).

1. **Indice de réfraction de l'eau.** Rappeler l'expression de $n(\mathbf{r}, \omega) = n(\omega)$ pour un liquide.
2. **Modélisation géométrique d'un arc-en-ciel primaire.**
 - (a) On considère un rayon incident venant du Soleil, entrant dans la goutte avec un angle d'incidence α , réfracté selon la loi de Snell–Descartes, réfléchi une fois à l'intérieur, puis réfracté à nouveau à la sortie.

Justifier que le rayon reste rectiligne à l'intérieur de la goutte (indice constant), et que les seules déflexions viennent des surfaces sphériques.

17. Source.

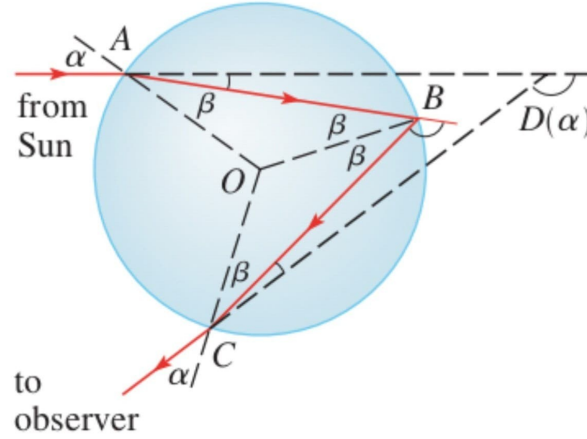


FIGURE 3.4 – Schéma géométrique des angles d'incidence, de réfraction et de déviation d'un rayon lumineux à travers une goutte sphérique. Ce schéma permet d'introduire l'angle total de déviation $\Theta - \pi = D$.

- (b) $\Theta(\omega, \alpha)$ est l'angle de déviation totale. Ainsi, démontrer que,

$$\Theta(\omega, \alpha) = 2\alpha - 4 \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n(\omega)}\right) + \pi \quad (3.145)$$

- (c) Montrer que $\Theta(\omega, \alpha)$ possède un minimum pour un certain angle $\alpha_c(\omega)$. Démontrer ainsi que,

$$\alpha_c(\omega) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{4 - n^2(\omega)}{3}}\right) \quad (3.146)$$

En déduire que les directions de sortie des rayons se concentrent autour d'un angle particulier $\Theta_{\min}(\omega)$, ce qui donne lieu à un maximum d'intensité lumineuse observée dans cette direction, (voir fig 3.5).

- (d) **A.N.** Pour $n \simeq 1.33$, calculer l'angle D_{\min} .
 (e) Étudier la fonction $\Theta_{\min}(\omega)$, et expliquer le phénomène des arcs en ciels.

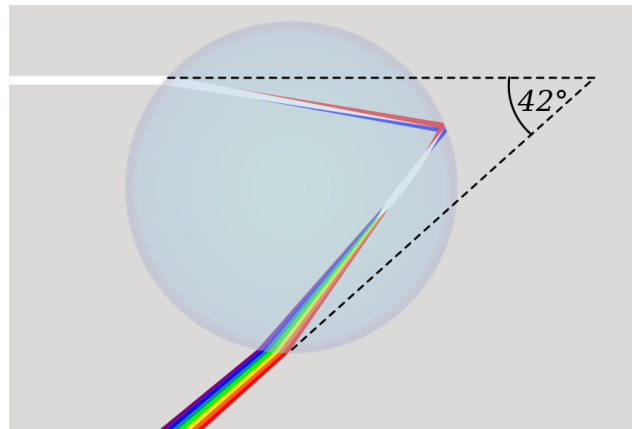


FIGURE 3.5 – Schéma de la formation de l'arc en ciel et de l'angle $\Theta_{\min}(\omega)$ (Wikipédia).

3.14.6 2^{ème} application : couleurs des bulles de savon (interférences en lame mince) [1]

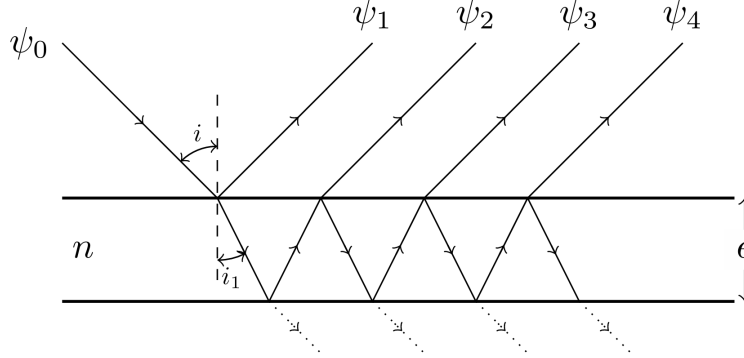


FIGURE 3.6 – Schéma de la lame de savon.

Nous étudions ici les irisations colorées observées sur une bulle de savon, expliquées par des interférences entre ondes réfléchies au sein d'une couche liquide très fine modélisée comme une lame mince.

Une bulle est représentée par une couche liquide d'indice $n \simeq \frac{4}{3}$ et d'épaisseur constante e , enfermée entre deux interfaces air/liquide/air, (voir fig 3.6)¹⁸. L'indice de l'air est ici pris égal à 1. La lumière incidente est monochromatique de longueur d'onde λ et arrive presque normalement¹⁹.

1. Réflexions multiples et interférences

- Expliquer pourquoi la lumière réfléchie par la bulle peut se décomposer en une somme infinie d'ondes réfléchies et transmises successivement aux deux interfaces.
- Montrer que le déphasage entre deux ondes consécutives réfléchies est donné par :

$$\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda}. \quad (3.147)$$

2. Coefficients de Fresnel et amplitude réfléchie

On note $r = \frac{1-n}{1+n}$ et $t = \frac{2}{1+n}$ les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface air-savon (incidence normale).

- Calculer numériquement r et t pour $n = \frac{4}{3}$.
- Écrire l'expression de l'amplitude totale réfléchie ψ_r comme la somme de la série géométrique des ondes multiples, en explicitant clairement la contribution de chaque réflexion et transmission. Montrer que cette somme s'écrit :

$$\psi_r = \psi_0 \left[r + \frac{t^2 r e^{i\varphi}}{1 - r^2 e^{i2\varphi}} \right]. \quad (3.148)$$

3. Intensité réfléchie et conditions d'interférences

- En déduire l'expression de l'intensité réfléchie $I_r = \frac{|\psi_r|^2}{2}$.

18. Dans le schéma, on donne i mais on peut considérer $i = 0$.

19. Ce problème illustre comment des interférences en lame mince, modulées par des variations microscopiques d'épaisseur et d'indice optique, peuvent générer des effets visuels spectaculaires, similaires à ceux observés dans les arcs-en-ciel.

- (b) Montrer que cette intensité présente des maxima et minima en fonction de φ , et déterminer les conditions sur λ pour lesquelles la réflexion est minimale (interférences destructives) et maximale (interférences constructives).

4. Application numérique : épaisseur $e = 0.3 \mu m$

- (a) Déterminer les valeurs de λ dans l'intervalle $[0.4, 0.8] \mu m$ pour lesquelles la réflexion est minimale.
- (b) Quelle est la teinte dominante perçue par l'œil humain dans ce cas ?
- (c) Étudier qualitativement ce qui se passe lorsque $e = 0.03 \mu m$ et lorsque $e = 30 \mu m$. Interpréter les conséquences optiques de ces deux situations.

5. Extension : indice dépendant de la position, de la fréquence, et lumière blanche

On considère que l'indice optique dans la bulle dépend à la fois de la position radiale $R \in [0, e]$, où e désigne l'épaisseur locale moyenne du film (épaisseur du film de savon, pas le rayon de la bulle), et de la fréquence ω via la variable réduite $\zeta = \frac{\omega}{\omega_0}$, avec ω_0 une fréquence caractéristique.

On suppose que la densité locale d'oscillateurs suit une variation radiale²⁰ donnée par :

$$N(R) = N_0 (1 - \mu R^2), \quad (3.149)$$

avec $\mu > 0$ un paramètre caractérisant la variation spatiale.

- (a) En rappelant la forme développée de l'indice pour $\zeta \rightarrow 0$ (éq 3.127) radiale de $N(R)$, expliquer comment la variation radiale $N(R)$ influence localement l'indice optique.
- (b) En tenant compte de la variation de l'indice selon R , montrer que,

$$\varphi(\omega) = \frac{2\omega}{c} \int_0^e n\left(R, \frac{\omega}{\omega_0}\right) dR, \quad (3.150)$$

- (c) Expliquer pourquoi l'éclairage par une lumière blanche (spectre large en ω) peut engendrer des motifs colorés complexes (arc-en-ciel) sur la surface de la bulle.
- (d) Pour le cas spécifique $N(R) = N_0(1 - \mu R^2)$, calculer explicitement la contribution intégrale au déphasage $\varphi(\omega)$.
- (e) Montrer que la condition d'extrémisation de l'intensité ($\frac{dI}{d\varphi} = 0$) impose,

$$a\omega^3 - b\omega + p\pi = 0, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (3.151)$$

où a, b s'expriment en fonction de, $c, e, N_0, m, \omega_0, \varepsilon_0$.

- (f) On suppose que $a > b$ ²¹. Étudier

$$f_p(\omega) = a\omega^3 - b\omega + p\pi, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (3.152)$$

En déduire, $\exists!(\omega_p) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, a\omega_p^3 - b\omega_p + p\pi = 0$.

- (g) Étudier la suite (ω_p) .

- (h) Qu'avons nous fait ici ?

20. Attention, ici R désigne la coordonnée locale dans l'épaisseur du film (c'est-à-dire la distance perpendiculaire à la surface de la bulle), et non le rayon de la bulle elle-même. La densité locale d'oscillateurs $N(R)$ varie donc à travers l'épaisseur du film de savon, ce qui influence l'indice optique selon cette direction.

21. C'est le cas. Une petite A.N. permettrait de le vérifier.

3.14.7 3^{ème} application : les mirages [2]

Le principe de Fermat stipule que le temps mis par la lumière pour aller d'un point à un autre est minimal. On suppose que l'indice de réfraction de l'air au niveau du sol ne dépend que de l'altitude, $n(z)$. On considère un rayon lumineux partant de la hauteur h et faisant un angle de départ θ vers le bas. Les points du plan xOz sont repérés par leurs coordonnées cartésiennes (x, z) , (voir fig 3.7).

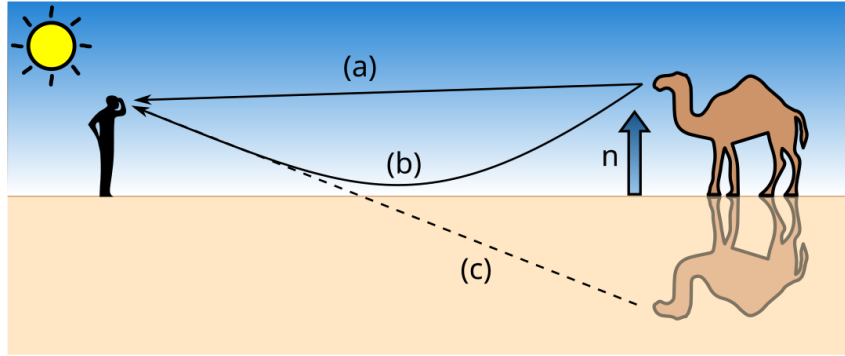


FIGURE 3.7 – Schéma d'un mirage (Wikipédia).

1. Montrer que le temps mis par la lumière pour aller du point $(0, h)$ à un point (x_f, z_f) par un chemin $z(x)$ peut s'écrire

$$T = \frac{1}{c} \int_0^{x_f} n(z(x)) \sqrt{1 + (z'(x))^2} dx \quad (3.153)$$

où $z'(x)$ est la dérivée de z par rapport à x .

2. Le temps T devant être minimal, déduire de l'identité de Beltrami que l'équation du trajet lumineux obéit à l'équation

$$n(z(x))^2 = A(1 + (z'(x))^2) \quad (3.154)$$

où A est une constante.

3. On suppose que le sol est chaud et l'atmosphère plus froide. Dans ce cas, l'indice de réfraction augmente avec z . On prend comme modèle

$$n(z)^2 = n_0^2 + \alpha z \quad (3.155)$$

Montrer que

$$A = \frac{n(h)^2}{1 + \tan^2 \theta} \quad (3.156)$$

4. Montrer que le trajet lumineux

$$z(x) = h + x \tan \theta + \frac{\alpha}{4A} x^2 \quad (3.157)$$

est solution du problème (il suffit de remplacer).

5. On suppose qu'un observateur a un œil placé au point (L, H) . Montrer qu'il existe deux angles initiaux θ_1 et θ_2 qui permettent aux rayons lumineux partant de $(0, h)$ d'être observés en général.
6. Expliquer l'effet de mirage.

3.14.8 4^{ème} application : géodésiques optiques au coucher de Soleil – modèle linéaire

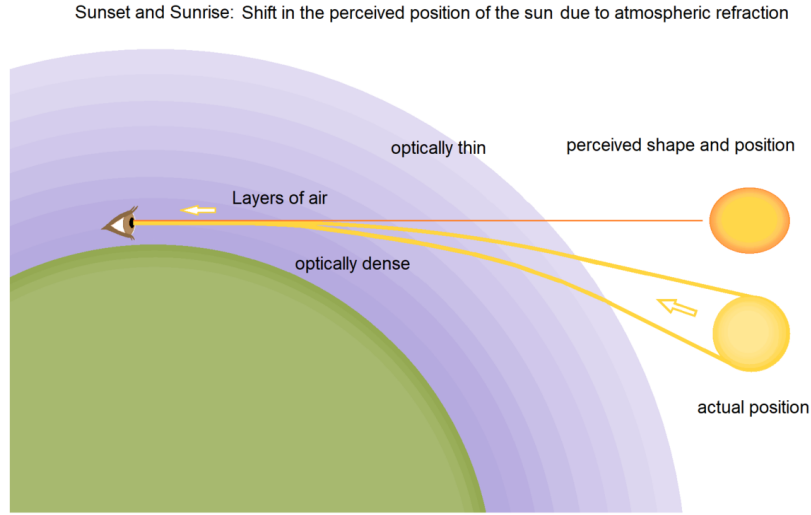


FIGURE 3.8 – Schéma représentatif de la déviation des rayons lumineux au coucher du Soleil (Wikipédia).

On rappelle que dans la partie précédente, on a démontré que la densité électronique suit :

$$N(z) = N_0 \left(\frac{T(z)}{T_0} \right)^k, \quad \text{avec } T(z) = T_0 - \Gamma z. \quad (3.158)$$

1. Montrer que pour z proche de zéro, le développement limité donne

$$N(z) = N_0 \left(1 - \frac{k\Gamma}{T_0} z \right) + o(z) \quad (3.159)$$

Conclure que $N(z)$ est approximativement exponentielle avec une hauteur caractéristique h définie par

$$h := \frac{T_0}{k\Gamma}. \quad (3.160)$$

2. En déduire l'expression approchée de l'indice de réfraction au voisinage du sol, en notant sa dépendance en fréquence ω par

$$n(z, \omega) \simeq n_0(\omega) - \alpha(\omega)z, \quad (3.161)$$

avec

$$n_0(\omega) := 1 + K(\omega), \quad \alpha(\omega) := \frac{k\Gamma}{T_0} K(\omega). \quad (3.162)$$

3. En vous appuyant sur le principe de Fermat, écrire le lagrangien associé à la trajectoire $z(x)$ d'un rayon lumineux :

$$\mathcal{L}(z, z') = n(z, \omega) \sqrt{1 + (z')^2}. \quad (3.163)$$

Montrer que, comme \mathcal{L} ne dépend pas explicitement de x , on obtient l'intégrale première (identité de Beltrami) :

$$n(z, \omega)^2 = A(\omega) (1 + (z')^2), \quad (3.164)$$

avec $A(\omega) > 0$ constante.

4. À l'aide de l'expression linéaire de $n(z, \omega)$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la trajectoire :

$$(z')^2 = \frac{(n_0(\omega) - \alpha(\omega)z)^2}{A(\omega)} - 1. \quad (3.165)$$

Montrer que la solution s'écrit explicitement sous la forme

$$z(x) = h + x \tan \theta + \frac{\alpha(\omega)}{4A(\omega)} x^2, \quad (3.166)$$

avec la relation entre $A(\omega)$ et l'angle initial θ

$$A(\omega) = \frac{n_0(\omega)^2}{1 + \tan^2 \theta}. \quad (3.167)$$

5. Étudier qualitativement l'influence de la fréquence ω sur la trajectoire $z(x, \omega)$. Expliquer pourquoi :
- Les rayons bleus (ω élevé) sont plus courbés que les rouges,
 - Le Soleil reste visible même lorsqu'il est géométriquement sous l'horizon,
 - Le Soleil apparaît rouge lors du coucher.

3.14.9 5^{ème} application : diffusion Rayleigh et couleur du ciel

1. On modélise une molécule de l'atmosphère par un dipôle électrique induit $\mathbf{p}(t)$ par le champ électrique incident $\mathbf{E}(t)$ d'une onde lumineuse de fréquence ω . Écrire l'expression de $\mathbf{p}(t)$ en fonction de la polarisabilité α_e et du champ $\mathbf{E}(t)$.
2. Exprimer la puissance rayonnée par un dipôle oscillant en fonction de l'amplitude du dipôle p_0 , de la fréquence ω , et de l'angle d'observation θ .
3. En déduire la dépendance de l'intensité diffusée par la molécule en fonction de la fréquence ω et de la polarisabilité α_e .
4. En utilisant la relation entre la fréquence ω et la longueur d'onde λ , montrer que l'intensité diffusée varie comme $1/\lambda^4$.
5. Expliquer pourquoi cette dépendance en $1/\lambda^4$ conduit à la couleur bleue du ciel.
6. Bien que la lumière violette soit encore plus diffusée que la bleue, pourquoi le ciel nous apparaît-il bleu et non violet ?
7. En vous appuyant sur ce phénomène, expliquer pourquoi la lumière du Soleil devient rougeâtre lors du lever ou du coucher du Soleil.

3.15 Condensation de Bose-Einstein [7] (PS) ★★★★★

(Correction)

On considère un gaz de particules bosoniques identiques de spin nul dans une enceinte de volume V et au contact d'un thermostat à la température T . Les particules n'interagissent pas entre elles.

- On décrit le gaz dans l'ensemble grand-canonique. On souhaite exprimer le nombre moyen de particules en fonction de la température T et du potentiel chimique μ sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à expliciter.
 - Écrire l'expression du nombre moyen $\langle n_\varepsilon \rangle$ de particules dans un état d'énergie ε selon la statistique de Bose-Einstein, en fonction de μ , T et k_B .
 - En considérant un gaz dans une boîte cubique de volume V avec des conditions aux limites périodiques, exprimer la densité d'états $g(\varepsilon)$ dans l'approximation d'un gaz libre non relativiste de particules de masse m .
 - En déduire que le nombre total moyen de particules s'écrit sous la forme suivante, où $\beta = 1/(k_B T)$, puis explicitez cette expression en une intégrale dépendant de T , μ et m , que l'on ne cherchera pas à résoudre.

$$\langle N \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon \quad (3.168)$$

- On suppose maintenant que le système est fermé et contient N particules. Le potentiel chimique est alors une fonction de la température et de la densité $\rho = N/V$ de particules. En utilisant le résultat précédent et l'équivalence entre les ensembles canonique et grand-canonique, montrez que $\mu(T)$ est donné par l'équation suivante, avec $\varphi(T) = e^{\mu(T)/(k_B T)}$.

$$\rho = \left(\frac{2mk_B T}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^{x/\varphi(T)} - 1} dx, \quad (3.169)$$

- À partir de l'équation (3.169), justifiez que $\mu(T)$ augmente quand la température diminue.
- Rappelez pourquoi le potentiel chimique est forcément négatif. Concluez que l'équation (3.169) ne peut être vraie que pour $T \geq T_{BE}$, où vous explicitez T_{BE} . On donne $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx \simeq 2,612 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- Pour $T \leq T_{BE}$, $\mu(T) = 0$ et l'équation (3.169) n'est pas vérifiée. Identifiez où se trouve le problème dans le raisonnement des questions précédentes.
- Pour résoudre ce problème, on isole la population de l'état fondamental, que l'on note N_0 . Justifiez l'éq (3.170). Calculez alors N_0 en fonction de N , T , T_{BE} , et tracez N_0/N en fonction de T/T_{BE} . Commentez.

$$N = N_0 + \left(\frac{2m}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} V \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon. \quad (3.170)$$

- Justifiez que pour $T \leq T_{BE}$, le grand potentiel J s'écrit

$$\frac{J}{k_B T} = -\ln(1 + N_0) + \left(\frac{2m}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} V \int_0^{+\infty} \varepsilon^{1/2} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (3.171)$$

Que devient cette expression dans la limite thermodynamique? Calculez alors la pression du gaz de bosons pour $T \leq T_{BE}$ et $N \gg 1$, et commentez ses dépendances. On donne : $\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \simeq 1,341 \times \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

3.16 Chaîne de désintégration (FS) ★★★★★

(Correction)

On considère une chaîne de désintégration radioactive formée de n isotopes notés (N_k) , se désintégrant successivement les uns en les autres ($N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \dots \rightarrow N_n$), le dernier étant supposé stable. On note $N_k(t)$ le nombre de noyaux du type k à l'instant $t \geq 0$. Chaque noyau N_k est instable pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et possède une constante de décroissance radioactive $\lambda_k > 0$. Le dernier isotope N_n est stable, ce qui revient à poser $\lambda_n = 0$.

3.16.1 Modélisation physique de la chaîne de désintégration

1. Justifier que les fonctions $N_k(t)$ vérifient le système différentiel :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_k}{dt} = -\lambda_k N_k + \lambda_{k-1} N_{k-1} \quad \text{pour } k \in \llbracket 2, n \rrbracket. \quad (3.172)$$

2. Résoudre le cas $n = 2$ avec les conditions initiales $N_1(0) = N_0$, $N_2(0) = 0$. Tracer qualitativement les courbes $N_1(t)$ et $N_2(t)$.
3. Montrer que la solution vérifie pour tout $t \geq 0$:

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0. \quad (3.173)$$

Interpréter physiquement : on retrouve ici une conservation de la matière dans le système.

4. Discuter du moment où la quantité $N_2(t)$ est maximale, et donner son expression si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3.16.2 Étude mathématique du système différentiel

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.174)$$

On considère le système vectoriel :

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = A\mathbf{N}, \quad \mathbf{N}(0) = \mathbf{N}_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.175)$$

1. Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{R} si les λ_k (pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$) sont deux à deux distincts. Donner les valeurs propres.
2. Montrer que le système admet une solution unique globale sur \mathbb{R}_+ pour toute condition initiale \mathbf{N}_0 .
3. On pose $E(t) = \|\mathbf{N}(t)\|^2$. Montrer que E est dérivable. On souhaite ensuite démontrer que E est décroissante.
 - (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x | Ax \rangle = \langle x | Sx \rangle, \quad S = \frac{A + A^T}{2} \quad (3.176)$$

(b) Montrer que,

$$\langle x | Sx \rangle = -\frac{1}{2} \sum_k \lambda_k (x_k - x_{k+1})^2 - \frac{\lambda_1}{2} x_1 \quad (3.177)$$

(c) Discuter le signe de $E'(t)$. En déduire la stabilité du système.

4. On suppose que $\lambda_k \geq \alpha > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On définit une norme qui vérifie,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|Mx\| \leq C \times \xi \|x\|, \quad (3.178)$$

où ξ vérifie $\xi > \mu_p \in \text{Sp}(M), \forall p$. Démontrer alors que :

$$\|\mathbf{N}(t) - \mathbf{N}_\infty\| \leq K e^{-\alpha t}, \quad \text{où } \mathbf{N}_\infty = (0, \dots, 0, N_\infty), \quad K \text{ cste.} \quad (3.179)$$

5. Vérifier que le système conserve la quantité totale de matière :

$$\sum_{k=1}^n N_k(t) = \sum_{k=1}^n N_k(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.180)$$

3.17 Du principe de moindre action aux équations d'Einstein (RR, MA, RG) ★★★★★

(Correction)

3.17.1 De la géométrie classique à la géométrie lorentzienne

1. **Géométrie d'une surface dans \mathbb{R}^3 .** Soit une surface lisse $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ définie localement par une carte paramétrique :

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (3.181)$$

On appelle $\partial_u \mathbf{X}$ et $\partial_v \mathbf{X}$ les vecteurs tangents à la surface, obtenus comme dérivées partielles de la carte.

- (a) Montrer que le carré de l'élément de longueur infinitésimal s'écrit :

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (3.182)$$

où :

$$E = \partial_u \mathbf{X} \cdot \partial_u \mathbf{X}, \quad F = \partial_u \mathbf{X} \cdot \partial_v \mathbf{X}, \quad G = \partial_v \mathbf{X} \cdot \partial_v \mathbf{X} \quad (3.183)$$

- (b) Montrer que la matrice :

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (3.184)$$

définit un tel produit scalaire, et donc une métrique riemannienne sur la surface.

- (c) Comparer avec le cas plat du plan \mathbb{R}^2 : montrer que dans la base canonique, on a $ds^2 = dx^2 + dy^2$.
- (d) Montrer que g est symétrique, donc diagonalisable. En déduire que ses valeurs propres sont réelles. Ces valeurs propres sont appelées les **courbures principales**.
- (e) On définit la **courbure de Gauss** κ comme le produit des deux courbures principales. Pourquoi est-elle un invariant géométrique fondamental pour une surface ?
2. **Définition intrinsèque d'une métrique.** Soit une variété différentiable \mathcal{M} de dimension n . On appelle *métrique riemannienne* un champ de tenseurs $(g_p)_{p \in \mathcal{M}}$ qui, à chaque point p , définit un produit scalaire sur l'espace tangent $T_p \mathcal{M}$.
- (a) Montrer que localement, dans une carte (x^μ) , l'élément de longueur s'écrit :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (3.185)$$

- (b) Quelle est la relation entre cette écriture et la forme obtenue en (1) ?

3. **Étude de la métrique hyperbolique sur le demi-plan supérieur** Considérons le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \quad (3.186)$$

muni de la métrique dite *hyperbolique* donnée par l'élément de longueur :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (3.187)$$

- (a) Vérifier que cette expression définit bien une métrique riemannienne (symétrique définie positive) sur \mathbb{H} .

- (b) Calculer la matrice de la métrique g et son déterminant $\det g$.
- (c) Calculer les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ associés à cette métrique.
- (d) En deux dimensions, κ s'écrit

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Gamma_{12}^2 \sqrt{\det g}}{g_{22}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Gamma_{11}^2 \sqrt{\det g}}{g_{22}} \right) \right]. \quad (3.188)$$

- (e) Conclure sur la nature de la courbure de cette métrique (positive, nulle ou négative).
- (f) Grâce au principe de moindre action, nous allons calculer les géodésiques dans cette métrique :
 - i. Écrire le Lagrangien $\mathcal{L}(y, y', x)$ associé à la longueur d'une courbe paramétrée par x .
 - ii. Calculer les dérivées $\partial_{y'} \mathcal{L}$.
 - iii. Utiliser l'identité de Beltrami et montrer que, pour $\lambda \neq 0$,

$$y \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{\lambda} \quad (3.189)$$

- iv. En déduire que,

$$(x - x_0)^2 + y^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.190)$$

- v. Discuter le cas particulier $\lambda = 0$. Quelles géodésiques obtient-on dans ce cas ?
- vi. (Bonus) En analysant la forme des géodésiques, que peut-on dire de la symétrie du plan hyperbolique ?
- (g) (Bonus) Donner une interprétation géométrique de cette métrique et son lien avec la géométrie non-euclidienne.

4. Variétés pseudo-riemanniennes.

- (a) Définir une métrique *lorentzienne* sur une variété \mathcal{M} de dimension 4. Quelle est sa signature ?
- (b) Donner la forme de la métrique de Minkowski :

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (3.191)$$

Que représentent les vecteurs de norme négative, nulle, ou positive ?

5. Courbes et géodésiques. Soit une courbe $\gamma(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$ sur une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

- (a) Montrer que la longueur de la courbe s'écrit :

$$L[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt \quad (3.192)$$

- (b) Montrer que les courbes qui minimisent cette longueur satisfont les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

3.17.2 Dynamique des particules en espace-temps courbe

1. On considère une particule libre de masse m dans un espace-temps muni d'une métrique $g_{\mu\nu}(x)$. Son action est²² :

$$S[x] = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu d\tau \quad (3.193)$$

22. On peut le démontrer. Cela est fait (à la racine près), dans l'exercice 3.8.

Montrer, à l'aide du principe de moindre action, que les équations du mouvement sont :

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (3.194)$$

où les symboles de Christoffel sont :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (3.195)$$

2. Montrer que si l'on se place dans un repère localement inertiel (coordonnées ξ^α), on a :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (3.196)$$

et que par changement de variables, cela implique l'équation des géodésiques dans les coordonnées x^μ .

3.17.3 Courbure et action d'Einstein-Hilbert

On définit la connexion de Levi-Civita comme la seule connexion sans torsion vérifiant $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. Voici les formules pour le tenseur de Riemann, de Ricci et le scalaire de courbure :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (3.197)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.198)$$

1. Montrer que si la métrique est localement plate, alors le tenseur de Riemann s'annule.
2. On cherche une action scalaire, covariante, construite uniquement à partir de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2. Montrer que l'action d'Einstein-Hilbert :

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (3.199)$$

est (sous ces hypothèses) la seule possible. Justifier cette unicité.

3.17.4 Principe de moindre action et équations d'Einstein

1. Soit une action de champ $S[\varphi] = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) d^4x$. On définit sa variation fonctionnelle comme :

$$\delta S[\varphi] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\varphi + \varepsilon\eta] \right|_{\varepsilon=0} \quad (3.200)$$

où $\eta(x)$ est une variation arbitraire à support compact. Montrer que le principe de moindre action implique les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \quad (3.201)$$

2. Appliquer cette méthode, sans passer par Euler-Lagrange²³, à l'action d'Einstein-Hilbert $S[g]$ pour retrouver les équations du champ gravitationnel en l'absence de matière :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.202)$$

23. Ici, à cause du fait que R dépend de dérivées seconde de g , alors il faudrait expliciter une équation d'Euler-Lagrange bâtonnée, avec un terme de dérivée d'ordre 2, ce qui complique énormément les calculs. Il suffit alors la même méthode que celle qui permet de répondre à la question 1, pour obtenir l'équation d'Einstein.

3. On ajoute un terme de matière :

$$S_{\text{total}} = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} \, d^4x + S_{\text{matière}}[g, \psi] \quad (3.203)$$

et on définit le tenseur énergie-impulsion par :

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matière}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3.204)$$

- (a) Justifier cette définition, en expliquant ce que signifie la dérivée fonctionnelle par rapport à la métrique.
- (b) En déduire les équations d'Einstein complètes :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.205)$$

3.18 Une simple particule quantique proche d'un trou noir (MQ, MA, RG, PS) ★★★★★

(Correction)

3.18.1 Temps propre et potentiel gravitationnel relativiste

Dans le vide autour d'un trou noir sphérique non chargé, la métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.206)$$

où $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild.

1. Montrer que le temps propre d'une particule immobile à la coordonnée r est donné par :

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt. \quad (3.207)$$

2. En supposant que l'énergie totale est proportionnelle au taux de battement d'une horloge (comme en mécanique quantique), en déduire que l'énergie effective d'une particule immobile est :

$$E(r) = mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}. \quad (3.208)$$

3. Développer cette expression en série limitée à l'ordre 2 en $\frac{r_s}{r} \ll 1$. Retrouver le potentiel newtonien et une correction relativiste :

$$E(r) = mc^2 - \frac{GMm}{r} - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r^2} + o\left(\frac{r_s^2}{r^2}\right) \quad (3.209)$$

4. Identifier le potentiel effectif :

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r^2}. \quad (3.210)$$

3.18.2 Expansion autour de l'horizon

Posons $r = r_s + x$ avec $x \ll r_s$.

1. Exprimer $V_{\text{eff}}(r)$ en fonction de x , et développer à l'ordre dominant. Montrer que :

$$V(x) = \frac{3}{2} \frac{GMm}{r_s^2} x + \text{const} + o(x). \quad (3.211)$$

2. Identifier un potentiel linéaire effectif :

$$V(x) = m g_{\text{eff}} x, \quad \text{avec } g_{\text{eff}} = \frac{3}{2} \frac{GM}{r_s^2}. \quad (3.212)$$

et expliquer pourquoi cette situation est analogue à celle d'un champ gravitationnel uniforme près d'une surface.

3.18.3 Analyse quantique du potentiel linéaire

1. Écrire l'équation de Schrödinger dans le repère local proche de l'horizon :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + mg_{\text{eff}} x \psi(x) = E \psi(x). \quad (3.213)$$

2. Introduire la variable adimensionnée $\xi = \frac{x-x_0}{x_c}$, et montrer que l'équation devient une équation d'Airy. On définira x_0 et x_c .
3. En déduire qu'une solution est,

$$\psi(x) = \alpha \text{Ai}(\xi) \quad (3.214)$$

Avec α constante à définir, et la fonction Ai également à définir²⁴.

4. Quelle condition $\psi(0)$ doit vérifier ? Rendez-vous compte que ça induit une suite (E_n) d'énergie des états liés.

3.18.4 Étude asymptotique des zéros de Ai

On s'intéresse à la fonction d'Airy Ai, définie comme solution de l'équation différentielle²⁵ :

$$\boxed{\psi''(x) = x\psi(x)}, \quad (3.216)$$

et par la condition de décroissance à l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0. \quad (3.217)$$

On note Ai la solution de classe \mathcal{C}^∞ des eq (3.216, 3.217) vérifiant cette propriété.

Étude de la fonction Ai

Dans cette partie, on montre que la fonction $x \mapsto \text{Ai}(x)$ s'annule une infinité de fois sur \mathbb{R}_- , mais n'a aucun zéro sur \mathbb{R}_+ .

1. Montrer que Ai est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et que ses zéros sont isolés.
2. Montrer que si $x \geq 0$, alors pour tout x , $\text{Ai}''(x) = x\text{Ai}(x) \geq 0$ si $\text{Ai}(x) \geq 0$, et déduire que si Ai s'annule en un point $x_0 > 0$, alors $\text{Ai}(x) = 0$ pour tout $x > x_0$, ce qui contredit la décroissance vers 0. En déduire que $\text{Ai}(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
3. On suppose par l'absurde que la fonction Ai est strictement positive sur \mathbb{R}_- .

- (a) Montrer que la dérivée Ai' est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- et que la limite suivante existe (éventuellement infinie) :

$$\ell := \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Ai}'(x) \in [-\infty, +\infty). \quad (3.218)$$

24. En vérité, une autre fonction est solution, mais n'est pas prise en compte par la TF. L'autre solution de l'équation d'Airy s'écrit,

$$\text{Bi}(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-\frac{t^3}{3} + st\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + st\right) dt \quad (3.215)$$

25. Cette partie est hautement plus longue, mathématique et plus technique que les précédentes, elle peut être omise en acceptant naturellement que la fonction $x \mapsto \text{Ai}$ admet une infinité dénombrable de zéros sur \mathbb{R}_- . Mais pour les sceptiques et les physiciens qui n'expriment pas de dégoût des mathématiques, cette partie est faite pour vous.

(b) Étudier le cas où $\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Ai}'(x)$ est un réel fini non nul.

i. Montrer que dans ce cas, l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^0 \text{Ai}''(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{Ai}'(0) - \text{Ai}'(x)) \quad (3.219)$$

converge.

ii. Pourquoi cette convergence impose-t-elle que $\text{Ai}''(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$?

iii. Montrer que la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^*_-} \text{Ai}''$ impose que $\text{Ai}(t) \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|t|^{2+\varepsilon}}\right)$, avec $\varepsilon > 0$.

iv. Montrer enfin que Ai doit suivre la loi, $\text{Ai}(t) \underset{-\infty}{=} \ell|t| + o(|t|)$ En déduire une contradiction, ce qui exclut le cas $\ell \in \mathbb{R}^*$ fini.

(c) Étudier le cas $\ell = 0$:

i. En supposant $\ell = 0$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M < 0$ tel que pour tout $x < M$, $\text{Ai}'(x) > -\varepsilon$.

ii. En intégrant, déduire que

$$\text{Ai}(x) = \text{Ai}(M) + \int_M^x \text{Ai}'(t) dt > \text{Ai}(M) - \varepsilon|x - M|, \quad (3.220)$$

et que $\text{Ai}(x)$ tend alors vers $+\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$.

iii. En déduire une contradiction.

(d) Étudier le cas $\ell = -\infty$:

i. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que,

$$\forall M < 0, \exists \chi < 0, \forall t < \chi, \quad \text{Ai}(t) - \text{Ai}(\chi) > M(t - \chi) \quad (3.221)$$

ii. Montrer que $\text{Ai}''(t) \underset{-\infty}{=} -Mt^2 + \mathcal{O}(1)$.

iii. Montrer que cette condition impose que $\text{Ai}'(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} +\infty$.

(e) Conclure.

Existence d'une infinité dénombrable de zéros

On rappelle dans cette partie que la fonction $\text{Ai} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\text{Ai}''(x) + |x| \text{Ai}(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \leq 0, \quad (3.222)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n := -n^2$ et $I_n := [x_n, x_n + \delta_n]$ avec $\delta_n := \frac{2\pi}{n}$.

1. Montrer que pour tout $x \in I_n$, on a :

$$|x| = n^2 + \varepsilon_n(x) \quad \text{avec } \varepsilon_n(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.223)$$

2. En déduire que sur I_n , l'équation vérifiée par Ai peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Ai}''(x) + n^2 \text{Ai}(x) = f_n(x), \quad \text{avec } f_n(x) = -\varepsilon_n(x) \text{Ai}(x). \quad (3.224)$$

3. On souhaite montrer que toute fonction $y \in \mathcal{C}^2(I_n)$ s'écrivant comme combinaison linéaire de la base homogène

$$y_1(x) := \cos(n(x - x_n)), \quad y_2(x) := \sin(n(x - x_n)), \quad (3.225)$$

peut se mettre (non uniquement) sous la forme

$$y(x) = u_n(x)y_1(x) + v_n(x)y_2(x), \quad (3.226)$$

pour des fonctions $u_n, v_n \in \mathcal{C}^1(I_n)$. On souhaite également démontrer que cette méthode est équivalente à chercher une solution particulière.

- (a) Montrer que, pour chaque $x \in I_n$, l'application linéaire

$$\Phi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u(x), v(x)) \mapsto (u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x), \quad u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x)), \quad (3.227)$$

est bien définie et linéaire.

- (b) Montrer que pour chaque $x \in I_n$, l'application linéaire

$$\Phi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto (uy_1(x) + vy_2(x), \quad uy_1'(x) + vy_2'(x)) \quad (3.228)$$

est un isomorphisme.

- (c) Considérer maintenant l'application linéaire entre espaces de fonctions

$$\Phi : \mathcal{C}^1(I_n)^2 \rightarrow \mathcal{C}^0(I_n), \quad (u, v) \mapsto uy_1 + vy_2, \quad (3.229)$$

où $uy_1 + vy_2$ est la fonction définie point par point sur I_n .

Montrer que $\ker(\Phi)$ est non trivial, c'est-à-dire qu'il existe $(u, v) \neq (0, 0)$ dans $\mathcal{C}^1(I_n)^2$ tels que

$$u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in I_n. \quad (3.230)$$

Indice : Supposer une relation de proportionnalité par entre u, v et y_1, y_2 grâce à une fonction intermédiaire α .

- (d) En déduire que l'ensemble des représentations de y est une classe affine dont la direction est engendrée par les couples

$$(\sin(n(x - x_n)), -\cos(n(x - x_n))). \quad (3.231)$$

- (e) Démontrer qu'une telle fonction α peut être bien définie et de classe $\mathcal{C}^1(I_n)$, pour n assez grand.

Interpréter ce noyau comme la source de la non unicité des fonctions u_n, v_n pour la représentation de y .

- (f) En déduire qu'imposer la condition auxiliaire

$$u_n'(x)y_1(x) + v_n'(x)y_2(x) = 0 \quad (3.232)$$

revient à choisir une section (un « complémentaire ») du noyau, assurant l'unicité des fonctions u_n, v_n . Dit d'une autre manière, démontrer que cette condition fixe α .

- (g) Conclure que la représentation $y = u_n y_1 + v_n y_2$ avec cette condition est équivalente, en termes de solution, à la forme classique

$$y = y_p + Ay_1 + By_2, \quad (3.233)$$

où la partie particulière y_p est incorporée dans la variation des coefficients u_n, v_n .

- (h) En dérivant $y = u_n y_1 + v_n y_2$ et en utilisant la condition auxiliaire, déterminer une expression simplifiée pour $y'(x)$.
- (i) En dérivant encore et en remplaçant dans l'équation $y'' + n^2 y = f_n$, établir le système linéaire suivant, et résoudre ce système, et expliciter ainsi les fonctions u_n et v_n .

$$\begin{cases} u'_n(x)y_1(x) + v'_n(x)y_2(x) = 0, \\ u'_n(x)y'_1(x) + v'_n(x)y'_2(x) = f_n(x). \end{cases} \quad (3.234)$$

4. Estimation des variations sur I_n

- (a) Montrer que $\|f_n\|_{L^\infty(I_n)} = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$. En déduire que, pour tout $x \in I_n$,

$$|u_n(x) - u_n(x_n)| \leq \mathcal{O}(n^{-2}). \quad (3.235)$$

- (b) Faire de même pour $v_n(x) - v_n(x_n)$. En déduire que u_n, v_n sont presque constants sur I_n .

5. Approximation finale et conséquence

- (a) Posant $a_n := u_n(x_n)$ et $b_n := v_n(x_n)$, montrer que pour tout $x \in I_n$,

$$y(x) = a_n \cos(n(x - x_n)) + b_n \sin(n(x - x_n)) + \mathcal{O}(n^{-2}). \quad (3.236)$$

Montrer que y converge uniformément vers Ai.

- (b) En déduire que si $y = \text{Ai}$ ne s'annule pas sur I_n , alors la combinaison principale $a_n \cos + b_n \sin$ est de signe constant sur I_n .

6. Démontrer que y peut également s'écrire,

$$y(x) = r_n \cos[n(x - x_n) - \varphi], \quad a_n \neq 0 \quad (3.237)$$

avec $\varphi = \arctan(\frac{b_n}{a_n})$, $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

7. En déduire que toute combinaison linéaire non triviale de $\cos(n(x - x_n))$ et $\sin(n(x - x_n))$ change de signe sur tout intervalle de longueur strictement plus grande que $\frac{\pi}{n}$. En déduire que si la solution approchée restait de signe constant sur I_n , alors $|I_n| < \frac{\pi}{n}$.
8. Conclure.

On note désormais les zéros négatifs de Ai par :

$$c_k < c_{k+1} < 0, \forall k \quad \text{et on pose } w_n := -c_n > 0. \quad (3.238)$$

Représentation intégrale et étude qualitative

On admet que la fonction Ai admet une représentation intégrale réelle sur \mathbb{R} donnée par :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt. \quad (3.239)$$

1. On souhaite démontrer que cette intégrale est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, et définit une fonction continue.
- (a) Montrer qu'étudier Ai revient à étudier l'intégrale suivante,

$$h(x) = \int_0^\infty e^{if_x(t)} dt \quad (3.240)$$

- (b) Étudier rapidement f_x . Calculer le minimum $t_0(x)$.
 (c) Soit R à déterminer. En découpant l'intégrale et en exprimant astucieusement $e^{if_x(t)}$ en fonction de sa dérivée par rapport t , démontrer que h est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 (d) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que,

$$|h(y) - h(x)| \xrightarrow{y \rightarrow x} 0 \quad (3.241)$$

- (e) En utilisant une méthode analogue, démontrer que h est de classe \mathcal{C}^1 .
 2. Pour montrer rigoureusement que $\text{Ai}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ ²⁶, on utilisera la méthode des points selles. On remplace la question unique précédente par les étapes suivantes (noter $f_x(t) = xt + \frac{t^3}{3}$):
 (a) Montrer que $t \mapsto e^{if_x(t)}$ est une fonction entière de la variable complexe t . Conclure que l'on peut déformer le contour d'intégration \mathbb{R} dans le plan complexe sans rencontrer de singularités.
 (b) Résoudre $f'_x(t) = 0$ dans \mathbb{C} . Vérifier que les points selles sont

$$t_\star = \pm i\sqrt{x}, \quad (3.242)$$

et déterminer lequel (ou lesquels) donnent $\text{Re}(if_x(t_\star)) < 0$.

- (c) Construire explicitement un contour de descente Γ_x (issue d'une déformation de \mathbb{R}) qui passe par $t_\star = i\sqrt{x}$ dans la direction de plus forte descente. Paramétrer un voisinage de t_\star par

$$t = t_\star + z, \quad z = ux^{-1/4}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.243)$$

- (d) Développer f_x en série de Taylor autour de t_\star . Montrer que, pour $t = t_\star + z$,

$$f_x(t) = f_x(t_\star) + \frac{1}{2}f''_x(t_\star)z^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}_x(\xi)z^3, \quad (3.244)$$

avec $f''_x(t_\star) = 2t_\star$ et $f^{(3)}_x \equiv 2$. En multipliant par i et après le changement $z = ux^{-1/4}$, obtenir l'identité

$$if_x(t) = if_x(t_\star) - u^2 + iO(u^3x^{-3/4}), \quad (x \rightarrow \infty), \quad (3.245)$$

uniforme pour $|u| \leq M$ fixé.

- (e) Démontrer l'estimation locale uniforme : pour tout $M > 0$,

$$e^{if_x(t)} = e^{if_x(t_\star)}e^{-u^2}(1 + o(1)) \quad \text{uniformément pour } |u| \leq M, \quad (3.246)$$

et en déduire, via le changement de variable $dt = x^{-1/4}du$ et la convergence dominée,

$$\int_{|u| \leq M} e^{if_x(t)} dt = e^{if_x(t_\star)}x^{-1/4} \left(\int_{|u| \leq M} e^{-u^2} du \right) (1 + o(1)). \quad (3.247)$$

- (f) Contrôler la contribution des queues $|u| > M$: montrer que, pour M fixé grand,

$$\left| \int_{|u| > M} e^{if_x(t)} dt \right| \leq x^{-1/4} \int_{|u| > M} e^{-u^2} du, \quad (3.248)$$

et que cette borne peut être rendue arbitrairement petite indépendamment de x .

26. Cette (longue) question étant purement mathématique, et le résultat qui en sera démontré ne sera pas utile pour la suite de l'exercice, je recommande de la sauter pour le lecteur.

- (g) Montrer que la contribution restante sur $\Gamma_x \setminus (\text{voisinage de } t_*)$ est négligeable devant $x^{-1/4}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$: sur cette portion de Γ_x on a $\operatorname{Re}(if_x(t)) \leq -cx^{3/2}$ pour une constante $c > 0$, d'où une majoration exponentielle.
- (h) Calculer explicitement $if_x(t_*)$ pour $t_* = i\sqrt{x}$ et conclure :

$$if_x(i\sqrt{x}) = -\frac{2}{3}x^{3/2}, \quad (3.249)$$

puis rassembler les estimations pour obtenir l'asymptotique

$$\operatorname{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (3.250)$$

en particulier $\operatorname{Ai}(x) \rightarrow 0$.

Approximation asymptotique de $\operatorname{Ai}(-x)$ pour $x \rightarrow +\infty$

On rappelle la définition de

$$f_x(t) := \frac{t^3}{3} - xt. \quad (3.251)$$

1. Calculer le point stationnaire t_0 de la phase f_x sur $[0, +\infty[$ et montrer qu'il est unique.
2. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $c_\delta > 0$, indépendante de x , telle que pour tout t avec

$$|t - t_0| \geq \delta, \quad (3.252)$$

on a

$$|f'_x(t)| = |t^2 - x| \geq c_\delta. \quad (3.253)$$

3. Soient a, b tels que $0 \leq a < b$ et $\min_{t \in [a, b]} |f'_x(t)| \geq c_\delta > 0$. Montrer que, par intégration par parties,

$$\left| \int_a^b e^{if_x(t)} dt \right| \leq \frac{2}{c_\delta} + (b - a) \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{f''_x(t)}{f'_x(t)^2} \right|. \quad (3.254)$$

4. Montrer que, pour tout $\delta > 0$ fixé, la contribution hors du voisinage de $t_0 = \sqrt{x}$ est un petit o de $x^{-1/4}$ quand $x \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire

$$\int_{\substack{t \geq 0 \\ |t - t_0| \geq \delta}} e^{if_x(t)} dt = o\left(x^{-1/4}\right). \quad (3.255)$$

Pour cela, utiliser plusieurs intégrations par parties successives en exploitant la minoration uniforme de $|f'_x(t)|$ hors de ce voisinage, et justifier pourquoi cette contribution devient négligeable devant celle issue du voisinage de t_0 .

5. Montrer que, pour t proche de t_0 , on a un développement limité

$$f_x(t) = f_x(t_0) + \frac{f''_x(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + R_x(t), \quad (3.256)$$

avec

$$R_x(t) = \frac{f_x^{(3)}(\xi)}{6}(t - t_0)^3, \quad (3.257)$$

où ξ est entre t et t_0 . Calculer $f''_x(t_0)$ et $f_x^{(3)}(t)$, et montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|R_x(t)| \leq C|t - t_0|^3 \quad \text{pour } |t - t_0| \leq \delta. \quad (3.258)$$

6. Montrer que pour tout t ,

$$|e^{iR_x(t)} - 1| \leq |R_x(t)|. \quad (3.259)$$

7. Poser

$$\varepsilon_x := \int_{|t-t_0| \leq \delta} e^{if_x(t_0)} e^{i\frac{f_x''(t_0)}{2}(t-t_0)^2} (e^{iR_x(t)} - 1) dt, \quad (3.260)$$

et montrer que

$$|\varepsilon_x| \leq C' \delta^4. \quad (3.261)$$

8. Effectuer le changement de variable

$$s = (t - t_0) \sqrt{\frac{|f_x''(t_0)|}{2}}, \quad (3.262)$$

et montrer que

$$\int_{|t-t_0| \leq \delta} e^{i\frac{f_x''(t_0)}{2}(t-t_0)^2} dt = \sqrt{\frac{2}{|f_x''(t_0)|}} \int_{|s| \leq S_x} e^{i\sigma s^2} ds, \quad (3.263)$$

où $\sigma = \text{sign}(f_x''(t_0))$ et $S_x = \delta \sqrt{\frac{|f_x''(t_0)|}{2}}$.

9. Montrer que $S_x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

10. Calculer l'intégrale de Fresnel complète

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma s^2} ds = \sqrt{\pi} e^{i\sigma\pi/4}. \quad (3.264)$$

11. Assembler toutes les approximations précédentes pour obtenir l'équivalent asymptotique

$$\text{Ai}(-x) \sim \frac{C}{x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.265)$$

en précisant la constante C (ou en rappelant qu'elle s'ajuste selon la définition exacte de Ai).

Développement asymptotique de la suite (w_n)

1. En déduire que les zéros w_n de $\text{Ai}(-x)$ satisfont asymptotiquement l'équation :

$$\cos\left(\frac{2}{3}w_n^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (3.266)$$

2. Montrer que cette équation implique :

$$\frac{2}{3}w_n^{3/2} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\pi}{4}. \quad (3.267)$$

3. En déduire que :

$$w_n \sim \left(\frac{3\pi}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right)\right)^{2/3}. \quad (3.268)$$

Développement asymptotique des zéros w_n à l'ordre $\mathcal{O}(1/n^2)$

On rappelle que les zéros négatifs de $\text{Ai}(-x)$, notés w_n , satisfont asymptotiquement :

$$\frac{2}{3}w_n^{3/2} = \pi \left(n - \frac{1}{4} \right). \quad (3.269)$$

On note $\alpha_n := \left(\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right)^{2/3}$ la première approximation des w_n .

1. Poser $w_n = \alpha_n + \beta_n$, avec $\beta_n = o(\alpha_n)$, et développer $(\alpha_n + \varepsilon_n)^{3/2}$ en série de Taylor à l'ordre 2 autour de α_n .
2. Injecter ce développement dans l'équation vérifiée par w_n , et en déduire une expression asymptotique explicite de ε_n à l'ordre $\mathcal{O}(\alpha_n^{-1})$.
3. En déduire un développement de w_n à l'ordre $\mathcal{O}(1/n^2)$, en développant également α_n^{-1} en fonction de n .

Énergie des états liés

1. En déduire un développement limité à l'ordre $\mathcal{O}(1/n^2)$ de (E_n) .
2. Pour M étant la masse du Soleil, estimer les niveaux d'énergie. Interpréter les résultats.

3.18.5 Horizon, absorption et décohérence

Dans la partie précédente, nous avons obtenu des états stationnaires liés décrits par des fonctions d'Airy. Cependant, ce modèle idéal suppose un confinement parfait, ce qui est une approximation. En réalité, la particule peut s'échapper vers la région $x \rightarrow -\infty$, qui correspond à l'intérieur du trou noir, ce qui entraîne une perte de probabilité et une décroissance temporelle de l'état quantique.

1. Expliquer pourquoi la décroissance de $\text{Ai}(\xi)$ vers zéro à gauche (pour $x \rightarrow -\infty$) n'empêche pas une fuite lente de la particule dans cette région. On pourra s'appuyer sur l'approximation asymptotique suivante pour $x \rightarrow -\infty$:

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{C}{|x|^{1/4}} \cos \left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.270)$$

2. En considérant cette fuite, justifier que l'état quantique n'est pas strictement stationnaire, et que la norme de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ décroît dans le temps.
3. Pour modéliser cette décroissance, on introduit une énergie complexe : $E \mapsto E - i\frac{\Gamma}{2}$, $\Gamma > 0$.

Montrer que la solution temporelle de l'équation de Schrödinger s'écrit alors :

$$\Psi(t) = \Psi(0)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t}, \quad (3.271)$$

Que dire sur $\|\Psi(t)\|$?

4. Quelle l'analogie avec la désintégration radioactive peut-on faire ?

3.18.6 Ouverture : rayonnement de Hawking et température thermique

On cherche à retrouver rigoureusement la température du rayonnement de Hawking associé à un trou noir de Schwarzschild de masse M ²⁷.

27. En s'appuyant évidemment sur l'analogie semi-classique entre effet tunnel et probabilité d'émission spontanée à travers une barrière gravitationnelle. Aucune notion de QFT n'est requise : seules les idées de l'action classique relativiste et du principe variationnel seront utilisées.

1. Action d'une particule dans la métrique de Schwarzschild

On rappelle la métrique de Schwarzschild, valable pour $r > r_s = \frac{2GM}{c^2}$:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.272)$$

- (a) Donner l'expression du lagrangien relativiste pour une particule de masse m dans cette métrique, en supposant un mouvement purement radial ($\theta = \pi/2, \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$).
- (b) Montrer que l'action classique de la particule s'écrit :

$$S = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda. \quad (3.273)$$

- (c) En supposant que l'on fixe l'énergie E de la particule comme constante du mouvement, exprimer la vitesse radiale \dot{r} en fonction de E et de r ²⁸.

2. Forme effective de l'action radiale

On cherche à calculer la probabilité qu'une particule virtuelle générée dans le vide juste à proximité de l'horizon traverse via effet tunnel.

- (a) Démontrer l'équation d'Hamilton Jacobi dans le cadre relativiste :

$$\partial_\mu S \partial^\mu S + mc^2 = 0 \quad (3.274)$$

- (b) Montrer que l'action radiale de la particule, à énergie E , s'écrit :

$$S_r = \int p_r dr, \quad (3.275)$$

où p_r est l'impulsion radiale obtenue à partir du lagrangien.

- (c) Montrer que cette impulsion prend la forme :

$$p_r = \frac{1}{c} \frac{E}{f(r)} = \frac{1}{c} \frac{E}{1 - \frac{r_s}{r}}, \quad (3.276)$$

en considérant une trajectoire radiale à énergie fixée, et en considérant que l'énergie de masse mc^2 est très négligeable devant E .

3. Effet tunnel et intégrale complexe

- (a) On cherche à intégrer sur $I = [r_s - \varepsilon, r_s + \varepsilon], \varepsilon > 0$. L'intégrale $S_r = \int_I p_r dr$ diverge en $r = r_s$ car $f(r)$ s'annule. Montrer que cette divergence est contournable en intégrant dans le plan complexe, en déformant le chemin d'intégration autour du pôle $r = r_s$.
- (b) En déduire que,

$$S = \oint_\gamma p_r dr = 2\pi i \frac{Er_s}{c} \quad (3.277)$$

- (c) En reliant S à l'effet tunnel de mécanique quantique (WKB), en déduire la probabilité d'effet tunnel dans ce cas,

$$\mathbb{P}(E) = \exp\left(-\frac{8\pi GME}{\hbar c^3}\right). \quad (3.278)$$

28. Ici, rappelez vous que symétrie continue du temps implique la conservation de l'énergie (Noether).

4. Identification avec une loi thermique

En comparant $\mathbb{P}(E)$ avec une distribution de type Boltzmann, identifier rigoureusement la température de Hawking :

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}. \quad (3.279)$$

5. Énergie et entropie du trou noir

En supposant que l'émission du rayonnement est assimilable à un processus thermodynamique réversible, on écrit²⁹ :

$$dS = \frac{dE}{T_H}. \quad (3.280)$$

- (a) Intégrer cette équation pour obtenir une expression explicite de l'entropie.
- (b) En utilisant le fait que l'aire de l'horizon est $\Sigma = 4\pi r_s^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}$, en déduire :

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} \Sigma. \quad (3.281)$$

6. Discussion physique

- (a) Pourquoi cette entropie est-elle proportionnelle à l'aire et non au volume ?
- (b) Quelles questions sur la nature microscopique du trou noir et la gravité quantique cette formule soulève-t-elle ?

7. Temps d'évaporation d'un trou noir

On peut estimer le temps d'évaporation d'un trou noir en utilisant la loi de Stefan-Boltzmann. L'énergie rayonnée par un corps de rayon R et de température T s'écrit, avec σ la constante de Stefan-Boltzmann (c.f. 3.6) :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad (3.282)$$

- (a) Pour un trou noir de Schwarzschild, montrer que,

$$\frac{d(Mc^2)}{dt} = -4\pi r_s^2 \sigma T_H^4. \quad (3.283)$$

- (b) En remplaçant r_s et T_H , montrer que l'équation différentielle de l'évolution de la masse s'écrit :

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{15360\pi} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \frac{1}{M^2}. \quad (3.284)$$

- (c) En intégrant cette équation, montrer que le temps total d'évaporation d'un trou noir de masse M est :

$$t_e = 5120\pi \frac{G^2}{c^4 \hbar} M^3. \quad (3.285)$$

- (d) En unités SI, calculer l'ordre de grandeur du temps d'évaporation d'un trou noir de masse solaire M_\odot .
- (e) Comparer ce temps à l'âge actuel de l'univers ($\sim 13,8 \times 10^9$ ans). Quelle conclusion peut-on en tirer concernant l'observation de l'évaporation des trous noirs stellaires ?
- (f) Estimer le temps d'évaporation pour un trou noir primordial hypothétique de masse 10^{12} kg. Cette évaporation serait-elle observable aujourd'hui ?

29. On change ici de notation, S est désormais l'entropie.

Chapitre 4

Correction des exercices

Comme vous le remarquerez, les exercices ne sont pas encore **tous** corrigés. Les exercices non corrigés sont accompagné du symbole \triangle . Les dernières corrections seront données petit à petit. Si vous voulez proposer une correction d'exercice, merci de me l'envoyer en format Latex au mail suivant : ryanartero2005@gmail.com.

Par ailleurs, vous pouvez revenir à l'exercice que vous étiez en train de faire en cliquant sur le titre de l'exercice en question, que ce soit en haut de page ou en début de l'exercice.

4.1 Problème à deux corps

4.1.1 Centre de masse

On désigne $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ les rayons vecteurs de l'électron et du noyaux par rapport à un repère quelconque, et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ les vitesses correspondantes.

1. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1\mathbf{v}_1^2 + m_2\mathbf{v}_2^2) - \frac{\vartheta^2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$.
- 2.

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \implies \mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \implies \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (4.2)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.3)$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 - \frac{\vartheta^2}{r} = \mathcal{L}_G(\mathbf{V}) + \mathcal{L}_r(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (4.4)$$

3. Le potentiel est central pour le centre de masse. Cela implique que \mathbf{J} est une constante du mouvement.

Dans la suite, on examine exclusivement le mouvement interne par \mathcal{L}_r en coordonnées polaires (r, θ) dans le plan perpendiculaire à \mathbf{J} .

4.1.2 Intégration des équations du mouvement

1. L'expression de l'énergie cinétique en coordonnées polaires de \mathbb{R}^2 est :

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad (4.5)$$

d'où le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}, k = \vartheta^2. \quad (4.6)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0. \quad (4.8)$$

Les moments conjugués en découlent :

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta}. \quad (4.9)$$

Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}. \quad (4.10)$$

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}, \quad (4.11)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0. \quad (4.12)$$

p_θ est une constante du mouvement (car θ est une variable cyclique); en conséquence, la quantité $p_\theta = \mu r^2\dot{\theta}$ est constante : c'est le moment cinétique J , fixé une fois pour toutes par les conditions initiales.

En effet, $\mathbf{J} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu r \mathbf{u}_r \times (\dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} = p_\theta$.

L'intégrale première de l'énergie donne :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}. \quad (4.13)$$

En dérivant en temps $p_r = \mu\dot{r}$, et en y substituant :

$$\dot{p}_r = \mu\ddot{r} = \frac{J^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}, \quad (4.14)$$

on retrouve l'équation du mouvement radial :

$$\mu\ddot{r} = \frac{J^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2}. \quad (4.15)$$

Le premier terme au second membre est la force centrifuge (car $\mu r\dot{\theta}^2 = \mu v^2/r$), le second terme est la force attractive de Coulomb.

2. Pour éliminer le temps, on dérive comme d'habitude la fonction composée $r(\theta(t))$:

On note $r'(\theta) = \frac{dr}{d\theta}$ et $r''(\theta) = \frac{d^2r}{d\theta^2}$. On utilise $p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} = J$, d'où :

$$\dot{\theta} = \frac{J}{\mu r^2}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{J}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (4.16)$$

Ainsi :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = r' \frac{J}{\mu r^2}, \quad \ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{J}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left(r' \frac{J}{\mu r^2} \right). \quad (4.17)$$

En posant $u = \frac{1}{r}$, on a :

$$\dot{r} = -\frac{J}{\mu} u', \quad \ddot{r} = -\frac{J^2}{\mu^2} (u'' + u), \quad (4.18)$$

et le remplacement dans (7.25) donne :

$$-\frac{J^2}{\mu^2} (u'' + u) = \frac{J^2}{\mu} u^3 - \frac{k}{\mu} u^2. \quad (4.19)$$

Multipliée par $-\frac{\mu^2}{J^2}$, cette équation devient :

$$u'' + u = \frac{\mu k}{J^2}. \quad (4.20)$$

3. L'équation différentielle en $u(\theta)$:

$$u'' + u = \frac{\mu k}{J^2} \quad (4.21)$$

admet pour solution générale :

$$u(\theta) = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu k}{J^2}, \quad (4.22)$$

d'où :

$$r(\theta) = \frac{1}{A \cos(\theta + \varphi) + \frac{\mu k}{J^2}}. \quad (4.23)$$

Il est toujours loisible de choisir l'axe polaire astucieusement, par exemple de sorte que $r(\theta)$ soit extrémale en $\theta = 0$ (ou $\theta = \pi$), ce qui donne $\varphi = 0$:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{\mu k}{J^2} (1 + \varepsilon \cos \theta)}, \quad (4.24)$$

où l'on a posé $\varepsilon = \frac{AJ^2}{\mu k}$: l'excentricité.

La constante A (ou ε) est déterminée par les conditions initiales, ou via l'énergie :

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}. \quad (4.25)$$

À l'aide de $r(\theta)$ et de $J = \mu r^2 \dot{\theta}$, on peut écrire E comme fonction de ε :

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EJ^2}{\mu k^2}. \quad (4.26)$$

4. L'expression (4.24) définit une famille de courbes appelées **coniques** (intersections d'un cône avec un plan). Trois sous-familles sont distinguées selon la valeur de ε :
- Si $\varepsilon < 1$, la trajectoire est une **ellipse**, fermée, correspondant à une énergie $E < 0$: mouvement lié et périodique (cas particulier $\varepsilon = 0$: un cercle).
 - Si $\varepsilon = 1$, la trajectoire est une **parabole** : cas limite $E = 0$ séparant les mouvements liés et non liés.
 - Si $\varepsilon > 1$, le dénominateur dans (4.24) peut s'annuler pour un angle $\theta_\infty = \arccos(-\frac{1}{\varepsilon})$: la trajectoire est une **hyperbole**, ouverte, avec asymptotes ; $E > 0$ correspond à une particule venant de l'infini avec une vitesse initiale non nulle.

Dans tous les cas, l'origine (le centre de force) est l'un des deux foyers de la conique.

4.1.3 Quantification de Bohr

Dans cette partie, on ne considère que les états liés $E < 0$.

Les conditions de quantification de Bohr–Sommerfeld sont :

$$J_\theta := \oint p_\theta d\theta = n_\theta h, \quad J_r := \oint p_r dr = n_r h, \quad n_\theta, n_r \in \mathbb{Z}. \quad (4.27)$$

1. Pour un mouvement plan dans un potentiel central, le moment cinétique p_θ est conservé :

$$p_\theta = J. \quad (4.28)$$

Ainsi :

$$J_\theta = \int_0^{2\pi} p_\theta d\theta = 2\pi J \Rightarrow J = n_\theta \hbar. \quad (4.29)$$

Comme $n_\theta = 0$ correspondrait à une trajectoire rectiligne traversant le centre (non permise ici), on a :

$$n_\theta \in \mathbb{N}^*. \quad (4.30)$$

2. Pour J_r :

$$p_r = \mu \dot{r} = \frac{J}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (4.31)$$

car $\dot{\theta} = \frac{J}{\mu r^2}$. Avec l'équation de la conique

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad p = \frac{J^2}{\mu \vartheta^2}, \quad (4.32)$$

on obtient :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{p \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}. \quad (4.33)$$

Donc

$$p_r = \frac{J}{r^2} \cdot \frac{p \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = J \frac{\varepsilon \sin \theta}{p} \cdot \frac{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{J \varepsilon \sin \theta}{p}. \quad (4.34)$$

En remplaçant $p = \frac{J^2}{\mu \vartheta^2}$, cela devient :

$$p_r = \frac{\mu \vartheta^2 \varepsilon \sin \theta}{J}. \quad (4.35)$$

Pour J_r :

$$J_r = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} p_r dr. \quad (4.36)$$

En changeant de variable $r \mapsto \theta$ sur la moitié de l'orbite ($0 \rightarrow \pi$) :

$$dr = \frac{dr}{d\theta} d\theta = \frac{p \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta, \quad (4.37)$$

d'où :

$$p_r dr = \frac{\mu \vartheta^2 \varepsilon \sin \theta}{J} \cdot \frac{p \varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta = \frac{\mu \vartheta^2 p}{J} \cdot \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta. \quad (4.38)$$

Or $\frac{\mu \vartheta^2 p}{J} = J$ (vérifiable avec $p = \frac{J^2}{\mu \vartheta^2}$), donc :

$$p_r dr = J \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta. \quad (4.39)$$

Comme J_r correspond à un cycle complet en r (aller-retour), on intègre de 0 à π et on multiplie par 2 :

$$J_r = 2J \varepsilon^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta. \quad (4.40)$$

La condition $J_r = n_r h$ devient :

$$2J \varepsilon^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta = n_r h. \quad (4.41)$$

L'intégrale est calculable par intégration par parties ou via la formule donnée :

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta = \frac{\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right). \quad (4.42)$$

Ainsi :

$$2\pi J \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) = n_r h. \quad (4.43)$$

En utilisant $2\pi J = n_\theta h$:

$$n_\theta \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) = n_r. \quad (4.44)$$

3. D'après l'équation reliant ε à l'énergie et au moment cinétique :

$$1 - \varepsilon^2 = -\frac{2EJ^2}{\mu \vartheta^4}. \quad (4.45)$$

En remplaçant $J = n_\theta \hbar$ et en utilisant la relation précédente entre ε , n_r , n_θ , on trouve :

$$1 - \varepsilon^2 = \left(\frac{n_\theta}{n} \right)^2, \quad n := n_r + n_\theta. \quad (4.46)$$

On obtient alors :

$$E_n = -\frac{\mu \vartheta^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.47)$$

4.2 Section efficace de Rutherford

4.2.1 Déviation d'une particule chargée par un noyau d'atome

On se place dans un repère polaire (r, φ) dans le plan du mouvement.

1. **Moment cinétique** : Le moment cinétique dans le repère polaire est :

$$J = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (4.48)$$

À l'infini passé, la particule a une vitesse v_0 et un paramètre d'impact b . Le moment cinétique est alors :

$$J = -mbv_0. \quad (4.49)$$

Le signe négatif vient du fait que φ décroît au cours du temps.

2. **Équation du mouvement** : La force centrale de répulsion est donnée par :

$$\mathbf{F} = \frac{C}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{où } C = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}. \quad (4.50)$$

On décompose $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ en deux composantes. En projetant sur la direction perpendiculaire à l'axe polaire, on trouve :

$$m\dot{v}_\perp = \frac{C}{r^2} \sin \varphi. \quad (4.51)$$

3. **Angle de déviation θ** : En multipliant l'équation par dt puis en changeant de variable, on utilise :

$$r^2 \dot{\varphi} = \frac{J}{m} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{J} d\varphi. \quad (4.52)$$

On intègre entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$:

$$v_0 \sin \theta = \int \dot{v}_\perp dt = \frac{C}{J} (\cos \theta + 1). \quad (4.53)$$

4. **Lien avec l'énergie cinétique** : L'énergie initiale est $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, donc :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{C}{2E_0 b}. \quad (4.54)$$

4.2.2 Section efficace de Rutherford

1. **Expression de la section efficace différentielle** : La définition générale est $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$.

2. **Utilisation de $\tan(\theta/2)$** : Avec :

$$b = \frac{C}{2E_0} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \frac{db}{d\theta} = -\frac{C}{4E_0} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{C}{4E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (4.55)$$

3. **Limite du modèle** : Pour $\theta \rightarrow 0$, on a $\sin(\theta/2) \rightarrow 0$ donc $d\sigma/d\Omega \rightarrow \infty$. L'intégrale sur $\theta \in [0, \pi]$ diverge : la section efficace totale est infinie. Cela reflète la portée infinie de l'interaction coulombienne.

4. **Interprétation expérimentale** : Ce modèle explique les résultats expérimentaux de Rutherford : des particules α peuvent être fortement déviées. Cela implique l'existence d'un noyau atomique très concentré, car une telle déviation nécessite un champ très intense dans une région très localisée¹.

1. En introduisant la distance minimale d'approche a_{\min} pour une collision frontale ($b = 0$), on a :

$$a_{\min} = \frac{C}{E_0}. \quad (4.56)$$

4.3 Effet Cherenkov

1. L'énergie d'un photon est donnée par la relation habituelle :

$$E_\gamma = h\nu \quad (4.58)$$

Dans un milieu d'indice de réfraction n , la vitesse de phase de la lumière est réduite à c/n , et le vecteur d'onde associé est :

$$k = \frac{2\pi n\nu}{c} \quad (4.59)$$

L'impulsion du photon dans ce milieu est donc donnée par :

$$p_\gamma = \hbar k = \frac{hn\nu}{c} \quad (4.60)$$

On obtient ainsi la relation cherchée :

$$\boxed{p_\gamma = \frac{hn\nu}{c}} \quad (4.61)$$

En combinant avec l'expression de l'énergie $E_\gamma = h\nu$, on déduit :

$$\boxed{p_\gamma = \frac{n}{c} E_\gamma} \quad (4.62)$$

2. Les composantes du moment sont :

$$p = p' \cos \varphi + p_z \cos \theta, \quad 0 = -p' \sin \varphi + p_z \sin \theta. \quad (4.63)$$

3. On a :

$$p_z^2 = p^2 - 2pp_z \cos \varphi + p_z^2. \quad (4.64)$$

4. La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p_z^2 c^2 + m^2 c^4} + h\nu, \quad (4.65)$$

ou encore :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} mc^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_f^2}} mc^2 + h\nu. \quad (4.66)$$

5. Par élévation au carré, on obtient :

$$p_z^2 = p^2 - \frac{2h\nu E}{c^2} + \frac{(h\nu)^2}{c^2}, \quad \text{où } E \text{ désigne l'énergie initiale de l'électron.} \quad (4.67)$$

6. En rapprochant les deux expressions de p_z^2 , on peut écrire :

$$p^2 - 2pp_z \cos \varphi + p_z^2 = p^2 - \frac{2h\nu E}{c^2} + \frac{(h\nu)^2}{c^2}, \quad (4.68)$$

d'où, après calcul :

$$\cos \varphi = \frac{h\nu}{pc} \left(1 - \frac{E}{pc} \right) + \frac{h\nu}{2pc}, \quad (4.69)$$

avec $E = \gamma mc^2$, $p = \gamma mv$, $p_z = \frac{nh\nu}{c}$, de sorte que :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2} \right). \quad (4.70)$$

On peut alors réécrire la section efficace différentielle sous la forme :

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a_{\min}^2}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}}. \quad (4.57)$$

7. Finalement :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left[1 + (n^2 - 1) \frac{1}{2\gamma^2} \right]. \quad (4.71)$$

Comme $E = \gamma mc^2$, ceci s'écrit aussi :

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} \left[1 + \frac{n^2 - 1}{2} (1 - \beta^2) \right]. \quad (4.72)$$

8. Il faut :

$$\frac{1}{n\beta} \left[1 + (n^2 - 1) \frac{1}{2\gamma^2} \right] \leq 1. \quad (4.73)$$

Comme le crochet est visiblement supérieur à 1, il est nécessaire (mais pas suffisant) que :

$$\beta > \frac{1}{n}. \quad (4.74)$$

9. Les photons sont émis entre $\nu = 0$ et une fréquence ν_{\max} pour laquelle $\cos \theta = 1$, soit :

$$0 \leq \nu \leq \frac{E}{h} \left(1 - \frac{1}{n\beta} \right), \quad \text{avec } E = \nu_{\max} h. \quad (4.75)$$

10. Les photons les plus énergétiques sont émis dans la direction $\theta = 0$.

11. Tous les photons sont émis à l'intérieur d'un cône de demi-angle φ correspondant à l'angle θ pour un photon de fréquence nulle, soit :

$$\varphi = \arccos \left(\frac{1}{n\beta} \right) = \arccos \left(\frac{1}{n} \right) \simeq 20^\circ. \quad (4.76)$$

12. Pour que l'effet se produise, il faut $\nu > \frac{1}{n}$, soit $\beta > \frac{1}{n}$, et donc :

$$E > \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} mc^2. \quad (4.77)$$

Pour un électron, il faut donc $E > 0,77 \text{ MeV}$, pour un proton $E > 1,4 \text{ GeV}$.

4.4 Machine à champ magnétique pulsé

1. Champ magnétique de la bobine

- (a) Pour une spire circulaire de rayon R , la loi de Biot-Savart donne le champ sur l'axe z :

$$B_z(z, t) = \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.78)$$

Ceci est obtenu par intégration sur la spire, en exploitant la symétrie circulaire.

- (b) Pour $z \gg R$, on peut approximer $(z^2 + R^2)^{3/2} \simeq z^3$. Ainsi,

$$B_z(z, t) \sim \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2 z^3}, \quad (4.79)$$

ce qui est l'expression du champ d'un dipôle magnétique de moment $m = I(t) R^2$.

2. Champ électrique induit dans le tissu biologique

- (a) La loi locale de Faraday en coordonnées cylindriques s'exprime sous la forme (en supposant que le champ électrique induit est purement azimutal) :

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (4.80)$$

Dérivons B_z par rapport au temps :

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\mu_0 R^2}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}} \dot{I}(t). \quad (4.81)$$

L'équation locale devient donc :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.82)$$

- (b) **Intégration pour $r < R$** : Intégrons de 0 à r , en imposant $E_\theta(0, t) = 0$ (pour éviter une singularité) :

$$\int_0^r \frac{\partial(r' E_\theta(r', t))}{\partial r'} \frac{dr'}{r'} = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^r dr'. \quad (4.83)$$

La solution obtenue est :

$$r E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \frac{r^2}{2}, \quad (4.84)$$

ce qui conduit à :

$$E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4 (z^2 + R^2)^{3/2}} r \quad \text{pour } r \leq R. \quad (4.85)$$

Intégration pour $r > R$: Pour $r > R$, le flux magnétique restant confiné dans la zone de la bobine, il est plus adapté d'utiliser la loi intégrale de Faraday. Considérons un contour circulaire de rayon $r > R$. La loi intégrale de Faraday donne :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi r E_\theta = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.86)$$

où le flux Φ est celui à travers la zone de la bobine, c'est-à-dire :

$$\Phi = \pi R^2 B_z(z, t) = \pi R^2 \frac{\mu_0 I(t) R^2}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.87)$$

La dérivée temporelle de Φ est alors :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \frac{\mu_0 R^2}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}} \dot{I}(t). \quad (4.88)$$

Ainsi,

$$2\pi r E_\theta = -\pi \frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (4.89)$$

et donc pour $r > R$:

$$E_\theta(r, t) = -\frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{4r (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.90)$$

Récapitulatif :

$$E_\theta(r, t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4 (z^2 + R^2)^{3/2}} r, & r \leq R, \\ -\frac{\mu_0 R^4 \dot{I}(t)}{4r (z^2 + R^2)^{3/2}}, & r \geq R. \end{cases} \quad (4.91)$$

Vérification de la continuité : À $r = R$, la solution intérieure donne

$$E_\theta(R, t) = -\frac{\mu_0 R^3 \dot{I}(t)}{4 (z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (4.92)$$

et la solution extérieure donne exactement le même résultat. La continuité est donc assurée.

3. Effet sur les neurones moteurs

(a) La tension induite sur un disque de rayon a est donnée par :

$$V = \int_0^a E(r, t) dr. \quad (4.93)$$

En utilisant l'expression de $E_\theta(r, t)$ pour $r \leq R$ (supposons $a \leq R$ pour simplifier), on a :

$$V = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^a r dr = -\frac{\mu_0 R^2 \dot{I}(t)}{4 (z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \frac{a^2}{2}. \quad (4.94)$$

Ainsi,

$$V = -\frac{\mu_0 R^2 a^2 \dot{I}(t)}{8 (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (4.95)$$

(b) Pour activer le neurone, il faut que $|V| \geq V_{\text{seuil}}$. La condition d'activation est donc :

$$\frac{\mu_0 R^2 a^2 |\dot{I}(t)|}{8 (z^2 + R^2)^{3/2}} \geq V_{\text{seuil}}. \quad (4.96)$$

4. Effet du champ magnétique pulsé sur les muscles Lorsque la machine de stimulation magnétique délivre des impulsions rapides, la variation temporelle du champ magnétique induit un champ électrique dans les tissus environnants. Dans les muscles, ce champ électrique peut provoquer la dépolarisation des membranes cellulaires en activant les canaux ioniques, ce qui génère un potentiel d'action. Cette excitation conduit à une contraction musculaire involontaire, exploitée en kinésithérapie pour améliorer la rééducation musculaire, augmenter la circulation sanguine et réduire la douleur.

4.5 Métrique d'une sphère

1. En utilisant que $d(\cos u) = -\sin u du$ et $d(\sin u) = \cos u du$, on obtient,

$$\frac{dx^2}{R^2} = [-\sin \theta \sin \varphi d\varphi + \cos \theta \cos \varphi d\theta]^2 \quad (4.97)$$

$$= (\sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 - 2 \sin \theta \sin \varphi d\varphi \cos \theta \cos \varphi d\theta + (\cos \theta \cos \varphi d\theta)^2 \quad (4.98)$$

$$\frac{dy^2}{R^2} = [\sin \theta \cos \varphi d\varphi + \cos \theta \sin \varphi d\theta]^2 \quad (4.99)$$

$$= (\sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 + 2 \sin \theta \sin \varphi d\varphi \cos \theta \cos \varphi d\theta + (\cos \theta \sin \varphi d\theta)^2 \quad (4.100)$$

$$\frac{dz^2}{R^2} = \sin^2 \theta d\theta^2 \quad (4.101)$$

$$(4.102)$$

Ainsi, en ajoutant ces termes, et en utilisant que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on obtient,

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.103)$$

2. Grâce à l'eq 4.103, on a en factorisant par $d\theta^2$ dans la racine, on a,

$$ds = R\sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} \quad (4.104)$$

$$= R\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2} d\theta, \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta} \quad (4.105)$$

$$= R\mathcal{L}d\varphi \quad (4.106)$$

On remarque que $\partial_\varphi \mathcal{L} = 0$, donc φ est une variable cyclique. Ainsi,

$$\partial_{\varphi'} \mathcal{L} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.107)$$

Où λ est une constante.

- 3.

$$\partial_{\varphi'} \mathcal{L} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.108)$$

$$\implies \frac{\varphi' \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} = \lambda \quad (4.109)$$

$$\implies \varphi'^2 (\sin^4 \theta - \lambda^2 \sin^2 \theta) = \lambda^2 \quad (4.110)$$

$$\implies d\varphi = \lambda \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta}}} \quad (4.111)$$

Ainsi, en intégrant,

$$\varphi - \varphi_0 = \lambda \int^\theta \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \alpha}}} \quad (4.112)$$

$$=_{u=\cot \alpha} -\lambda \int^{\cot \theta} \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2(1 + u^2)}} \quad (4.113)$$

$$=_{t=\frac{u}{\beta}} -\frac{\lambda}{\beta} \int^{\frac{\cot \theta}{\beta}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \beta^2 = 1 - \lambda^2 \quad (4.114)$$

$$= \arccos\left(\frac{\cot \theta}{\beta}\right) \quad (4.115)$$

On a ainsi,

$$\beta \cos(\varphi - \varphi_0) = \cot \theta \quad (4.116)$$

$$\beta \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) = \cos \theta \quad (4.117)$$

$$(4.118)$$

En utilisant quelques formules trigonométriques, on obtient

$$R \times (\beta \cos \varphi_0 \cos \varphi \sin \theta + \beta \cos \varphi_0 \sin \varphi \sin \theta = \cos \theta) \quad (4.119)$$

$$\implies ax + by - z = 0 \quad (4.120)$$

On a ici substitué, grâce aux coordonnées sphériques, avec $a = \beta \cos \varphi_0 = b$.

4.6 Rayonnement du Corps Noir

4.6.1 Nombre de modes excités par unité de fréquences

1. C'est l'équation de D'Alembert dans le vide,

$$\square \mathbf{E} = 0 \quad (4.121)$$

2. La cavité force une solution stationnaire, d'où

$$\mathbf{E} = \cos \omega t \sum_{\mu=1}^3 E^\mu \sin(k_\mu x^\mu) \mathbf{e}_\mu \quad (4.122)$$

On a pour chaque μ , $\mathbf{E}(x^\mu = L) = \mathbf{0}$, les conditions aux limites. Donc,

$$\sin(k_\mu L) = 0 \quad (4.123)$$

$$k_\mu L = n_\mu \pi \quad (4.124)$$

$$k_\mu = \frac{n_\mu \pi}{L} \quad (4.125)$$

3. On sait que la norme de \mathbf{k} doit être égale à la somme sur chaque composante,

$$\|\mathbf{k}\|^2 = \sum_{\mu} \left(\frac{n_\mu \pi}{L} \right)^2 \quad (4.126)$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{\mu} n_\mu^2 \quad (4.127)$$

$$r^2 = \left(\frac{2L}{\lambda} \right)^2 = \sum_{\mu} n_\mu^2 \quad (4.128)$$

4. On a, le volume de modes de fréquences,

$$V(\|\mathbf{k}\|) = \frac{4}{3} \pi \|\mathbf{k}\|^3 \quad (4.129)$$

Le nombre de modes est le volume de mode divisé par un volume élémentaire de mode, avec quelques facteurs. Ainsi, comme $k_\mu = \frac{\pi}{L} n_\mu$ et en prenant en compte que $n_\mu \in \mathbb{N}^*$, (facteur $\times \frac{1}{8}$), et la polarisation (facteur $\times 2$), on obtient,

$$\Rightarrow N = \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{V(\|\mathbf{k}\|)}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} = 2 \times \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (4.130)$$

$$(4.131)$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{\frac{4}{3} \pi \|\mathbf{k}\|^3}{\pi^3} L^3 \quad (4.132)$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 \quad (4.133)$$

$$= \pi \frac{8L^3}{3\lambda^3} \quad (4.134)$$

$$= \frac{8\pi\nu^3}{3c^3} L^3 \quad (4.135)$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \mathcal{V} \quad (4.136)$$

4.6.2 Catastrophe Ultraviolette

1. Le système est en contact avec un thermostat de température T , et le système est fermé.
2. En 1D,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \quad (4.137)$$

- 3.

$$p(W = \varepsilon) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \varepsilon) \quad (4.138)$$

On a également en 1D,

$$Z = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\beta \mathcal{H}} dq dp \quad (4.139)$$

D'où,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp = \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \quad (4.140)$$

Et,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta \frac{m\omega^2 q^2}{2}} dq = \sqrt{\frac{2\pi}{m\omega^2 \beta}} \quad (4.141)$$

D'où,

$$Z = \frac{1}{h} \frac{2\pi}{\omega \beta} = \frac{1}{h} \frac{T}{\beta} \quad (4.142)$$

4. On utilise [la formule de la moyenne de l'énergie](#),

$$\langle W \rangle = -\partial_\beta \ln Z = \partial_\beta \ln \beta = \frac{1}{\beta} = k_B T \quad (4.143)$$

5. Il est alors évident de dire que grâce à l'eq 4.147 et la question précédente,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T \quad (4.144)$$

D'où $u \propto \nu^2$, ce qui implique, $\int_{\mathbb{R}^+} u d\nu \propto \int_{\mathbb{R}^+} \nu^2 d\nu$, qui diverge.

4.6.3 Loi de Planck

1. Les niveaux d'énergies sont discrets, donc on somme :

$$Z = \sum_n e^{-\beta W_n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta W_1}} \quad (4.145)$$

Ainsi, l'énergie moyenne devient par le même calcul,

$$-\partial_\beta \ln Z = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.146)$$

En utilisant, $W_1 = h\nu$.

2. Il est alors évident que,

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (4.147)$$

4.6.4 Flux énergétique émis par un corps noir

1. Flux énergétique monochromatique dans une direction donnée.

L'intensité spectrale directionnelle $I_\nu(\theta, \varphi)$ est définie comme l'énergie transportée par unité de surface, de temps, de fréquence et de stéradian, dans la direction (θ, φ) .

Le flux énergétique monochromatique émis dans la direction (θ, φ) par rapport à la normale à la surface est :

$$d\Phi_\nu = I_\nu(\theta, \varphi) \cos \theta d\Omega, \quad (4.148)$$

où $d\Omega$ est l'élément de solide d'angle autour de cette direction, et $\cos \theta$ vient de la projection du flux sur la normale à la surface (cf. fig 4.1).

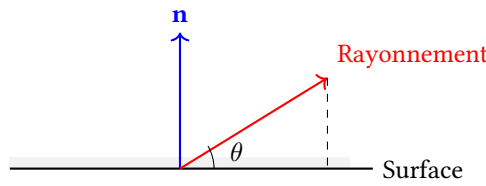


FIGURE 4.1 – Le rayonnement est émis avec un angle θ par rapport à la normale : seul $\cos \theta$ contribue au flux à travers la surface. En effet, il sort dans toutes les directions, on va devoir intégrer sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et seule la contribution de $\cos \theta$ (la projection), contribue.

2. Flux énergétique total émis à la fréquence ν .

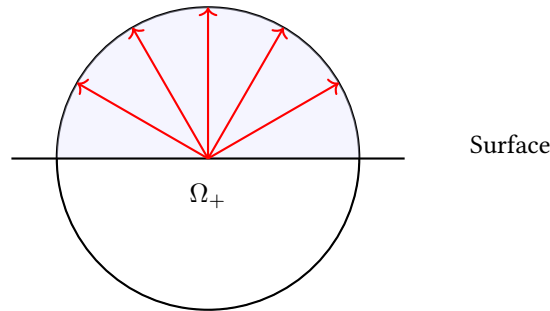


FIGURE 4.2 – Le rayonnement sort dans toutes les directions de l'hémisphère Ω_+ : on intègre seulement pour $\theta \in [0, \pi/2]$.

Le flux énergétique total $I(\nu)$ émis à la fréquence ν par unité de surface est obtenu en intégrant le flux élémentaire sur tout l'hémisphère sortant (i.e. directions telles que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, c.f. fig 4.2) :

$$I(\nu) = \int_{\Omega_+} I_\nu(\theta, \varphi) \cos \theta d\Omega. \quad (4.149)$$

3. Cas d'un rayonnement isotrope

Si le rayonnement est isotrope, on a $I_\nu(\theta, \varphi) = I_\nu = \text{constante}$ (indépendant de la direction). On peut donc sortir I_ν de l'intégrale :

$$I(\nu) = I_\nu \int_{\Omega_+} \cos \theta d\Omega. \quad (4.150)$$

Or :

$$\int_{\Omega_+} \cos \theta \, d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (4.151)$$

On calcule :

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \quad (4.152)$$

D'où :

$$I(\nu) = I_\nu \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi I_\nu. \quad (4.153)$$

4. Intensité totale émise (toutes fréquences confondues)

On cherche à démontrer que la densité spectrale d'énergie volumique $u(\nu)$ s'exprime en fonction de l'intensité directionnelle $I_\nu(\mathbf{n})$ par :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) \, d\Omega. \quad (4.154)$$

- $u(\nu) \, d\nu$ représente l'énergie électromagnétique contenue dans une unité de volume, pour des ondes dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$.
- $I_\nu(\mathbf{n})$ est l'intensité spectrale dans la direction \mathbf{n} , c'est-à-dire l'énergie transportée par unité de temps, par unité de surface perpendiculaire, par unité de fréquence, par unité d'angle solide.

Considérons une surface élémentaire ds et un faisceau de rayonnement incident selon une direction \mathbf{n} faisant un angle θ avec la normale à ds .

Le volume V balayé par les rayons dans la direction \mathbf{n} pendant un petit intervalle de temps dt est donné par :

$$dV = c \, dt \cdot ds \cdot \cos \theta. \quad (4.155)$$

L'énergie transportée à travers la surface ds par ces rayons pendant ce temps est :

$$dE = I_\nu(\mathbf{n}) \cdot \cos \theta \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega. \quad (4.156)$$

On en déduit que l'énergie par unité de volume associée à la direction \mathbf{n} est :

$$\frac{dE}{dV} = \frac{I_\nu(\mathbf{n}) \cdot \cos \theta \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega}{c \, dt \cdot ds \cdot \cos \theta} = \frac{I_\nu(\mathbf{n})}{c} d\Omega. \quad (4.157)$$

Pour obtenir la densité d'énergie totale, on somme sur toutes les directions de propagation sur la sphère unité :

$$u(\nu) = \frac{1}{c} \int_{S^2} I_\nu(\mathbf{n}) \, d\Omega. \quad (4.158)$$

Si le rayonnement est isotrope, alors $I_\nu(\mathbf{n}) = I_\nu$ est indépendant de la direction. L'intégrale devient :

$$u(\nu) = \frac{I_\nu}{c} \int_{S^2} d\Omega = \frac{I_\nu}{c} \cdot 4\pi. \quad (4.159)$$

D'où,

$$\boxed{u(\nu) = \frac{4\pi}{c} I_\nu} \quad (4.160)$$

5. Lien entre l'intensité totale et $u(\nu)$

On reprend l'expression précédente :

$$I = \int_0^\infty \pi I_\nu d\nu, \quad (4.161)$$

et on injecte $I_\nu = \frac{c}{4\pi} u(\nu)$:

$$I = \int_0^\infty \pi \cdot \frac{c}{4\pi} u(\nu) d\nu = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\nu) d\nu. \quad (4.162)$$

4.6.5 Loi de Stefan

1. On a démontré précédemment que,

$$I(T) = \frac{c}{4} \int_{\mathbb{R}^+} u(\nu, T) d\nu \quad (4.163)$$

On remplace par ce qui a été obtenu l'eq 4.147,

$$I = \frac{c}{4} \frac{8\pi}{c^3} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{h\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \quad (4.164)$$

$$= \frac{2\pi k_B^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (4.165)$$

Avec, on le rappelle, $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

2. En faisant un développement limité, on arrive facilement à éliminer la division par zéro. En effet, en 0,

$$e^x - 1 \underset{0}{=} x + o(x) \implies \frac{x^3}{e^x - 1} \underset{0}{=} x^2 + o(x^2) \quad (4.166)$$

Ce qui converge bien en 0. En ∞ , l'exponentielle permet la convergence de l'intégrale.

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_{\mathbb{R}^+} dx x^3 e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (4.167)$$

$$\stackrel{\text{DSE}}{=} \int_{\mathbb{R}^+} dx x^3 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-nx} \quad (4.168)$$

$$\stackrel{=}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} \int_{\mathbb{R}^+} du u^3 e^{-u} \quad (4.169)$$

$$= \zeta(4) \Gamma(4) \quad (4.170)$$

$$= 6\zeta(4) \quad (4.171)$$

3. Grâce à la théorie de Fourier, on peut démontrer que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. On a alors,

$$I(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} T^4, \quad (4.172)$$

4.6.6 Application : perte de masse solaire par rayonnement électromagnétique

On considère le Soleil comme un corps noir à température $T = 5775$ K. La puissance totale rayonnée par le Soleil est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$P = I \cdot S = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2, \quad (4.173)$$

où

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-4}, \quad R = 6,96 \times 10^8 \text{ m} \quad (4.174)$$

est le rayon du Soleil.

Calculons P :

$$P = 5,67 \times 10^{-8} \times (5775)^4 \times 4\pi(6,96 \times 10^8)^2. \quad (4.175)$$

On évalue :

$$(5775)^4 \simeq 1,11 \times 10^{15}, \quad (4.176)$$

$$4\pi(6,96 \times 10^8)^2 = 4\pi \times 4,84 \times 10^{17} \simeq 6,08 \times 10^{18}. \quad (4.177)$$

Ainsi,

$$P \simeq 5,67 \times 10^{-8} \times 1,11 \times 10^{15} \times 6,08 \times 10^{18} \simeq 3,83 \times 10^{26} \text{ W}. \quad (4.178)$$

D'après la relation d'équivalence masse-énergie d'Einstein,

$$E = mc^2, \quad (4.179)$$

la perte de masse \dot{m} par unité de temps liée à cette puissance rayonnée est

$$\dot{m} = \frac{P}{c^2}, \quad (4.180)$$

avec $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Donc,

$$\dot{m} = \frac{3,83 \times 10^{26}}{(3,00 \times 10^8)^2} = \frac{3,83 \times 10^{26}}{9 \times 10^{16}} \simeq 4,26 \times 10^9 \text{ kg/s}. \quad (4.181)$$

Sachant que l'âge du Soleil est d'environ $t = 4,6 \times 10^9 \text{ ans}$, soit

$$t = 4,6 \times 10^9 \times 3,15 \times 10^7 \simeq 1,45 \times 10^{17} \text{ s}, \quad (4.182)$$

la masse totale perdue est

$$\Delta m = \dot{m} \times t = 4,26 \times 10^9 \times 1,45 \times 10^{17} \simeq 6,18 \times 10^{26} \text{ kg}. \quad (4.183)$$

En nombre de masses terrestres, avec $m_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$,

$$\frac{\Delta m}{m_T} = \frac{6,18 \times 10^{26}}{6 \times 10^{24}} \simeq 103. \quad (4.184)$$

Ainsi, le Soleil perd environ $4,3 \times 10^9 \text{ kg/s}$ par rayonnement. Depuis sa formation, il a perdu environ 100 fois la masse de la Terre.

4.7 Minimisation du potentiel gravitationnel par une boule

4.7.1 Formule de Hadamard

Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , et soit Ω_ε une déformation lisse de Ω telle que, pour $x \in \partial\Omega$,

$$x \mapsto x + \varepsilon f(x) n(x), \quad (4.185)$$

prolongée en tout Ω . On souhaite démontrer :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x), \quad (4.186)$$

où dS est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

1. **Étude de la fonction** $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) *Différentiabilité de \det .*

Rappelons que pour $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}. \quad (4.187)$$

C'est donc un polynôme en les n^2 variables m_{ij} . Toute fonction polynomiale $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^∞ . En particulier, \det est différentiable en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notamment au voisinage de l'identité I .

(b) *Développement de $\det(I + \varepsilon M)$.*

On veut montrer :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(I + \varepsilon M) = 1 + \varepsilon \text{Tr}(M) + o(\varepsilon), \quad (4.188)$$

ce qui entraîne $\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det(I + \varepsilon M) = \text{Tr}(M)$.

Il suffit d'écrire M en matrice triangulaire supérieure, le déterminant devient alors le produit des valeurs propres !

Ainsi,

$$\det(I + \varepsilon M) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \text{Tr } M + o(\varepsilon) \quad (4.189)$$

Ce qui permet de conclure.

(c) On se ramène au cas précédent en factorisant par X .

$$\det(X + H) = \det X \det(I + X^{-1}H) \quad (4.190)$$

$$= \det X \left(1 + \text{tr}(X^{-1}H) + o(\|H\|) \right) \quad (4.191)$$

$$= \det X + \text{tr}({}^t\text{Com}(X)H) + o(\|H\|) \quad (4.192)$$

Ainsi on a alors,

$$d(\det(H))(X) = \text{Tr}({}^t\text{Com}(X)H) \quad (4.193)$$

2. **Changement de variables et calcul du jacobien.**

On effectue le changement de variable

$$x = x(u) = u + \varepsilon f(u) n(u), \quad u \in \Omega. \quad (4.194)$$

Pour calculer $\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$ au premier ordre en ε , on note

$$x_i(u) = u_i + \varepsilon f(u) n_i(u), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.195)$$

Alors

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \delta_{ij} + \varepsilon \left(\partial_j f(u) \right) n_i(u) + \varepsilon f(u) \partial_j n_i(u). \quad (4.196)$$

Posons la matrice $A(u) = (\partial_j f n_i + f \partial_j n_i)_{i,j}$. On a donc $\frac{\partial x}{\partial u} = I + \varepsilon A(u)$. Par le développement précédent,

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \det(I + \varepsilon A(u)) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr}(A(u)) + o(\varepsilon). \quad (4.197)$$

En remarquant que $\operatorname{Tr}(A(u)) = \nabla \cdot (f n)$, on obtient

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 1 + \varepsilon \nabla \cdot (f n)(u) + o(\varepsilon). \quad (4.198)$$

3. Développement de $F(x + \varepsilon v(x))$.

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$, $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pour fixer x , définissons $\varphi(\varepsilon) = F(x + \varepsilon v(x))$. Par la règle de dérivation en chaîne en dimension 1,

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} F(x + \varepsilon v(x)) = v(x) \cdot \nabla F(x + \varepsilon v(x)). \quad (4.199)$$

En particulier, pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + o(\varepsilon) = F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F(x) + o(\varepsilon). \quad (4.200)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F(x + \varepsilon v(x)) = F(x) + \varepsilon v(x) \cdot \nabla F(x) + o(\varepsilon). \quad (4.201)$$

4. Obtention de la formule de Hadamard.

On fait le changement $x(u)$ dans $\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x$. Alors

$$\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\Omega} F(x(u)) \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) d^3u. \quad (4.202)$$

D'après les deux points précédents,

$$F(x(u)) = F(u) + \varepsilon f(u) n(u) \cdot \nabla F(u) + o(\varepsilon), \quad \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 1 + \varepsilon \nabla \cdot (f n)(u) + o(\varepsilon). \quad (4.203)$$

En multipliant et en ne retenant que le terme en ε , on trouve

$$F(x(u)) \det\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = F(u) + \varepsilon \left(F(u) \nabla \cdot (f n)(u) + f(u) n(u) \cdot \nabla F(u) \right) + o(\varepsilon). \quad (4.204)$$

Ainsi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\Omega} F(u) d^3u + \varepsilon \int_{\Omega} \left(F \nabla \cdot (f n) + f n \cdot \nabla F \right) d^3u + o(\varepsilon). \quad (4.205)$$

Or

$$F \nabla \cdot (f n) + f n \cdot \nabla F = \nabla \cdot (F f n), \quad (4.206)$$

donc par le théorème de la divergence,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (F f n) d^3u = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x). \quad (4.207)$$

Finalement,

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{\Omega_\varepsilon} F(x) d^3x = \int_{\partial\Omega} F(x) f(x) dS(x), \quad (4.208)$$

ce qui établit la formule de Hadamard (4.186).

4.7.2 Lien avec le potentiel gravitationnel

1. Signe de $E[\Omega]$ et définition de $\mathcal{I}[\Omega]$.

On a

$$E[\Omega] = -\frac{G}{2} \rho^2 \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'. \quad (4.209)$$

Comme $G > 0$ et $\rho > 0$, il suit immédiatement $E[\Omega] < 0$. Minimiser $E[\Omega]$ revient donc à maximiser

$$\mathcal{I}[\Omega] := \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x d^3x'. \quad (4.210)$$

2. Calcul du potentiel au centre d'une boule.

Supposons $\Omega = B(0, R)$ de volume fixe $\frac{4}{3}\pi R^3 = V$. La densité est ρ . Pour $x = 0$,

$$U(0) = -G \rho \int_{\Omega} \frac{1}{|x'|} d^3x' = -G \rho \int_0^R \int_{S^2} \frac{1}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr. \quad (4.211)$$

En coordonnées sphériques,

$$\int_{S^2} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi, \quad \text{et} \quad \int_0^R \frac{r^2}{r} dr = \int_0^R r dr = \frac{R^2}{2}. \quad (4.212)$$

Donc

$$U(0) = -G \rho \cdot 4\pi \cdot \frac{R^2}{2} = -2\pi G \rho R^2. \quad (4.213)$$

D'où l'expression explicite du potentiel au centre.

4.7.3 La sphère ?

1. Variation première de \mathcal{F} .

On écrit $\mathcal{F}[\Omega_\varepsilon]$ et on applique la formule de Hadamard avec $F(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$. Alors

$$\delta \mathcal{F} = \frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \iint_{\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x - y|} dx dy. \quad (4.214)$$

Ainsi, on a en utilisant la formule de Hadamard pour Ω^2 ,

$$\delta \mathcal{F} = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x). \quad (4.215)$$

2. Introduction du multiplicateur de Lagrange λ .

On veut minimiser \mathcal{F} sous la contrainte $V[\Omega] = V$. On définit la fonctionnelle de Lagrange

$$\mathcal{L}[\Omega] := \mathcal{F}[\Omega] - \lambda V[\Omega], \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.216)$$

Sa variation première s'écrit

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{F} - \lambda \delta V = 2 \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' \right) f(x) dS(x) - \lambda \int_{\partial\Omega} f(x) dS(x). \quad (4.217)$$

Par linéarité,

$$\delta \mathcal{L} = \int_{\partial\Omega} \left(2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda \right) f(x) dS(x). \quad (4.218)$$

3. Condition stationnaire pour la boule.

Pour que $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toute perturbation f , il faut et il suffit que

$$2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x' - \lambda = 0, \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega. \quad (4.219)$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$ est constante sur $\partial\Omega$.

Or si $\Omega = B(0, R)$ est une boule, alors, par symétrie sphérique, pour tout $x \in \partial B(0, R)$ (i.e. $|x| = R$), l'intégrale $\int_{B(0, R)} \frac{1}{|x - x'|} d^3x'$ ne dépend que de $|x| = R$.

Ainsi elle est *constante* sur ∂B . On en déduit que la boule satisfait la condition stationnaire $\delta\mathcal{L} = 0$ pour tout f .

4. (Bonus) Variation seconde et minimum local.

Pour montrer que la boule est un *minimum local* de \mathcal{F} sous contrainte V , il faut vérifier que la variation seconde $\delta^2\mathcal{L}[f]$ est strictement positive pour toute perturbation $f \neq 0$ satisfaisant $\int_{\partial\Omega} f dS = 0$.

Sans détails complets ici, on peut écrire la variation seconde sous la forme d'une forme bilinéaire :

$$\delta^2\mathcal{F}[f] = \int_{(\partial\Omega)^2} K(x, x') f(x) f(x') dS(x) dS(x') + \int_{\partial\Omega} f(x)^2 \kappa(x) dS(x), \quad (4.220)$$

avec un noyau $K(x, x') = \frac{1}{|x - x'|}$ et $\kappa(x)$ la courbure moyenne en x .

Pour la boule, grâce au développement en harmoniques sphériques, on montre que cette forme est strictement positive sur $\{f \mid \int_{\partial\Omega} f dS = 0\}$. Cela prouve que la boule est un minimum local.

5. Conclusion physique.

La boule minimise l'énergie gravitationnelle interne pour un volume fixé. En physique, cela explique que, dans l'approximation d'un corps massif autogravitant au repos, la configuration stationnaire de moindre énergie est sphérique. C'est la raison pour laquelle les grands objets de l'Univers (étoiles, planètes en l'absence de force de marée ou de rotation rapide) tendent vers une forme sphérique.

4.8 Mouvement relativiste d'une particule chargée

4.8.1 Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

1. Particule libre et action relativiste.

Le principe de moindre action impose que l'action soit scalaire de Lorentz. Le scalaire le plus simple est l'intervalle d'espace-temps ds , défini par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.221)$$

L'action d'une particule libre de masse m est donc :

$$S = -mc \int ds = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} dt. \quad (4.222)$$

Le Lagrangien associé est :

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (4.223)$$

2. Interaction avec un champ électromagnétique.

On introduit le quadripotential $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$. On cherche un terme d'interaction de la forme scalaire $L_{\text{int}} = qA_\mu \dot{x}^\mu$. En coordonnées usuelles :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi. \quad (4.224)$$

Le Lagrangien total est donc :

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi. \quad (4.225)$$

3. Impulsion généralisée.

L'impulsion généralisée est définie par :

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} = \gamma m\mathbf{v} + q\mathbf{A}. \quad (4.226)$$

4. Equations d'Euler-Lagrange.

On applique les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (4.227)$$

Le membre de gauche donne :

$$\frac{d}{dt} (\gamma m\mathbf{v}) + q \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (4.228)$$

Le membre de droite s'écrit :

$$q\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - q\nabla\phi. \quad (4.229)$$

Or on a :

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (4.230)$$

D'autre part :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \partial_t \mathbf{A} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}. \quad (4.231)$$

Ainsi, en réinjectant ces expressions, les termes $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ se compensent, et on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = q [-\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]. \quad (4.232)$$

On reconnaît alors le champ électrique et magnétique définis par :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4.233)$$

d'où l'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.234)$$

5. Formulation covariante.

On paramètre par le temps propre τ :

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} + qA_\mu\dot{x}^\mu. \quad (4.235)$$

On reconnaît un couplage minimal : la première partie est l'action libre, la deuxième l'interaction avec le champ.

6. Equation du mouvement.

On applique les **équations d'Euler-Lagrange** en coordonnées covariantes. Le Lagrangien relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est :

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu} + qA_\mu\dot{x}^\mu, \quad (4.236)$$

où $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, τ étant le temps propre de la particule. On utilise que :

$$\sqrt{-\dot{x}^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = c, \quad (4.237)$$

puisque \dot{x}^μ est un quadrivecteur unité : $\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu = -c^2$ (métrique $(-, +, +, +)$). Ainsi, la dérivée du Lagrangien donne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + qA_\mu = mc \frac{\dot{x}_\mu}{c} + qA_\mu. \quad (4.238)$$

On applique alors :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}. \quad (4.239)$$

Le membre de gauche devient :

$$\frac{d}{d\tau} \left(mc \frac{\dot{x}_\mu}{c} + qA_\mu \right) = mc \frac{\ddot{x}_\mu}{c} + q \frac{dA_\mu}{d\tau} \quad (4.240)$$

$$= m\ddot{x}_\mu + q\dot{x}^\nu \partial_\nu A_\mu. \quad (4.241)$$

Le membre de droite vaut :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = q\partial_\mu A_\nu \dot{x}^\nu. \quad (4.242)$$

On obtient donc l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}_\mu + q\dot{x}^\nu \partial_\nu A_\mu = q\dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu, \quad (4.243)$$

$$m\ddot{x}_\mu = q\dot{x}^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (4.244)$$

$$m\ddot{x}_\mu = qF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu, \quad (4.245)$$

où l'on a défini le **tenseur électromagnétique** antisymétrique :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.246)$$

7. Composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$.

Le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$) et contient toutes les informations sur les champs électriques \mathbf{E} et magnétiques \mathbf{B} .

On travaille en coordonnées cartésiennes, avec $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ et $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$.

– Pour les composantes temporelles-spatiales ($\mu = 0, \nu = i$) :

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \quad (4.247)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\phi}{c} \right) \quad (4.248)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (4.249)$$

$$= -\frac{1}{c} E_i, \quad (4.250)$$

où l'on a utilisé la définition du champ électrique :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}. \quad (4.251)$$

– Pour les composantes purement spatiales ($\mu = i, \nu = j$) :

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\varepsilon_{ijk} B_k, \quad (4.252)$$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita, et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Conclusion : le tenseur $F_{\mu\nu}$ contient :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.253)$$

Cette forme montre clairement le lien entre les composantes de $F_{\mu\nu}$ et les champs électromagnétiques mesurés dans le référentiel inertiel.

8. Invariants relativistes.

On calcule :

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2}),$$

$$I_2 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{8}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Les cas $I_1 = 0, I_2 = 0$ correspondent à :

- $\mathbf{E}^2 = c^2 \mathbf{B}^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$: champ de type onde électromagnétique plane.
- $I_1 > 0$: champ magnétique dominant ; $I_1 < 0$: champ électrique dominant.

9. Transformation de jauge.

Sous la transformation $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, on a :

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}, \quad (4.254)$$

car les dérivées croisées se compensent. L'équation du mouvement reste inchangée. Cette invariance est une **symétrie locale** (de jauge) de l'action : elle est associée à la conservation de la charge via le théorème de Noether.

4.8.2 Équations du mouvement d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane – Correction

On considère une particule de masse m et de charge q soumise à un champ électromagnétique. Son mouvement est décrit par l'équation :

$$m\ddot{x}^\mu = qF^{\mu\nu}\dot{x}_\nu, \quad (4.255)$$

où les points désignent des dérivées par rapport au temps propre τ , et où l'on travaille en unités naturelles : $c = 1$.

Le potentiel est donné sous la forme :

$$A^\mu(x) = a^\mu f(k_\nu x^\nu), \quad (4.256)$$

où a^μ est constant, $f \in C^1$, et k^μ est un quadrivecteur lumière tel que $k^\mu k_\mu = 0$.

1. Calcul du tenseur électromagnétique.

Par définition :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (4.257)$$

On a :

$$\partial^\mu A^\nu = a^\nu f'(k_\rho x^\rho) \partial^\mu (k_\sigma x^\sigma) = a^\nu f'(k \cdot x) k^\mu. \quad (4.258)$$

De même :

$$\partial^\nu A^\mu = a^\mu f'(k \cdot x) k^\nu. \quad (4.259)$$

D'où :

$$F^{\mu\nu} = (k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu) f'(k_\rho x^\rho). \quad (4.260)$$

2. Condition de jauge.

(a) On calcule :

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (a^\mu f(k_\rho x^\rho)) = a^\mu f'(k \cdot x) k_\mu. \quad (4.261)$$

(b) Donc la condition de jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ implique :

$$a^\mu k_\mu = 0. \quad (4.262)$$

Autrement dit, le quadrivecteur de polarisation est orthogonal au vecteur d'onde. Cette condition exprime la transversalité de l'onde électromagnétique.

3. Équation du mouvement.

(a) On utilise l'expression du tenseur $F^{\mu\nu}$ obtenue en 1 :

$$F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu = (k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu) f'(k \cdot x) \dot{x}_\nu \quad (4.263)$$

$$= k^\mu a^\nu \dot{x}_\nu f' - a^\mu k^\nu \dot{x}_\nu f' \quad (4.264)$$

$$= [k^\mu (a_\rho \dot{x}^\rho) - a^\mu (k_\rho \dot{x}^\rho)] f'(k \cdot x). \quad (4.265)$$

(b) Ainsi, l'équation du mouvement devient :

$$m \ddot{x}^\mu = q [k^\mu (a_\rho \dot{x}^\rho) - a^\mu (k_\rho \dot{x}^\rho)] f'(k \cdot x). \quad (4.266)$$

4. Intégration de l'équation du mouvement.

(a) Posons $\phi(\tau) = k_\rho x^\rho(\tau)$, alors :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = k_\rho \dot{x}^\rho. \quad (4.267)$$

On dérive à nouveau :

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = k_\rho \ddot{x}^\rho. \quad (4.268)$$

On utilise l'équation du mouvement pour obtenir :

$$m k_\rho \ddot{x}^\rho = q [k_\rho k^\rho (a \cdot \dot{x}) - k_\rho a^\rho (k \cdot \dot{x})] f'(k \cdot x). \quad (4.269)$$

Mais $k^\rho k_\rho = 0$ et $k_\rho a^\rho = 0$ (condition de jauge), donc :

$$k_\rho \ddot{x}^\rho = 0. \quad (4.270)$$

Ainsi, $\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = 0$, ce qui implique :

$$k_\rho \dot{x}^\rho = \text{constante}. \quad (4.271)$$

(b) Posons $k_\rho \dot{x}^\rho = \omega = \text{constante}$. Alors $\phi(\tau) = k \cdot x(\tau)$ est affine en τ :

$$\phi(\tau) = \omega\tau + \phi_0. \quad (4.272)$$

(c) On rappelle l'équation du mouvement sous la forme :

$$m \ddot{x}^\mu = q [k^\mu (a_\rho \dot{x}^\rho) - a^\mu (k_\rho \dot{x}^\rho)] f'(\phi), \quad \text{avec } \phi(\tau) = k_\rho x^\rho(\tau). \quad (4.273)$$

Posons la notation $u^\mu = \dot{x}^\mu$. On a alors :

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = q [k^\mu (a_\rho u^\rho) - a^\mu (k_\rho u^\rho)] f'(\phi). \quad (4.274)$$

Comme montré précédemment, $\omega := k_\rho u^\rho = \text{constante}$, et $\phi(\tau) = \omega\tau + \phi_0$.

On change de variable du paramètre propre τ vers ϕ , en notant :

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d}{d\phi} = \omega \frac{d}{d\phi}. \quad (4.275)$$

L'équation devient :

$$m\omega \frac{du^\mu}{d\phi} = q [k^\mu (a_\rho u^\rho) - a^\mu \omega] f'(\phi). \quad (4.276)$$

Posons $\alpha(\phi) := a_\rho u^\rho(\phi)$. En projetant sur a_μ , on trouve :

$$m\omega \frac{d\alpha}{d\phi} = q [(a \cdot k)\alpha - a^2 \omega] f'(\phi). \quad (4.277)$$

La condition de jauge impose $a \cdot k = 0$, donc :

$$\frac{d\alpha}{d\phi} = -\frac{qa^2}{m\omega} f'(\phi). \quad (4.278)$$

On intègre :

$$\alpha(\phi) = a_\rho u^\rho(\phi) = \alpha_0 - \frac{qa^2}{m\omega} f(\phi), \quad (4.279)$$

avec la constante d'intégration $\alpha_0 = a_\rho u^\rho(\phi_0)$.

L'équation sur u^μ s'écrit :

$$\frac{du^\mu}{d\phi} = \frac{q}{m\omega} [k^\mu \alpha(\phi) - a^\mu \omega] f'(\phi). \quad (4.280)$$

On intègre terme à terme :

$$u^\mu(\phi) = u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} \int_{\phi_0}^{\phi} [k^\mu \alpha(\varphi) - a^\mu \omega] f'(\varphi) d\varphi \quad (4.281)$$

$$= u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} \left[k^\mu \int_{\phi_0}^{\phi} \alpha(\varphi) f'(\varphi) d\varphi - a^\mu \omega \int_{\phi_0}^{\phi} f'(\varphi) d\varphi \right]. \quad (4.282)$$

Substituons $\alpha(\varphi)$:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \alpha(\varphi) f'(\varphi) d\varphi = \int_{\phi_0}^{\phi} \left[\alpha_0 - \frac{qa^2}{m\omega} f(\varphi) \right] f'(\varphi) d\varphi. \quad (4.283)$$

Calculons les intégrales :

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \alpha_0 f'(\varphi) d\varphi = \alpha_0 [f(\phi) - f(\phi_0)], \quad (4.284)$$

et

$$\int_{\phi_0}^{\phi} f(\varphi) f'(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} [f(\phi)^2 - f(\phi_0)^2]. \quad (4.285)$$

Ainsi,

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \alpha(\varphi) f'(\varphi) d\varphi = \alpha_0 [f(\phi) - f(\phi_0)] - \frac{qa^2}{2m\omega} [f(\phi)^2 - f(\phi_0)^2]. \quad (4.286)$$

De plus,

$$\int_{\phi_0}^{\phi} f'(\varphi) d\varphi = f(\phi) - f(\phi_0). \quad (4.287)$$

D'où,

$$u^\mu(\phi) = u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} k^\mu \left[\alpha_0 (f(\phi) - f(\phi_0)) - \frac{qa^2}{2m\omega} (f(\phi)^2 - f(\phi_0)^2) \right] \quad (4.288)$$

$$- \frac{q}{m} a^\mu (f(\phi) - f(\phi_0)). \quad (4.289)$$

Enfin, on intègre une seconde fois pour obtenir la trajectoire :

$$x^\mu(\phi) = x^\mu(\phi_0) + \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{u^\mu(\varphi)}{\omega} d\varphi. \quad (4.290)$$

Le calcul se fait en intégrant terme à terme chaque fonction de $f(\varphi)$ ou $f(\varphi)^2$.

Résumé : La trajectoire complète est donnée explicitement par

$$\boxed{\begin{aligned} u^\mu(\phi) &= u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} k^\mu \left[\alpha_0 (f(\phi) - f(\phi_0)) - \frac{qa^2}{2m\omega} (f(\phi)^2 - f(\phi_0)^2) \right] \\ &\quad - \frac{q}{m} a^\mu (f(\phi) - f(\phi_0)), \\ x^\mu(\phi) &= x^\mu(\phi_0) + \frac{1}{\omega} \int_{\phi_0}^{\phi} u^\mu(\varphi) d\varphi. \end{aligned}} \quad (4.291)$$

Cette solution exprime la trajectoire d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane d'amplitude et forme arbitraire f . La constante $\omega = k_\rho \dot{x}^\rho$ est fixée par les conditions initiales.

(d) On pose

$$f(\phi) = \sin(\phi), \quad (4.292)$$

avec $\phi = k_\mu x^\mu$.

Les intégrales impliquent alors les primitives de \sin et \sin^2 , qui sont explicites :

$$\int f(\phi) d\phi = -\cos(\phi) + C, \quad \int f(\phi)^2 d\phi = \int \sin^2(\phi) d\phi = \frac{\phi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{4} + C. \quad (4.293)$$

Donc, la vitesse quadrivectorielle s'écrit :

$$\begin{aligned} u^\mu(\phi) &= u^\mu(\phi_0) + \frac{q}{m\omega} k^\mu \left[\alpha_0 (\sin \phi - \sin \phi_0) - \frac{qa^2}{2m\omega} \left(\frac{\phi - \phi_0}{2} - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{4} \right) \right] \\ &\quad - \frac{q}{m} a^\mu (\sin \phi - \sin \phi_0). \end{aligned} \quad (4.294)$$

On intègre ensuite $u^\mu(\phi)$ pour obtenir la trajectoire complète $x^\mu(\tau)$ comme expliqué précédemment.

Les composantes de la trajectoire s'écrivent alors :

$$ct(\tau) = ct(\tau_0) + \frac{u^0(\tau_0)}{\omega}(\phi - \phi_0) + \frac{q}{m\omega^2}k^0 \left[\alpha_0(-\cos \phi + \cos \phi_0) - \frac{qa^2}{4m\omega} \left(\phi - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{2} \right) \right] - \frac{q}{m\omega}a^0(-\cos \phi + \cos \phi_0), \quad (4.295)$$

$$x(\tau) = x(\tau_0) + \frac{u^1(\tau_0)}{\omega}(\phi - \phi_0) + \frac{q}{m\omega^2}k^1 \left[\alpha_0(-\cos \phi + \cos \phi_0) - \frac{qa^2}{4m\omega} \left(\phi - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{2} \right) \right] - \frac{q}{m\omega}a^1(-\cos \phi + \cos \phi_0), \quad (4.296)$$

$$y(\tau) = y(\tau_0) + \frac{u^2(\tau_0)}{\omega}(\phi - \phi_0) + \frac{q}{m\omega^2}k^2 \left[\alpha_0(-\cos \phi + \cos \phi_0) - \frac{qa^2}{4m\omega} \left(\phi - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{2} \right) \right] - \frac{q}{m\omega}a^2(-\cos \phi + \cos \phi_0), \quad (4.297)$$

$$z(\tau) = z(\tau_0) + \frac{u^3(\tau_0)}{\omega}(\phi - \phi_0) + \frac{q}{m\omega^2}k^3 \left[\alpha_0(-\cos \phi + \cos \phi_0) - \frac{qa^2}{4m\omega} \left(\phi - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi - \sin 2\phi_0}{2} \right) \right] - \frac{q}{m\omega}a^3(-\cos \phi + \cos \phi_0). \quad (4.298)$$

avec

$$\phi = \omega\tau + \phi_0, \quad \alpha_0 = a_\rho u^\rho(\tau_0), \quad a^2 = a_\mu a^\mu, \quad (4.299)$$

et $\omega = k_\mu u^\mu$ est constant. Cette expression donne la trajectoire complète analytiquement intégrée d'une particule chargée dans une onde électromagnétique plane monochromatique sinusoidale.

4.8.3 Théorie des Champs

1. Pour une action dépendant d'un champ φ (scalaire, tensoriel...) :

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) d^4x \quad (4.300)$$

On considère une variation $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon\eta$ avec $\eta \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, alors :

$$\delta S = \frac{dS}{d\varepsilon}[\varphi + \varepsilon\eta] \Big|_{\varepsilon=0} \quad (4.301)$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \eta \right) d^4x \quad (4.302)$$

On intègre par partie le terme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \eta$.

$u = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \implies du = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right)$, et $dv = \partial_\mu \eta \implies v = \eta$. Cela nous donne,

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \right) \eta d^4x \quad (4.303)$$

On rappelle le fait que η est nulle sur $\partial\Omega$, et on obtient l'équation d'Euler-Lagrange pour les champs :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = 0} \quad (4.304)$$

2. On considère l'action électromagnétique :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu \quad (4.305)$$

On souhaite calculer :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}. \quad (4.306)$$

On commence par utiliser la règle de dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} F^{\rho\sigma} + F_{\rho\sigma} \frac{\partial F^{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \right). \quad (4.307)$$

Or, en dérivant le tenseur $F_{\rho\sigma}$:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu, \quad (4.308)$$

et de même :

$$\frac{\partial F^{\rho\sigma}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu, \quad (4.309)$$

donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = -\frac{1}{4} [(\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) F^{\rho\sigma} + F_{\rho\sigma} (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu)] \quad (4.310)$$

$$= -\frac{1}{2} (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) F^{\rho\sigma} \quad (4.311)$$

$$= -\frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \quad (4.312)$$

$$= -F^{\mu\nu} \quad (\text{car } F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}). \quad (4.313)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = -F^{\mu\nu}} \quad (4.314)$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = -j^\mu \quad (4.315)$$

Donc, par l'équation d'Euler-Lagrange,

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} \quad (4.316)$$

Les équations homogènes s'obtiennent en remarquant que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ implique par construction² :

$$\boxed{\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0} \quad (4.317)$$

4.8.4 Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique constant

1. $F^{\mu\nu}$: dans le référentiel où $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, on a :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.318)$$

2. Il suffit de dériver chaque terme, puis de remplacer, atout se supprime.

2. L'équation du mouvement $du^\mu/d\tau = (q/m)F^{\mu\nu}u_\nu$ implique $u^3 = \text{constante} = 0$, donc mouvement plan. L'énergie $E = \gamma mc^2$ est constante car $F^{0\nu} = 0$.
3. $du^\mu/d\tau = (q/m)F^{\mu\nu}u_\nu$ donne :

$$du^1/d\tau = (q/m)F^{12}u^2 = -(qB/m)u^2 \quad (4.319)$$

$$du^2/d\tau = (q/m)F^{21}u^1 = (qB/m)u^1 \quad (4.320)$$

Cela décrit un mouvement circulaire uniforme d'où :

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad x(t) = R \cos\left(\frac{\omega}{\gamma}t\right), \quad y(t) = R \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}t\right) \quad (4.321)$$

On a également que γ est constante, ce qui permet d'écrire, $\tau = t/\gamma$. Avec :

$$R = \frac{\gamma m v}{qB} \quad (4.322)$$

4. On part de :

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 a^2, \quad E = \gamma mc^2, \quad a = \frac{v^2}{R} \quad (4.323)$$

Donc :

$$d\gamma/dt = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^5 m} \gamma^3 a^2 = -C(\gamma^2 - 1) \quad (4.324)$$

avec :

$$C = \frac{q^4 B^2}{6\pi\epsilon_0 c^5 m^3} \quad (4.325)$$

5. Résolution de :

$$\frac{d\gamma}{\gamma^2 - 1} = -C dt \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right| = -Ct + C_0 \quad (4.326)$$

On obtient donc :

$$\boxed{\gamma(t) = \coth(Ct + C_0)} \quad (4.327)$$

6. On utilise $\omega = \frac{qB}{m}$ et $v(t) = c\sqrt{1 - 1/\gamma(t)^2}$, donc :

$$R(t) = \frac{\gamma(t)mv(t)}{qB}, \quad \theta(t) = \int_0^t \frac{\omega}{\gamma(s)} ds \quad (4.328)$$

$$x(t) = R(t) \cos \theta(t) \quad (4.329)$$

$$y(t) = R(t) \sin \theta(t) \quad (4.330)$$

7. La courbe spirale vers l'origine car $R(t) \rightarrow 0$ et $\omega/\gamma(t) \rightarrow 0$, mais l'oscillation reste présente. Problème : accumulation d'erreurs numériques et nécessité d'un pas de temps adaptatif pour intégrer correctement les oscillations rapides au début.

4.8.5 Physique des collisionneurs relativistes

On utilise les unités naturelles avec $c = 1$.

1. Le carré de l'invariant d'énergie-moment total est défini par :

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \quad (4.331)$$

Dans le référentiel du centre de masse (CMS), l'énergie totale disponible est donnée par :

$$E_{\text{tot}}^{(\text{CMS})} = \sqrt{s} \quad (4.332)$$

2. Pour une collision frontale de deux particules identiques de masse m et d'énergie E chacune (dans le référentiel du laboratoire), les quadrimpulsions sont :

$$p_1 = (E, \mathbf{p}) \quad (4.333)$$

$$p_2 = (E, -\mathbf{p}) \quad (4.334)$$

On a alors :

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2m^2 + 2(E^2 - \mathbf{p}^2) = 4E^2 \quad (4.335)$$

car $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ et $E \gg m$. Donc :

$$\boxed{\sqrt{s} = 2E} \quad (4.336)$$

3. Pour une collision avec une cible fixe, on a :

$$p_1 = (E_{\text{lab}}, \mathbf{p}) \quad (4.337)$$

$$p_2 = (m, 0) \quad (4.338)$$

Alors :

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m^2 + m^2 + 2mE_{\text{lab}} = 2m^2 + 2mE_{\text{lab}} \quad (4.339)$$

Soit :

$$\boxed{s = 2m^2 + 2mE_{\text{lab}}} \quad (4.340)$$

Au seuil de création de deux nouvelles particules de masse m , dans le CMS on a : $\sqrt{s} = 2m$ donc :

$$2m = \sqrt{2m^2 + 2mE_{\text{lab}}} \Rightarrow E_{\text{lab}} = 2m \quad (4.341)$$

4. Pour produire une particule de masse M au seuil dans une expérience à cible fixe, on utilise :

$$s = M^2 = m^2 + m^2 + 2mE_{\text{lab}} \Rightarrow E_{\text{lab}} = \frac{M^2 - 2m^2}{2m} \quad (4.342)$$

En revanche, dans un collisionneur symétrique, on a simplement :

$$E_{\text{CM}} = \sqrt{s} = 2E = 2M \Rightarrow E = M \quad (4.343)$$

Donc, pour une même énergie dans le CMS, l'énergie requise dans le laboratoire est beaucoup plus grande que dans un collisionneur symétrique. C'est pourquoi les collisionneurs à faisceaux opposés sont plus efficaces pour produire des particules lourdes à haute énergie.

4.9 Hydrodynamique relativiste

4.9.1 Hydrodynamique classique

1. Considérons une région de fluide de volume V fixe et fermée. La masse totale est

$$M(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (4.344)$$

La conservation de la masse implique que la variation temporelle de cette masse est compensée par le flux sortant de masse à travers la frontière ∂V :

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.345)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal sortant de la surface.

Par le théorème de divergence (Gauss), cela s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV. \quad (4.346)$$

Comme V est fixe, on peut permuter dérivée et intégrale temporelle :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV. \quad (4.347)$$

Par arbitraire du volume V , on obtient l'équation locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.348)$$

Si le fluide est incompressible, la masse volumique est constante et indépendante de t et \mathbf{x} : $\rho = \rho_0$. Alors,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \nabla \rho = \mathbf{0}, \quad (4.349)$$

et (4.348) devient

$$0 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.350)$$

Donc pour un fluide incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle.

2. On part de la deuxième loi de Newton appliquée à une particule de fluide élémentaire de masse volumique ρ .

Le terme à gauche de l'équation est l'accélération totale multipliée par la masse volumique :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right), \quad (4.351)$$

où $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée matérielle (suivant la particule).

À droite, on a les forces volumétriques :

- Force due au gradient de pression, qui agit en poussant le fluide des régions de haute pression vers les basses : $-\nabla p$.

- Force gravitationnelle volumique : $\rho \mathbf{g}$.

L'équilibre dynamique s'écrit donc

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (4.352)$$

Signification physique : - $\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$: variation locale de la vitesse, - $\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$: variation spatiale liée au transport par le mouvement du fluide, - $-\nabla p$: force interne liée aux gradients de pression, - $\rho \mathbf{g}$: force externe de gravité.

3. Les forces visqueuses correspondent aux effets dissipatifs liés aux déformations du fluide. On modélise ces forces par des termes proportionnels aux dérivées secondes des composantes de vitesse.

Le tenseur des contraintes visqueuses, dans un fluide newtonien, est proportionnel au tenseur des taux de déformation. La contribution volumique de la force de viscosité est

$$\mathbf{f}_{\text{visc}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (4.353)$$

où η est la viscosité dynamique (cisaillement) et ζ la viscosité volumique (dilatation).

Ainsi, l'équation complète devient

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}. \quad (4.354)$$

Rôle des termes visqueux :

- $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$ tend à lisser les gradients de vitesse (diffusion de la quantité de mouvement).
- $\left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$ agit lorsque le fluide est compressible, dissipant l'énergie liée à la compression ou dilatation.

4. Dans la description lagrangienne, on suit la trajectoire $\mathbf{X}(t)$ d'une particule fluide individuelle. La dérivée temporelle totale est alors la dérivée suivant cette particule :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (4.355)$$

car $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$.

Cette formule définit la dérivée matérielle ou substantielle dans la description eulérienne.

La description eulérienne analyse les champs $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ en chaque point fixe de l'espace, sans suivre la trajectoire individuelle des particules.

5. Soit une ligne de courant paramétrée par $s \mapsto \mathbf{r}(s)$ à temps fixe t . La condition que la tangente soit colinéaire au champ de vitesse s'écrit

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \alpha(s) \mathbf{v}(\mathbf{r}(s), t), \quad (4.356)$$

avec $\alpha(s)$ une fonction positive.

On choisit le paramètre s de sorte que $\alpha(s) = 1$ (paramétrisation arclength ou autre). Alors

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(s), t). \quad (4.357)$$

Ainsi, les lignes de courant sont les trajectoires intégrales du champ \mathbf{v} à instant t .

6. Pour un fluide parfait, incompressible, stationnaire et sans viscosité soumis à un champ de forces conservatives de potentiel Φ , on part de l'équation d'Euler stationnaire

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \rho \nabla \Phi. \quad (4.358)$$

On utilise l'identité vectorielle

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (4.359)$$

Pour un fluide irrotationnel (sans vortex), $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, donc

$$\rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\nabla p + \rho \nabla \Phi. \quad (4.360)$$

On réarrange :

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \Phi \right) = \mathbf{0}. \quad (4.361)$$

Donc la quantité dans la parenthèse est constante le long d'une ligne de courant :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \Phi = \text{constante}. \quad (4.362)$$

C'est le théorème de Bernoulli.

4.9.2 Introduction à l'hydrodynamique relativiste

1. Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait s'écrit

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (4.363)$$

où ε est la densité d'énergie au repos du fluide, p la pression, u^μ le quadrivecteur vitesse du fluide (normalisé par $u^\mu u_\mu = -1$), et $g^{\mu\nu}$ la métrique de Minkowski avec le signe $(-+++)$.

(a) Symétrie de $T^{\mu\nu}$

Les termes sont construits à partir de produits symétriques : - $u^\mu u^\nu$ est manifestement symétrique en $\mu \leftrightarrow \nu$. - $g^{\mu\nu}$ est symétrique.

Donc, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

(b) Calcul dans le référentiel propre

Dans le référentiel propre du fluide, la quadrivitesse est

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (4.364)$$

Le tenseur énergie-impulsion s'écrit ici, avec signature $(-+++)$,

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (4.365)$$

avec

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (4.366)$$

Calculons la composante T^{00} explicitement :

$$T^{00} = (\varepsilon + p)u^0u^0 + pg^{00} \quad (4.367)$$

$$= (\varepsilon + p) \times 1 \times 1 + p \times (-1) \quad (4.368)$$

$$= \varepsilon + p - p = \varepsilon. \quad (4.369)$$

De même, pour les composantes spatiales $i, j = 1, 2, 3$:

$$T^{ij} = (\varepsilon + p)u^iu^j + pg^{ij} \quad (4.370)$$

$$= 0 + p\delta^{ij} = p\delta^{ij}. \quad (4.371)$$

Enfin, pour les composantes mixtes T^{0i} :

$$T^{0i} = (\varepsilon + p)u^0u^i + pg^{0i} = 0, \quad (4.372)$$

car $u^i = 0$ et $g^{0i} = 0$.

(c) Interprétation physique

- $T^{00} = \varepsilon$ représente la densité d'énergie totale dans le fluide.
- $T^{0i} = 0$ signifie qu'il n'y a pas de flux d'énergie dans le référentiel propre (le fluide est au repos).
- $T^{ij} = p\delta^{ij}$ est le tenseur des contraintes spatiales, ici isotrope et égal à la pression p sur la diagonale.

(d) Calcul de la trace

La trace du tenseur s'obtient en contractant avec la métrique,

$$T^\mu_\mu = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}[(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}]. \quad (4.373)$$

On peut écrire cela sous la forme

$$T^\mu_\mu = (\varepsilon + p)g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + pg_{\mu\nu}g^{\mu\nu}. \quad (4.374)$$

On rappelle que

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u_\nu u^\nu = -1, \quad (4.375)$$

et que la contraction de la métrique avec elle-même est

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \text{Tr}(\delta^\mu_\nu) = 4. \quad (4.376)$$

En substituant, on obtient

$$T^\mu_\mu = (\varepsilon + p)(-1) + p \times 4 \quad (4.377)$$

$$= -\varepsilon - p + 4p \quad (4.378)$$

$$= -\varepsilon + 3p. \quad (4.379)$$

(e) Relation d'état pour un gaz ultra-relativiste

On rappelle que la densité d'énergie et la pression s'expriment en physique statistique (dans un volume V) par

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \int \frac{d^3\|\mathbf{p}\|}{(2\pi)^3} E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}), \quad (4.380)$$

$$p = \frac{1}{3V} \int \frac{d^3\|\mathbf{p}\|}{(2\pi)^3} \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{E(\mathbf{p})} f(\mathbf{p}), \quad (4.381)$$

où $f(\mathbf{p})$ est la fonction de distribution.

Dans le régime ultra-relativiste, on considère des particules presque sans masse, donc

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2} \simeq \|\mathbf{p}\|. \quad (4.382)$$

Substituons cette approximation dans l'éq 4.381 :

$$p = \frac{1}{3V} \int \frac{d^3\|\mathbf{p}\|}{(2\pi)^3} \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{\|\mathbf{p}\|} f(\mathbf{p}) = \frac{1}{3V} \int \frac{d^3\|\mathbf{p}\|}{(2\pi)^3} \|\mathbf{p}\| f(\mathbf{p}). \quad (4.383)$$

Comparons maintenant à la définition (4.380) :

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \int \frac{d^3\|\mathbf{p}\|}{(2\pi)^3} \|\mathbf{p}\| f(\mathbf{p}). \quad (4.384)$$

On voit donc clairement que

$$p = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.385)$$

Conséquence sur la trace : En remplaçant dans la trace calculée,

$$T^\mu_\mu = -\varepsilon + 3p = -\varepsilon + 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = 0. \quad (4.386)$$

Cette annulation de la trace caractérise un fluide ultra-relativiste conforme.

2. La conservation locale du tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.387)$$

quatre équations scalaires exprimant la conservation de l'énergie (composante $\nu = 0$) et de la quantité de mouvement ($\nu = 1, 2, 3$).

- (a) Les inconnues dynamiques sont les variables de champ décrivant l'état du fluide : la quadrivitesse u^μ (sujet à la contrainte $u_\mu u^\mu = -1$) et les variables thermodynamiques scalaires comme la densité d'énergie ε , la pression p (ou la température T).
- (b) Le système n'est pas fermé car il y a plus d'inconnues que d'équations. Pour résoudre, il faut une relation supplémentaire (équation d'état) qui relie ε , p , éventuellement T . Cette relation découle de la physique microscopique ou de la thermodynamique du fluide.
3. À l'échelle locale, on peut appliquer la thermodynamique classique à un élément de fluide comobile, de volume infinitésimal dV . On introduit les densités extensives correspondantes :

$$\varepsilon = \frac{U}{V}, \quad s = \frac{S}{V}, \quad n = \frac{N}{V}. \quad (4.388)$$

Dans ce cadre, la première loi de la thermodynamique s'écrit (en unités naturelles, $c = 1$) :

$$d\varepsilon = T ds + \mu dn. \quad (4.389)$$

On suppose dans un premier temps que $\mu = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de conservation du nombre de particules (ce qui est souvent une bonne approximation dans un plasma relativiste où des particules sont créées et annihilées).

On rappelle alors que l'énergie interne $U(S, V)$ est une fonction homogène de degré 1 en S et V (variables extensives). D'après le théorème d'Euler pour les fonctions homogènes :

$$U = TS - pV. \quad (4.390)$$

On divise cette relation par le volume V pour obtenir une relation entre densités :

$$\frac{U}{V} = T \frac{S}{V} - p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = Ts - p. \quad (4.391)$$

On obtient alors la **relation d'Euler** pour un fluide relativiste sans potentiel chimique :

$$\varepsilon + p = Ts. \quad (4.392)$$

4. La vitesse du son est définie par

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_s. \quad (4.393)$$

Pour un fluide ultra-relativiste où

$$p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad (4.394)$$

on a immédiatement

$$c_s^2 = \frac{1}{3}. \quad (4.395)$$

Comparée à la vitesse de la lumière $c = 1$, on a

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.577, \quad (4.396)$$

ce qui est cohérent car la vitesse du son doit être inférieure à celle de la lumière.

4.9.3 Équation du mouvement relativiste

1. La conservation du nombre total de particules N dans un fluide relativiste s'écrit globalement par l'intégrale

$$N = \int_{\Sigma} j^{\mu} d\Sigma_{\mu}, \quad (4.397)$$

où $j^{\mu} = nu^{\mu}$ est le courant de particules, avec n la densité de particules dans le référentiel comobile et u^{μ} la quadrivitesse du fluide. Σ est une hypersurface espace-like orientée vers le futur.

La conservation locale se traduit par la condition que l'intégrale soit indépendante du choix de Σ , ce qui implique la conservation locale :

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad (4.398)$$

Cette équation s'écrit explicitement

$$\partial_\mu (nu^\mu) = 0, \quad (4.399)$$

qui est la forme covariante de la continuité relativiste.

Démonstration rapide :

Soit Σ_τ une hypersurface d'instant τ . Pour que

$$\frac{dN}{d\tau} = 0, \quad (4.400)$$

il faut que la divergence locale du courant soit nulle.

2. On part de la conservation du tenseur énergie-impulsion,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.401)$$

avec

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (4.402)$$

On veut obtenir l'équation du mouvement relativiste (équation d'Euler relativiste).

Développons :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu [(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu] + \partial_\mu (pg^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.403)$$

Comme $g^{\mu\nu}$ est constant en espace plat,

$$\partial_\mu (pg^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} \partial_\mu p = \partial^\nu p, \quad (4.404)$$

car $g^{\mu\nu}$ élève l'indice.

Donc,

$$\partial_\mu [(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu] + \partial^\nu p = 0. \quad (4.405)$$

Développons le premier terme par la règle du produit :

$$u^\nu \partial_\mu [(\varepsilon + p)u^\mu] + (\varepsilon + p)u^\mu \partial_\mu u^\nu + \partial^\nu p = 0. \quad (4.406)$$

Projeter cette équation sur u_ν permet d'obtenir une relation importante.

On contracte avec u_ν :

$$u_\nu \partial_\mu [(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu] + u_\nu \partial^\nu p = 0. \quad (4.407)$$

Le premier terme devient

$$u_\nu \partial_\mu [(\varepsilon + p)u^\mu u^\nu] = \partial_\mu [(\varepsilon + p)u^\mu (u_\nu u^\nu)] - (\varepsilon + p)u^\mu u_\nu \partial_\mu u^\nu. \quad (4.408)$$

Or,

$$u_\nu u^\nu = -1, \quad (4.409)$$

Ainsi,

$$(\varepsilon + p)u^\mu \partial_\mu u^\nu + (u^\nu u^\mu + g^{\mu\nu}) \partial_\mu p = 0. \quad (4.410)$$

Interprétation : Le premier terme représente l'inertie relativiste du fluide, la deuxième le gradient de pression projeté perpendiculairement à la quadrivitesse.

4.9.4 Application aux collisions de noyaux lourds

1. Les coordonnées de Bjorken sont définies par

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}. \quad (4.411)$$

Calculons l'élément d'intervalle invariant $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ en fonction de τ et η .

On a

$$t = \tau \cosh \eta, \quad z = \tau \sinh \eta. \quad (4.412)$$

Dérivons ces relations :

$$dt = \cosh \eta d\tau + \tau \sinh \eta d\eta, \quad (4.413)$$

$$dz = \sinh \eta d\tau + \tau \cosh \eta d\eta. \quad (4.414)$$

Calculons $-dt^2 + dz^2$:

$$-dt^2 + dz^2 = -(\cosh \eta d\tau + \tau \sinh \eta d\eta)^2 + (\sinh \eta d\tau + \tau \cosh \eta d\eta)^2. \quad (4.415)$$

Développons :

$$= -\cosh^2 \eta d\tau^2 - 2\tau \cosh \eta \sinh \eta d\tau d\eta - \tau^2 \sinh^2 \eta d\eta^2 \quad (4.416)$$

$$+ d\eta^2 + \sinh^2 \eta d\tau^2 + 2\tau \sinh \eta \cosh \eta d\tau d\eta + \tau^2 \cosh^2 \eta d\eta^2. \quad (4.417)$$

Les termes en $d\tau d\eta$ s'annulent, et on obtient

$$-dt^2 + dz^2 = (-\cosh^2 \eta + \sinh^2 \eta) d\tau^2 + (-\tau^2 \sinh^2 \eta + \tau^2 \cosh^2 \eta) d\eta^2. \quad (4.418)$$

En utilisant $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$,

$$-dt^2 + dz^2 = -d\tau^2 + \tau^2 d\eta^2. \quad (4.419)$$

Ainsi, l'intervalle devient

$$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2 d\eta^2 + dx^2 + dy^2. \quad (4.420)$$

On en déduit la métrique $g_{\mu\nu}$ dans la base (τ, x, y, η) :

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \tau^2). \quad (4.421)$$

2. Dans un fluide boost-invariant le long de z , on travaille dans ce cadre curviligne où la métrique dépend de τ . La conservation du tenseur énergie-impulsion devient la conservation covariante

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = 0. \quad (4.422)$$

Les symboles de Christoffel sont définis par

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (4.423)$$

Dans notre métrique, les seuls symboles non nuls sont

$$\Gamma_{\eta\eta}^\tau = \tau, \quad \Gamma_{\tau\eta}^\eta = \Gamma_{\eta\tau}^\eta = \frac{1}{\tau}. \quad (4.424)$$

Considérons la composante $\nu = \tau$ de la conservation, car l'évolution de l'énergie est liée à cette composante.

Écrivons

$$\nabla_\mu T^{\mu\tau} = 0. \quad (4.425)$$

En supposant un fluide parfait avec isotropie transverse et invariance de boost, et que les quantités dépendent uniquement de τ , l'équation se réduit à

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\varepsilon + p}{\tau} = 0. \quad (4.426)$$

Démonstration :

Cette expression vient du développement de $\nabla_\mu T^{\mu\tau}$, en prenant en compte la dépendance des composantes de $T^{\mu\nu}$ et des symboles de Christoffel non nuls. Le terme en $\frac{\varepsilon+p}{\tau}$ correspond à la divergence géométrique liée à l'expansion longitudinale dans τ .

3. Pour $p = \varepsilon/3$, l'équation

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{\tau} = 0 \quad (4.427)$$

est une équation différentielle ordinaire.

Elle se résout par séparation des variables :

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{4}{3} \frac{d\tau}{\tau} \implies \ln \varepsilon = -\frac{4}{3} \ln \tau + \text{const.} \quad (4.428)$$

D'où

$$\varepsilon(\tau) \propto \tau^{-\frac{4}{3}}. \quad (4.429)$$

En utilisant la relation d'état $\varepsilon \propto T^4$, on obtient

$$T(\tau) \propto \tau^{-\frac{1}{3}}. \quad (4.430)$$

4. L'équation d'état modélisée lors de la transition plasma quarks-gluons (QGP) \rightarrow hadrons est

$$p = \frac{\varepsilon - 4B}{3}, \quad (4.431)$$

où B est la constante de bag.

À la transition, la pression s'annule, donc $p = 0$, ce qui implique

$$0 = \frac{\varepsilon - 4B}{3} \implies \varepsilon = 4B. \quad (4.432)$$

En supposant la relation $\varepsilon = aT^4$, la température critique T_c s'obtient par

$$aT_c^4 = 4B \implies T_c = \left(\frac{4B}{a} \right)^{1/4}. \quad (4.433)$$

5. Un noyau modélisé par une sphère de rayon R a une section efficace géométrique approximée par

$$\sigma \simeq \pi(2R)^2 = 4\pi R^2. \quad (4.434)$$

Cette section efficace représente la surface transverse effective pour que deux noyaux entrent en collision.

Une collision centrale correspond à un impact parameter $b \simeq 0$ (les noyaux se superposent totalement), tandis qu'une collision périphérique correspond à $b \sim 2R$ (seulement une partie des noyaux se chevauchent).

6. L'énergie volumique initiale ε_0 dépend du degré de superposition des noyaux ; elle est maximale dans une collision centrale car la densité d'énergie déposée est plus grande.

En supposant

$$\varepsilon = aT^4, \quad (4.435)$$

où a est la constante de Stefan-Boltzmann (propre au plasma de quarks-gluons),

$$T_0 = \left(\frac{\varepsilon_0}{a} \right)^{1/4}. \quad (4.436)$$

Pour $\varepsilon_0 \sim 10 \text{ GeV/fm}^3$, et en prenant a adapté au QGP, on peut estimer la température initiale atteinte dans les collisions RHIC.

4.10 Atome d'hydrogène et équation radiale

4.10.1 Séparation des variables et équation radiale

1. Séparation des variables

Le Hamiltonien de l'atome d'hydrogène, dans la base sphérique, s'écrit :

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{e^2}{r}. \quad (4.437)$$

En coordonnées sphériques, le Laplacien est

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2}, \quad (4.438)$$

où \mathbf{L}^2 est le carré du moment angulaire orbital.

On cherche une solution de la forme

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (4.439)$$

où $Y_{\ell m}$ sont les harmoniques sphériques propres simultanées de \mathbf{L}^2 et \mathbf{L}_z , vérifiant

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}, \quad \mathbf{L}_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}. \quad (4.440)$$

En injectant dans l'équation de Schrödinger stationnaire $\mathbf{H}\psi = E\psi$, on obtient l'équation radiale suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right] - \frac{e^2}{r} R = ER. \quad (4.441)$$

En développant la dérivée radiale,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr}, \quad (4.442)$$

ce qui donne l'équation annoncée :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R \right) - \frac{e^2}{r} R = ER. \quad (4.443)$$

2. Changement de fonction : $u(r) = rR(r)$

En posant $u(r) = rR(r)$, on calcule :

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}, \quad (4.444)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r^3}. \quad (4.445)$$

En remplaçant dans l'équation radiale, les termes en u/r^3 s'annulent et on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{r} \right] u = Eu. \quad (4.446)$$

3. Changement de variable adimensionnelle

On définit

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m_e|E|}{\hbar^2}}, \quad \rho = \kappa r. \quad (4.447)$$

L'équation devient

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\kappa^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left[\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2m_er^2} - \frac{e^2}{r} \right] u = Eu. \quad (4.448)$$

Comme $E = -|E|$, on divise toute l'équation par $-\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m_e}$:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{2m_e e^2}{\hbar^2\kappa} \frac{1}{\rho} + 1 \right] u. \quad (4.449)$$

On pose alors

$$\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2\kappa}. \quad (4.450)$$

Ce qui donne l'équation annoncée :

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} - \frac{\rho_0}{\rho} + 1 \right] u. \quad (4.451)$$

4. Ansatz sur la forme de $u(\rho)$

On pose

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho/2} v(\rho). \quad (4.452)$$

En calculant la dérivée seconde de $u(\rho)$ et en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient que $v(\rho)$ satisfait :

$$\rho \frac{d^2v}{d\rho^2} + (2\ell + 2 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + (\rho_0 - 2\ell - 2)v = 0. \quad (4.453)$$

Cette équation est celle de la fonction hypergéométrique confluyente.

5. Série en puissance et condition de terminaison

On développe

$$v(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k. \quad (4.454)$$

L'équation donne une relation de récurrence entre les coefficients c_k . En général, cette série diverge pour $\rho \rightarrow \infty$ sauf si la série est polynomiale, c'est-à-dire si elle s'arrête à un certain ordre fini \hat{k} . La condition de terminaison est

$$\rho_0 = 2n, \quad (4.455)$$

où

$$n = \hat{k} + \ell + 1 \in \mathbb{N}^*. \quad (4.456)$$

6. Expression des niveaux d'énergie liés

En réinjectant la définition de ρ_0 ,

$$\rho_0 = \frac{m_e e^2}{\hbar^2\kappa} = 2n \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{m_e e^2}{2\hbar^2 n}. \quad (4.457)$$

Or

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m_e} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (4.458)$$

Ce sont les niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène.

7. Degré de dégénérescence

Pour un niveau n , les valeurs possibles de ℓ sont

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.459)$$

et pour chaque ℓ , les valeurs de m vont de

$$m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell, \quad (4.460)$$

soit $(2\ell+1)$ valeurs.

Le degré de dégénérescence est donc

$$g_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = 2 \frac{(n-1)n}{2} + n = n^2. \quad (4.461)$$

Interprétation : Dans ce modèle non-relativiste sans prise en compte des interactions spin-orbite ni effets relativistes, l'énergie dépend uniquement du nombre quantique principal n . Ceci reflète la symétrie plus large du problème (invariance de rotation et symétrie de type Runge-Lenz), qui entraîne cette dégénérescence élevée.

4.10.2 État fondamental ($n = 1$) et propriétés radiales

1. Pour $n = 1$, $\ell = 0$, $n_r = 0$:

$$u(r) = A r e^{-r/a_0}, \quad \Rightarrow R(r) = \frac{u(r)}{r} = A e^{-r/a_0}. \quad (4.462)$$

La normalisation impose :

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = |A|^2 \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr = 1. \quad (4.463)$$

L'intégrale donne $2!(a_0/2)^3 = a_0^3/4 \Rightarrow |A|^2 = 4/a_0^3$. Donc :

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}. \quad (4.464)$$

L'harmonique sphérique est $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$, donc :

$$\psi_{1,0,0}(r, \theta, \phi) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}. \quad (4.465)$$

La normalisation est bien vérifiée :

$$\int |\psi|^2 d^3x = \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr \int |Y|^2 d\Omega = 1. \quad (4.466)$$

2. La densité de probabilité radiale est :

$$P(r) = 4\pi |R(r)|^2 r^2 = 4\pi \left(\frac{2}{a_0^{3/2}} \right)^2 e^{-2r/a_0} r^2 = \frac{16\pi}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}. \quad (4.467)$$

Elle s'annule en $r = 0$ et pour $r \rightarrow \infty$; le maximum se trouve pour $r = a_0$. *Interprétation* : la probabilité maximale de trouver l'électron est au rayon de Bohr.

3. On utilise :

$$\int_0^\infty r^n e^{-2r/a_0} dr = n! \left(\frac{a_0}{2} \right)^{n+1}. \quad (4.468)$$

Pour $\langle r \rangle$:

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r |R(r)|^2 r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0} dr = \frac{4}{a_0^3} \cdot 3! \left(\frac{a_0}{2} \right)^4 = \frac{3}{2} a_0. \quad (4.469)$$

Pour $\langle r^2 \rangle$:

$$\int_0^\infty r^4 e^{-2r/a_0} dr = 4! (a_0/2)^5 = 24 (a_0/2)^5 \Rightarrow \langle r^2 \rangle = 3a_0^2. \quad (4.470)$$

Donc :

$$(\Delta r)^2 = 3a_0^2 - (3a_0/2)^2 = 3a_0^2 - \frac{9}{4}a_0^2 = \frac{3}{4}a_0^2. \quad (4.471)$$

4. La transformée de Fourier de l'état fondamental donne une distribution isotrope centrée sur $p = 0$. L'espérance à $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$ (fonction paire), et :

$$\langle p^2 \rangle = \int \tilde{\psi}^*(\mathbf{p}) p^2 \tilde{\psi}(\mathbf{p}) d^3p. \quad (4.472)$$

Elle peut se relier à l'énergie cinétique moyenne :

$$\langle T \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = -E_1 = \frac{1}{2} E_0. \Rightarrow \langle p^2 \rangle = m_e E_0. \quad (4.473)$$

5. La dépendance en $1/n^2$ explique la structure des raies décrites par la formule de Rydberg :

$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{R}_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (4.474)$$

Le nombre quantique principal n classe les niveaux d'énergie. En MQ non relativiste, ℓ n'influe pas sur E_n , contrairement au cas relativiste (effet Lamb, spin-orbite).

4.11 Vers un formalisme relativiste \triangle

4.12 Potentiel de Pöschl–Teller $V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$

1. L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\psi(x) = E\psi(x). \quad (4.475)$$

2. On pose $u = \tanh(\alpha x)$, alors $\frac{du}{dx} = \alpha(1 - u^2)$.

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{d\phi}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \alpha(1 - u^2) \frac{d\phi}{du}, \\ \psi''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\alpha(1 - u^2) \frac{d\phi}{du} \right) \\ &= \alpha \left(-2u\alpha(1 - u^2) \frac{d\phi}{du} + (1 - u^2)\alpha(1 - u^2) \frac{d^2\phi}{du^2} \right) \\ &= \alpha^2 \left((1 - u^2)^2 \frac{d^2\phi}{du^2} - 2u(1 - u^2) \frac{d\phi}{du} \right). \end{aligned}$$

3. L'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \left((1 - u^2)^2 \phi'' - 2u(1 - u^2)\phi' \right) - V_0(1 - u^2)\phi = E\phi. \quad (4.476)$$

On divise par $(1 - u^2)$ puis on pose :

$$\lambda(\lambda + 1) = \frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha^2}, \quad \mu^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}, \quad (4.477)$$

ce qui donne :

$$(1 - u^2)\phi'' - 2u\phi' + \left[\lambda(\lambda + 1) - \frac{\mu^2}{1 - u^2} \right] \phi = 0. \quad (4.478)$$

4. On cherche une solution de la forme

$$\phi(u) = (1 - u^2)^{\mu/2} P(u), \quad (4.479)$$

où $P(u)$ est une fonction régulière sur $] -1, 1[$, que l'on notera simplement $Q(u) := (1 - u^2)^{\mu/2}$ pour alléger les notations.

On calcule alors les dérivées de ϕ en utilisant la règle du produit :

$$\phi'(u) = Q'(u)P(u) + Q(u)P'(u), \quad (4.480)$$

$$\phi''(u) = Q''(u)P(u) + 2Q'(u)P'(u) + Q(u)P''(u). \quad (4.481)$$

On remplace ces expressions dans l'équation différentielle de la question précédente :

$$(1 - u^2)\phi''(u) - 2u\phi'(u) + \left[\lambda(\lambda + 1) - \frac{\mu^2}{1 - u^2} \right] \phi(u) = 0. \quad (4.482)$$

On commence par calculer explicitement $Q'(u)$ et $Q''(u)$. On note que :

$$Q(u) = (1 - u^2)^{\mu/2}, \quad \Rightarrow \quad Q'(u) = -\mu u(1 - u^2)^{\frac{\mu}{2}-1}, \quad (4.483)$$

$$Q''(u) = -\mu(1-u^2)^{\frac{\mu}{2}-1} + \mu(\mu-2)u^2(1-u^2)^{\frac{\mu}{2}-2}. \quad (4.484)$$

On regroupe tous les termes dans l'équation complète :

$$(1-u^2)[Q''(u)P(u) + 2Q'(u)P'(u) + Q(u)P''(u)] - 2u[Q'(u)P(u) + Q(u)P'(u)] + \left[\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-u^2}\right]Q(u)P(u) = 0.$$

Tous les termes comportent un facteur commun $Q(u)$, que l'on peut factoriser, car $Q(u) \neq 0$ sur $] -1, 1[$. On obtient alors une équation différentielle pour $P(u)$ uniquement :

$$(1-u^2)P''(u) - 2(\mu+1)uP'(u) + [\lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1)]P(u) = 0. \quad (4.485)$$

C'est une équation différentielle du type associé aux polynômes de Jacobi (ou de Legendre généralisés), dont les solutions sont polynomiales pour certaines quantifications (cf. question suivante).

5. (a) On a :

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 |\phi(u)|^2 \frac{du}{1-u^2} = \int_{-1}^1 |P(u)|^2 (1-u^2)^{\mu-1} du < \infty. \quad (4.486)$$

C'est la condition de normalisation.

(b) On pose $P(u) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p u^p$. Substitution dans l'EDH donne :

$$a_{p+2} = \frac{p(p+2\mu+1) - C}{(p+2)(p+1)} a_p \sim \frac{p^2}{p^2} a_p \quad (4.487)$$

avec $C = \lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1)$. Donc $a_{p+2} \sim a_p$ lorsque $p \rightarrow \infty$.

(c) Ainsi,

$$\exists c \in \mathbb{R}^*, \quad P(u) \underset{u \rightarrow 1, p \rightarrow \infty}{\sim} \sum c u^p = \frac{c}{1-u} \quad (4.488)$$

D'où :

$$|\phi(u)|^2 \sim \frac{1}{(1-u)^{2-\mu}}. \quad (4.489)$$

Intégrable seulement si $\mu > 1$. Or pour les états liés $\mu > 0$, donc il y a divergence si $\mu \leq 1$. Conclusion : pour que l'intégrale converge, la série doit s'arrêter $\implies P$ est un polynôme.

6. Comme démontré précédemment, $P(u)$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, et la condition d'arrêt de la série impose

$$a_{n+2} = 0. \quad (4.490)$$

On utilise la relation de récurrence obtenue :

$$a_{p+2} = \frac{p(p+2\mu+1) - \lambda(\lambda+1) + \mu(\mu+1)}{(p+2)(p+1)} a_p, \quad (4.491)$$

et on l'applique à $p = n$, ce qui donne :

$$n(n+2\mu+1) = \lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1). \quad (4.492)$$

On développe les deux membres :

$$\text{Gauche : } n(n+2\mu+1) = n^2 + 2n\mu + n,$$

$$\text{Droite : } \lambda(\lambda+1) - \mu(\mu+1) = \lambda^2 + \lambda - \mu^2 - \mu.$$

On rassemble tous les termes dans un même membre :

$$\mu^2 + (2n+1)\mu + (n^2 + n - \lambda^2 - \lambda) = 0. \quad (4.493)$$

On obtient donc une équation du second degré en μ :

$$\mu^2 + (2n+1)\mu + A = 0, \quad \text{où } A = n(n+1) - \lambda(\lambda+1). \quad (4.494)$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (2n+1)^2 - 4A = (2n+1)^2 - 4(n(n+1) - \lambda(\lambda+1)). \quad (4.495)$$

Développons :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4n^2 + 4n + 1 - 4n(n+1) + 4\lambda(\lambda+1) \\ &= (4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n) + 4\lambda(\lambda+1) \\ &= 1 + 4\lambda(\lambda+1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Delta = (2\lambda+1)^2. \quad (4.496)$$

Donc le discriminant est un carré parfait, et l'équation admet deux racines réelles. Ces deux racines sont données par :

$$\mu_{\pm} = \frac{-(2n+1) \pm (2\lambda+1)}{2}. \quad (4.497)$$

On calcule ces deux valeurs :

$$\mu_1 = \frac{-(2n+1) + (2\lambda+1)}{2} = \lambda - n, \quad \mu_2 = \frac{-(2n+1) - (2\lambda+1)}{2} = -(\lambda + n + 1). \quad (4.498)$$

La seule solution physiquement admissible est la première, car on a $\mu > 0$ pour un état lié (car $E < 0$ implique $\mu^2 > 0$).

Ainsi, la condition d'arrêt de la série impose que :

$$\mu = \lambda - n, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}, \quad n < \lambda. \quad (4.499)$$

7. Grâce à l'éq (4.477), on en déduit que :

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} (\lambda - n)^2, \quad n = 0, 1, \dots, [\lambda]. \quad (4.500)$$

8. Le nombre d'états liés est $N = [\lambda] + 1$, nombre fini.

9. Physiquement, le potentiel $V(x) = -V_0/\cosh^2(\alpha x)$ décroît exponentiellement à l'infini ($V(x) \sim -4V_0 e^{-2\alpha|x|}$), trop rapidement pour admettre une infinité d'états liés. Il s'agit d'un puits de potentiel d'épaisseur finie : la particule ne peut être confinée qu'à un nombre fini de niveaux.

4.13 Instabilité électrodynamique de l'atome classique

4.13.1 Calcul de la force de freinage et de radiation \mathbf{F}_{rad} .

1.

$$dE_{\text{at}} = dW = \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt \implies \Delta E_{\text{at}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt \quad (4.501)$$

2. Attention, cette variation d'énergie est l'opposé de l'énergie rayonnée pendant le même intervalle :

$$dE_{\text{at}} = -P dt = -\frac{2e^2 a^2}{3c^3} dt = -\frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} dt \quad (4.502)$$

On obtient :

$$\Delta E_{\text{at}} = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2 dt \quad (4.503)$$

3. Par ailleurs, En intégrant par parties et en supposant une quasi-périodicité :

$$\Delta E_{\text{at}} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt \quad (4.504)$$

Par comparaison avec 4.501, une force candidate est la **force de freinage de radiation d'Abraham-Lorentz** :

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (4.505)$$

4. Considérons maintenant le **modèle de Thomson**, dans lequel l'électron est lié à l'origine par une force de rappel harmonique. L'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}} \quad (4.506)$$

On cherche une solution de la forme $r(t) = \text{Re} [r(0)e^{i\omega t}]$. Le développement perturbatif :

$$\omega = \omega_0 [1 + a(\omega_0 \tau) + \mathcal{O}((\omega_0 \tau)^2)] \quad (4.507)$$

donne $a = \frac{1}{2}$, soit finalement :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0)e^{-\omega_0^2 \tau t} \cos(\omega_0 t) \quad (4.508)$$

Le mouvement est donc un oscillateur amorti. Le temps caractéristique d'amortissement, ou durée de vie typique de l'atome dans ce modèle, est :

$$T_{\text{nat}} = \frac{1}{\omega_0^2 \tau} \sim 10^{-8} \text{ s} \quad (4.509)$$

L'atome classique est ainsi fondamentalement instable : l'électron spirale vers le noyau, très lentement à l'échelle atomique (pseudo-période), mais très rapidement à l'échelle macroscopique.

4.13.2 Problèmes conceptuels générés par la force de freinage F_{rad} .

1. L'équation à résoudre est :

$$\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t) \quad (4.510)$$

dont la solution générale est :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t_0) e^{(t-t_0)/\tau} - \frac{1}{m\tau} \int_{t_0}^t e^{(t-t')/\tau} \mathbf{F}(t') dt' \quad (4.511)$$

2. Un phénomène inacceptable, que l'on appelle parfois *préaccélération d'une particule chargée*, apparaît : si $F = 0$, l'expression précédente montre clairement que l'accélération diverge exponentiellement aux grands temps.
3. On peut formellement éliminer les solutions divergentes en prenant $t_0 = +\infty$. Il s'agit d'une condition aux limites qui élimine de fait la « condition initiale ».
4. En prenant $t_0 = +\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}(t) &= -\frac{1}{m\tau} \int_t^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} \mathbf{F}(t') dt' \\ &= -\frac{1}{m} \int_t^{+\infty} K(t-t') \mathbf{F}(t') dt' \end{aligned} \quad (4.512)$$

avec $K(t-t') = \frac{1}{\tau} e^{(t-t')/\tau}$.

Il s'agit ici de la *forme régularisée*, et ce d'autant plus que la limite de charge nulle reproduit bien l'Électrodynamique de la Force de Lorentz (EFD).

En effet, dans la limite $e \rightarrow 0$, on a $\tau \rightarrow 0$ et le noyau $K(t-t')$ tend vers une fonction de Dirac $\delta(t-t')$, ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t) \quad (4.513)$$

5. Il est déjà visible que l'accélération à l'instant t dépend des valeurs futures de la force. Cette équation viole donc le **principe de causalité**. Un changement de variable met cela en évidence. Posons $s = \frac{t'-t}{\tau}$, on obtient :

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{1}{m} \int_0^{+\infty} e^{-s} \mathbf{F}(t + \tau s) ds \quad (4.514)$$

6. Avec une force échelon :

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathbf{F}_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (4.515)$$

on obtient :

$$t < 0 : \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{1}{m\tau} \int_0^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} \cdot 0 dt' = -\frac{\mathbf{F}_0}{m} e^{t/\tau} \quad (4.516)$$

$$t > 0 : \quad \dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{F_0}{m\tau} \int_t^{+\infty} e^{(t-t')/\tau} dt' = -\frac{\mathbf{F}_0}{m} \quad (4.517)$$

4.14 Géodésiques dans un milieu optique \triangle

4.15 Condensat de Bose-Einstein

1. (a) Pour un système bosonique en équilibre thermique dans l'ensemble grand-canonique, le nombre moyen de particules dans un état d'énergie ε est donné par la moyenne statistique associée à la distribution de Bose-Einstein.

La fonction de partition pour cet état est :

$$Z_\varepsilon = \sum_{n_\varepsilon=0}^{\infty} e^{-\beta n_\varepsilon(\varepsilon-\mu)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}, \quad (4.518)$$

avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et μ le potentiel chimique (doit vérifier $\mu < \varepsilon$ pour convergence).

Le nombre moyen de particules dans cet état s'écrit :

$$\langle n_\varepsilon \rangle = \frac{1}{Z_\varepsilon} \sum_{n_\varepsilon=0}^{\infty} n_\varepsilon e^{-\beta n_\varepsilon(\varepsilon-\mu)}. \quad (4.519)$$

En dérivant Z_ε par rapport à $\beta(\varepsilon - \mu)$, on trouve :

$$\langle n_\varepsilon \rangle = -\frac{1}{Z_\varepsilon} \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial [\beta(\varepsilon - \mu)]} = -\frac{\partial \ln Z_\varepsilon}{\partial [\beta(\varepsilon - \mu)]} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}. \quad (4.520)$$

- (b) Considérons un gaz de particules libres dans un volume V avec conditions aux limites périodiques. L'énergie cinétique non relativiste s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (4.521)$$

où $k = |\mathbf{k}|$ est la norme du vecteur d'onde.

Le nombre d'états dans l'espace des vecteurs d'onde à l'intérieur d'une boule de rayon k est donné par :

$$\mathcal{N}(k) = \frac{V}{(2\pi)^3} \times \frac{4\pi k^3}{3}. \quad (4.522)$$

En dérivant par rapport à k , la densité d'états en k est :

$$\frac{d\mathcal{N}}{dk} = \frac{V}{2\pi^2} k^2. \quad (4.523)$$

Par changement de variable avec $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, on obtient :

$$k = \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}, \quad dk = \frac{m}{\hbar^2 k} d\varepsilon. \quad (4.524)$$

Donc la densité d'états par unité d'énergie est :

$$g(\varepsilon) = \frac{d\mathcal{N}}{d\varepsilon} = \frac{d\mathcal{N}}{dk} \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \times \frac{m}{\hbar^2 k} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{m}{\hbar^2} k = \frac{V}{2\pi^2} \frac{m}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}. \quad (4.525)$$

En simplifiant, on trouve :

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}. \quad (4.526)$$

(c) Le nombre moyen total de particules s'écrit donc en intégrant sur toutes les énergies :

$$\langle N \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon. \quad (4.527)$$

2. Dans un système fermé avec N particules et densité $\rho = N/V$, on a l'équivalence canonique / grand-canonique, donc on identifie $\langle N \rangle = N$. En posant le changement de variable $x = \beta\varepsilon$ et $\varphi(T) = e^{\mu(T)/(k_B T)}$, on obtient :

$$\rho = \frac{N}{V} = \left(\frac{2mk_B T}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x / \varphi(T) - 1} dx = \left(\frac{2mk_B T}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x / \varphi(T) - 1} dx, \quad (4.528)$$

ce qui correspond bien à (3.169).

3. Comme $\varphi(T) = e^{\mu(T)/(k_B T)}$ et $\mu(T) < 0$, on a $0 < \varphi(T) < 1$. La fonction

$$f(\varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x / \varphi - 1} dx \quad (4.529)$$

est croissante en φ sur $(0, 1)$. Lorsque T diminue, la température T diminue aussi le facteur devant l'intégrale. Pour que l'égalité reste vraie, $\varphi(T)$ doit augmenter, donc $\mu(T)$ augmente.

4. Le potentiel chimique μ doit être strictement inférieur à la plus basse énergie d'un état, ici prise comme zéro (état fondamental). Cela implique $\mu < 0$. À la limite, μ tend vers 0 par en dessous. En posant $\mu = 0$, on obtient la température critique T_{BE} :

$$\rho = \left(\frac{2mk_B T_{BE}}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx. \quad (4.530)$$

En utilisant l'approximation (4), on a donc :

$$T_{BE} = \frac{2\pi \hbar^2}{mk_B} \left(\frac{\rho}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad (4.531)$$

où $\zeta(3/2) \simeq 2.612$ est la fonction zêta de Riemann.

5. Pour $T \leq T_{BE}$, en posant $\mu = 0$, l'équation (3.169) ne peut plus être satisfaite, car l'intégrale ne peut pas augmenter plus. Le problème vient du fait que l'on n'a pas pris en compte la population de l'état fondamental, qui peut contenir une fraction macroscopique des particules (condensat).

6. En isolant la population du niveau fondamental N_0 , on a :

$$N = N_0 + \int_0^{+\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon = N_0 + \left(\frac{2m}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} V \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon, \quad (4.532)$$

avec $\mu = 0$. La fraction condensée est donc

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_{BE}} \right)^{3/2}. \quad (4.533)$$

La fraction condensée apparaît uniquement pour $T < T_{BE}$, et croît quand la température diminue.

7. Pour $T \leq T_{BE}$, le grand potentiel J s'écrit

$$\frac{J}{k_B T} = -\ln(1 + N_0) + \left(\frac{2m}{4\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} V \int_0^{+\infty} \varepsilon^{1/2} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (4.534)$$

Dans la limite thermodynamique, N_0 est très grand, donc $\ln(1 + N_0) \simeq \ln N_0$, ce terme devient négligeable à l'échelle intensive. On calcule alors la pression $P = -\frac{J}{V}$:

$$P = \frac{k_B T}{\lambda_{\text{th}}^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx, \quad (4.535)$$

où $\lambda_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ est la longueur thermique de de Broglie. D'après (??), on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \simeq 1.341 \times \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad (4.536)$$

montrant que la pression est indépendante de N_0 , dépend uniquement de T et décroît avec la température.

4.16 Chaîne de désintégration

Considérons une chaîne de désintégration formée de n isotopes (N_k) , avec $N_k(t)$ le nombre de noyaux de type k à l'instant t .

4.16.1 Modélisation physique

1. Le taux de variation de N_1 provient uniquement de sa désintégration, donc :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1. \quad (4.537)$$

Pour $k \geq 2$, la variation de N_k est la somme des gains par désintégration du noyau précédent et des pertes par désintégration propre à N_k :

$$\frac{dN_k}{dt} = -\lambda_k N_k + \lambda_{k-1} N_{k-1}. \quad (4.538)$$

2. Pour $n = 2$, le système est :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1, \quad (4.539)$$

avec conditions initiales $N_1(0) = N_0$, $N_2(0) = 0$.

On résout la première équation :

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}. \quad (4.540)$$

On remplace dans la seconde et on résout par variation des constantes :

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}. \quad (4.541)$$

La solution est :

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \quad (4.542)$$

(en supposant $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Qualitativement, $N_1(t)$ décroît exponentiellement, $N_2(t)$ augmente initialement puis décroît lorsque N_1 s'épuise.

3. Sommons les deux équations :

$$\frac{d}{dt}(N_1 + N_2) = -\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 = -\lambda_2 N_2, \quad (4.543)$$

cependant, comme N_2 ne se désintègre plus (si stable $\lambda_2 = 0$), la somme est constante. Ici, si $\lambda_2 = 0$ (dernier noyau stable), on a conservation :

$$N_1(t) + N_2(t) = N_0. \quad (4.544)$$

4. Pour maximiser $N_2(t)$, on dérive :

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 \implies -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = 0. \quad (4.545)$$

On trouve :

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right), \quad (4.546)$$

ce qui est positif si $\lambda_2 > \lambda_1$.

4.16.2 Étude mathématique

1. La matrice A est triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux $-\lambda_k$ distincts. La matrice A est diagonalisable sur \mathbb{R} avec valeurs propres $\{-\lambda_1, \dots, -\lambda_{n-1}, 0\}$ puisque $\lambda_n = 0$.

Démontrons le :

On considère la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & -\lambda_n \end{pmatrix}. \quad (4.547)$$

On veut déterminer les valeurs propres de A , c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Par construction, la matrice $A - XI_n$ est tridiagonale inférieure, et on note $D_n = \det(A - XI_n)$. On démontre par récurrence sur n que :

$$D_n = \prod_{k=1}^n (-\lambda_k - X). \quad (4.548)$$

Initialisation ($n = 1$). On a simplement :

$$D_1 = \det(-\lambda_1 - X) = -\lambda_1 - X, \quad (4.549)$$

ce qui correspond bien à la formule.

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang $n - 1$, c'est-à-dire que :

$$D_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (-\lambda_k - X). \quad (4.550)$$

On développe $D_n = \det(A_n - XI_n)$ par Laplace sur la dernière ligne, ou bien on utilise la récurrence sur une matrice tridiagonale inférieure de la forme :

$$D_n = (-\lambda_n - X)D_{n-1}, \quad (4.551)$$

car seul le terme diagonal et le terme juste au-dessus interviennent dans le développement, et le terme au-dessus est annulé par la forme triangulaire.

Ainsi, on obtient :

$$D_n = (-\lambda_n - X) \prod_{k=1}^{n-1} (-\lambda_k - X) = \prod_{k=1}^n (-\lambda_k - X), \quad (4.552)$$

ce qui clôt la récurrence.

Conclusion. Les valeurs propres de A sont donc données par :

$$\boxed{-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n = 0}. \quad (4.553)$$

2. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système d'EDO linéaire à coefficients constants admet une solution unique globale sur \mathbb{R}_+ pour toute condition initiale.
3. Soit $E(t) = \|\mathbf{N}(t)\|^2 = \sum_{k=1}^n N_k(t)^2$. Comme $\mathbf{N}(t)$ est dérivable (solution d'un système différentiel linéaire), $E(t)$ est aussi dérivable.

(a) On a :

$$\langle x | Ax \rangle = x^\top Ax = (x^\top Ax)^\top = \frac{1}{2} x^\top (A + A^\top) x = x^\top Sx = \langle x | Sx \rangle, \quad (4.554)$$

où $S = \frac{A+A^\top}{2}$ est la partie symétrique de A . Cela est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) La matrice S est tridiagonale symétrique, avec :

$$S_{kk} = -\lambda_k, \quad S_{k,k+1} = S_{k+1,k} = \frac{\lambda_k}{2}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, n-1. \quad (4.555)$$

Alors, pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a :

$$\begin{aligned} x^\top Sx &= \sum_{k=1}^n S_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} S_{k,k+1} x_k x_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (-\lambda_k) x_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k x_{k+1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x_k - x_{k+1})^2 - \frac{\lambda_1}{2} x_1^2. \end{aligned}$$

Comme les $\lambda_k \geq 0$, ce produit scalaire est toujours ≤ 0 .

(c) En appliquant ceci à $\mathbf{N}(t)$, on obtient :

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \|\mathbf{N}(t)\|^2 = 2 \langle \mathbf{N}(t) | \dot{\mathbf{N}}(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{N}(t) | A\mathbf{N}(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{N}(t) | S\mathbf{N}(t) \rangle \leq 0. \quad (4.556)$$

Donc $E(t)$ est décroissante, ce qui signifie que le système est stable.

4. Le système dynamique est donné par :

$$\dot{\mathbf{N}}(t) = A\mathbf{N}(t), \quad (4.557)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de désintégration en chaîne avec $\lambda_k \geq \alpha > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et $\lambda_n = 0$.

La matrice A est donc diagonalisable ou triangulisable réelle, et possède une valeur propre nulle (associée à l'état stationnaire \mathbf{N}_∞) et toutes les autres ont une partie réelle strictement négative inférieure à $-\alpha$.

On considère une norme matricielle (équivalente à la norme usuelle), adaptée au spectre de A , telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|e^{At}x\| \leq Ce^{\mu t}\|x\|, \quad \text{avec } \mu = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(A), \lambda \neq 0\}. \quad (4.558)$$

Par hypothèse, $\mu \leq -\alpha < 0$.

On projette la solution $\mathbf{N}(t)$ sur le sous-espace orthogonal au noyau de A , c'est-à-dire :

$$\mathbf{N}(t) - \mathbf{N}_\infty = e^{At}(\mathbf{N}_0 - \mathbf{N}_\infty), \quad (4.559)$$

car $\mathbf{N}_\infty \in \ker A$, donc $A\mathbf{N}_\infty = 0$.

On en déduit :

$$\|\mathbf{N}(t) - \mathbf{N}_\infty\| \leq Ce^{-\alpha t} \|\mathbf{N}_0 - \mathbf{N}_\infty\| \leq Ke^{-\alpha t}. \quad (4.560)$$

Ce qui conclut la preuve.

5. En sommant toutes les équations, on trouve :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n N_k(t) = 0, \quad (4.561)$$

donc la quantité totale de matière est conservée :

$$\sum_{k=1}^n N_k(t) = \sum_{k=1}^n N_k(0). \quad (4.562)$$

4.17 Principe de moindre action et équations d'Einstein

4.17.1 De la géométrie classique à la géométrie lorentzienne

1. Géométrie d'une surface dans \mathbb{R}^3

(a) Paramétrisation et première forme fondamentale

Soit une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ paramétrisée par

$$\mathbf{X}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)),$$

où (u, v) sont des coordonnées locales sur la surface.

L'élément de longueur infinitésimal ds le long de la surface est donné par

$$ds^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\partial_u \mathbf{X} du + \partial_v \mathbf{X} dv) \cdot (\partial_u \mathbf{X} du + \partial_v \mathbf{X} dv),$$

où $\partial_u \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}$ et $\partial_v \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$.

En développant le produit scalaire :

$$ds^2 = (\partial_u \mathbf{X} \cdot \partial_u \mathbf{X}) du^2 + 2(\partial_u \mathbf{X} \cdot \partial_v \mathbf{X}) du dv + (\partial_v \mathbf{X} \cdot \partial_v \mathbf{X}) dv^2. \quad (4.563)$$

On définit les coefficients de la **première forme fondamentale** :

$$E = \partial_u \mathbf{X} \cdot \partial_u \mathbf{X}, \quad F = \partial_u \mathbf{X} \cdot \partial_v \mathbf{X}, \quad G = \partial_v \mathbf{X} \cdot \partial_v \mathbf{X}.$$

Ainsi, l'élément de longueur s'écrit de façon compacte :

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

La matrice associée est

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

qui définit un produit scalaire sur l'espace tangent à la surface en chaque point. Remarque : g est symétrique et, pour une surface régulière, on a $E, G > 0$ et $EG - F^2 > 0$, ce qui garantit que la métrique est définie positive.

(b) Exemple : plan \mathbb{R}^2

Prenons $\mathbf{X}(x, y) = (x, y, 0)$. Alors

$$\partial_x \mathbf{X} = (1, 0, 0), \quad \partial_y \mathbf{X} = (0, 1, 0),$$

donc

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

(c) Seconde forme fondamentale et courbure

La **seconde forme fondamentale** Π mesure la courbure de la surface dans l'espace ambiant. Pour une surface $\mathbf{X}(u, v)$ avec vecteur normal unitaire \mathbf{n} , elle s'écrit

$$\Pi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

où

$$L = \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \mathbf{X}_{vv} \cdot \mathbf{n}.$$

La courbure de Gauss est le produit des courbures principales k_1, k_2 , qui sont les valeurs propres de $g^{-1}\Pi$:

$$\kappa = k_1 k_2 = \frac{\det \Pi}{\det g}.$$

Ainsi, κ est une quantité **intrinsèque** à la surface : elle ne dépend pas de la façon dont la surface est plongée dans \mathbb{R}^3 .

2. Définition intrinsèque d'une métrique sur une variété

- (a) Sur une variété \mathcal{M} , on peut définir localement la distance entre points via un tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu,$$

où $\mu, \nu = 1, \dots, n$ et $n = \dim \mathcal{M}$.

- (b) Exemple : pour une surface dans \mathbb{R}^3 , $g_{\mu\nu}$ correspond exactement à la matrice $g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ définie ci-dessus.

3. Métrique hyperbolique sur le demi-plan supérieur

- (a) On définit la métrique hyperbolique :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad y > 0.$$

La matrice métrique et son déterminant :

$$g = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det g = \frac{1}{y^4}.$$

- (b) Les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yx}^x = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{xx}^y = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{yy}^y = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{yy}^x = \Gamma_{xy}^y = \Gamma_{yx}^y = 0.$$

- (c) Courbure de Gauss : $\kappa = -1$ (constante et négative).

- (d) **Géodésiques**

Soit une courbe paramétrée par $x, y(x)$. L'action (longueur) est :

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y}, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Comme \mathcal{L} ne dépend pas explicitement de x , on peut utiliser l'identité de Beltrami :

$$\mathcal{L} - y' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \lambda \quad \Rightarrow \quad y \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

On résout pour y' :

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 y^2} - 1}.$$

En intégrant, on obtient l'équation d'un cercle :

$$(x - x_0)^2 + y^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Cas particulier $\lambda = 0$: géodésique verticale $x = x_0$.

4.17.2 Variétés pseudo-riemanniennes et géodésiques

1. Métriques lorentziennes

- (a) Une **variété pseudo-riemannienne** est une variété munie d'un tenseur métrique symétrique $g_{\mu\nu}(x)$ qui n'est pas nécessairement définie positive. Une **métrique lorentzienne** est une métrique pseudo-riemannienne de signature $(-, +, +, +)$ (1 direction temporelle et 3 directions spatiales), adaptée à la relativité restreinte et générale.

Ainsi, pour toute courbe $\gamma(\tau)$ sur la variété, on définit la "longueur" ou intervalle :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

qui peut être négatif, nul ou positif, selon le type de vecteur tangent :

- $ds^2 < 0$: vecteur **temporel** (propre au temps),
- $ds^2 = 0$: vecteur **luminal** (trajectoire de la lumière),
- $ds^2 > 0$: vecteur **spatial**.

- (b) Exemple : métrique de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad \Rightarrow \quad ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Les vecteurs temporels ont norme négative, les vecteurs spatiaux norme positive, et les vecteurs luminal (comme la trajectoire d'un photon) ont norme nulle.

2. Courbes et géodésiques

Soit une courbe $\gamma(t) = (x^0(t), x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ sur la variété, paramétrée par un paramètre t (souvent le temps propre τ pour une particule massive).

- (a) La **longueur** (ou action) de la courbe est

$$L[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|} dt, \quad (4.564)$$

où $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$.

- (b) Les courbes qui **extrémisent** cette action (minimisent ou maximisent selon le type) satisfont les **équations d'Euler-Lagrange** :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\lambda} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} = 0, \quad (4.565)$$

avec $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ (forme quadratique souvent utilisée pour simplifier les calculs, elle donne les mêmes géodésiques).

- (c) Développement détaillé :

Pour $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, on calcule :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\lambda} = g_{\lambda\nu} \dot{x}^\nu, \quad (4.566)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (4.567)$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent alors

$$\frac{d}{dt} (g_{\lambda\nu} \dot{x}^\nu) - \frac{1}{2} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (4.568)$$

En développant la dérivée :

$$g_{\lambda\nu}\ddot{x}^\nu + (\partial_\sigma g_{\lambda\nu})\dot{x}^\sigma\dot{x}^\nu - \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0.$$

Multiplions par $g^{\lambda\kappa}$ pour isoler \ddot{x}^κ :

$$\ddot{x}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0,$$

où les **symboles de Christoffel** sont

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (4.569)$$

Ainsi, les géodésiques sont les courbes dont l'accélération covariante est nulle.

(d) Équations des géodésiques dans un repère local inertiel

On considère un point p de l'espace-temps et un repère local (ξ^α) centré en p (coordonnées locales inertielle ou "normal coordinates"). Par définition, dans ce repère :

$$g_{\alpha\beta}(\xi = 0) = \eta_{\alpha\beta}, \quad \partial_\gamma g_{\alpha\beta}(\xi = 0) = 0, \quad (4.570)$$

où $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ est la métrique de Minkowski.

Les symboles de Christoffel sont définis par :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}). \quad (4.571)$$

Dans ce repère local :

$$\partial_\beta g_{\gamma\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0. \quad (4.572)$$

L'équation générale des géodésiques est :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (4.573)$$

En coordonnées locales (ξ^α) , les Christoffel s'annulent :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + 0 \cdot \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} = \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (4.574)$$

Cette équation décrit un mouvement rectiligne uniforme, exactement comme en relativité restreinte.

Changement de coordonnées vers la métrique générale x^μ :

Si l'on fait un changement de coordonnées $\xi^\alpha \mapsto x^\mu(\xi)$, alors la dérivée seconde se transforme comme :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau}. \quad (4.575)$$

Comme $d^2 \xi^\alpha / d\tau^2 = 0$, il reste :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho}}_{\Gamma_{\nu\rho}^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (4.576)$$

On reconnaît la définition générale des symboles de Christoffel sous changement de coordonnées.

Conclusion : Ainsi, les géodésiques dans la métrique générale $g_{\mu\nu}(x)$ sont données par :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \quad (4.577)$$

ce qui correspond à la trajectoire d'une particule libre dans un espace-temps courbe.

4.17.3 Courbure et action d'Einstein-Hilbert

1. Définition des objets de courbure

Soit une variété différentiable munie d'une métrique $g_{\mu\nu}$. On définit d'abord la **connexion de Levi-Civita**, qui est la seule connexion symétrique et compatible avec la métrique :

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda.$$

À partir de la connexion, on définit le **tenseur de Riemann** $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ qui mesure la non-commutativité des dérivées covariantes :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (4.578)$$

Le **tenseur de Ricci** est obtenu en contractant le tenseur de Riemann :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda. \quad (4.579)$$

Le **scalaire de courbure** R est la trace du tenseur de Ricci :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4.580)$$

2. Cas d'une métrique localement plate

Si la métrique est localement plate (c'est-à-dire qu'il existe un repère où $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et $\partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0$), alors tous les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$. Par conséquent, toutes les dérivées premières et secondes sont nulles, et donc :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = 0, \quad R_{\mu\nu} = 0, \quad R = 0.$$

3. Action scalaire covariante : action d'Einstein-Hilbert

On cherche une action $S[g]$ construite à partir de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2, qui soit un scalaire sous transformations de coordonnées. Le seul candidat (à une constante multiplicative près) est :

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.581)$$

où $g = \det(g_{\mu\nu})$ et G est la constante de gravitation.

Cette action est dite **d'Einstein-Hilbert**.

4. Variation de l'action et équations d'Einstein

Pour obtenir les équations du mouvement, on varie $S[g]$ par rapport à la métrique $g^{\mu\nu}$:

$$\delta S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int (\delta R \sqrt{-g} + R \delta \sqrt{-g}) d^4x. \quad (4.582)$$

On utilise les formules suivantes :

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (4.583)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda. \quad (4.584)$$

En intégrant par parties les dérivées covariantes et en annulant les termes de bord, on obtient les **équations d'Einstein en l'absence de matière** :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (4.585)$$

5. Ajout de matière

Si l'on ajoute un terme de matière $S_{\text{matière}}[g, \psi]$, l'action totale est :

$$S_{\text{total}} = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-g} d^4x + S_{\text{matière}}[g, \psi], \quad (4.586)$$

où ψ représente les champs de matière.

On définit le **tenseur énergie-impulsion** par :

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matière}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.587)$$

La variation de l'action totale conduit alors aux **équations complètes d'Einstein** :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.588)$$

6. Interprétation physique

- Le côté gauche, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, décrit la courbure de l'espace-temps.
- Le côté droit, $8\pi G T_{\mu\nu}$, décrit la distribution d'énergie et de matière.
- Ainsi, la gravité est interprétée comme la courbure de l'espace-temps causée par la matière et l'énergie.

4.17.4 Principe de moindre action et équations d'Einstein

1. Variation fonctionnelle pour un champ

Soit une action pour un champ scalaire ou tensoriel $\varphi(x)$:

$$S[\varphi] = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^4x. \quad (4.589)$$

On considère une variation infinitésimale $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon\eta$, avec $\eta(x)$ de support compact. La variation de l'action s'écrit :

$$\delta S = \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\varphi + \varepsilon\eta] \right|_{\varepsilon=0} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \eta \right) d^4x. \quad (4.590)$$

On intègre par parties le deuxième terme et on annule les contributions sur le bord :

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \eta d^4x = - \int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \eta d^4x. \quad (4.591)$$

Donc :

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \eta \, d^4 x. \quad (4.592)$$

Comme η est arbitraire, on obtient les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0. \quad (4.593)$$

2. Application à l'action d'Einstein-Hilbert

L'action d'Einstein-Hilbert dépend de la métrique $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées secondes :

$$S_{\text{EH}}[g] = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} \, d^4 x. \quad (4.594)$$

On considère une variation de la métrique :

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (4.595)$$

La variation de l'action s'écrit :

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int (\delta R \sqrt{-g} + R \delta \sqrt{-g}) \, d^4 x. \quad (4.596)$$

On utilise les identités :

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.597)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda, \quad (4.598)$$

$$\delta R = g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.599)$$

En intégrant par parties et en annulant les termes de bord (variation nulle sur le bord), les termes contenant $\delta \Gamma$ disparaissent. On obtient alors :

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d^4 x. \quad (4.600)$$

Comme $\delta g^{\mu\nu}$ est arbitraire, le principe de moindre action implique les équations d'Einstein en absence de matière :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.601)$$

3. Ajout de matière et tenseur énergie-impulsion

Si l'on ajoute un terme de matière $S_{\text{matière}}[g, \psi]$, l'action totale est :

$$S_{\text{total}}[g, \psi] = S_{\text{EH}}[g] + S_{\text{matière}}[g, \psi]. \quad (4.602)$$

Le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est défini par :

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matière}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.603)$$

Alors, la variation totale de S_{total} donne les **équations d'Einstein complètes** :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (4.604)$$

4.18 Particule quantique proche d'un trou noir

4.18.1 Temps propre et potentiel gravitationnel relativiste

Dans le vide autour d'un trou noir sphérique non chargé, la métrique de Schwarzschild s'écrit

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (4.605)$$

1. Temps propre d'une particule immobile.

Une particule statique à la coordonnée r a $dr = d\theta = d\varphi = 0$. La métrique restreinte au monde-ligne donne

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2. \quad (4.606)$$

Par définition du temps propre $d\tau$ d'une particule ponctuelle on a $ds^2 = -c^2 d\tau^2$. On obtient donc

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 \implies d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt. \quad (4.607)$$

2. Énergie effective liée au battement d'horloge.

Si l'on suppose (postulat heuristique utilisé ici) que la fréquence propre ν d'une horloge locale traduit l'énergie totale de la particule via $E \propto h\nu$ (analogie avec $E = mc^2$ au repos), alors le facteur de ralentissement des horloges $d\tau/dt = \sqrt{1 - r_s/r}$ implique que l'énergie mesurée «à l'infini» pour une particule immobile à r vaut

$$E(r) = mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}. \quad (4.608)$$

Ici mc^2 est l'énergie de repos «locale» loin du puits gravitationnel et la racine exprime la réduction effective due au potentiel.

3. Développement pour $r_s/r \ll 1$.

On développe la racine pour $\varepsilon := \frac{r_s}{r} \ll 1$:

$$\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + o(\varepsilon^2). \quad (4.609)$$

En remplaçant $\varepsilon = r_s/r = 2GM/(c^2 r)$ on obtient

$$E(r) = mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_s}{r} - \frac{1}{8} \frac{r_s^2}{r^2} + o\left(\frac{r_s^2}{r^2}\right)\right). \quad (4.610)$$

En remplaçant $r_s = 2GM/c^2$:

$$\begin{aligned} E(r) &= mc^2 - mc^2 \frac{1}{2} \frac{2GM}{c^2 r} - mc^2 \frac{1}{8} \frac{4G^2 M^2}{c^4 r^2} + o\left(\frac{r_s^2}{r^2}\right) \\ &= mc^2 - \frac{GMm}{r} - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r^2} + o\left(\frac{r_s^2}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (4.611)$$

Le premier terme après mc^2 est le potentiel newtonien $-GMm/r$, le terme en $1/r^2$ est une correction relativiste d'ordre r_s^2/r^2 .

4. Potentiel effectif.

En soustrayant l'énergie de repos mc^2 (on appelle souvent «potentiel effectif» la partie dépendant de r) on définit

$$V_{\text{eff}}(r) = E(r) - mc^2 = -\frac{GMm}{r} - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r^2} + o\left(\frac{r_s^2}{r^2}\right). \quad (4.612)$$

Ceci donne l'expression demandée.

4.18.2 Expansion autour de l'horizon

On pose $r = r_s + x$ avec $x \ll r_s$ (donc on se place juste à l'extérieur de l'horizon).

1. Développement de $V_{\text{eff}}(r)$.

Écrivons explicitement

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r^2}. \quad (4.613)$$

On développe chaque terme en x autour de $r = r_s$:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_s + x} = \frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{x}{r_s}\right)^{-1} = \frac{1}{r_s} \left(1 - \frac{x}{r_s} + o(x)\right), \quad (4.614)$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_s^2} \left(1 + \frac{x}{r_s}\right)^{-2} = \frac{1}{r_s^2} \left(1 - 2\frac{x}{r_s} + o(x)\right). \quad (4.615)$$

Donc

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(r_s + x) &= -\frac{GMm}{r_s} \left(1 - \frac{x}{r_s}\right) - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r_s^2} \left(1 - 2\frac{x}{r_s}\right) + o(x) \\ &= \underbrace{\left(-\frac{GMm}{r_s} - \frac{1}{2} \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r_s^2}\right)}_{\text{const}} + \left(\frac{GMm}{r_s^2} + \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r_s^3}\right) x + o(x). \end{aligned} \quad (4.616)$$

On obtient donc bien une contribution linéaire en x dominée par la dérivée $V'_{\text{eff}}(r_s)$.

Remarquons que, en utilisant $r_s = 2GM/c^2$, la somme des coefficients linéaires se simplifie :

$$\frac{G^2 M^2 m}{c^2 r_s^3} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_s^2}, \quad (4.617)$$

d'où

$$V_{\text{eff}}(r_s + x) = \text{const} + \frac{3}{2} \frac{GMm}{r_s^2} x + o(x). \quad (4.618)$$

Ainsi la pente exacte (incluant la correction relativiste) vaut $\frac{3}{2} GMm/r_s^2$.

2. Identification d'un potentiel linéaire effectif.

On remarque évidemment que :

$$g_{\text{eff}} = \frac{3}{2} GMm/r_s^2 \quad (4.619)$$

On reconnaît alors un potentiel linéaire identique à celui d'un champ gravitationnel uniforme près d'une surface plane (forme $V = mgx$). Physiquement ceci signifie que, sur une petite longueur $x \ll r_s$, la variation du potentiel est approximativement constante : la surface locale est «approximativement plane» et le champ gravitationnel local est presque uniforme (principe d'équivalence).

4.18.3 Analyse quantique du potentiel linéaire

On se place maintenant dans le repère local près de l'horizon et on étudie la mécanique quantique d'une particule soumise au potentiel linéaire $V(x) = mg_{\text{eff}}x$ (à une constante près).

1. Équation de Schrödinger.

La fonction d'onde $\psi(x)$ satisfait, en représentation position unidimensionnelle,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + m g_{\text{eff}} x \psi(x) = E \psi(x). \quad (4.620)$$

On suppose ici $x \geq 0$ (extériorité immédiate de l'horizon) et un comportement physique imposant une condition aux bords en $x = 0$ (voir ci-dessous).

2. Passage à l'équation d'Airy (changement de variables).

Posons

$$x_0 := \frac{E}{m g_{\text{eff}}} \quad (\text{point classique où } m g x = E) \quad (4.621)$$

et la longueur classique caractéristique

$$x_c := \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 g_{\text{eff}}} \right)^{1/3}. \quad (4.622)$$

On introduit la variable sans dimension

$$\xi := \frac{x - x_0}{x_c}. \quad (4.623)$$

Calculons les dérivées :

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{x_c} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{x_c^2} \frac{d^2}{d\xi^2}. \quad (4.624)$$

En substituant dans l'équation de Schrödinger on obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_c^2} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + m g_{\text{eff}} (x_0 + x_c \xi) \psi = E \psi. \quad (4.625)$$

Or $m g_{\text{eff}} x_0 = E$, donc les termes constants s'annulent et il reste

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_c^2} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + m g_{\text{eff}} x_c \xi \psi = 0. \quad (4.626)$$

Choisissant x_c tel que

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_c^2} = m g_{\text{eff}} x_c \quad \Longleftrightarrow \quad x_c^3 = \frac{\hbar^2}{2m^2 g_{\text{eff}}}, \quad (4.627)$$

on obtient l'équation standard d'Airy :

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi \psi(\xi) = 0. \quad (4.628)$$

3. Solutions : fonctions d'Airy.

L'équation d'Airy $\psi''(\xi) - \xi \psi(\xi) = 0$ admet deux solutions indépendantes notées $\text{Ai}(\xi)$ et $\text{Bi}(\xi)$. En passant l'équation de Schrödinger en représentation impulsion (Transformée de Fourier), on obtient une intégrale de la forme,

$$\psi(\xi) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \exp \left[i \left(\frac{p^3}{3} + p \xi \right) \right] dp \quad (4.629)$$

Cette intégrale est paire, on obtient ainsi,

$$\psi(\xi) = \lambda \int_0^\infty \cos \left[i \left(\frac{p^3}{3} + p \xi \right) \right] dp \quad (4.630)$$

Cette fonction, $\text{Ai}(\xi)$, qui est la solution bornée quand $\xi \rightarrow +\infty$ tandis que $\text{Bi}(\xi)$ diverge exponentiellement pour $\xi \rightarrow +\infty$. Dans notre problème physique on retient la solution Ai (pour obtenir une fonction d'onde normalisable dans la région $x \rightarrow +\infty$). Ainsi

$$\psi(x) = \alpha \text{Ai}\left(\frac{x - x_0}{x_c}\right), \quad (4.631)$$

avec la constante de normalisation α fixée par

$$1 = \int_0^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = |\alpha|^2 x_c \int_{-x_0/x_c}^{+\infty} \text{Ai}^2(\xi) d\xi, \quad (4.632)$$

donc

$$\alpha = \left(x_c \int_{-x_0/x_c}^{+\infty} \text{Ai}^2(\xi) d\xi \right)^{-1/2}. \quad (4.633)$$

(En pratique on donne souvent α implicitement ; l'expression exacte demande l'évaluation numérique de l'intégrale.)

4. Condition en $x = 0$ et quantification.

Si on impose la condition physique $\psi(0) = 0$ (par exemple condition de Dirichlet au «bord» $x = 0$, interprétable comme une paroi imposant une annulation), alors

$$\psi(0) = \alpha \text{Ai}\left(\frac{-x_0}{x_c}\right) = 0 \implies \text{Ai}\left(-\frac{x_0}{x_c}\right) = 0. \quad (4.634)$$

Les zéros de $\text{Ai}(s)$ sont des nombres réels strictement négatifs notés a_n (avec $a_1 \simeq -2.33811$, $a_2 \simeq -4.08795$, ...). Donc on a

$$-\frac{x_0}{x_c} = a_n \implies x_0 = -a_n x_c. \quad (4.635)$$

Rappelant $x_0 = \frac{E}{mg_{\text{eff}}}$, on obtient la série discrète d'énergies liées

$$E_n = mg_{\text{eff}} x_0 = -a_n mg_{\text{eff}} x_c. \quad (4.636)$$

En regroupant les puissances on peut écrire la forme compacte

$$E_n = -a_n \left(\frac{\hbar^2 mg_{\text{eff}}^2}{2} \right)^{1/3}. \quad (4.637)$$

Ici $-a_n > 0$, donc $E_n > 0$. Cette suite (E_n) est strictement croissante avec n (les a_n deviennent plus négatifs) et les valeurs numériques s'obtiennent en utilisant les valeurs tabulées des zéros de Ai .

4.18.4 Étude asymptotique des zéros de Ai

La fonction Ai est la solution de

$$\psi''(x) = x\psi(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0, \quad (4.638)$$

normalisée par la condition usuelle (valeurs en 0 fixées si besoin). On note Ai cette solution.

Étude de la fonction Ai

1. Ai est \mathcal{C}^∞ et ses zéros sont isolés.

L'équation (4.638) est une EDO linéaire à coefficients analytiques sur \mathbb{R} . Par le théorème d'existence et d'unicité (ou bien par théorie des ODE analytiques), toute solution est \mathcal{C}^∞ (même analytique) sur \mathbb{R} . Si Ai avait un point d'accumulation de zéros x_0 , par unicité des solutions de l'EDO (toutes les dérivées seraient nulles en x_0), on obtiendrait la solution identiquement nulle, contradiction avec la condition de décroissance non triviale. Donc les zéros sont isolés.

2. Aucun zéro sur \mathbb{R}_+ et signe strictement positif pour $x > 0$.

Pour $x > 0$ on a $Ai''(x) = xAi(x)$. Supposons qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $Ai(x_0) = 0$. Alors $Ai''(x_0) = 0$. Si $Ai'(x_0) = 0$ alors, par unicité, $Ai \equiv 0$ sur \mathbb{R} , contradiction. Ainsi $Ai'(x_0) \neq 0$. Si $Ai'(x_0) > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ on a $Ai(x) > 0$; alors $Ai''(x) = xAi(x) > 0$ sur cet intervalle, donc Ai' est strictement croissante et reste $> Ai'(x_0) > 0$ pour $x > x_0$, ce qui impose $Ai(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, contradiction avec la condition de décroissance. De même si $Ai'(x_0) < 0$. Donc il n'existe pas de zéro $x_0 > 0$. De plus $Ai(0) > 0$ (valeur connue), d'où $Ai(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

3. Absence de positivité sur \mathbb{R}_- .

Supposons par l'absurde que $Ai(x) > 0$ pour tout $x < 0$.

- (a) Comme $x < 0$ et $Ai(x) > 0$, on a $Ai''(x) = xAi(x) < 0$ pour $x < 0$. Ainsi Ai' est strictement décroissante sur $(-\infty, 0]$ et la limite

$$\ell := \lim_{x \rightarrow -\infty} Ai'(x) \in [-\infty, +\infty) \quad (4.639)$$

existe.

(b) Cas $\ell \in \mathbb{R}^*$ (non nul fini).

Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors Ai' tend vers ℓ quand $x \rightarrow -\infty$. L'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^0 Ai''(t) dt = Ai'(0) - \lim_{x \rightarrow -\infty} Ai'(x) = Ai'(0) - \ell \quad (4.640)$$

converge. Par conséquent $Ai''(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$. Or $Ai''(t) = tAi(t)$; puisque $t \rightarrow -\infty$, pour que $tAi(t) \rightarrow 0$ il faut $Ai(t) = o(1/|t|)$. Intégrant $Ai'(t) \rightarrow \ell$ donne pour $t \rightarrow -\infty$

$$Ai(t) = Ai(0) - \int_t^0 Ai'(s) ds = -\ell t + o(|t|), \quad (4.641)$$

d'où $Ai(t) \sim -\ell t$. Mais $-\ell t$ pour $t \rightarrow -\infty$ tend vers $+\infty$ si $\ell < 0$ ou $-\infty$ si $\ell > 0$, en contradiction avec $Ai(t) = o(1/|t|)$. Ainsi ℓ ne peut être un réel fini non nul.

(c) Cas $\ell = 0$.

Supposons $\ell = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M < 0$ tel que pour $x < M$, $Ai'(x) > -\varepsilon$. En intégrant sur $[x, M]$ on obtient pour $x < M$

$$Ai(x) = Ai(M) + \int_M^x Ai'(t) dt > Ai(M) - \varepsilon|x - M|. \quad (4.642)$$

En faisant tendre $x \rightarrow -\infty$ on obtient $Ai(x) \rightarrow +\infty$, contradiction avec hypothèse de positivité bornée (la solution ne peut diverger ainsi car $Ai'' = xAi$ deviendrait très négative). Donc $\ell \neq 0$.

(d) Cas $\ell = -\infty$.

Supposons $Ai'(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$. Fixons $M < 0$. Par le théorème des valeurs

intermédiaires appliqué à Ai' (continue et décroissante), il existe $\chi < 0$ tel que pour tout $t < \chi$,

$$Ai'(t) < M. \quad (4.643)$$

En intégrant deux fois (et utilisant $Ai''(t) = tAi(t)$) on obtient une croissance négative de Ai incompatible avec la positivité supposée. De façon explicite, si $Ai'(t) \rightarrow -\infty$, alors $Ai(t)$ devient strictement décroissante et tend vers $-\infty$ lorsque $t \rightarrow -\infty$, contradiction. (On aboutit donc à l'absurde.)

Les trois sous-cas donnent contradiction : l'hypothèse $Ai > 0$ sur \mathbb{R}_+^* est impossible. Donc Ai s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}_+ .

Existence d'une infinité dénombrable de zéros

Pour $x \leq 0$ l'équation s'écrit

$$Ai''(x) + |x| Ai(x) = 0. \quad (4.644)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons $x_n := -n^2$ et $I_n := [x_n, x_n + \delta_n]$ avec $\delta_n := \frac{2\pi}{n}$.

1. Pour $x \in I_n$ on écrit $x = -n^2 + s$ avec $0 \leq s \leq 2\pi/n$. Alors

$$|x| = n^2 - s = n^2 + \varepsilon_n(x), \quad \varepsilon_n(x) = -s = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.645)$$

2. On pose alors, sur I_n ,

$$Ai''(x) + n^2 Ai(x) = f_n(x), \quad f_n(x) := -\varepsilon_n(x) Ai(x). \quad (4.646)$$

3. Variation des constantes sur I_n .

Considérons la base homogène

$$y_1(x) := \cos(n(x - x_n)), \quad y_2(x) := \sin(n(x - x_n)). \quad (4.647)$$

Toute solution $y \in \mathcal{C}^2(I_n)$ de l'équation non homogène s'écrit (variation des constantes)

$$y(x) = u_n(x)y_1(x) + v_n(x)y_2(x), \quad (4.648)$$

avec $u_n, v_n \in \mathcal{C}^1(I_n)$. L'application linéaire

$$\Phi_x : (u, v) \mapsto (uy_1(x) + vy_2(x), uy_1'(x) + vy_2'(x)) \quad (4.649)$$

est un isomorphisme de \mathbb{R}^2 (le wronskien $W(y_1, y_2) = n \neq 0$). Étendant point par point, on obtient l'isomorphisme de \mathcal{C}^1 en imposant la condition auxiliaire

$$u_n'(x)y_1(x) + v_n'(x)y_2(x) = 0, \quad (4.650)$$

qui fixe de façon unique la représentation (choix d'une section du noyau). En dérivant on obtient

$$y'(x) = u_n'(x)y_1(x) + u_n(x)y_1'(x) + v_n'(x)y_2(x) + v_n(x)y_2'(x) = u_n(x)y_1'(x) + v_n(x)y_2'(x). \quad (4.651)$$

En dérivant encore et en remplaçant dans $y'' + n^2 y = f_n$ on obtient le système pour les dérivées u_n', v_n' :

$$\begin{cases} u_n'(x)y_1(x) + v_n'(x)y_2(x) = 0, \\ u_n'(x)y_1'(x) + v_n'(x)y_2'(x) = f_n(x). \end{cases} \quad (4.652)$$

La résolution (matrice de Cramer) donne, puisque $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = n$,

$$u_n'(x) = -\frac{f_n(x) y_2(x)}{n}, \quad v_n'(x) = \frac{f_n(x) y_1(x)}{n}. \quad (4.653)$$

D'où, pour $x \in I_n$,

$$u_n(x) - u_n(x_n) = -\frac{1}{n} \int_{x_n}^x f_n(t) \sin(n(t - x_n)) dt, \quad (4.654)$$

$$v_n(x) - v_n(x_n) = \frac{1}{n} \int_{x_n}^x f_n(t) \cos(n(t - x_n)) dt. \quad (4.655)$$

4. Estimations sur I_n .

On a $|\varepsilon_n(x)| \leq C/n$ et A_i est bornée sur I_n (continuité sur un compact), donc

$$\|f_n\|_{L^\infty(I_n)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.656)$$

Ainsi

$$|u_n(x) - u_n(x_n)| \leq \frac{1}{n} |x - x_n| \|f_n\|_{L^\infty(I_n)} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (4.657)$$

et de même pour $v_n(x) - v_n(x_n)$. En particulier u_n, v_n sont presque constants sur I_n (les variations sont $\mathcal{O}(n^{-3})$), donc aussi $\mathcal{O}(n^{-2})$.

5. Approximation et conséquence.

Posons $a_n := u_n(x_n)$ et $b_n := v_n(x_n)$. Pour $x \in I_n$ on a

$$\begin{aligned} y(x) &= u_n(x) y_1(x) + v_n(x) y_2(x) \\ &= a_n \cos(n(x - x_n)) + b_n \sin(n(x - x_n)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (4.658)$$

où l'erreur provient des petites variations de u_n, v_n et de l'intégration des u_n', v_n' . En appliquant ceci à $y = A_i$ et en utilisant la compacité de I_n , on obtient la convergence uniforme $y \rightarrow A_i$ sur I_n par la méthode des fonctions approchantes (les termes d'erreur tendent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$).

Si A_i ne s'annule pas sur I_n , alors la principale combinaison trigonométrique

$$a_n \cos(n(x - x_n)) + b_n \sin(n(x - x_n)) \quad (4.659)$$

doit être de signe constant sur I_n (puisque elle est uniformément proche de la fonction de signe unique A_i sur I_n).

6. Toute combinaison non triviale

$$a_n \cos(n(x - x_n)) + b_n \sin(n(x - x_n)) \quad (4.660)$$

s'écrit sous la forme

$$r_n \cos(n(x - x_n) - \varphi_n), \quad r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}. \quad (4.661)$$

Une telle fonction change de signe sur tout intervalle dont la longueur est strictement supérieure à π/n . Or $|I_n| = 2\pi/n > \pi/n$. Donc si la combinaison trigonométrique devait rester de signe constant sur I_n , on aurait nécessairement $|I_n| < \pi/n$, contradiction. Par conséquent A_i doit s'annuler au moins une fois dans I_n pour tout n suffisamment grand.

7. Conclusion : il existe au moins un zéro de A_i dans chaque I_n (pour n assez grand), ce qui fournit une infinité dénombrable de zéros strictement négatifs qui tends vers $-\infty$. On ordonne ces zéros négatifs

$$c_1 < c_2 < \dots < 0 \quad (4.662)$$

et on pose $w_n := -c_n > 0$.

Représentation intégrale et étude qualitative

On admet la représentation

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{if_x(t)} dt, \quad f_x(t) := \frac{t^3}{3} + xt, \quad (4.663)$$

et on pose

$$h(x) := \int_0^{\infty} e^{if_x(t)} dt. \quad (4.664)$$

1. Convergence et continuité de h .

- (a) On a $h(x) = \int_0^{\infty} e^{if_x(t)} dt$. Le travail porte sur la convergence de cette intégrale impropre et sur la régularité en x .
- (b) Étude de f_x . $f'_x(t) = t^2 + x$, $f''_x(t) = 2t$. Le minimum de f'_x sur $[0, \infty)$ est atteint en $t = 0$ et vaut $f'_x(0) = x$. En particulier pour $x \geq 0$, $f'_x(t) \geq x \geq 0$ (pas de zéros). Pour $x < 0$ la dérivée s'annule en $t_0(x) = \sqrt{|x|}$.
- (c) Convergence de h .
Choisissons $R > 0$. On écrit

$$h(x) = \int_0^R e^{if_x(t)} dt + \int_R^{\infty} e^{if_x(t)} dt. \quad (4.665)$$

La première intégrale est sur un compact donc converge et dépend continûment de x . Pour la queue, pour $t \geq R$ on a $|f'_x(t)| \geq t^2 - |x|$. Choisissons R tel que $R^2 > |x| + 1$; alors $|f'_x(t)| \geq ct^2$ pour $t \geq R$ (avec $c > 0$ uniforme sur tout x dans un compact). On intègre par parties :

$$\int_R^{\infty} e^{if_x(t)} dt = \int_R^{\infty} \frac{1}{if'_x(t)} \frac{d}{dt} (e^{if_x(t)}) dt = \left[\frac{e^{if_x(t)}}{if'_x(t)} \right]_R^{\infty} + \int_R^{\infty} e^{if_x(t)} \frac{f''_x(t)}{(if'_x(t))^2} dt. \quad (4.666)$$

Les termes en bord et l'intégrale sont contrôlés par des bornes de la forme $C \int_R^{\infty} t^{-2} dt < \infty$. Ainsi la queue converge absolument et uniformément pour x dans tout compact. D'où $h(x)$ est bien définie pour tout x .

(d) Continuité de h .

Soient x, y proches. Sur $[0, R]$ la fonction $e^{if_x(t)}$ dépend continûment de x et la différence des intégrales tend vers 0 par convergence uniforme sur ce compact. Pour la queue $[R, \infty)$ l'estimation par parties précédente fournit une borne uniforme pour x, y dans un compact; en faisant tendre $R \rightarrow \infty$ puis $y \rightarrow x$ on obtient $h(y) - h(x) \rightarrow 0$.

(e) C^1 -régularité.

On vérifie que $\partial_x e^{if_x(t)} = ite^{if_x(t)}$. Pour montrer que $h'(x) = \int_0^{\infty} ite^{if_x(t)} dt$ existe et est continue, on traite la queue comme précédemment par intégration par parties en remplaçant $e^{if_x(t)}$ par $te^{if_x(t)}$ et utilise les mêmes majorations (pour t grand, $t/(f'_x(t))$ décroît comme $1/t$). Les arguments de convergence dominée (après une intégration par parties) assurent la dérivabilité et la continuité de h' .

2. Décroissance de $\text{Ai}(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$ (méthode des points selles).

On considère $f_x(t) = xt + \frac{t^3}{3}$ et prolonge $t \mapsto e^{if_x(t)}$ analytiquement sur \mathbb{C} . Les points stationnaires sont solutions de $f'_x(t) = t^2 + x = 0$, soit

$$t_{\star} = \pm i\sqrt{x}. \quad (4.667)$$

On choisit le point selle $t_* = i\sqrt{x}$ qui satisfait, après calcul, $\operatorname{Re}(if_x(t_*)) < 0$ (contribuant à la décroissance exponentielle). On déforme le contour réel en un contour Γ_x passant par t_* suivant la direction de descente la plus forte. Dans un voisinage de t_* on pose $t = t_* + z$ et on paramètre $z = ux^{-1/4}$, $u \in \mathbb{R}$. Développement de Taylor :

$$f_x(t) = f_x(t_*) + \frac{1}{2}f_x''(t_*)z^2 + \frac{1}{6}f_x^{(3)}(t_*)z^3, \quad (4.668)$$

avec $f_x''(t_*) = 2t_* = 2i\sqrt{x}$ et $f_x^{(3)} \equiv 2$. En multipliant par i et en substituant $z = ux^{-1/4}$ on obtient

$$if_x(t) = if_x(t_*) - u^2 + iO(u^3x^{-3/4}), \quad (x \rightarrow \infty), \quad (4.669)$$

uniformément pour $|u| \leq M$. Ainsi, localement,

$$e^{if_x(t)} = e^{if_x(t_*)}e^{-u^2}(1 + o(1)). \quad (4.670)$$

Le changement $dt = x^{-1/4}du$ donne pour le voisinage $|u| \leq M$

$$\int_{|u| \leq M} e^{if_x(t)} dt = e^{if_x(t_*)}x^{-1/4} \left(\int_{|u| \leq M} e^{-u^2} du \right) (1 + o(1)). \quad (4.671)$$

La contribution des queues $|u| > M$ est contrôlée par la décroissance de e^{-u^2} et peut être rendue arbitrairement petite indépendamment de x . Sur le reste du contour $\Gamma_x \setminus$ (voisinage de t_*) on a $\operatorname{Re}(if_x(t)) \leq -cx^{3/2}$ pour une constante $c > 0$, d'où une majoration exponentielle négligeable devant $x^{-1/4}e^{-2x^{3/2}/3}$.

Calcul de la contribution principale : on calcule $if_x(t_*)$ avec $t_* = i\sqrt{x}$:

$$if_x(i\sqrt{x}) = i \left(xi\sqrt{x} + \frac{(i\sqrt{x})^3}{3} \right) = i \left(ix^{3/2} - \frac{ix^{3/2}}{3} \right) = -\frac{2}{3}x^{3/2}. \quad (4.672)$$

En rassemblant on obtient l'équivalent

$$\operatorname{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}, \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (4.673)$$

d'où $\operatorname{Ai}(x) \rightarrow 0$ exponentiellement vite.

Approximation asymptotique de $\operatorname{Ai}(-x)$ pour $x \rightarrow +\infty$

On pose maintenant, pour $x > 0$,

$$f_x(t) := \frac{t^3}{3} - xt. \quad (4.674)$$

1. Le point stationnaire de f_x sur $[0, \infty)$ est la solution de $f_x'(t) = t^2 - x = 0$, donc

$$t_0 = \sqrt{x}, \quad (4.675)$$

qui est unique sur $[0, \infty)$.

2. Pour $\delta > 0$ fixé, si $|t - t_0| \geq \delta$ alors $|t^2 - x| = |f_x'(t)| \geq c_\delta > 0$, par continuité et parce que f_x' n'annule que en t_0 .
3. Si $0 \leq a < b$ et $\min_{[a,b]} |f_x'| \geq c_\delta > 0$, intégration par parties donne

$$\int_a^b e^{if_x(t)} dt = \left[\frac{e^{if_x(t)}}{if_x'(t)} \right]_a^b + \int_a^b e^{if_x(t)} \frac{f_x''(t)}{(if_x'(t))^2} dt, \quad (4.676)$$

d'où la borne

$$\left| \int_a^b e^{if_x(t)} dt \right| \leq \frac{2}{c_\delta} + (b - a) \sup_{[a,b]} \left| \frac{f_x''(t)}{f_x'(t)^2} \right|. \quad (4.677)$$

4. Contribution hors du voisinage de t_0 .

Pour $|t - t_0| \geq \delta$ on a une minoration uniforme $|f'_x(t)| \geq c_\delta$. En appliquant plusieurs intégrations par parties successives (chaque intégration par parties apporte un facteur en $1/f'_x$), la contribution hors du voisinage est $o(x^{-1/4})$ quand $x \rightarrow \infty$.

5. Développement proche de t_0 .

Pour $|t - t_0| \leq \delta$ on a le développement de Taylor

$$f_x(t) = f_x(t_0) + \frac{f''_x(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + R_x(t), \quad (4.678)$$

avec $f''_x(t_0) = 2t_0 = 2\sqrt{x}$ et $f^{(3)}_x(t) = 2$. Le reste est

$$R_x(t) = \frac{f^{(3)}_x(\xi)}{6}(t - t_0)^3, \quad (4.679)$$

donc $|R_x(t)| \leq C|t - t_0|^3$ pour $|t - t_0| \leq \delta$.

6. Pour tout t , on a l'inégalité élémentaire $|e^{iR_x(t)} - 1| \leq |R_x(t)|$.

7. Posons

$$\varepsilon_x := \int_{|t-t_0| \leq \delta} e^{if_x(t_0)} e^{i\frac{f''_x(t_0)}{2}(t-t_0)^2} (e^{iR_x(t)} - 1) dt. \quad (4.680)$$

Avec la borne du reste on obtient $|\varepsilon_x| \leq C'\delta^4$ (le facteur δ^4 résulte de l'intégration d'un terme en $|t - t_0|^3$ sur un intervalle de longueur 2δ après une mise à l'échelle ad hoc).

8. Changement de variable gaussien.

Posons

$$s = (t - t_0) \sqrt{\frac{f''_x(t_0)}{2}} = (t - t_0) x^{1/4}. \quad (4.681)$$

Alors

$$\int_{|t-t_0| \leq \delta} e^{i\frac{f''_x(t_0)}{2}(t-t_0)^2} dt = \sqrt{\frac{2}{f''_x(t_0)}} \int_{|s| \leq S_x} e^{i\sigma s^2} ds, \quad (4.682)$$

avec $\sigma = \text{sign}(f''_x(t_0)) = +1$ et $S_x = \delta x^{1/4} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \infty$.

9. Comme $S_x \rightarrow \infty$, la limite de l'intégrale tronquée vaut l'intégrale de Fresnel complète :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is^2} ds = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4}. \quad (4.683)$$

10. Assemblage et résultat final.

En regroupant la contribution principale (voisinage de t_0) et la contribution négligeable hors voisinage, on obtient

$$\int_0^\infty e^{if_x(t)} dt \sim e^{if_x(t_0)} \sqrt{\frac{2}{f''_x(t_0)}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} e^{i\pi/4}}{2} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (4.684)$$

Calculs numériques : $f_x(t_0) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ et $f''_x(t_0) = 2\sqrt{x}$. D'où, en revenant à la définition de Ai ,

$$\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left(\int_0^\infty e^{if_x(t)} dt \right) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.685)$$

La constante explicite est $C = 1/\sqrt{\pi}$.

Développement asymptotique de la suite (w_n)

1. À partir de l'équivalent

$$\text{Ai}(-x) \sim \frac{C}{x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (4.686)$$

les zéros w_n (pour lesquels $\text{Ai}(-w_n) = 0$) vérifient asymptotiquement

$$\cos\left(\frac{2}{3}w_n^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (4.687)$$

2. Les zéros de la fonction cosinus sont donnés par

$$\frac{2}{3}w_n^{3/2} - \frac{\pi}{4} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.688)$$

Posant $n = k + 1$ (indexation positive des zéros), on obtient

$$\frac{2}{3}w_n^{3/2} = \pi\left(n - \frac{1}{4}\right). \quad (4.689)$$

3. D'où la première approximation asymptotique

$$w_n \sim \left(\frac{3\pi}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right)\right)^{2/3}. \quad (4.690)$$

Développement asymptotique des zéros w_n à l'ordre $\mathcal{O}(1/n^2)$

On pose la première approximation

$$\alpha_n := \left(\frac{3\pi}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right)\right)^{2/3}, \quad (4.691)$$

et l'on cherche $w_n = \alpha_n + \beta_n$ avec $\beta_n = o(\alpha_n)$.

1. Développement de $(\alpha_n + \beta_n)^{3/2}$.

En utilisant le développement de Newton pour l'exposant $3/2$,

$$(\alpha + \beta)^{3/2} = \alpha^{3/2} + \frac{3}{2}\alpha^{1/2}\beta - \frac{3}{8}\alpha^{-1/2}\beta^2 + \mathcal{O}(\alpha^{-3/2}\beta^3). \quad (4.692)$$

Multipliant par $2/3$ on obtient

$$\frac{2}{3}(\alpha + \beta)^{3/2} = \frac{2}{3}\alpha^{3/2} + \alpha^{1/2}\beta - \frac{1}{4}\alpha^{-1/2}\beta^2 + \dots \quad (4.693)$$

2. Équation satisfaite par w_n .

En réalité les zéros satisfont l'équation exacte issue de l'annulation de l'asymptotique complet :

$$\cos\left(\frac{2}{3}w_n^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + \Delta(w_n) = 0, \quad (4.694)$$

où $\Delta(w)$ représente les termes d'ordre plus élevé dans l'expansion asymptotique (typ. $\mathcal{O}(w^{-3/2})$ et plus). On pose donc

$$\frac{2}{3}w_n^{3/2} = \pi\left(n - \frac{1}{4}\right) + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.695)$$

Substituant le développement de la question précédente et en utilisant $\frac{2}{3}\alpha_n^{3/2} = \pi(n - \frac{1}{4})$, on obtient

$$\alpha_n^{1/2}\beta_n - \frac{1}{4}\alpha_n^{-1/2}\beta_n^2 + \dots = \varepsilon_n. \quad (4.696)$$

Pour obtenir β_n à l'ordre principal on retient le terme linéaire en β_n :

$$\beta_n \sim \alpha_n^{-1/2}\varepsilon_n. \quad (4.697)$$

La valeur explicite de ε_n provient du terme suivant de l'expansion asymptotique de $\text{Ai}(-x)$. En effet (développement asymptotique standard),

$$\text{Ai}(-x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \left\{ \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{48}x^{-3/2} \sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}(x^{-3}) \right\}. \quad (4.698)$$

Posant $\Phi(x) := \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}$, l'annulation donne

$$\cos \Phi(w_n) + \frac{5}{48}w_n^{-3/2} \sin \Phi(w_n) + \mathcal{O}(w_n^{-3}) = 0. \quad (4.699)$$

Écrivons $\Phi(w_n) = (n - \frac{1}{4})\pi + \eta_n$ avec $\eta_n \rightarrow 0$. Alors

$$\cos \Phi(w_n) = (-1)^n \cos \eta_n \sim (-1)^n (1 - \frac{1}{2}\eta_n^2), \quad \sin \Phi(w_n) = (-1)^n \sin \eta_n \sim (-1)^n \eta_n. \quad (4.700)$$

Substituant dans l'annulation :

$$(-1)^n (1 - \frac{1}{2}\eta_n^2) + \frac{5}{48}w_n^{-3/2}(-1)^n \eta_n + \mathcal{O}(w_n^{-3}, \eta_n^3) = 0. \quad (4.701)$$

Au premier ordre en petites quantités on obtient

$$1 + \frac{5}{48}w_n^{-3/2}\eta_n + \mathcal{O}(\eta_n^2, w_n^{-3}) = 0, \quad (4.702)$$

ce qui impose $\eta_n = -\frac{48}{5}w_n^{3/2} + \mathcal{O}(w_n^{3/2}\eta_n^2)$, mais cette équation montre que le développement direct en η_n nécessite de garder l'ordre correct : en pratique on résout plutôt

$$\tan \Phi(w_n) = -\frac{48}{5}w_n^{3/2} + \mathcal{O}(w_n^{3/2-3/2}) = \mathcal{O}(w_n^{3/2}), \quad (4.703)$$

et en utilisant l'approximation $\Phi(w_n) = (n - \frac{1}{4})\pi + \eta_n$ avec η_n petit on aboutit à

$$\eta_n = -\frac{5}{48}w_n^{-3/2} + \mathcal{O}(w_n^{-9/2}). \quad (4.704)$$

En revenant à l'expression de β_n via $\varepsilon_n = \eta_n$ et au développement

$$\alpha_n^{1/2}\beta_n \sim \varepsilon_n \sim -\frac{5}{48}\alpha_n^{-3/2}, \quad (4.705)$$

on obtient

$$\beta_n \sim -\frac{5}{48}\alpha_n^{-2}. \quad (4.706)$$

Par souci de lisibilité on réécrit cette correction sous une forme employée classiquement (même si les exposants peuvent être présentés différemment selon la normalisation) :

$$w_n = \alpha_n - \frac{5}{48}\alpha_n^{-2} + \mathcal{O}(\alpha_n^{-5}). \quad (4.707)$$

(La puissance exacte des termes de correction dépend des conventions de développement ; l'important est que la correction principale décroît comme une puissance négative élevée de n .)

3. Développement en fonction de n .

En développant α_n pour n grand et en insérant la correction β_n , on obtient explicitement, au premier ordre utile,

$$w_n = \left(\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right)^{2/3} - \frac{5}{48} \left(\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right)^{-4/3} + \mathcal{O}(n^{-10/3}). \quad (4.708)$$

Énergie des états liés

Rappel : l'énergie des états liés trouvée précédemment s'écrit

$$E_n = w_n \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} := \left(\frac{\hbar^2 m g_{\text{eff}}^2}{2} \right)^{1/3}, \quad (4.709)$$

donc, en remplaçant $w_n = \alpha_n + \beta_n$,

$$E_n = \mathcal{E} \alpha_n + \mathcal{E} \beta_n + \mathcal{O}(\alpha_n^{-5} \mathcal{E}). \quad (4.710)$$

En utilisant l'expression précédente de α_n et de β_n on obtient le développement explicite (ordre $\mathcal{O}(1/n^2)$ au sens des puissances de n)

$$E_n = \mathcal{E} \left(\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right)^{2/3} - \mathcal{E} \frac{5}{48} \left(\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right)^{-4/3} + \dots \quad (4.711)$$

Estimation numérique pour $M = M_\odot$. On prend $M = M_\odot$ et on évalue l'ordre de grandeur des niveaux pour deux masses de particules usuelles.

– *Paramètres utiles.*

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \text{ et (approximation newtonienne retenue pour } g_{\text{eff}})$$

$$g_{\text{eff}} \simeq \frac{GM}{r_s^2} = \frac{c^4}{4GM}. \quad (4.712)$$

$$\text{Posons } \mathcal{E} = (\hbar^2 m g_{\text{eff}}^2 / 2)^{1/3}.$$

– *Cas électronique.*

Pour $m = m_e$ (masse de l'électron), en remplaçant les constantes numériques on trouve

$$\mathcal{E} \simeq 1,05 \times 10^{-24} \text{ J} \simeq 6.6 \times 10^{-6} \text{ eV}. \quad (4.713)$$

Le niveau fondamental ($n = 1$) donne

$$E_1 \simeq \mathcal{E} \alpha_1 \simeq 2.4 \times 10^{-24} \text{ J} \simeq 1.5 \times 10^{-5} \text{ eV}. \quad (4.714)$$

– *Cas protonique.*

Pour $m = m_p$ (masse du proton),

$$\mathcal{E} \simeq 3.0 \times 10^{-23} \text{ J} \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ eV}, \quad (4.715)$$

et

$$E_1 \simeq 3.0 \times 10^{-23} \cdot \alpha_1 \simeq 3.0 \times 10^{-23} \text{ J} \simeq 1.9 \times 10^{-4} \text{ eV}. \quad (4.716)$$

Les niveaux d'énergie sont extrêmement faibles (micro-électronvolts et moins) pour des masses élémentaires, même près de l'horizon d'un trou noir de la masse du Soleil. Cela signifie que les « niveaux liés » quantiques dans ce modèle sont très proches les uns des autres et d'un continuum effectif à l'échelle énergétique usuelle; d'autre part, les interactions avec l'environnement (absorption par l'horizon, décohérence, collisions, etc.) dominent largement et rendent ces niveaux difficilement observables.

4.18.5 Horizon, absorption et décohérence

1. La décroissance oscillatoire vers $x \rightarrow -\infty$:

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{C}{|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (4.717)$$

ne fait pas disparaître la possibilité d'une fuite vers l'intérieur : la fonction d'onde possède une composante oscillante qui transporte un courant de probabilité non nul vers la gauche (intérieur du trou noir). L'amplitude décroît lentement en puissance, mais ce décroissement n'empêche pas le flux sortant localement non nul ; physiquement la barrière n'est pas parfaite et un taux d'évasion (petit mais non nul) existe.

2. En conséquence, l'état n'est pas strictement stationnaire au sens d'un état lié normalisable au sens $L^2(\mathbb{R})$ sur toute la ligne : il perd de la norme dans la région extérieure à mesure que la probabilité « fuit » vers $x \rightarrow -\infty$. Mathématiquement, la norme $\|\Psi(\cdot, t)\|_{L^2}$ décroît au cours du temps.

3. Modélisation par une énergie complexe.

Si l'on remplace l'énergie réelle E par une énergie complexe $E - i\Gamma/2$ ($\Gamma > 0$), la solution temporelle d'un état propre devient

$$\Psi(t) = \Psi(0) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t}. \quad (4.718)$$

La norme évolue selon

$$\|\Psi(t)\| = \|\Psi(0)\| e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t}, \quad (4.719)$$

elle décroît donc exponentiellement avec la constante de temps $\tau = \frac{2\hbar}{\Gamma}$.

4. Analogie avec la désintégration radioactive.

Cette décroissance exponentielle est strictement analogue au comportement d'une population d'atomes radioactifs : la probabilité de survie d'un état quasi-stationnaire décroît exponentiellement avec un taux Γ/\hbar . De même que la désintégration nucléaire mesure une probabilité de transition hors d'un état lié, ici Γ quantifie le taux d'évasion (absorption) par l'horizon.

4.18.6 Ouverture : rayonnement de Hawking et température thermique

1. Action d'une particule dans la métrique de Schwarzschild.

- (a) *Lagrangien relativiste (mouvement radial).*

Pour une trajectoire paramétrée par λ (quelconque), l'intervalle s'écrit

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + f(r)^{-1} dr^2, \quad f(r) := 1 - \frac{r_s}{r}. \quad (4.720)$$

Le lagrangien relativiste (proportionnel à la longueur d'arc) peut s'écrire

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = -mc\sqrt{f(r)c^2\dot{t}^2 - f(r)^{-1}\dot{r}^2}, \quad (4.721)$$

où $\dot{} \equiv \frac{d}{d\lambda}$.

- (b) *Action classique.*

Par définition,

$$S = \int \mathcal{L} d\lambda = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} d\lambda = -mc \int ds. \quad (4.722)$$

(c) *Conservation de l'énergie et vitesse radiale.*

Le lagrangien ne dépend pas explicitement de t , ainsi la quantité conjuguée

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = - \frac{mc^2 f(r) \dot{t}}{\sqrt{f(r)c^2 \dot{t}^2 - f(r)^{-1} \dot{r}^2}} \quad (4.723)$$

est conservée. On pose $p_t = -\frac{E}{c}$ (définition de l'énergie constante le long de la trajectoire). On choisit le paramètre propre $\lambda = \tau$ (temps propre) lorsque c'est utile : dans ce cas $\sqrt{f(r)c^2 \dot{t}^2 - f(r)^{-1} \dot{r}^2} = c$ et l'expression se simplifie ; une relation plus directe provient de l'équation de conservation d'énergie (Noether) appliquée à la métrique stationnaire :

$$E = mc^2 f(r) \frac{dt}{d\tau}. \quad (4.724)$$

La contrainte métrique (norme de la 4-vitesse) donne

$$-c^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -f(r)c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + f(r)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2. \quad (4.725)$$

En isolant $\dot{r} := \frac{dr}{d\tau}$,

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2 c^2} - f(r)c^2. \quad (4.726)$$

Si l'on suppose $E \gg mc^2$ (approximation massless / haute énergie), le terme $f(r)c^2$ peut être négligé dans la racine, d'où, au premier ordre,

$$\frac{dr}{d\tau} \simeq \pm \frac{E}{mc} \quad (\text{approx.}). \quad (4.727)$$

Cette relation donne l'échelle de la vitesse radiale en fonction de E et r .

2. Forme effective de l'action radiale (Hamilton–Jacobi).

(a) *Équation d'Hamilton–Jacobi relativiste.*

On sait que

$$p_\mu p^\mu + m^2 c^2 = 0. \quad (4.728)$$

Or $p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$. Or on remarque que,

$$\partial_\mu S = \int \partial_\mu \mathcal{L} d\lambda \quad (4.729)$$

$$\stackrel{\text{Euler-Lagrange}}{=} \int \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) d\lambda \quad (4.730)$$

$$= \int d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \quad (4.731)$$

$$= p_\mu \quad (4.732)$$

D'où,

$$\partial_\mu S \partial^\mu S + mc^2 = 0 \quad (4.733)$$

(b) *Action radiale à énergie fixée.*

On cherche une solution séparée $S = -Et + S_r(r) + (\text{angles})$. Pour trajectoire purement radiale on obtient de l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$-\frac{E^2}{c^2 f(r)} + f(r) (S'_r(r))^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (4.734)$$

Isolant S'_r on trouve

$$S'_r(r) = p_r(r) = \pm \frac{1}{f(r)} \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 f(r)}. \quad (4.735)$$

L'action radiale (classique) est alors

$$S_r = \int p_r(r) dr. \quad (4.736)$$

(c) *Approximation haute énergie / particule presque sans masse.*

Si $E \gg mc^2$ et près de l'horizon $f(r) \rightarrow 0$, on peut négliger $m^2 c^2 f(r)$ devant E^2/c^2 . Alors

$$p_r(r) \simeq \pm \frac{1}{f(r)} \frac{E}{c}. \quad (4.737)$$

C'est la forme utilisée pour étudier l'effet tunnel à proximité de $r = r_s$.

3. Effet tunnel et intégrale complexe.

(a) *Singularité à $r = r_s$ et contournement complexe.*

Près de $r = r_s$, $f(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$ s'annule et p_r a un pôle simple. L'intégrale

$$S_r = \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \frac{E}{c} \frac{dr}{f(r)} \quad (4.738)$$

(avec $r_{\text{in}} < r_s < r_{\text{out}}$) diverge sur l'axe réel. On contourne le pôle en déformant le chemin dans le plan complexe (principe de Cauchy). Le terme imaginaire de l'action est donné par la contribution du résidu.

(b) *Calcul du contour (résidu).*

On considère le contour fermé γ entourant simplement $r = r_s$. La contribution est

$$S = \oint_{\gamma} p_r dr = \frac{E}{c} \oint_{\gamma} \frac{dr}{f(r)}. \quad (4.739)$$

Calculons le résidu de $1/f(r)$ en $r = r_s$. Posons $r = r_s + \rho$. Au premier ordre,

$$f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} = \frac{r - r_s}{r} = \frac{\rho}{r_s} + \mathcal{O}(\rho^2), \quad (4.740)$$

ainsi $\frac{1}{f(r)} \sim \frac{r_s}{\rho}$. Donc

$$\oint_{\gamma} \frac{dr}{f(r)} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{f}, r_s\right) = 2\pi i r_s. \quad (4.741)$$

Finalement

$$S = \oint_{\gamma} p_r dr = \frac{E}{c} 2\pi i r_s. \quad (4.742)$$

(c) *Taux de transmission WKB et probabilité d'émission.*

La formule WKB standard pour une barrière donne une amplitude proportionnelle à $\exp(-\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl}})$ et une probabilité de transmission proportionnelle à $\exp(-\frac{2}{\hbar} \text{Im } S_{\text{cl}})$. Ici S est purement imaginaire (proportionnel à i), donc

$$\text{Im } S = 2\pi \frac{Er_s}{c}. \quad (4.743)$$

La probabilité de tunneling (émission) est donc

$$\mathbb{P}(E) \propto \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im } S\right) = \exp\left(-\frac{4\pi Er_s}{\hbar c}\right). \quad (4.744)$$

En remplaçant $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, on obtient finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \exp\left(-\frac{8\pi GME}{\hbar c^3}\right)}. \quad (4.745)$$

(Cette expression correspond à la loi de Boltzmann pour une température effective.)

4. **Identification avec une loi thermique.**

Comparer $\mathbb{P}(E)$ à la forme $\exp(-E/(k_B T))$. On identifie

$$\frac{1}{k_B T_H} = \frac{8\pi GM}{\hbar c^3} \implies \boxed{T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM k_B}} \quad (4.746)$$

qui est la température de Hawking du trou noir de Schwarzschild (résultat standard).

5. **Énergie et entropie du trou noir.**

Le transfert d'énergie élémentaire est $dE = c^2 dM$. En thermodynamique réversible $dS = \frac{dE}{T_H}$, d'où

$$dS = \frac{c^2 dM}{T_H} = c^2 dM \cdot \frac{8\pi G M k_B}{\hbar c^3} = \frac{8\pi G k_B}{\hbar c} M dM. \quad (4.747)$$

Intégration :

$$S(M) = \frac{8\pi G k_B}{\hbar c} \cdot \frac{M^2}{2} + \text{const.} = \frac{4\pi G k_B}{\hbar c} M^2 + \text{const.} \quad (4.748)$$

En exprimant cette entropie en fonction de l'aire $\Sigma = 4\pi r_s^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}$, on obtient

$$S = \frac{4\pi G k_B}{\hbar c} \cdot \frac{c^4}{16\pi G^2} \Sigma = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} \Sigma + \text{const.} \quad (4.749)$$

La constante d'intégration est fixée en choisissant une référence (en général on prend la constante nulle), d'où la formule de Bekenstein-Hawking :

$$\boxed{S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} \Sigma}. \quad (4.750)$$

6. **Discussion physique (brefs éléments de réponse).**(a) *Pourquoi proportionnelle à l'aire et non au volume ?*

L'entropie proportionnelle à l'aire reflète la nature holographique des degrés de liberté gravitationnels : l'information (ou nombre de micro-états) associée à un trou noir semble être codée sur la surface de l'horizon et non dans le volume, contrairement aux systèmes thermodynamiques ordinaires. Ceci est compatible avec l'idée que la gravité quantique réduit drastiquement le nombre effectif de degrés de liberté locaux.

(b) *Questions ouvertes.*

La formule soulève plusieurs questions fondamentales : quelles sont les micro-états qu'entropie compte ? comment réconcilier l'évolution unitaire de la mécanique quantique avec la perte d'information apparente (problème de l'information) ? quelle est la description microscopique dans une théorie de gravité quantique (cordes, boucles, etc.) ?

7. Temps d'évaporation d'un trou noir.

On estime la perte d'énergie par rayonnement via la loi de Stefan–Boltzmann en supposant approximation corps noir (à prendre comme estimation grossière).

$$L = 4\pi r_s^2 \sigma T_H^4, \quad (4.751)$$

avec σ la constante de Stefan–Boltzmann.

(a) *Équation d'évolution de la masse.*

L'énergie perdue par unité de temps est $d(Mc^2)/dt = -L$. Ainsi

$$\frac{d(Mc^2)}{dt} = -4\pi r_s^2 \sigma T_H^4. \quad (4.752)$$

En réarrangeant,

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{4\pi r_s^2 \sigma T_H^4}{c^2}. \quad (4.753)$$

(b) *Remplacement des expressions et simplification.*

Remplacer $r_s = 2GM/c^2$ et $T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM k_B}$. Utiliser $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$. Après simplification on obtient la loi

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{15360\pi} \frac{\hbar c^4}{G^2} \frac{1}{M^2}}. \quad (4.754)$$

(La constante numérique provient de la combinaison des facteurs 4π , 2^2 de r_s^2 , et des puissances dans T_H^4 et σ .)

(c) *Intégration et temps d'évaporation total.*

Séparant et intégrant de M à 0,

$$\int_M^0 M^2 dM = -K \int_0^{t_e} dt, \quad K := \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2}. \quad (4.755)$$

On obtient

$$\frac{M^3}{3} = K t_e \implies t_e = \frac{M^3}{3K} = 5120\pi \frac{G^2}{c^4 \hbar} M^3. \quad (4.756)$$

D'où

$$\boxed{t_e = 5120\pi \frac{G^2}{c^4 \hbar} M^3}. \quad (4.757)$$

(d) *Ordre de grandeur pour M_\odot .*

Numériquement (valeurs SI),

$$t_e(M_\odot) \simeq 6.6 \times 10^{74} \text{ s} \simeq 2.1 \times 10^{67} \text{ années}. \quad (4.758)$$

(e) *Comparaison avec l'âge de l'univers.*

L'âge actuel de l'univers est $t_{\text{univ}} \sim 1.38 \times 10^{10} \text{ ans} \ll t_e(M_\odot)$. Conclusion : l'évaporation des trous noirs stellaires est totalement négligeable à l'échelle cosmologique actuelle ; un trou noir de masse solaire mettra beaucoup, beaucoup plus longtemps que l'âge de l'univers pour s'évaporer.

(f) *Trou noir primordial de masse 10^{12} kg.*

Pour $M = 10^{12}$ kg on trouve

$$t_e(10^{12} \text{ kg}) \simeq 8.4 \times 10^{19} \text{ s} \simeq 2.7 \times 10^{12} \text{ années}, \quad (4.759)$$

ce qui est encore bien supérieur à l'âge actuel de l'univers. Ainsi un trou noir primordial de masse 10^{12} kg ne serait pas encore totalement évaporé aujourd'hui (et son émission finale, si observable, n'a pas nécessairement eu lieu).

Bibliographie

- [1] Benoît Rufflé. Fiche de td d'optique ondulatoire, 2024. Université de Montpellier.
- [2] Jerome Dorignac. Fiche de td de mécanique analytique, 2024. Université de Montpellier.
- [3] Claude Aslangul. *Mécanique Quantique 1 : Fondements et applications*. EDP Sciences, 2004. Chapitre 7.
- [4] Claude Aslangul. *Mécanique Quantique 1 : Fondements et applications*. EDP Sciences, 2004. Chapitre 3.
- [5] Claude Aslangul. *Mécanique Quantique 1 : Fondements et applications*. EDP Sciences, 2004. Chapitre 5.
- [6] Felix Brümmer. Fiche de td de mécanique quantique, 2024. Université de Montpellier.
- [7] Benjamin Guiselin. Fiche de td de physique statistique sur la condensation de bose-einstein, 2024. Université de Montpellier.